

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Чухнова Александра Владимировна

**Квантовополевое описание влияния вещества и
электромагнитного поля на распространение нейтрино**

Специальность 1.3.3. — теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук
Лобанов Андрей Евгеньевич

МОСКВА — 2023

Оглавление

Введение	4
1 Квантовополевое описание эволюции нейтрино	16
1.1 Используемая модель	16
1.2 Группа симметрии теории	18
1.3 Квантовополевое описание нейтрино в вакууме	24
1.4 Уравнение, описывающее взаимодействие с веществом и электромагнитным полем	28
1.5 Массовые и флейворные состояния	33
1.6 Квазиклассическое приближение	35
2 Взаимодействие нейтрино с веществом	39
2.1 Вероятности спин-флейворных переходов в модели двух флейворов	39
2.2 Вероятность переворота спина	49
3 Нейтрино в постоянном электромагнитном поле	56
3.1 Вероятности переходов в модели двух флейворов	56
3.2 Вероятность переворота спина	63
4 Нейтрино в неоднородном магнитном поле	67
4.1 Резонанс в электромагнитном поле	67
4.2 Зависимость резонанса от поляризации	72

4.3	Вероятности переходов в дорезонансной области в модели трех флейворов	80
4.4	Нейтрино в поле точечного диполя	85
5	<i>T</i>-нарушение в осцилляциях нейтрино	89
5.1	Формальное решение уравнения эволюции нейтрино в ве- ществе и электромагнитном поле	89
5.2	Достаточное условие <i>T</i> -нарушения	91
5.3	Нарушение <i>T</i> -инвариантности в модели двух флейворов	92
5.4	Нарушение <i>T</i> -инвариантности в модели трех флейворов	98
5.5	Дискретные симметрии вероятностей переходов	101
	Заключение	105
	Приложения	108
	А Спиновые проекторы	108
	В Свойства матриц Паули	110
	Литература	112

Введение

Исследование осцилляций нейтрино является одним из важнейших направлений современной физики. Когда Паули высказал гипотезу о существовании нейтрино в письме Тюбингенскому конгрессу 1930 года, предполагалось, что экспериментальное обнаружение этой частицы невозможно. Тем не менее, предположение о существовании нейтрино позволяло объяснить наблюдаемый спектр бета-распада и обеспечить выполнение закона сохранения энергии в этом процессе, что дало Э. Ферми возможность разработать теорию бета-распада [1]. Однако несмотря на крайне малое сечение взаимодействия с веществом, впоследствии все же удалось экспериментально обнаружить реакторные антинейтрино [2–4]. Примерно в то же время производилась безуспешная попытка детектирования нейтрино от того же реактора [5], что доказало, что нейтрино и антинейтрино не являются тождественными частицами.

Тем не менее, после экспериментального обнаружения нейтрино интерес к этой частице не утих: еще в 1940-х годах Шоичи и Саката предположили существование нейтрино различных типов [6]. Однако поиски второго типа нейтрино начались значительно позже, а именно после публикации работ Дж. Швингера [7] и Дж. Файнберга [8]. Вскоре действительно удалось доказать экспериментально, что мюонное и электронное нейтрино являются разными частицами [9]. Открытие τ -лептона в середине 70-х годов [10, 11] и обнаружение третьего флейвора нейтрино [12], связанного с этой частицей, разделяет почти 30 лет. Наличие третьего типа нейтрино хорошо согласуется с идеологией Стандартной модели (см., например, [13–15]). В настоящее время из исследований распада Z -бозона получена оценка на количество

типов легких ($m < m_Z/2$) массивных нейтрино 2.9963 ± 0.0074 [16, 17] (см. также [18]). Предположение о существовании тяжелых нейтрино, позволяющее, в частности, объяснить малость масс нейтрино за счет see-saw механизма (см., например, [19–21]), является одной из гипотез, выходящих за рамки Стандартной модели и пока никак не подтвержденных экспериментально.

Однако, хотя наблюдаемое число типов нейтрино вполне соответствует теоретическим предсказаниям, эта замечательная частица все же сумела преподнести исследователям настоящий сюрприз. В конце 60-х годов выяснилось, что верхнее экспериментальное ограничение на поток нейтрино от Солнца [22] существенно меньше предсказанного теоретически значения [23]. Для объяснения дефицита солнечных нейтрино было предложено много оригинальных идей. Однако в конце концов общепринятой стала именно идея осцилляций нейтрино — самопроизвольных периодических переходов нейтрино из одного типа в другой.

