

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Лукьяненко Дмитрий Витальевич

**Математическое моделирование, численные методы и
комплекс программ для решения трёхмерных
обратных задач магнитометрии**

Специальность 1.2.2 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2024

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный консультант: д. ф.-м. н, профессор
Ягола Анатолий Григорьевич

Официальные оппоненты: **Васин Владимир Васильевич**,
д. ф.-м. н, профессор, член-корр. РАН,
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского УрО РАН, главный
научный сотрудник Отдела некорректных
задач анализа и приложений;

Кабанихин Сергей Игоревич,
д. ф.-м. н, профессор, член-корр. РАН,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО
РАН, директор Международного математиче-
ского центра;

Якововский Михаил Владимирович,
д. ф.-м. н, профессор, член-корр. РАН,
Институт прикладной математики им. М. В.
Келдыша РАН, заместитель директора.

Защита состоится 26 июня 2024 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.012.1 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, строение 52, факультет ВМК, аудитория 685.

E-mail: ilgova@cs.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/2955>.

Автореферат разослан «___» _____ 2024 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.012.1,
д. ф.-м. н, член-корр. РАН

А. В. Ильин

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Решение прикладных трёхмерных обратных задач магнитометрии зачастую требует столь больших объёмов вычислений, что эти вычисления невыполнимы на персональных компьютерах за разумное время. Чаще всего эту проблему решают с помощью упрощения базовой математической модели, которая основана на решении трёхмерного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. В частности, используется подход, основанный на понижении физической размерности задачи, — рассматривается двумерная модель исходной задачи, естественной постановкой которой является постановка именно в трёхмерном пространстве. Но упрощения такого типа обычно приводят к значительному ухудшению детализации восстанавливаемого решения по сравнению с истинным. Как вариант, задача решается в полной трёхмерной постановке, но для сокращения времени вычислений для нахождения численного решения используются грубые сетки, что опять же приводит к потере детализации в восстанавливаемом приближённом решении.

С развитием возможностей вычислительной техники появился другой способ решения упомянутой проблемы — стало широко распространено использование параллельных вычислений и технологий параллельного программирования, которые позволяют решать задачу в полной постановке без использования различных упрощений и допущений. Проблема длительного счёта решается распараллеливанием вычислений между различными вычислительными узлами сложной вычислительной системы (суперкомпьютера).

При использовании такого подхода исследователи руководствуются следующей логикой: чем более мощная вычислительная система доступна для расчётов, тем больше вычислений можно совершить; а чем больше вычислений можно совершить, тем более точное и детализированное решение будет получено в результате использования более густых сеток. Но при увеличении объёма вычислений может возникнуть проблема, которая связана с накапливающимися в процессе счёта ошибками машинного округления: чем больше вычислений выполняется, тем более значительная ошибка машинного округления может накопиться; а чем большая ошибка машинного округления накопилась, тем менее достоверное решение будет получено. Такая проблема особенно актуальна для решения трёхмерных обратных задач магнитометрии, так как их решение сводится к решению больших переопределённых систем линейных алгебраических уравнений с плотно заполненной матрицей, что приводит к необходимости выполнения большого объёма вычислений.

В результате возникает вопрос о возможности аккуратного учёта накапливающихся ошибок машинного округления при вычислениях. Ответу

на этот вопрос посвящено достаточно много работ, в которых рассматриваются различные алгоритмы учёта ошибок машинного округления при решении систем алгебраических уравнений. Но ни одна из существующих на данный момент работ не учитывала следующую практическую проблему, возникающую при расчётах «больших» прикладных обратных задач (требующих нахождения сотен тысяч или миллионов неизвестных при решении систем алгебраических уравнений с плотно заполненной матрицей). Эта проблема связана с вопросом о возможности эффективной программной реализации предлагаемых вычислительных алгоритмов с использованием больших суперкомпьютерных систем со множеством вычислительных узлов. Этот вопрос является чрезвычайно важным по следующей причине. Для решения прикладных задач чаще всего применяются суперкомпьютерные (кластерные) системы, которые в нулевом приближении представляют из себя многопроцессорные системы с распределённой памятью. Наиболее распространённой технологией организации взаимодействия между различными вычислительными узлами в этом случае является технология передачи сообщений MPI (Message Passing Interface). При этом на эффективность параллельной программной реализации вычислительного алгоритма влияют накладные расходы по взаимодействию вычислительных узлов посредством использования коммуникационной сети и передачи через неё сообщений, содержащих данные промежуточных расчётов. Любой алгоритм, учитывающий ошибки машинного округления, предполагает выполнение дополнительных вычислительных операций, которые могут быть достаточно небольшими по сравнению с основными вычислениями, но выполнение которых на множестве вычислительных узлов может порождать существенное увеличение накладных расходов по взаимодействию этих вычислительных узлов между собой. То есть возможно возникновение достаточно распространённой при решении прикладных задач проблемы: предлагаемый алгоритм математически обоснован и выглядит «хорошим», однако его применение для решения прикладных задач является неэффективным.

Поэтому важным является вопрос о возможности разработки не только современных методов математического моделирования решений обратных задач магнитометрии, но и численных методов решения, которые допускают достаточно эффективную параллельную программную реализацию с использованием как технологии параллельного программирования MPI (в том числе последнего стандарта MPI-4), так и с использованием гибридных технологий параллельного программирования MPI+OpenMP+CUDA в том случае когда каждый вычислительный узел содержит многоядерный процессор и/или графический ускоритель, т.е. таким образом являясь вычислительной подсистемой с общей памятью.

При этом необходимо отметить, что одновременно с развитием возможностей вычислительной техники и программных решений по её

использованию не стояло на месте и развитие технических средств проведения экспериментальных измерений. Классические постановки обратных задач магнитометрии предполагают использование в качестве входной информации только данных экспериментальных измерений компонент вектора индукции магнитного поля, индуцированного исследуемым объектом. За последние десять лет получили активное развитие технические решения, которые позволяют с достаточно высокой точностью выполнять измерения градиентов компонент магнитной индукции. Математические модели, основанные на использовании экспериментальной информации такого типа, обладают существенными преимуществами перед классическими, но до сих пор широко не применялись для математического моделирования решений обратных задач магнитометрии.

Таким образом, комбинация современных методов математического моделирования с разработкой комплекса программ, основанного на специализированных численных методах и использующего современные программные решения, должна существенным образом повысить эффективность решения трёхмерных обратных задач магнитометрии.

Целью данной работы являлась разработка методов математического моделирования, численных методов и комплекса программ для эффективного решения трёхмерных обратных задач магнитометрии.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать методы математического моделирования решений обратных задач магнитометрии, основанные на математических моделях, которые связывают параметры намагниченности исследуемого объекта с параметрами индуцированного им магнитного поля.
2. Разработать численные методы решения больших переопределённых систем линейных алгебраических уравнений с плотно заполненной матрицей с учётом ошибок машинного округления.
3. Разработать комплекс программ для решения трёхмерных обратных задач магнитометрии при наличии входной информации об измеренных в эксперименте значениях компонент индукции и/или компонент тензора градиентов компонент индукции магнитного поля.
4. Разработать комплекс программ для решения больших переопределённых систем линейных алгебраических уравнений с плотно заполненной матрицей с учётом ошибок машинного округления для вычислений на гетерогенных вычислительных системах, узлы которых содержат как многоядерные процессоры, так и графические ускорители.

Научная новизна:

1. Впервые предложен конструктивный способ учёта ошибок машинного округления при решении переопределённых систем линейных алгебраических уравнений с плотно заполненной матрицей, учитывающий возможности суперкомпьютерных вычислительных систем с распределённой памятью при его программной реализации.
2. Впервые реализованы параллельные итерационные алгоритмы решения больших переопределённых систем линейных алгебраических уравнений с плотно заполненной матрицей с использованием современного стандарта MPI-4 технологии параллельного программирования MPI.
3. Проведено оригинальное исследование параметров намагничённости коры планет Солнечной системы, как обладающих только остаточной намагничённостью, так и магнито-гидродинамическим динамо.

Практическая значимость заключается в том, что предложенные методы могут быть использованы для решения практически любых обратных задач магнитометрии — начиная от задач по определению параметров намагничённости небольших локализованных объектов и заканчивая задачами космического масштаба по определению параметров намагничённости коры планет и других тел Солнечной системы. В случае исследования небольших объектов предложенные методы позволяют локализовывать их месторасположение в пространстве (если в них есть некоторая доля магнитных масс), что, фактически, является задачей магнитной локации. Знание параметров намагничённости в случае решения задач магниторазведки позволяет, при определённых условиях, получать информацию о типах залегающих в недрах планет пород, в том числе полезных ископаемых. Разработанные для решения такого типа задач численные методы и их программные реализации могут быть применены также и при решении задач из совершенно других областей науки и техники, если решение соответствующих задач сводится к решению больших переопределённых систем линейных алгебраических уравнений с плотно заполненной матрицей.

Методология и методы исследования. В работе использованы следующие теоретические методы исследования: методы математической физики, функционального анализа, вычислительной математики, линейной алгебры, теории решения обратных и некорректно поставленных задач. Прикладные методы исследования включали в себя использование технологий параллельного программирования MPI (в том числе самый последний стандарт MPI-4), OpenMP, CUDA, с программной реализацией на языках программирования Python и Fortran (в том случае если необходимы вычисления с повышенной — «четверной» — точностью).

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Использование экспериментальных данных о компонентах тензора градиентов компонент вектора магнитной индукции позволяет восстанавливать более детализированные магнитные изображения исследуемого объекта по сравнению с использованием только экспериментальных данных о компонентах вектора магнитной индукции. При этом восстановление детализированного распределения магнитной восприимчивости в исследуемом объекте возможно только при наличии достаточно точной информации о нормальном (регулярном геомагнитном) поле в области расположения исследуемого объекта.
2. Отсутствие у планеты магнитного динамо позволяет восстановить распределение намагниченности в коре планеты по данным спутниковых измерений компонент индукции магнитного поля только исходя из допущения, что все магнитные массы были «выметены» в область коры за счёт протекавших ранее геологических процессов. Наличие у планеты магнитного динамо позволяет восстановить распределение намагниченности в коре только исходя из допущения, что модель нормального (регулярного геомагнитного) поля является достаточно точной.
3. Математическое моделирование решений трёхмерных обратных задач магнитометрии допускает разработку численных методов решения, эффективно реализуемых на современных гетерогенных суперкомпьютерных системах, состоящих из многоядерных процессоров и графических ускорителей за счёт использования современных технологий параллельного программирования MPI (включая последний стандарт MPI-4), OpenMP и CUDA.
4. Учёт ошибок машинного округления в критерии прекращения итерационного процесса в методе сопряжённых градиентов для решения систем линейных алгебраических уравнений с плотно заполненной матрицей может существенно экономить вычислительные ресурсы. Для решения достаточно больших задач параллельная программная реализация этого метода с использованием технологии параллельного программирования MPI-4 не требует дополнительных временязатрат на реализацию дополнительных вычислений по реализации усовершенствованного критерия прекращения итерационного процесса и обладает хорошими свойствами сильной масштабируемости.