Еще в 1957 году Б. Понтекорво [24] предположил возможность периодических переходов нейтрино в антинейтрино и обратно по аналогии с осцилляциями K^0 -мезонов [25], которые должны возникать вследствие обнаруженного Дж. Крониным и В. Фитчем [26] нарушения CP -четности в распадах этих частиц. В последствии оказалось, что осцилляции нейтрино действительно существуют, однако представляют собой не переходы между нейтрино и антинейтрино, а переходы нейтрино разных флейворов друг в друга. Экспериментальное обнаружение осцилляций нейтрино [27, 28] было отмечено Нобелевской премией 2015 года, однако до сих пор нет единого мнения по вопросу математически корректного описания этого явления.

Обычно для описания осцилляций используется феноменологическая теория, основанная на идеях Б. Понтекорво [24, 29], а также З. Маки, М. Накагавы и С. Сакаты [30]. Изложение ее основ дано в большом количестве монографий и обзорных статей (см., например, [31–39]). Обязательным условием наличия осцилляций в этой теории является наличие у нейтрино трех различных масс, хотя бы две из которых отличны от нуля. Выводы

феноменологической теории справедливы, когда энергия нейтрино велика по сравнению с массами всех типов нейтрино $m_\nu^2/\mathcal{E}_\nu^2 \ll 1$ (см., например, [34, 35]), что вполне достаточно для описания всех существующих на данный момент экспериментальных данных.

Использование феноменологической теории обусловлено тем, что осцилляции нейтрино не описываются Стандартной моделью электрослабых взаимодействий даже в ее минимально расширенном варианте, включающем правый синглет массивных нейтрино. Действительно, осцилляции предполагают превращение друг в друга свободных фундаментальных фермионов, имеющих одинаковые электрослабые квантовые числа. В отличие от осцилляций K^0 -мезонов, являющихся составными частицами, такой процесс невозможно описать с помощью фейнмановских диаграмм, соответствующих взаимодействиям Стандартной модели.

Феноменологическая теория осцилляций предполагает, что в результате процессов с участием частиц Стандартной модели должны образоваться различные массовые состояния нейтрино. Это явление называется смешиванием и не противоречит основным положениям квантовой теории поля – аналогичное явление возникает и в процессах с участием кварков. Значения элементов матрицы смешивания кварков, называемой матрицей Кабиббо–Кобаяши–Маскавы [40, 41], измерены с хорошей точностью (см., например, [18]), в то время как значения элементов матрицы смешивания лептонов, которую принято называть матрицей Понтекорво–Маки–Накагавы–Сакаты, измерены значительно менее точно.

Смешивание является необходимым условием существования осцилляций. Тем не менее, основное предположение, позволяющее описать осцилляции, звучит несколько иначе. Считается, что в результате различных процессов нейтрино рождается в так называемом флейворном состоянии α ($\alpha = e, \mu, \tau$ для электронного, мюонного и таонного нейтрино) (см., например, [35])

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle,$$

где $\mathcal{U}_{\alpha k}$ элементы лептонной матрицы смешивания. При этом предполагается, что волновую функцию флейворного состояния можно записать как суперпозицию волновых функций разных массовых состояний. Далее исследуется эволюция устроенного таким образом состояния, после чего способом, хорошо известным из квантовой механики, вычисляется вероятность обнаружения нейтрино в состоянии с флейвором β

$$W_{\alpha \rightarrow \beta} = |\langle \nu_{\alpha}(t) | \nu_{\beta} \rangle|^2 = \sum_{k,j} \mathcal{U}_{\alpha k}^* \mathcal{U}_{\beta k} \mathcal{U}_{\alpha j} \mathcal{U}_{\beta j}^* e^{-i(E_k - E_j)t}.$$

В случае, если нейтрино являются ультррелятивистскими и пространственные компоненты 4-импульсов всех массовых состояний равны, в результате получают выражения для вероятностей, которые вполне согласуются с экспериментальными данными. Важно отметить, что экспериментальные данные на данный момент получены только для ультррелятивистских нейтрино.