Выносимые на защиту положения соответствуют следующим пунктам паспорта специальности 1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»:

1. Положение **1** соответствует пункту 1 паспорта специальности («Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений»).
2. Положение **2** соответствует пункту 4 паспорта специальности («Разработка новых математических методов и алгоритмов интерпретации натурального эксперимента на основе его математической модели»).
3. Положение **3** соответствует пункту 3 паспорта специальности («Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента») и пункту 8 («Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента»).
4. Положение **4** соответствует пункту 2 паспорта специальности («Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий»).

Достоверность полученных результатов обеспечивается математическими методами обоснования разработанных алгоритмов, проведёнными численными экспериментами, открытым кодом комплекса программ, реализующих разработанные численные алгоритмы, публикациями в рецензируемых журналах и апробацией на российских и международных конференциях. Результаты численных расчётов находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих международных и всероссийских конференциях: международная конференция «Алгоритмический анализ неустойчивых задач», посвященная памяти В. К. Иванова, г. Екатеринбург, Россия, 2011 г.; международный конгресс «8th international ISAAC congress», г. Москва, Россия, 2011 г.; международная конференция «The 3th international workshop on computational inverse problems and applications», г. Нанчанг, Китай, 2013 г.; международная конференция «Inverse problems, design and optimization», г. Альби, Франция, 2013 г.; международная конференция «Inverse problems: modeling and simulation», г. Фетхие, Турция, 2014 г.; международный конгресс «8th international congress on industrial and applied mathematics», г. Пекин, Китай, 2015 г.; международная конференция «International workshop on inverse and ill-posed problems», г. Москва, Россия, 2015 г.; международная конференция «The 4th international workshop on computational inverse problems and applications», г. Цибо, Китай, 2016 г.; международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», посвящённая 85-летию со дня рождения академика М. М. Лаврентьева, г. Новосибирск,

Россия, 2017 г.; международная конференция «Марчуковские научные чтения – 2017», г. Новосибирск, Россия, 2017 г.; международная конференция «Quasilinear equations, inverse problems and their applications», г. Москва, Россия, 2017 г.; международная конференция «Марчуковские научные чтения – 2018», г. Новосибирск, Россия, 2018 г.; международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования», г. Москва, Россия, 2019 г.; международная конференция «Квазилинейные уравнения, обратные задачи и их приложения», г. Долгопрудный, Россия, 2019 г.; международная конференция «The 5th international workshop on computational inverse problems and applications», г. Лунъянь, Китай, 2019 г.; всероссийская научно-практическая конференция «Обратные задачи и математические модели», г. Бирск, Россия, 2021 г.; международная конференция «Марчуковские научные чтения – 2021», г. Новосибирск, Россия, 2021 г.; международная конференция «Евразийская конференция по прикладной математике», г. Новосибирск, Россия, 2021 г.; международная конференция «The 6th international workshop on computational inverse problems and applications», г. Шенчжень, Китай, 2022 г.; конференция «Вычислительная математика и приложения», г. Сочи, Россия, 2022 г.; международная конференция «Квазилинейные уравнения, обратные задачи и их приложения», г. Сочи, Россия, 2022 г.; всероссийская научно-практическая конференция «Обратные задачи и математические модели», г. Бирск, Россия, 2022 г.; международная конференция «Современные проблемы обратных задач», г. Новосибирск, Россия, 2022 г.; международная конференция «International conference on mathematics and the applications», г. Шенчжень, Китай, 2023 г.; международная конференция «Современные проблемы обратных задач», г. Новосибирск, Россия, 2023 г.

Основные результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах:

– в Москве:

– НИВЦ МГУ имени М. В. Ломоносова:

- * научно-методологический семинар НИВЦ МГУ под руководством члена-корреспондента РАН Вл. В. Воєводина (10 февраля 2023 г.).
- * научный семинар «Обратные задачи математической физики» под руководством профессора А. Б. Бакушинского, профессора А. В. Тихонравова и профессора А. Г. Яголы (28 сентября 2023 г.).

– в Новосибирске:

- объединённый научный семинар ИМ СО РАН, МЦА, НГУ, ИВМиМГ СО РАН «Обратные задачи естествознания» под руководством члена-корреспондента РАН С. И. Кабанихина и профессора РАН М. А. Шишленина (11 мая 2023 г.).

- научный семинар «Актуальные проблемы прикладной математики» под руководством академика РАН И. А. Тайманова, члена-корреспондента РАН С. И. Кабанихина, члена-корреспондента РАН А. Е. Миронова и профессора РАН М. А. Шишленина (1 декабря 2023 г.).
- в Иркутске: межинститутский семинар «Машинное обучение, компьютерное зрение и динамические системы» под руководством профессора РАН Д. Н. Сидорова (18 мая 2023 г.).
- в Екатеринбурге: научный семинар «Методы решения некорректных задач» под руководством члена-корреспондента РАН В. В. Васина (29 мая 2023 г.).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 20 печатных изданиях (6 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1–6]; 16 [3–5; 7–19] в журналах, индексируемых в базе Web of Science; 15 [3–5; 7–10; 12–19] в журналах, индексируемых в базе Scopus); глава «Using parallel computers for solving multidimensional ill-posed problems» (авторы Д. В. Лукьяненко и А. Г. Ягола) в книге «Computational methods for applied inverse problems» (Ed. by Y. Wang, A. Yagola and C. Yang) [20]; получены 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [21; 22].

Личный вклад. Все представленные в диссертационном исследовании численные методы и комплекс программ разработаны и реализованы автором лично. В работах [1; 2; 7–11; 14; 15; 20], написанных в соавторстве, вклад автора диссертации в полученные результаты в части математического моделирования, разработке численных методов и их реализации в виде комплекса программ является определяющим. В работах [3; 12; 13], написанных в соавторстве, результаты исследований были получены посредством расчётов с использованием программ, написанных соавторами на языке программирования С и в основе которых лежит структура параллельных программ, разработанных автором лично на языке программирования Fortran. В совместной работе [6] частично используются методы математического моделирования, разработанные в настоящей диссертации её автором; ссылки на результаты этой работы приводятся для целостности изложения материала, но сами результаты этой работы не включены в диссертацию и на защиту не выносятся. Используемые для математического моделирования решений обратных задач магнитометрии математические модели предложены соавторами (см. работы [4; 5; 17–19]) или известны из литературы.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации 227 страниц текста с 46 рисункам. Список литературы содержит 190 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена рассмотрению различных постановок обратных задач магнитометрии, которые рассматриваются в следующей последовательности. Сначала рассматриваются постановки обратной задачи восстановления намагниченности (плотности магнитного момента) по данным экспериментальных измерений 1) компонент вектора индукции магнитного поля, 2) компонент тензора градиентов компонент магнитной индукции, 3) полных магнито-градиентных данных. Все указанные постановки обратных задач предполагают восстановление одной вектор-функции (или, что то же самое, трёх скалярных функций) по результатам экспериментального наблюдения 1) трёх скалярных функций, 2) пяти скалярных функций, 3) восьми скалярных функций. Таким образом, соответствующие постановки обратных задач будут отличаться степенью физической переопределённости решаемой задачи. Как следствие, это влияет на качество математического моделирования решений соответствующих обратных задач. Затем рассматриваются постановки обратной задачи восстановления магнитной восприимчивости по данным аналогичных экспериментальных измерений. В этом случае по тем же экспериментальным данным при наличии дополнительной информации о параметрах нормального (регулярного геомагнитного) поля в области расположения исследуемого объекта необходимо восстановить уже только одну скалярную функцию (распределение магнитной восприимчивости), которая может позволить определить не только наличие и распределение магнитных масс, но и распознать тип веществ, которые образуют эти магнитные массы.

Классическая постановка обратной задачи магнитометрии по восстановлению намагниченности \mathbf{M} на основе данных экспериментальных измерений магнитного поля \mathbf{B}_{field} , индуцируемого исследуемым объектом, формулируется следующим образом.

Обратная задача состоит в определении вектор-функции $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = (x, y, z) \in V$, из уравнения

$$\mathbf{B}_{field}(\mathbf{r}_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{3(\mathbf{M}(\mathbf{r}), \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \right) d\mathbf{v} \quad (1)$$

по данным экспериментальных измерений компонент вектор-функции $\mathbf{B}_{field}(\mathbf{r}_s)$, $\mathbf{r}_s = (x_s, y_s, z_s) \notin V$ (см. рис 1), μ_0 — магнитная постоянная.

Эта постановка является достаточно общей и не учитывает никакой априорной информации об исследуемом объекте.

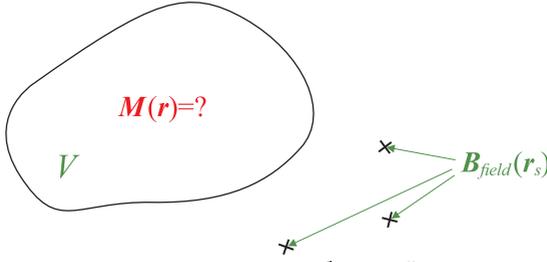


Рис. 1 — Классическая постановка обратной задачи магнитометрии: необходимо восстановить вектор-функцию $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ в области V по данным экспериментальных измерений значений компонент вектор-функции $\mathbf{B}_{field}(\mathbf{r}_s)$ вне области V .

С физической точки зрения такая постановка задачи является «определённой»: необходимо восстановить одну вектор-функцию по данным наблюдения тоже одной вектор-функции, либо, что то же самое, необходимо восстановить три скалярных функции (компоненты $M_x(\mathbf{r})$, $M_y(\mathbf{r})$ и $M_z(\mathbf{r})$) вектор-функции $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ по данным наблюдения тоже трёх скалярных функций (компоненты $B_x(\mathbf{r})$, $B_y(\mathbf{r})$ и $B_z(\mathbf{r})$) вектор-функции $\mathbf{B}_{field}(\mathbf{r})$.

Уравнение (1) также принято записывать в более удобном для численного решения виде:

$$\mathbf{B}_{field}(x_s, y_s, z_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \mathbf{K}_{MI}(x, y, z, x_s, y_s, z_s) \mathbf{M}(x, y, z) dv. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{K}_{MI}(x, y, z, x_s, y_s, z_s)$ — матричная функция, определяющая ядро интегрального уравнения (2) и имеющая вид

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{MI}(x, y, z, x_s, y_s, z_s) &= \\ &= \frac{1}{\rho^5} \begin{bmatrix} 3(x - x_s)^2 - \rho^2 & 3(x - x_s)(y - y_s) & 3(x - x_s)(z - z_s) \\ 3(y - y_s)(x - x_s) & 3(y - y_s)^2 - \rho^2 & 3(y - y_s)(z - z_s) \\ 3(z - z_s)(x - x_s) & 3(z - z_s)(y - y_s) & 3(z - z_s)^2 - \rho^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s| = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2}.$$

Замечание. Аббревиатура MI образована от термина «Magnetic Intensity» (интенсивность магнитного поля).

Если известны компоненты полного тензора \mathbf{B}_{tensor} градиентов компонент магнитной индукции, который в отличие от индукции магнитного поля \mathbf{B}_{field} (которая имеет 3 компоненты) имеет 9 компонент и может

быть записан в матричной форме

$$\mathbf{B}_{tensor} = [B_{ij}]_{i,j \in \overline{1,3}} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix},$$

то может быть сформулирована следующая постановка обратной задачи магнитометрии.

Обратная задача состоит в определении компонент вектор-функции $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in V$, из системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_x}{\partial x}(\mathbf{r}_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{6M_x(\mathbf{r})(x-x_s)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|^5} + \frac{3(\mathbf{M}(\mathbf{r}), \mathbf{r}-\mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|^5} - \right. \\ \left. - \frac{15(\mathbf{M}(\mathbf{r}), \mathbf{r}-\mathbf{r}_s)(x-x_s)^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|^7} \right) dv, \\ \frac{\partial B_z}{\partial z}(\mathbf{r}_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{6M_z(\mathbf{r})(z-z_s)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|^5} + \frac{3(\mathbf{M}(\mathbf{r}), \mathbf{r}-\mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|^5} - \right. \\ \left. - \frac{15(\mathbf{M}(\mathbf{r}), \mathbf{r}-\mathbf{r}_s)(z-z_s)^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|^7} \right) dv, \\ \frac{\partial B_x}{\partial y}(\mathbf{r}_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{3M_x(\mathbf{r})(y-y_s)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|^5} + \frac{3M_y(\mathbf{r})(x-x_s)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|^5} - \right. \\ \left. - \frac{15(\mathbf{M}(\mathbf{r}), \mathbf{r}-\mathbf{r}_s)(x-x_s)(y-y_s)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|^7} \right) dv, \\ \frac{\partial B_x}{\partial z}(\mathbf{r}_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{3M_x(\mathbf{r})(z-z_s)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|^5} + \frac{3M_z(\mathbf{r})(x-x_s)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|^5} - \right. \\ \left. - \frac{15(\mathbf{M}(\mathbf{r}), \mathbf{r}-\mathbf{r}_s)(x-x_s)(z-z_s)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|^7} \right) dv, \\ \frac{\partial B_y}{\partial z}(\mathbf{r}_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{3M_y(\mathbf{r})(z-z_s)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|^5} + \frac{3M_z(\mathbf{r})(y-y_s)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|^5} - \right. \\ \left. - \frac{15(\mathbf{M}(\mathbf{r}), \mathbf{r}-\mathbf{r}_s)(y-y_s)(z-z_s)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|^7} \right) dv, \end{array} \right. \quad (3)$$

по данным экспериментальных измерений независимых компонент тензора градиентов компонент магнитной индукции $\mathbf{B}_{tensor}(\mathbf{r}_s)$, $\mathbf{r}_s \notin V$.

Замечание. Здесь учтено, что тензор градиентов компонент магнитной индукции содержит только 5 независимых компонент. Для определённости в качестве таких компонент используются $\frac{\partial B_x}{\partial x}$, $\frac{\partial B_x}{\partial y}$, $\frac{\partial B_x}{\partial z}$, $\frac{\partial B_y}{\partial z}$, $\frac{\partial B_z}{\partial z}$.

Систему (3) также принято записывать в более удобном для численного решения виде:

$$\mathbf{B}_{tensor}(x_s, y_s, z_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \mathbf{K}_{MGT}(x, y, z, x_s, y_s, z_s) \mathbf{M}(x, y, z) dv. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{B}_{tensor} \equiv \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \quad \frac{\partial B_x}{\partial y} \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} \quad \frac{\partial B_y}{\partial z} \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} \right)^T$, $\mathbf{M} \equiv (M_x \ M_y \ M_z)^T$, а $\mathbf{K}_{MGT}(x, y, z, x_s, y_s, z_s)$ – матричная функция, определяющая ядро интегрального уравнения (4) и имеющая вид

$$\mathbf{K}_{MGT}(x, y, z, x_s, y_s, z_s) = \frac{3}{\rho^7} \times \begin{bmatrix} (x-x_s)[3\rho^2 - 5(x-x_s)^2] & (y-y_s)[\rho^2 - 5(x-x_s)^2] & (z-z_s)[\rho^2 - 5(x-x_s)^2] \\ (y-y_s)[\rho^2 - 5(x-x_s)^2] & (x-x_s)[\rho^2 - 5(y-y_s)^2] & -5(x-x_s)(y-y_s)(z-z_s) \\ (z-z_s)[\rho^2 - 5(x-x_s)^2] & -5(x-x_s)(y-y_s)(z-z_s) & (x-x_s)[\rho^2 - 5(z-z_s)^2] \\ -5(x-x_s)(y-y_s)(z-z_s) & (z-z_s)[\rho^2 - 5(y-y_s)^2] & (y-y_s)[\rho^2 - 5(z-z_s)^2] \\ (x-x_s)[\rho^2 - 5(z-z_s)^2] & (y-y_s)[\rho^2 - 5(z-z_s)^2] & (z-z_s)[3\rho^2 - 5(z-z_s)^2] \end{bmatrix}.$$

Замечание. Аббревиатура *MGT* образована от термина «Magnetic Gradient Tensor» (тензор градиентов компонент магнитного поля).

Если обе рассмотренные математические модели объединить, то это даст систему уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{field}(x_s, y_s, z_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \mathbf{K}_{MI}(x, y, z, x_s, y_s, z_s) \mathbf{M}(x, y, z) dv, \\ \mathbf{B}_{tensor}(x_s, y_s, z_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \mathbf{K}_{MGT}(x, y, z, x_s, y_s, z_s) \mathbf{M}(x, y, z) dv. \end{cases}$$

Эту систему можно формально переписать в виде одного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода:

$$\mathbf{A} \mathbf{M} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \mathbf{K}(x, y, z, x_s, y_s, z_s) \mathbf{M}(x, y, z) dx dy dz = \mathbf{B}(x_s, y_s, z_s). \quad (5)$$

Здесь возможны следующие варианты структуры матричной функции \mathbf{K} и вектор-функций \mathbf{M} и \mathbf{B} .

1. Случай обработки «магнитных» данных:

$$\mathbf{M} \equiv (M_x \ M_y \ M_z)^T, \quad \mathbf{B} \equiv (B_x \ B_y \ B_z)^T, \quad \mathbf{K} \equiv \mathbf{K}_{MI}.$$

2. Случай обработки «градиентных» данных:

$$\mathbf{M} \equiv (M_x M_y M_z)^T, \mathbf{B} \equiv \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{\partial B_x}{\partial z} \frac{\partial B_y}{\partial x} \frac{\partial B_y}{\partial z} \right)^T, \mathbf{K} \equiv \mathbf{K}_{MGT}.$$

3. Случай обработки «магнито-градиентных» данных:

$$\mathbf{M} \equiv (M_x M_y M_z)^T, \mathbf{B} \equiv \left(B_x B_y B_z \frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{\partial B_x}{\partial z} \frac{\partial B_y}{\partial x} \frac{\partial B_y}{\partial z} \right)^T,$$

$$\mathbf{K} \equiv (\mathbf{K}_{MI} \mathbf{K}_{MGT})^T.$$

Таким образом, все рассмотренные постановки обратных задач магнитометрии сводятся к необходимости решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода вида (5) с достаточно произвольной областью V .

При этом постановки обратных задач для всех случаев кроме первого являются физически переопределёнными: необходимо найти некоторый набор скалярных функций по известной информации о значительно большем числе других скалярных функций, которые наблюдаются в эксперименте.

Также в полном тексте диссертации рассматриваются постановки обратных задач магнитометрии в случае наличия априорной информации о нормальном (регулярном геомагнитном) поле $\mathbf{B}^0(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in V$, в области V . В частности, используется следующая связь между вектором намагниченности \mathbf{M} и магнитной восприимчивостью χ :

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{\chi(\mathbf{r})}{\mu_0} \mathbf{B}^0(\mathbf{r}). \quad (6)$$

В этом случае можно сформулировать следующую постановку обратной задачи магнитометрии.

Обратная задача состоит в определении скалярной функции $\chi(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in V$, из уравнения

$$\mathbf{B}_{field}(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{3(\mathbf{B}^0(\mathbf{r}), \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{\mathbf{B}^0(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \right) \chi(\mathbf{r}) dV$$

по данным экспериментальных измерений компонент вектор-функции $\mathbf{B}_{field}(\mathbf{r}_s)$, $\mathbf{r}_s \notin V$, и наличию информации о нормальном магнитном поле $\mathbf{B}^0(\mathbf{r})$ в области V .

В этой постановке необходимо восстановить одну скалярную функцию $\chi(\mathbf{r})$ по результатам экспериментальных наблюдений трёх скалярных функций — компонент вектор-функции $\mathbf{B}_{field}(\mathbf{r}_s) = (B_x(\mathbf{r}_s) B_y(\mathbf{r}_s) B_z(\mathbf{r}_s))^T$. То есть полученная постановка является сильно переопределённой с физической точки зрения.