Таким образом, наиболее спорная часть феноменологического подхода состоит в правомерности записи волновой функции флейворного состояния частицы как линейной комбинации волновых функций частиц с разными массами. С точки зрения нерелятивистской квантовой механики состояния, описываемые такими волновыми функциями, запрещены [42]. То есть существует правило суперотбора, которое запрещает состояния, описываемые суперпозицией волновых функций частиц с различными массами. Хорошо известно, что существует аналогичное правило суперотбора по электрическому заряду [43].

Однако для обобщения Стандартной модели, в котором фермионы с одинаковыми электрослабыми квантовыми числами объединены в мультиплеты, возможность построения состояний, описываемых суперпозицией волновых функций массовых состояний, в рамках квантовой теории поля была показана А.Е. Лобановым в работах [44,45]. В диссертации разработан метод описания взаимодействия нейтрино с веществом и электромагнитным полем, основанный на данном подходе. При этом выявлены ранее неизвестные закономерности взаимодействия нейтрино с внешними условиями

и показано, что в частных случаях, для которых сделаны предсказания в рамках феноменологической теории, полученные результаты согласуются с ними.

Цели и задачи работы. Целью диссертации является исследование влияния вещества и электромагнитного поля на распространение нейтрино в рамках квантовополевого подхода.

Научная новизна. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и не имеют аналогов в научной литературе.

Объект исследования. В рамках данного исследования рассматривается эволюция нейтрино в плотной среде и электромагнитном поле в рамках квантовополевого подхода.

Методы исследования. Исследование проводится на основе обобщения Стандартной модели, предложенного в работах [44, 45]. В диссертации волновое уравнение для нейтрино в среде обобщается на случай одновременного взаимодействия с веществом и электромагнитным полем. Так как в настоящее время экспериментально наблюдаются только нейтрино ультрарелятивистских энергий, для исследования основных закономерностей поведения нейтрино в диссертации выводится и используется квазиклассический предел этого уравнения. Поскольку в общем случае для записи аналитического решения квазиклассического уравнения эволюции даже в случае постоянных внешних условий требуется решить алгебраическое уравнение высокой степени, в диссертации в явном виде вычисляются вероятности спин-флейворных переходов нейтрино в различных частных случаях. Случай распространения нейтрино в неоднородном электромагнитном поле исследуется в рамках адиабатического приближения. Все формулы получены аналитически. Выводы делаются на основе этих формул.

Положения, выносимые на защиту:

1. Получено квазиклассическое уравнение эволюции нейтрино, позволяющее описать как флейворные осцилляции, так и поворот спина нейтрино в веществе и электромагнитном поле.

2. Обнаружены корреляции между поворотом спина и осцилляциями нейтрино в плотной среде в модели двух флейворов. Выявлена зависимость вероятностей спин-флейворных переходов от начального флейвора нейтрино.
3. Исследовано распространение нейтрино в однородном электромагнитном поле в приближении двух флейворов с учетом переходных магнитных моментов. Выявлена зависимость вероятностей спин-флейворных переходов в электромагнитном поле от начального флейвора нейтрино.
4. Рассмотрено распространение нейтрино в переменном электромагнитном поле в адиабатическом приближении. Показано, что поведение вероятностей спин-флейворных переходов для нейтрино в электромагнитном поле при учете переходных магнитных моментов может носить резонансный характер, причем наличие и выраженность резонанса в электромагнитном поле зависят от начальной поляризации нейтрино.
5. Найдено, что при учете взаимодействия нейтрино одновременно как с плотной средой, так и с электромагнитным полем, вероятности содержат нарушающие T -инвариантность вклады, которые отличны от нуля даже в случае вещественной матрицы смешивания и являются следствием влияния внешних условий. Показано, что в присутствии электромагнитного поля поведение левого нейтрино в среде из частиц и правого анинейтрино в среде из античастиц различно.

Теоретическая и практическая значимость работы. Основная теоретическая значимость заключается в том, что построен способ описания ультрарелятивистских нейтрино, взаимодействующих с веществом и электромагнитным полем, обоснованный в рамках квантовой теории поля. Предложенный подход позволяет воспроизвести основные результаты феноменологической теории осцилляций, однако также позволяет описать и неизвестные ранее эффекты, что и сделано в диссертации.

Достоверность и обоснованность результатов. Достоверность результатов подтверждается согласием частных случаев полученных формул с результатами феноменологического подхода. В частности, при изучении резонанса в электромагнитном поле получены выражения, похожие по форме на выражения для резонанса Михеева–Смирнова–Вольфенштейна. Выражения для вероятности поворота спина в поле дипольного поля согласуются с вероятностью поворота спина массивной частицы в поле дипольного типа, если положить массы различных состояний нейтрино равными. Все вероятности, полученные в диссертации, сводятся к вероятностям осцилляций в вакууме, если положить характеристики внешних условий равными нулю.

Личный вклад соискателя. Основные идеи и положения диссертации изложены в работах [46–51]:

- Лобанов А. Е., Чухнова А. В. Осцилляции нейтрино в однородной движущейся среде. // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2017. — Т. 58, № 5. — С. 22. **ИФ WoS: 0.536.** WoS.
- Chukhnova A. V., Lobanov A. E. Neutrino flavor oscillations and spin rotation in matter and electromagnetic field. // Phys. Rev. D. — 2020. — Vol. 101. — P. 013003. **ИФ WoS: 5.296.** WoS.
- Лобанов А. Е., Чухнова А. В. Асимметрия распространения левополяризованных нейтрино в неоднородном магнитном поле. // ЖЭТФ. — 2021. — Т. 160, № 4(10). — С. 595. **ИФ WoS: 1.111.** WoS.
- Chukhnova A. V., Lobanov A. E. Resonance enhancement of neutrino oscillations due to transition magnetic moments. // Eur. Phys. J. C. — 2021. — Vol. 81. — P. 821. **ИФ WoS: 4.590.** WoS.
- Chukhnova A. V., Lobanov A. E. T violation without complex entries in the lepton mixing matrix. // Phys. Rev. D. — 2022. — Vol. 105. — P. 073010. **ИФ WoS: 5.296.** WoS.

- Лобанов А. Е., Чухнова А. В. Нарушение T -симметрии в осцилляциях нейтрино. // ЖЭТФ. — 2022. — Т. 162. — С. 364. **ИФ WoS: 1.111.** WoS.

Вклад автора в указанные работы является определяющим.

Апробация результатов. По результатам, изложенным в диссертации, были сделаны следующие доклады на всероссийских и международных конференциях и семинарах:

1. Лобанов А. Е., Чухнова А. В. «Осцилляции нейтрино в однородной движущейся среде». Ломоносовские чтения – 2017, Москва, Россия, 17–26 апреля 2017.
2. Лобанов А. Е., Чухнова А. В. «Волновые функции нейтрино в веществе». Ломоносовские чтения — 2018, Москва, Россия, 16–25 апреля 2018.
3. Chukhnova A. V., Lobanov A. E. «Stationary and non-stationary solutions of the evolution equation for neutrino in matter». 20th International Seminar on High Energy Physics QUARKS-2018, Валдай, Россия, 27 мая – 2 июня 2018.
4. Chukhnova A. V., Lobanov A. E. «Quantum-field theoretical description of neutrino propagation in dense matter and electromagnetic field». 19-я ломоносовская конференция по физике элементарных частиц, Москва, Россия, 22–28 августа 2019.
5. Chukhnova A. V., Lobanov A. E. «Neutrino evolution in dense matter and electromagnetic field». The XXIV International Workshop High Energy Physics and Quantum Field Theory QFTHEP-2019, 22–29 сентября 2019.
6. Чухнова А. В. «Влияние движущейся среды и электромагнитного поля на осцилляции нейтрино». Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2020», 10–27 ноября 2020.

7. Chukhnova A. V., Lobanov A. E. «T-violation in neutrino spin-flavor transition probabilities in the two-flavor model» (стендовый). XXX International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics, Virtual Seoul, Korea, 30 мая — 4 июня 2022.
8. Лобанов А. Е., Чухнова А. В. "Нарушение T-инвариантности в осцилляциях нейтрино в плотной среде и электромагнитном поле". International Conference on Quantum Field Theory, High-Energy Physics, and Cosmology, Дубна, Россия, 17–22 июля 2022.
9. Chukhnova A. V. «T-violation in neutrino spin-flavor transition probabilities in the case of real mixing matrix» (стендовый). Мемориальная конференция памяти академика А.А. Славнова, Москва, Россия, 21 — 22 декабря 2022.

Доклады 1–7, 9 были сделаны автором лично.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Полный объем диссертации 126 страниц, число рисунков 12, список литературы включает 139 ссылок.