Однако, существенным недостатком этой постановки является необходимость знания вектор-функции $\mathbf{B}^0(\mathbf{r})$. При решении практических задач соответствующие значения определяются посредством решения вспомогательных задач и, как следствие, содержат ошибку. А это означает, что при решении реальных задач модель содержит ошибки, которые будут приводить к дополнительным неустойчивостям в решении соответствующей обратной задачи.

Наравне со сформулированной постановкой задачи обработки «магнитных» данных можно сформулировать и обратную задачу по обработке «градиентных» данных. Для этого надо подставить (6) в (3). Также можно поставить обратную задачу магнитометрии и по обращению полных «магнитно-градиентных данных».

Вторая глава посвящена рассмотрению основных подходов к математическому моделированию решений в прикладных трёхмерных обратных задачах магнитометрии, которые учитывают особенности самых распространённых прикладных задач этого типа. Кроме необходимости решения трёхмерных интегральных уравнений вида (5) одной из важных прикладных проблем является выделение из экспериментально измеренного магнитного поля с индукцией \mathbf{B} его составляющей \mathbf{B}_{field} , которая индуцируется непосредственно магнитными массами, распределение которых необходимо восстановить. Это связано с тем, что обычно в эксперименте измеряется поле

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{B}_{field}, \quad (7)$$

которое является суммой нормального (регулярного геомагнитного) поля \mathbf{B}^0 и поля \mathbf{B}_{field} , которое индуцируется исследуемыми магнетиками за счёт приобретённого магнитного момента под действием нормального поля (например, магнитного динамо планеты).

Поэтому структура этой главы построена следующим образом: сначала рассматриваются наиболее простые в плане предобработки экспериментальных данных прикладные задачи, а далее их сложность в соответствующем смысле возрастает.

Так, сначала рассматривается тип задач, в которых объект является «движимым», в результате чего вспомогательная задача о выделении компоненты \mathbf{B}_{field} из измеренной индукции \mathbf{B} общего поля решается с точностью до ошибок экспериментальных измерений компонент вектора магнитной индукции \mathbf{B} . Далее рассматриваются задачи геологоразведки в недрах Земли. Для таких задач применимы отработанные в геофизике методы выделения из экспериментальных данных необходимого для расчётов поля \mathbf{B}_{field} . Однако эти методы являются неточными, в результате чего в выделенную компоненту \mathbf{B}_{field} вносится дополнительная систематическая, пусть и небольшая, ошибка. Затем рассматриваются проблемы геологоразведки в недрах планет Солнечной системы по данным спутниковых наблюдений. Часть таких задач предполагает достаточно точное определение компоненты \mathbf{B}_{field} и является лишь вычислительно сложными, а для некоторых из таких задач для выделения необходимой для расчётов компоненты \mathbf{B}_{field} может потребоваться решить вспомогательную обратную задачу большей численной размерности по сравнению с численной размерностью «основной» задачи, что косвенным образом приводит к дополнительным ошибкам в выделенной компоненте \mathbf{B}_{field} .



Рис. 2 — Проведение натурных экспериментальных измерений компонент тензора градиентов компонент магнитной индукции на разных высотах над поверхностью Земли с помощью сенсора SQUID [9].

Содержимое этой главы основано на материалах, изложенных в работах [2; 3; 7; 9; 10; 12; 13; 15; 18]. Наиболее показательными результатами, описанными в этой главе, являются результаты решения задач по восстановлению параметров намагниченности недр Земли и планет Солнечной системы.

В качестве примера решения задачи восстановления параметров намагниченности полезных ископаемых (задача геологоразведки в недрах Земли) можно привести результат обработки измерений компонент тензора градиентов компонент магнитной индукции (см. рис. 2), которые проводились с использованием сверхпроводящего квантового интерференционного устройства SQUID — «Superconducting Quantum Interference Device» — в одном из районов Северного Китая, состоящем из парамагнитных и ферромагнитных материалов (см. работу [9]): см. рис. 3.

Случай исследования параметров намагниченности планет, лишённых магнитного динамо, таких как Марс, является более простым, так как восстановлению подлежит лишь остаточная намагниченность магнитных

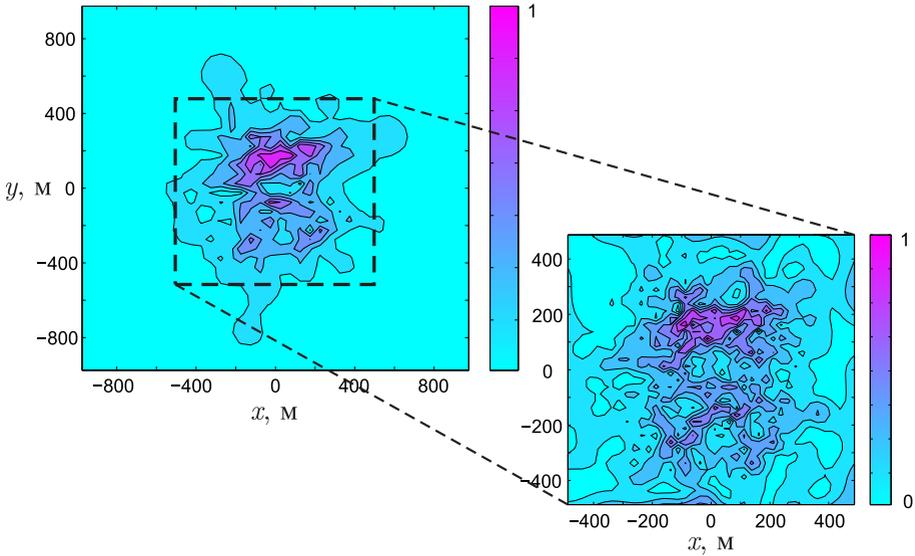


Рис. 3 — Результат обработки реальных экспериментальных данных. На основной картинке изображён результат предварительного определения области локализации магнитных масс (изображено нормализованное значение модуля вектора намагниченности M). Картинка-врезка соответствует результату повторной обработки экспериментальных данных после уточнения размеров области, в которой восстанавливается эквивалентное по внешнему полю распределение магнитных масс [9].

масс, которые индуцируют измеряемое спутниками магнитное поле с индукцией B . Так как нормальное поле B^0 в связи с отсутствием магнитного динамо равно нулю, то согласно формуле (7): $B \equiv B_{field}$. Таким образом, никаких вспомогательных действий по предобработке экспериментальных данных для выделения поля B_{field} , индуцируемого магнитными массами в коре планеты, совершать не надо. На рис. 4 приведён пример расположения относительно Марса точек измерения магнитного поля, которое было измерено автоматической межпланетной станцией MAVEN-1 в 2020-ом году и использовалось для расчётов. Результаты расчётов представлены в планетарной (полярной) системе координат на рис. 5 и в проекции Мольвейде-Бабине на рис. 6.

Необходимо отметить, что результаты расчётов полностью согласуются с результатами, полученными другими независимыми исследованиями. В частности, в отдельных точках поверхности Марса известны результаты локального измерения магнитного поля различными марсоходами. Таким образом, можно предполагать, что результаты расчётов дают достоверную картину приповерхностного «магнитного изображения» Марса.

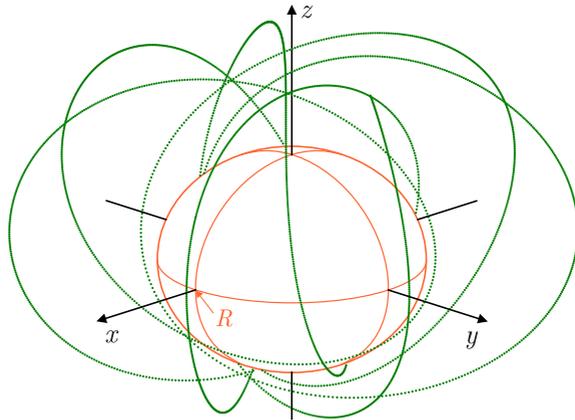


Рис. 4 — Расположение относительно Марса точек измерения магнитного поля автоматической межпланетной станцией MAVEN-1, которые использовались при решении обратной задачи.

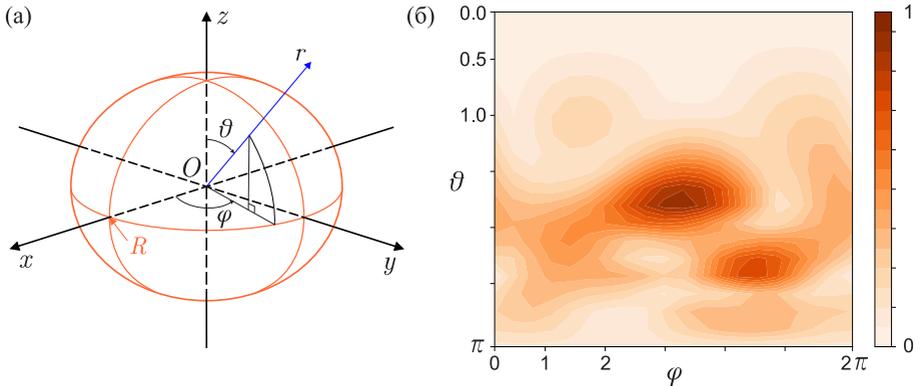


Рис. 5 — Картинка (а): используемая при решении задачи планетарная система координат; картинка (б): результат решения обратной задачи — нормализованное значение модуля вектора намагниченности \mathbf{M} в приповерхностном слое коры Марса [12].

Случай исследования параметров намагниченности планет, которые обладают действующим магнитным динамо, таких как Меркурий, является достаточно сложным. Это связано с тем, что измеряемое спутником магнитное поле с индукцией \mathbf{B} является суперпозицией (см. формулу (7)) неизвестного нормального поля \mathbf{B}^0 и аномального поля \mathbf{B}_{field} , которое индуцируется магнитными массами в коре планеты. Таким образом, нужно будет совершить множество вспомогательных действий по предобработке экспериментальных данных с целью выделения требуемой для расчётов

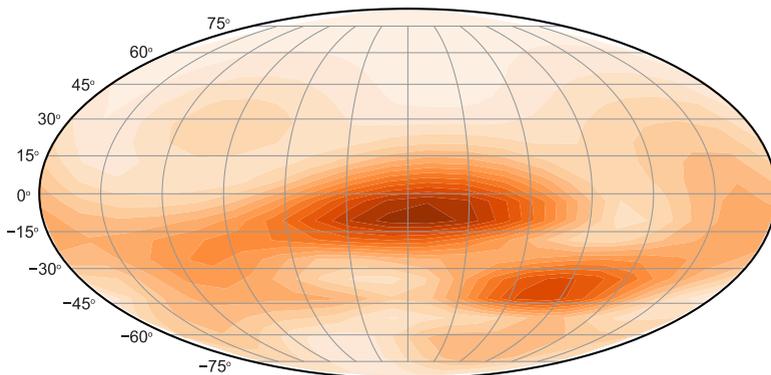


Рис. 6 — Восстановленное приповерхностное «магнитное изображение» Марса (перерисовка рис. 5-(б) в проекции Мольвейде-Бабине).