В **Главе 1** даны основы используемой модели и показана возможность построения пространства Фока для нейтрино с определенным флейвором. Далее в соответствии с работой [52] приведен квантовополевой вывод уравнения, которое описывает нейтрино в плотной среде. С учетом результатов работ К. Фуджикавы и Р. Шрока [53, 54], в которых исследовалось взаимодействие нейтрино с электромагнитным полем (идея использованного ими подхода восходит еще к работе В. Паули [55]), в работе [47] нам удалось записать волновое уравнение в случае одновременного взаимодействия нейтрино как с веществом, так и с электромагнитным полем. Так как все экспериментальные результаты в настоящее время удается получить только для нейтрино ультрарелятивистских энергий, именно этот случай заслуживает особого внимания. Для описания ультрарелятивистских нейтрино в конце **Главы 1** выведено уравнение эволюции нейтрино в квазиклассическом

приближении [46, 47], описывающее как осцилляции, так и поворот спина нейтрино в веществе и электромагнитном поле. На основе этого уравнения в последующих главах получены аналитические выражения для вероятностей спин-флейворных переходов в различных случаях.

В **Главе 2** исследуется распространение нейтрино в среде. Как в большинстве работ, посвященных данному вопросу, исследование производится в модели двух флейворов. Принципиальное отличие используемого подхода от феноменологической теории состоит в том, что наряду с флейворными осцилляциями в нашей модели автоматически учитывается явление поворота спина нейтрино.

Как хорошо известно, в рамках феноменологической теории осцилляций взаимодействие нейтрино с веществом описывается эффективным потенциалом, связанным с рассеянием нейтрино вперед на фермионах среды [56]. Это взаимодействие меняет картину флейворных осцилляций. В частности, если среда не является однородной, оно приводит к эффекту Михеева–Смирнова–Вольфенштейна [57], который может быть использован для объяснения дефицита солнечных нейтрино. Данный вопрос был детально рассмотрен в работе [58]. В диссертации взаимодействие нейтрино с веществом описывается с помощью четырехмерных эффективных потенциалов, которые учитывают как скорость движения различных компонент среды, так и их поляризацию. В соответствии с результатами наших работ [46, 47] в **Главе 2** исследованы корреляции между флейворными осцилляциями и поворотом спина нейтрино в веществе. Показано, что в случае движущейся или поляризованной среды эти процессы нельзя рассматривать независимо. Более того, из явного вида выражений для вероятностей следует, что вероятности переходов существенно зависят от начального флейвора нейтрино.

В **Главе 3** исследуется распространение нейтрино в электромагнитном поле. В соответствии с [47] в модели двух флейворов показывается необходимость введения эффективного угла смешивания для нейтрино в случае, если учитываются не только диагональные, но и переходные магнитные

моменты нейтрино. При этом в общем случае требуется вводить два угла смешивания — по одному на каждое из собственных состояний спинового интеграла движения нейтрино. Важно отметить, что выражение для косинуса одного из этих углов содержит в знаменателе величину, имеющую минимум при определенном значении энергии нейтрино и напряженности внешнего поля, что указывает на возможность резонансного поведения вероятностей спин-флейворных переходов в электромагнитном поле, напоминающего резонанс Михеева–Смирнова–Вольфенштейна в веществе.

Вообще говоря, наличие резонансного знаменателя у косинуса эффективного угла смешивания не обязательно должно приводить к резонансному поведению вероятностей переходов. Поэтому в **Главе 4** детально исследуется случай неоднородного электромагнитного поля. В этой главе, в соответствии с работой [48] получено условие адиабатичности, которое позволяет по аналогии с эффектом Михеева–Смирнова–Вольфенштейна исследовать поведение вероятностей при медленно меняющемся поле, и проверено предположение о наличии резонанса в указанном случае. При исследовании магнитного поля с медленно меняющейся напряженностью показано, что резонанс действительно имеет место. Также обнаружена существенная зависимость поведения вероятностей как от угла между скоростью нейтрино и вектором магнитной индукции, так и от поляризации нейтрино. Из полученных выражений следует, что при определенной поляризации нейтрино резонанса может не быть вовсе. Также в **Главе 4** рассматривается поведение нейтрино в дорезонансной области, которое исследовалось в работе [49]. В этом случае влияние переходных магнитных моментов не является существенным вследствие их малой величины, и удастся получить явный вид вероятностей в модели трех флейворов. При исследовании частного случая поля дипольного типа обнаружена угловая асимметрия вероятности обнаружения нейтрино, имеющего левую спиральность, на больших расстояниях от источника.

В **Главе 5** на основе наших работ [50, 51] рассматривается одновременное влияние вещества и электромагнитного поля на распространение

нейтрино. Оказалось, что даже в модели двух флейворов, в которой все элементы матрицы смешивания вещественны, за счет влияния постоянных внешних условий возможно нарушение T -инвариантности в выражениях для вероятностей спин-флейворных переходов уже в простейшем случае, когда взаимодействие со средой осуществляется только через нейтральные токи и учитываются только диагональные магнитные моменты нейтрино. Далее получено достаточное условие T -нарушения в общем случае, а также показано, что в модели трех флейворов T -нарушение может быть вызвано не только наличием мнимого вклада в матрицу смешивания, описываемого инвариантом Ярлског [59], но и влиянием внешних условий. В результате анализа полученных формул в этой главе делается вывод, что в присутствии электромагнитного поля поведение левого нейтрино в среде из частиц и правого антинейтрино в среде из античастиц отличаются знаком T -нарушающего слагаемого.

В Заключение приведены итоги выполненного исследования.

В Приложениях приведен вывод достаточно простых, но полезных формул, которые используются при вычислениях.

В диссертационной работе используется хевисайдова система единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

Глава 1

Квантовополевое описание эволюции нейтрино

1.1 Используемая модель

Исследованию осцилляций нейтрино посвящено большое количество работ, основанных на использовании различных подходов [60–73]. В рамках феноменологической теории широкое развитие получили исследования как с точки зрения квантовой механики (см., например, [60]), так и с привлечением методов квантовой теории поля (см., например, [61]). На данный момент широко используется описание осцилляций на основе волновых пакетов (см. [63, 64]). Более полный список работ, основанных на таком подходе, можно найти, например, в монографии [35]. Также популярен подход к объяснению осцилляций на основе вида пропагатора нейтрино [61]. Описание осцилляций с помощью модифицированного пропагатора нейтрино в рамках квантовой теории поля предложено в работах И.П. Волобуева [65, 66].

Тем не менее, для исследования нейтрино на основе формализма матрицы рассеяния, являющегося общепринятым в квантовой теории поля и предложенного еще в работах [74–76], необходимо построить пространство Фока. Попытки построить пространство Фока для флейворных состояний нейтрино, являющихся суперпозицией состояний с разными массами, предпринимались неоднократно [67–73], однако долгое время оставались

безуспешными в связи с математическими трудностями, обсуждение которых можно найти, например, в кратком обзоре [77].

Одна из первых таких попыток была выполнена в работе [67], однако полученные в этой работе операторы рождения и уничтожения не удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям, что делает невозможным использование теории возмущений в представлении взаимодействия. Для решения этой проблемы Бласон и Витиелло (см., например, [69]) предложили использовать операцию, аналогичную преобразованию Боголюбова. Однако, как было показано в работе [68], при таком подходе вакуум теории является нестабильным (см. также [78]). Возникновение указанных проблем обусловлено тем, что переход от массового базиса к флейворному, осуществляемый только с помощью унитарной матрицы смешивания, не является унитарной операцией (см., например, [79]).

Квантовополевое описание состояния частицы, представляющего собой суперпозицию состояний с разными массами, оказывается в принципе невозможным, если считать, что частица описывается неприводимым представлением группы Пуанкаре, как это делается обычно¹ (см., например, [80]). Действительно, хорошо известно, что неприводимые представления группы Пуанкаре характеризуются двумя операторами Казимира, один из которых представляет собой квадрат канонического импульса и определяет квадрат массы частицы m^2 , а второй представляет собой квадрат вектора Паули–Любаньского–Баргмана и определяет произведение $-m^2 s(s + 1)$, где s — спин частицы (см. [81]). Таким образом, невозможно построить представление группы Пуанкаре, описывающее частицу с неопределенной массой. Тот факт, что экспериментальные данные вполне согласуются с феноменологической теорией осцилляций, приводит к необходимости либо полностью переопределить понятие частицы в релятивистской квантовой теории, либо отождествить частицу с представлением более общей группы симметрии. Именно последний вариант был реализован в работах [44, 45],

¹Для описания частиц со спином $1/2$, как правило, используется дираковское представление группы Пуанкаре.

что позволило построить единое пространство волновых функций для всех трех типов нейтрино.