составляющей B_{field} . При этом вычислительная сложность таких вспомогательных действий может превышать сложность решения самой обратной задачи (см., например, [15]).

Третья глава посвящена разработке специализированных численных методов решения обратных задач магнитометрии. Сначала показывается, как решаемые в диссертационном исследовании прикладные обратные задачи магнитометрии сводятся к решению больших переопределённых систем линейных алгебраических уравнений с плотно заполненной матрицей. Далее обсуждается способ учёта ошибок машинного округления при построении критериев прекращения итерационного процесса в градиентных методах решения таких систем. В результате разрабатываются методы, которые 1) улучшают качество решения прикладных задач минимизации, решение которых требует значительных объёмов вычислений и, как следствие, может быть чувствительным к накапливающимся ошибкам машинного округления, 2) позволяют по возможности экономить вычислительные ресурсы. Затем обсуждается вопрос однозначной разрешимости систем линейных алгебраических уравнений, возникающих в результате дискретизации решаемых задач.

Содержимое этой главы основано на материалах, изложенных в работах [2; 4–6; 8; 11; 14; 17; 19].

Как было показано, все рассматриваемые в диссертационном исследовании обратные задачи магнитометрии сводятся к решению интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода вида (5), которое можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \mathbf{K}(x, y, z, x_s, y_s, z_s) \mathbf{X}(x, y, z) dx dy dz = \mathbf{B}(x_s, y_s, z_s). \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{X} \equiv \mathbf{M}$, если целью решения уравнения (8) является поиск распределения намагниченности по объёму V ; $\mathbf{X} \equiv \chi$, если восстанавливается распределение магнитной восприимчивости.

В задачах рассматриваемого типа предполагается, что $\mathbf{X} \in \square(V)$, $\mathbf{B} \in L_2(Q)$ (Q — область расположения измерительных датчиков), и оператор \mathbf{A} ($\mathbf{A} : \square \rightarrow L_2$) с ядром \mathbf{K} является непрерывным и однозначным. Символ \square используется для подстановки вместо него одного из пространств, которому, согласно априорной информации о решении, принадлежит решение обратной задачи. В зависимости от наличия или отсутствия априорной информации о решении $\square \equiv W_2^2$ либо $\square \equiv L_2$.

Пара $\{\mathbf{X}, \mathbf{B}\}$ определяет тип решаемой обратной задачи магнитометрии. Ядро интегрального уравнения — матричная функция \mathbf{K} — выбирается согласованной с этой парой векторных функций.

При решении практических задач вместо точно известных \mathbf{B} и оператора \mathbf{A} известны их приближённые значения \mathbf{B}_δ и \mathbf{A}_h такие, что $\|\mathbf{B}_\delta - \mathbf{B}\|_{L_2} \leq \delta$, $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_h\|_{\square \rightarrow L_2} \leq h$. При выписанных условиях задача определения (вектор-)функции \mathbf{X} из уравнения (8) является некорректно поставленной и для её решения необходимо строить регуляризирующий алгоритм. Если воспользоваться регуляризирующим алгоритмом, основанным на минимизации функционала А. Н. Тихонова, то задача сводится к поиску элемента, реализующего минимум функционала

$$F^\alpha[\mathbf{M}] = \|\mathbf{A}_h \mathbf{X} - \mathbf{B}_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|\mathbf{X}\|_{\square}^2. \quad (9)$$

Согласно классическим работам А. Н. Тихонова для любого $\alpha > 0$ существует единственная экстремаль \mathbf{X}_η^α , $\eta = \{\delta, h\}$, которая реализует минимум функционала $F^\alpha[\mathbf{X}]$.

Параметр регуляризации можно выбрать, например, по обобщённому принципу невязки, как корень нелинейного уравнения

$$\rho(\alpha) \equiv \|\mathbf{A}_h \mathbf{X}_\eta^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|_{L_2}^2 - \left(\delta + h \|\mathbf{X}_\eta^\alpha\|_{\square} \right)^2 - \mu_\eta^2 = 0.$$

Здесь μ_η — мера несовместности, которая определяется следующим образом:

$$\mu_\eta = \inf_{\mathbf{X}} \|\mathbf{A}_h \mathbf{X} - \mathbf{B}_\delta\|_{L_2}.$$

При этом \mathbf{X}_η^α стремится при $\eta \rightarrow 0$ к точному решению задачи.

Элемент \mathbf{X}_η^α , реализующий минимум функционала (9), может быть найден по следующей формуле (см., например, работу [11]):

$$\mathbf{X}_\eta^\alpha = (\mathbf{A}_h^* \mathbf{A}_h + \alpha \mathbf{R}^* \mathbf{R})^{-1} \mathbf{A}_h^* \mathbf{B}_\delta. \quad (10)$$

Здесь оператор \mathbf{R} определяется априорной информацией о решении (принадлежность его пространству \square) следующим образом:

$$\|\mathbf{X}\|_{\square} = \|\mathbf{R}\mathbf{X}\|_{L_2}.$$

Для численного поиска элемента \mathbf{X}_η^α , определяемого уравнением (10), необходимо выполнить дискретизацию уравнения (8). Общий подход заключается в следующем. Объём V , в котором ищется решение, разбивается на N подобластей, каждой из которых сопоставляются её индекс $\{i\}$, $i = \overline{1, N}$, координаты (x_i, y_i, z_i) расположения этой подобласти и её объём dv_i . В результате уравнение (8) может быть переписано в следующем виде:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \mathbf{K}(x_i, y_i, z_i, x_s, y_s, z_s) \mathbf{X}(x_i, y_i, z_i) dv_i = \mathbf{B}(x_s, y_s, z_s).$$

Замечание. Здесь и далее будет предполагаться, что в качестве вектор-функции $\mathbf{B}(x_s, y_s, z_s)$ используется вектор-функция, измеренная в эксперименте с ошибкой δ .

Необходимо напомнить, что набор координат (x_s, y_s, z_s) определяет месторасположение в пространстве точки, в которой измеряются параметры магнитного поля, являющиеся компонентами вектор-функции $\mathbf{B}(x_s, y_s, z_s)$. Так как измерения проводятся обычно в большом количестве точек (их число обозначается как S) с известными координатами $(x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j})$, $j = \overline{1, S}$, то в результате получается следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \mathbf{K}(x_i, y_i, z_i, x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j}) \mathbf{X}(x_i, y_i, z_i) dv_i = \mathbf{B}(x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j}), \quad j = \overline{1, S}. \quad (11)$$

Систему (11) можно переписать в матричной форме записи

$$Ax = b. \quad (12)$$

Матрица A и вектора x и b имеют блочную структуру следующего вида:

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} dv_1 & \mathbf{K}_{12} dv_2 & \dots & \mathbf{K}_{1N} dv_N \\ \mathbf{K}_{21} dv_1 & \mathbf{K}_{22} dv_2 & \dots & \mathbf{K}_{2N} dv_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{S1} dv_1 & \mathbf{K}_{S2} dv_2 & \dots & \mathbf{K}_{SN} dv_N \end{bmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_N \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_S \end{pmatrix}.$$

Здесь блок \mathbf{K}_{ji} вычисляется для пары точек (x_i, y_i, z_i) и $(x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j})$; блок \mathbf{X}_i вектора x содержит набор сеточных значений компонент вектор-функции \mathbf{X} в точке (x_i, y_i, z_i) ; блок \mathbf{B}_j вектора b содержит набор измеренных в эксперименте в точке $(x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j})$ компонент вектор-функции \mathbf{B} . В полном тексте диссертационного исследования приводятся примеры конкретных формул, определяющих такие блоки.

В результате численное приближение x элемента \mathbf{X}_η^α , определяемого уравнением (10), будет являться решением системы

$$(A^T A + \alpha R^T R) x = A^T b. \quad (13)$$

Матрица R будет являться конечномерной аппроксимацией оператора \mathbf{R} , определяемого формулой $\|\mathbf{X}\|_\square = \|\mathbf{R}\mathbf{X}\|_{L_2}$. В случае $\square \equiv L_2$, то есть в отсутствии априорной информации о решении, R будет единичной матрицей. В других случаях структура этой матрицы усложняется, но она всегда будет сильно разреженной матрицей.

Система (13) может быть решена с помощью прямых методов решения систем линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей. Но надо отметить, что матрица системы (13) имеет размерность $N \times N$. Как следствие, реализация прямых методов решения в случае произвольной матрицы A требует $O(MN^2)$ операций: $(2M - 1)N^2 + O(N^1)$ операций, чтобы определить матрицу системы, $(2M - 1)N$ операций, чтобы определить правую часть, и $O(N^3)$ операций, чтобы реализовать прямой метод решения системы. Поэтому при больших значениях M и N на качество решения могут критическим образом влиять накапливающиеся в процессе выполнения этих $\sim MN^2$ операций ошибки машинного округления.

В связи с этим, на практике часто ищут элемент, реализующий минимум функционала (9), не с помощью решения системы нормальных уравнений (13), а с помощью градиентных методов минимизации самого функционала (9). Эти методы являются итерационными: они стартуют с произвольного начального приближения для решения и на каждой итерации находят очередное более хорошее приближение для искомого решения. При вычислениях без ошибок за бесконечное число итераций такие методы сходятся к элементу x , который реализует минимум функционала (9). На практике такие методы зачастую позволяют значительным образом экономить вычислительные ресурсы по сравнению с прямыми методами решения за счёт досрочного прекращения итерационного процесса.

С учётом того, что задача (12) является линейной, наиболее эффективным градиентным методом её решения является метод сопряжённых градиентов. Этот метод в случае точных вычислений способен найти элемент, реализующий минимум функционала (9), не более чем за N итераций, на каждой из которых необходимо выполнить $O(MN)$ операций. Однако с учётом того, что при решении практических задач все вычисления выполняются лишь приближённо (за счёт наличия ошибок машинного округления), утверждение о возможности минимизации функционала ровно за N итераций оказывается неверным. На практике возможны следующие три ситуации.

1. Начиная с какой-то итерации, номер которой меньше N , значение минимизируемого функционала становится сопоставимым с

фоном ошибок машинного округления. Это означает, что все последующие итерации бессмысленны и итерационный процесс можно прекратить, так как на последующих итерациях значение функционала не будет убывать. Знание такого номера итерации даёт возможность прервать вычисления и сэкономить вычислительные ресурсы, найдя приближённое решение посредством совершения гораздо меньшего числа операций по сравнению с прямыми методами решения.

2. В первом случае также возможна ситуация, при которой выполнение полного набора из N итераций приводит к «разрушению» численного решения. Таким образом возможность досрочно прервать итерационный процесс может быть особенно полезной при решении прикладных задач. Реализация такой возможности не только экономит на практике вычислительные ресурсы, но и позволяет найти адекватное приближённое решение.
3. Из-за влияния ошибок машинного округления на точность определения направлений минимизации и шагов вдоль них после совершения N итераций значение минимизируемого функционала остаётся достаточно большим. Это означает, что найденное через N итераций приближённое решение может быть уточнено ещё, если итерационный процесс продолжить. В этом случае итерационный процесс необходимо продолжать до тех пор, пока значение функционала не выйдет на фон ошибок машинного округления.

Другими словами, если на практике используется «классический» критерий остановки итерационного процесса в методе сопряжённых градиентов (по фиксированному числу итераций равному N), то: в первом случае приближённое решение будет найдено, но на его поиск будут затрачены излишние вычислительные ресурсы; во втором случае приближённое решение не будет найдено вовсе; в третьем случае будет найдено очень грубое приближённое решение, которое ещё может быть уточнено.

В результате диссертационного исследования был получен итерационный алгоритм решения системы (13) с усовершенствованным критерием остановки итерационного процесса (см. алгоритм 1). В этом алгоритме красным цветом выделены строки, которые соответствуют действиям необходимым для реализации усовершенствованного критерия прекращения итерационного процесса. Если эти строки убрать и изменить условие *True* на $s \leq N$, то получится «классическая» реализация метода сопряжённых градиентов для решения системы (13). В алгоритме Δ — относительная ошибка машинного округления (при вычислениях с половинной точностью $\Delta = 10^{-3.3}$, при вычислениях с одинарной точностью $\Delta = 10^{-7.6}$, при вычислениях с двойной точностью $\Delta = 10^{-16.3}$, при вычислениях с четверной точностью $\Delta = 10^{-34.0}$), обозначение $^{\circ 2}$ — «степень Адамара», то есть поэлементное возведение вектора/матрицы во вторую степень.

Алгоритм 1: Псевдокод для усовершенствованной версии метода сопряжённых градиентов для поиска решения системы (13) (псевдорешения системы (12)).

Входные данные: $A, b, \alpha, R, x \equiv x^{(1)}$ — начальное приближение

Результат: x

$s \leftarrow 1$

$p \leftarrow 0$

while *True* **do**

if $s = 1$ **then**

$r \leftarrow A^T(Ax - b) + \alpha R^T(Rx)$

$\sigma_r^2 \leftarrow (A^T)^{\circ 2}(A^{\circ 2}x^{\circ 2} + b^{\circ 2}) + \alpha^2(R^T)^{\circ 2}(R^{\circ 2}x^{\circ 2})$

else

$r \leftarrow r - \frac{q}{(p,q)}$

$\sigma_r^2 \leftarrow \sigma_r^2 + \frac{q^{\circ 2}}{(p,q)^2}$

end

$\Delta^2 \sum (\sigma_r^2)_n$

if $\frac{n}{(r,r)} \geq 1$ **then**

 | **return** x

end

$p \leftarrow p + \frac{r}{(r,r)}$

$q \leftarrow A^T(Ap) + \alpha R^T(Rp)$

$x \leftarrow x - \frac{p}{(p,q)}$

$s \leftarrow s + 1$

end

В четвертой главе рассматриваются пути эффективной программной реализации предложенного в предыдущей главе алгоритма. Структура этой главы следующая. Сначала описываются особенности подготовки на вычислительных узлах многопроцессорной системы данных для расчёта обратной задачи магнитометрии с использованием технологии параллельного программирования MPI. В частности, подробно рассматривается вопрос первичной обработки входных данных обратной задачи и подготовке соответствующих данных на вычислительных узлах с помощью технологии MPI. Затем описываются особенности параллельной подготовки на каждом вычислительном узле своей части матрицы решаемой системы. Далее описывается вычислительное ядро программного комплекса, а именно параллельная реализация с помощью технологии MPI алгоритма решения переопределённых систем линейных алгебраических уравнений с плотно заполненной матрицей с учётом ошибок машинного

округления. Для полноты изложения соответствующего материала, сначала приводится описание последовательного алгоритма и его программная реализация. Затем описываются параллельные алгоритмы реализации некоторых базовых операций линейной алгебры, которые будут использоваться для построения параллельной реализации рассматриваемого алгоритма. Далее описываются различные подходы к построению параллельной реализации алгоритма и его программной реализации с учётом возможностей различных стандартов MPI (MPI-2, MPI-3 и MPI-4). Затем проводится исследование предложенных программных реализаций на наличие сильной и слабой масштабируемости, а также даются рекомендации по их использованию при вычислениях на больших параллельных системах. Все примеры программ, реализующих рассмотренные алгоритмы, написаны с использованием языка программирования Python, что связано в первую очередь с относительной компактностью соответствующих программных реализаций. Однако все программы построены таким образом, что они могут быть достаточно легко переписаны на языки программирования C/C++/Fortran. В связи с этим даются комментарии касательно переносимости предложенных программных реализаций на языки программирования C/C++/Fortran. Затем описываются программные особенности использования на вычислительных узлах многоядерных процессоров с помощью технологии OpenMP и графических процессоров с помощью технологии параллельного программирования CUDA. Демонстрируется то, как возможности языка программирования Python позволяют достаточно просто использовать соответствующие технические решения в рамках рассматриваемого класса прикладных задач. Для этого предварительно рассматривается упрощённый (но конструктивный) пример программной реализации для некоторых задач рассматриваемого класса. Затем даются рекомендации касательно учёта априорной информации о решении, которая может быть заложена посредством задания неединичной матрицы R в (9). Наконец, подытоживаются преимущества и недостатки программных реализаций с использованием языков программирования Python и Fortran, которые использовались автором при создании программного комплекса решения обратных задач магнитометрии.

Содержимое этой главы основано на материалах, изложенных в работах [1; 16; 20] и зарегистрированных программах для ЭВМ [21; 22].

Предполагается, что элементы матрицы A должны быть распределены по блокам между участвующими в вычислениях процессами, используя двумерное деление матрицы на блоки (см. рис. 7).

При этом число разбиений вдоль вертикали будет обозначаться как num_row (сокращение от *number of rows*), а число разбиений вдоль горизонтали — num_col (сокращение от *number of columns*). В результате матрица A размерности $M \times N$ будет разбита на части $A_{\text{part}(\text{rank})}$ размерности $M_{\text{part}(m)} \times N_{\text{part}(n)}$. Здесь номер процесса rank связан с индексами m и

	$n=0$	$n=1$	$n=2$						
$m=0$	rank=0 $A_{part(0)}$	rank=1 $A_{part(1)}$	rank=2 $A_{part(2)}$	rank=0 $x_{part(0)}$	rank=1 $x_{part(1)}$	rank=2 $x_{part(2)}$	rank=0 $b_{part(0)}$	rank=1 $b_{part(0)}$	rank=2 $b_{part(0)}$
$m=1$	rank=3 $A_{part(3)}$	rank=4 $A_{part(4)}$	rank=5 $A_{part(5)}$	rank=3 $x_{part(0)}$	rank=4 $x_{part(1)}$	rank=5 $x_{part(2)}$	rank=3 $b_{part(1)}$	rank=4 $b_{part(1)}$	rank=5 $b_{part(1)}$
$m=2$	rank=6 $A_{part(6)}$	rank=7 $A_{part(7)}$	rank=8 $A_{part(8)}$	rank=6 $x_{part(0)}$	rank=7 $x_{part(1)}$	rank=8 $x_{part(2)}$	rank=6 $b_{part(2)}$	rank=7 $b_{part(2)}$	rank=8 $b_{part(2)}$
	A			x			b		

Рис. 7 — Пример распределения данных по 9 MPI-процессам, которые образуют сетку 3×3 .

n следующим образом:

$$m = \left\lfloor \frac{\text{rank}}{\text{num_col}} \right\rfloor, \quad n = \text{rank} - \left\lfloor \frac{\text{rank}}{\text{num_col}} \right\rfloor \cdot \text{num_col}.$$

Таким образом предполагается, что на каждом MPI-процессе должен быть сформирован массив `A_part`, который содержит одну из частей $A_{part(\cdot)}$ матрицы A . Также на каждом процессе должны содержаться массивы `x_part` и `b_part`, которые содержат одну из частей $x_{part(\cdot)}$ и $b_{part(\cdot)}$ векторов x и b соответственно (здесь x — начальное приближение для итерационного алгоритма). Структура хранения векторов x и b на различных процессах также показана на рис. 7. Видно, что часть вектора $x_{part(n)}$ для фиксированного индекса n будет храниться во всех ячейках столбца сетки процессов с индексом n . Аналогично, часть вектора $b_{part(m)}$ для фиксированного индекса m будет храниться во всех ячейках строки сетки процессов с индексом m . Такая структура хранения векторов x и b на различных процессах обусловлена особенностью программной реализации параллельного алгоритма решения СЛАУ (13).

Также предполагается, что все MPI-процессы, участвующие в вычислениях, образуют виртуальную топологию типа двумерного тора, на основе которой созданы вспомогательные коммуникаторы: коммуникаторы `comm_col` содержат процессы, которые являются столбцами двумерной сетки процессов, на основе которых создана виртуальная топология, а коммуникаторы `comm_row` содержат процессы, которые являются строками этой двумерной сетки процессов.

«Наивный» параллельный вариант алгоритма 1, реализующего усовершенствованную версию метода сопряжённых градиентов для решения системы (13), может быть записан в виде псевдокода, оформленного как алгоритм 2.

Алгоритм 2: Псевдокод («наивный») для параллельной версии усовершенствованного алгоритма 1.

Входные данные: $A_{part}, b_{part}, x_{part} \equiv x_{part}^{(1)}, \alpha, N,$
 $comm_row, comm_col$

Результат: x_{part}

$s \leftarrow 1; p_{part} \leftarrow 0$

while *True* **do**

if $s = 1$ **then**

$Ax_{part_temp} \leftarrow A_{part}x_{part}$
 $Ax_{part} \leftarrow comm_row.Allreduce(Ax_{part_temp})$
 $b_{part} \leftarrow Ax_{part} - b_{part}$
 $r_{part_temp} \leftarrow A_{part}^T b_{part}$
 $r_{part} \leftarrow comm_col.Allreduce(r_{part_temp})$
 $r_{part} \leftarrow r_{part} + \alpha x_{part}$
 $\sigma_{r_{part}}^2 \leftarrow 0$

else

$r_{part} \leftarrow r_{part} - \frac{q_{part}}{scalar_product_pq}$
 $\sigma_{r_{part}}^2 \leftarrow \sigma_{r_{part}}^2 + \frac{q_{part}^2}{(scalar_product_pq)^2}$

end

$scalar_product_temp \leftarrow (r_{part}, r_{part})$

$scalar_product_rr \leftarrow comm_row.Allreduce(scalar_product_temp)$

$criterion_temp \leftarrow \frac{\Delta^2 \sum_n (\sigma_{r_{part}}^2)_n}{scalar_product_rr}$

$criterion \leftarrow comm_row.Allreduce(criterion_temp)$

if $criterion \geq 1$ **then**

 | **return** x_{part}

end

$p_{part} \leftarrow p_{part} + \frac{r_{part}}{scalar_product_rr}$

$Ap_{part_temp} \leftarrow A_{part}p_{part}$

$Ap_{part} \leftarrow comm_row.Allreduce(Ap_{part_temp})$

$q_{part_temp} \leftarrow A_{part}^T (Ap_{part})$

$q_{part} \leftarrow comm_col.Allreduce(q_{part_temp})$

$q_{part} \leftarrow q_{part} + \alpha p_{part}$

$scalar_product_temp \leftarrow (p_{part}, q_{part})$

$scalar_product_pq \leftarrow comm_row.Allreduce(scalar_product_temp)$

$x_{part} \leftarrow x_{part} - \frac{p_{part}}{scalar_product_pq}$

$s \leftarrow s + 1$

end

Алгоритм 3: Псевдокод для эффективной параллельной версии усовершенствованного алгоритма.

Входные данные: $A_{part}, b_{part}, x_{part} \equiv x_{part}^{(1)}, \alpha, N,$
 $comm_row, comm_col$

Результат: x_{part}

$s \leftarrow 1; p_{part} \leftarrow 0$

while *True* **do**

if $s = 1$ **then**

$Ax_{part_temp} \leftarrow A_{part}x_{part}$

$Ax_{part} \leftarrow comm_row.Allreduce(Ax_{part_temp})$

$b_{part} \leftarrow Ax_{part} - b_{part}$

$r_{part_temp} \leftarrow A_{part}^T b_{part}$

$r_{part} \leftarrow comm_col.Allreduce(r_{part_temp})$

$r_{part} \leftarrow r_{part} + \alpha x_{part}$

$\sigma_{r_{part}}^2 \leftarrow 0$

else

$r_{part} \leftarrow r_{part} - \frac{q_{part}}{scalar_product_pq}$

end

$scalar_product_{temp} \leftarrow (r_{part}, r_{part})$

$scalar_product_rr \leftarrow comm_row.Allreduce(scalar_product_{temp})$

$p_{part} \leftarrow p_{part} + \frac{r_{part}}{scalar_product_rr}$

$Ap_{part_temp} \leftarrow A_{part}p_{part}$

$Ap_{part} \leftarrow comm_row.Allreduce(Ap_{part_temp})$

if $s \geq 2$ **then**

$\sigma_{r_{part}}^2 \leftarrow \sigma_{r_{part}}^2 + \frac{q_{part}^2}{(scalar_product_pq)^2}$

end

$criterion_{temp} \leftarrow \frac{\Delta^2 \sum_n (\sigma_{r_{part}}^2)_n}{scalar_product_rr}$

$criterion \leftarrow comm_row.Allreduce(criterion_{temp})$

$Wait(Ap_{part}); q_{part_temp} \leftarrow A_{part}^T(Ap_{part})$

$q_{part} \leftarrow comm_col.Allreduce(q_{part_temp})$

$q_{part} \leftarrow q_{part} + \alpha p_{part}$

$scalar_product_{temp} \leftarrow (p_{part}, q_{part})$

$scalar_product_pq \leftarrow comm_row.Allreduce(scalar_product_{temp})$

$Wait(criterion);$ **if** $criterion \geq 1$ **then return** x_{part}

$x_{part} \leftarrow x_{part} - \frac{p_{part}}{scalar_product_pq}$

$s \leftarrow s + 1$

end

Коричневым цветом выделены операции, которые соответствуют учёту регуляризирующей добавки в функционале А. Н. Тихонова (9) для случая $\square \equiv L_2$, что эквивалентно $R \equiv E$ в (9) в результате дискретизации функционала. Важно отметить, что при решении практических задач в случае ограничений достаточно произвольного вида матрица R будет разреженной, в результате чего вычислительная сложность алгоритма останется неизменной.

Особенность этого алгоритма заключается в том, что этапы счёта и этапы пересылки сообщений, содержащих результаты промежуточных вычислений, чётко разделены. Поэтому накладные расходы по обмену сообщениями между участвующими в вычислениях процессами будут негативно влиять на эффективность параллельной программной реализации.

Более эффективный параллельный вариант алгоритма 1 может быть записан в виде псевдокода, оформленного как алгоритм 3.

Данный алгоритм использует возможности стандарта MPI-3: за счёт использования неблокирующих (асинхронных) операций (выделены в алгоритме 3 синим цветом) появляется возможность производить дополнительные вычисления, связанные с учётом накапливающихся ошибок машинного округления, одновременно с передачей самых больших сообщений в основном алгоритме, а также пересылать дополнительные сообщения на фоне вычислений основного алгоритма.

Принципиальное отличие этого алгоритма от алгоритма 2 заключается в том, что часть этапов счёта и часть этапов пересылки сообщений, содержащих результаты промежуточных вычислений, совмещены. В частности, 1) этапы вычислений, связанные с учётом ошибок машинного округления, совмещены с этапами пересылки сообщений в основном алгоритме, и 2) этапы пересылки сообщений, содержащие результаты промежуточных вычислений, связанных с учётом ошибок машинного округления, совмещены с этапам вычислений в основном алгоритме. Поэтому накладные расходы по обмену сообщениями между участвующими в вычислениях процессами будут значительно меньше влиять на эффективность параллельной программной реализации по сравнению с алгоритмом 2.

Программная реализация алгоритма 3 содержит коллективные операции взаимодействия между процессами с одинаковым набором аргументов, которые выполняются в цикле. Это означает что для повышения эффективности программной реализации можно использовать отложенные запросы на взаимодействие (стандарт MPI-4). Они дают возможность оптимизировать коммуникации, привязав список аргументов коммуникации к постоянному запросу коммуникации один раз, а затем повторно использовать сформированный запрос для инициирования и завершения обмена сообщениями.

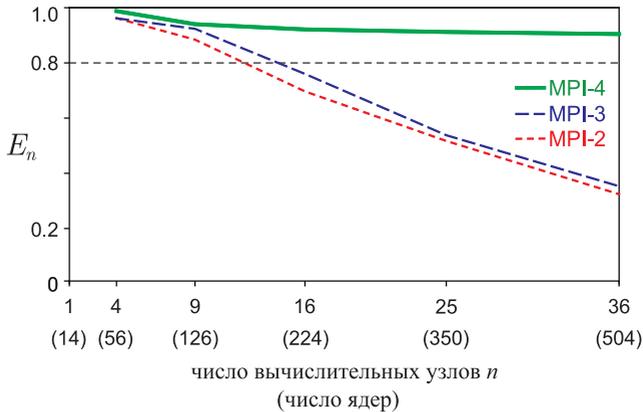


Рис. 8 — Графики эффективности распараллеливания в зависимости от числа вычислительных узлов для различных программных реализаций параллельного алгоритма. Сильная масштабируемость (в рамках использованного числа вычислительных узлов) присутствует только для программной реализации, использующей стандарт MPI-4.

На рис. 8 представлены графики эффективности распараллеливания E_n в зависимости от числа вычислительных узлов n суперкомпьютера «Ломоносов-2», использовавшегося для вычислений. Представлены графики таких зависимостей для трёх программных реализаций алгоритма, использующих различные стандарты параллельного программирования MPI. Графики полностью соответствуют заявленным ранее ожиданиям и демонстрируют неоспоримое преимущество использования стандарта MPI-4.

При этом необходимо отметить, что особенность параллельных алгоритмов, использующихся для решения рассматриваемого класса обратных задач, такова, что время счёта пропорционально $\frac{1}{n}$, а время на обмен сообщениями между процессами пропорционально $\frac{\log_2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ (n — число MPI-процессов). Таким образом, начиная с какого-то конкретного числа процессов (это число зависит от вычислительных размеров задачи и от конфигурации многопроцессорной системы) доля накладных расходов по обмену сообщениями между процессами начнёт существенно увеличиваться. А это, как следствие, неизбежно будет приводить к ухудшению эффективности программной реализации с увеличением числа участвующих в вычислениях процессов. Но, как видно из рис. 8, программная реализация, использующая стандарт параллельного программирования MPI-4, позволила существенным образом уменьшить скорость убывания графика эффективности распараллеливания.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Математическое моделирование показало возможность решения широкого класса обратных задач магнитометрии в постановках, учитывающих различную информацию о параметрах измеряемого в эксперименте магнитного поля и априорную информацию о параметрах нормального поля в области расположения исследуемого объекта.
2. Численные исследования показали, что наиболее перспективными постановками обратных задач магнитометрии являются те, в которых в качестве входных данных используется экспериментальная информация о компонентах тензора градиентов компонент индукции магнитного поля. Математическое моделирование решений обратных задач магнитометрии на основе таких постановок позволяет получать более детализированные магнитные изображения исследуемых объектов.
3. Для выполнения поставленных задач был создан программный комплекс решения трёхмерных обратных задач магнитометрии с использованием технологий параллельного программирования MPI, OpenMP и CUDA для проведения расчётов на гетерогенных вычислительных системах, каждый узел которых содержит многоядерные процессоры и/или графические ускорители. Вычислительным ядром этого программного комплекса является параллельная программная реализация алгоритма решения больших переопределённых систем линейных алгебраических уравнений с плотно заполненной матрицей с учётом ошибок машинного округления. Созданный программный комплекс имеет открытый код и подробное описание, в связи с чем он может быть применён или модифицирован для решения задач и из совершенно других областей науки и техники, если они сводятся к решению линейных систем такого типа.

Публикации автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М.В. Ломоносова по специальности:

1. *Лукьяненко, Д. В.* Использование многопроцессорных систем для решения обратных задач, сводящихся к интегральным уравнениям Фредгольма 1-го рода [Текст] / Д. В. Лукьяненко, А. Г. Ягола // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2012. — Т. 18, № 1. — С. 222—234. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17358690> ; [WoS Q4: IF 0.500; Scopus Q2: SJR 0.425; 1.1/1.0].

2. Ван, Я. Регуляризованное обращение полных тензорных магнитно-градиентных данных [Текст] / Я. Ван, Д. В. Лукьяненко, А. Г. Ягола // Вычислительные методы и программирование. — 2016. — Т. 17, № 1. — С. 13—20. — DOI: [10.26089/NumMet.v17r103](https://doi.org/10.26089/NumMet.v17r103). — [RSCI 0.576; 0.7/0.6].
3. Восстановление магнитной восприимчивости с использованием полных магнито-градиентных данных [Текст] / Я. Ван [и др.] // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2020. — Т. 60, № 6. — С. 1027—1034. — DOI: [10.31857/S0044466920060101](https://doi.org/10.31857/S0044466920060101). — [WoS Q4: IF 0.700; Scopus Q2: SJR 0.496; 0.8/0.7].
4. О единственности решения систем линейных алгебраических уравнений, к которым редуцируются обратные линейные задачи гравиметрии и магнитометрии: локальный случай [Текст] / И. И. Колотов [и др.] // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2023. — Т. 63, № 8. — С. 1317—1331. — DOI: [10.31857/S0044466923080094](https://doi.org/10.31857/S0044466923080094). — [WoS Q4: IF 0.700; Scopus Q2: SJR 0.496; 0.9/0.4].
5. О единственности решения систем линейных алгебраических уравнений, к которым редуцируются обратные задачи гравиметрии и магнитометрии: региональный вариант [Текст] / И. И. Колотов [и др.] // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2023. — Т. 63, № 9. — С. 1446—1457. — DOI: [10.31857/S0044466923090119](https://doi.org/10.31857/S0044466923090119). — [WoS Q4: IF 0.700; Scopus Q2: SJR 0.496; 0.7/0.3].
6. Леонов, А. С. «Быстрый» алгоритм решения некоторых трехмерных обратных задач магнитометрии [Текст] / А. С. Леонов, Д. В. Лукьяненко, А. Г. Ягола // Математическое моделирование. — 2024. — Т. 36, № 1. — С. 41—58. — DOI: [10.20948/mm-2024-01-03](https://doi.org/10.20948/mm-2024-01-03). — [RSCI 0.900; 0.9/0.3].
7. Lukyanenko, D. V. Application of inversion methods in solving ill-posed problems for magnetic parameter identification of steel hull vessel [Текст] / D. V. Lukyanenko, A. G. Yagola, N. A. Evdokimova // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2011. — Vol. 18, no. 9. — P. 1013—1029. — DOI: [10.1515/jiip.2011.018](https://doi.org/10.1515/jiip.2011.018). — [WoS Q1 : IF 1.448; Scopus Q2: SJR 0.428; 0.6/0.5].
8. Lukyanenko, D. V. Some methods for solving of 3D inverse problem of magnetometry [Текст] / D. V. Lukyanenko, A. G. Yagola // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. — 2016. — Vol. 4, no. 3. — P. 4—14. — DOI: [10.32523/2306-6172-2016-4-3-4-14](https://doi.org/10.32523/2306-6172-2016-4-3-4-14). — [WoS Q3: IF 0.500; Scopus Q3: SJR 0.241; 0.8/0.7].

9. Magnetic susceptibility inversion method with full tensor gradient data using low-temperature SQUIDS [Текст] / Y. Wang [et al.] // Petroleum Science. — 2019. — Vol. 16. — P. 794—807. — DOI: [10.1007/s12182-019-0350-6](https://doi.org/10.1007/s12182-019-0350-6). — [WoS Q1: IF 5.600; Scopus Q1: SJR 1.005; 0.9/0.8].
10. *Wang, Y.* Magnetic parameters inversion method with full tensor gradient data [Текст] / Y. Wang, D. Lukyanenko, A. Yagola // Inverse Problems and Imaging. — 2019. — Vol. 13, no. 4. — P. 745—754. — DOI: [10.3934/ipi.2019034](https://doi.org/10.3934/ipi.2019034). — [WoS Q2: IF 1.483; Scopus Q2: SJR 0.605; 0.9/0.8].
11. General Tikhonov regularization with applications in geoscience [Текст] / Y. Wang [et al.] // CSIAM Transaction on Applied Mathematics. — 2020. — Vol. 1, no. 1. — P. 53—85. — DOI: [10.4208/csam.2020-0004](https://doi.org/10.4208/csam.2020-0004). — [WoS Q2: IF 1.300; 3.6/1.5].
12. Recovering the magnetic image of Mars from satellite observations [Текст] / I. Kolotov [et al.] // Journal of Imaging. — 2021. — Vol. 7, no. 11. — P. 234. — DOI: [10.3390/jimaging7110234](https://doi.org/10.3390/jimaging7110234). — [WoS Q2: IF 3.200; Scopus Q2: SJR 0.595; 0.9/0.8].
13. Recovering the magnetic properties of Mercury from satellite observations [Текст] / I. I. Kolotov [et al.] // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. — 2022. — Vol. 10, no. 2. — P. 26—41. — DOI: [10.32523/2306-6172-2022-10-2-26-41](https://doi.org/10.32523/2306-6172-2022-10-2-26-41). — [WoS Q3: IF 0.500; Scopus Q3: SJR 0.241; 1.5/1.3].
14. *Lukyanenko, D.* Accounting for round-off errors when using gradient minimization methods [Текст] / D. Lukyanenko, V. Shinkarev, A. Yagola // Algorithms. — 2022. — Vol. 15, no. 9. — P. 324. — DOI: [10.3390/a15090324](https://doi.org/10.3390/a15090324). — [WoS Q2: IF 2.300; Scopus Q2: SJR 0.497; 0.9/0.8].
15. Recovering the near-surface magnetic image of Mercury from satellite observations [Текст] / I. Kolotov [et al.] // Remote Sensing. — 2023. — Vol. 15, no. 8. — P. 2023. — DOI: [10.3390/rs15082125](https://doi.org/10.3390/rs15082125). — [WoS Q1: IF 5.000; Scopus Q1: SJR 1.136; 1.6/1.4].
16. *Lukyanenko, D.* Parallel algorithm for solving overdetermined systems of linear equations, taking into account round-off errors [Текст] / D. Lukyanenko // Algorithms. — 2023. — Vol. 16, no. 5. — P. 242. — DOI: [10.3390/a16050242](https://doi.org/10.3390/a16050242). — [WoS Q2: IF 2.300; Scopus Q2: SJR 0.497; 2.5/2.5].
17. On the unique solvability of inverse problems of magnetometry and gravimetry [Текст] / I. Stepanova [et al.] // Mathematics. — 2023. — Vol. 11, no. 14. — P. 3230. — DOI: [10.3390/math11143230](https://doi.org/10.3390/math11143230). — [WoS Q1: IF 2.400; Scopus Q2: SJR 0.446; 1.4/0.7].

18. О построении аналитических моделей магнитного поля Меркурия по спутниковым данным [Текст] / И. Э. Степанова [и др.] // Физика Земли. — 2023. — № 6. — С. 175—189. — DOI: [10.31857/S0002333723060212](https://doi.org/10.31857/S0002333723060212). — [WoS Q4: IF 1.000; Scopus Q2: SJR 0.432; 0.6/0.3].
19. The uniqueness of the inverse coefficient problem when building analytical models of Mercury's magnetic field [Текст] / I. E. Stepanova [et al.] // Doklady Earth Sciences. — 2023. — DOI: [10.1134/S1028334X23602237](https://doi.org/10.1134/S1028334X23602237). — [WoS Q4: IF 0.900; Scopus Q2: SJR 0.361; 0.6/0.3].

Иные публикации:

20. *Lukyanenko, D.* Using parallel computers for solving multidimensional ill-posed problems [Текст] / D. Lukyanenko, A. Yagola // Computational Methods for Applied Inverse Problems. Vol. 56 / ed. by Y. Wang, A. G. Yagola, C. Yang. — Berlin, Boston : De Gruyter, 2012. — P. 49—64. — (Inverse and Ill-Posed Problems Series). — DOI: [10.1515/9783110259056.49](https://doi.org/10.1515/9783110259056.49). — [0.9/0.8].

Зарегистрированные программы для ЭВМ:

21. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Программа для восстановления параметров намагниченности объекта по данным измерений компонент вектора индукции или тензора градиентов компонент индукции магнитного поля [Текст] / Д. В. Лукьяненко. — № 2023665314 ; заявл. 17.07.2023 ; опубл. 28.07.2023, 2023666291 (Рос. Федерация).
22. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Программа для решения больших переопределённых систем линейных алгебраических уравнений с плотно заполненной матрицей с учётом ошибок машинного округления [Текст] / Д. В. Лукьяненко. — № 2023666561 ; заявл. 02.08.2023 ; опубл. 14.08.2023, 2023667251 (Рос. Федерация).

Лукьяненко Дмитрий Витальевич

Математическое моделирование, численные методы и комплекс программ для
решения трёхмерных обратных задач магнитометрии

Автореф. дис. на соискание ученой степени д. ф.-м. н.

Подписано в печать _____.____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____