Как хорошо известно [82–85], взаимодействующие поля удается описать только в том случае, если расширенная группа симметрии устроена как прямое произведение группы Пуанкаре и группы внутренней симметрии. По этой причине мы будем рассматривать группу симметрии, представляющую собой прямое произведение группы Пуанкаре и группы внутренней симметрии $SU(3)$. При таком подходе частицы разных поколений, обладающие одинаковыми электрослабыми квантовыми числами, объединяются в мультиплеты.

В связи с теоремой Йоста² [86, 87] обычно делается вывод, что построение мультиплета, характеризующегося несколькими различными массами, невозможно (см., например, [88]). Тем не менее, если построить представление прямого произведения указанных групп так, как было сделано в работах [44, 45], то возможно описать мультиплет частиц с разными массами. Для построенного в этих работах представления сумма квадратов операторов дифференцирования по координатам не является оператором Казимира, и, таким образом, может быть различна для разных компонент мультиплета. Стоит отметить, что на возможность построения такого представления есть косвенные указания еще в книге [89], написанной до работ [86, 87].

1.2 Группа симметрии теории

Как указывалось выше, выберем в качестве расширенной группы симметрии прямое произведение группы Пуанкаре и группы $SU(3)$. Выбор в качестве группы внутренней симметрии группы $SU(3)$ отвечает экспери-

²Пусть G — конечномерная связная группа Ли, содержащая группу Пуанкаре в качестве аналитической подгруппы. Пусть U — непрерывное унитарное представление G в гильбертовом пространстве H , а P_μ — оператор 4-импульса. Пусть спектр P_μ содержится в $\{0\} \cup V^+$, где V^+ — конус будущего в пространстве Минковского M^4 . Если оператор массы $m = (P_\mu P^\mu)^{1/2}$ имеет изолированное собственное значение $m_1 > 0$, то соответствующее собственное подпространство H^1 инвариантно относительно U .

ментальным данным о существовании трех поколений нейтрино, а также соответствует стандартным предположениям, используемым в феноменологической теории осцилляций.

Построим неприводимое представление расширенной группы симметрии как тензорное произведение фундаментального представления группы $SU(3)$ и дираковского представления группы Пуанкаре. Генераторы фундаментального представления группы $SU(3)$ можно выбрать в виде матриц Гелл–Манна. Для дираковского представления группы Пуанкаре вид генераторов хорошо известен

$$P_\mu = i\partial_\mu, \quad M_{\mu\nu} = i \left((x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + \frac{\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu}{4} \right). \quad (1.1)$$

Явный вид элементов алгебры Ли для расширенной группы симметрии можно выбрать как матрицы Гелл–Манна и генераторы (1.1), умноженные на \mathbb{I} — единичную матрицу 3×3 . Условие неприводимости такого представления выглядит следующим образом:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu\mathbb{I} - m\mathbb{I})\Psi(x) = 0, \quad (1.2)$$

где $\Psi(x)$ — 12-компонентные функции, на которые действуют операторы представления группы симметрии теории, и m — вещественное число.

Для решений с положительной частотой можно выбрать базис

$$\Psi_{p,\zeta,l}(x) = \frac{1}{\sqrt{2p_0}} u_{p,\zeta} e^{-i(px)} e^{(l)}, \quad (1.3)$$

где $e^{(l)}$ ($l = 1, 2, 3$) — базис трехмерного векторного пространства над полем комплексных чисел, который для определенности можно выбрать как $e^{(1)} = \{1, 0, 0\}^T$, $e^{(2)} = \{0, 1, 0\}^T$, $e^{(3)} = \{0, 0, 1\}^T$. В выражении (1.3) $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, а $u_{p,\zeta}$ — биспинор, являющийся решением уравнения Дирака с массой m и нормированный условием $\bar{u}_{p,\zeta} u_{p,\zeta'} = 2m\delta_{\zeta,\zeta'}$ (индексы $\zeta, \zeta' = \pm 1$ соответствуют поляризации частиц). Базис волновых функций с отрицательной частотой также строится аналогичным образом на основе соответствующих решений уравнения Дирака. Явный вид биспиноров

$u_{p,\zeta}$, а также биспиноров $u_{-p,\zeta}$, требующихся для построения решений с отрицательной частотой, можно найти, например, в книге [90].

Введем скалярное произведение в виде

$$(\Psi, \Phi) = \sum_{l=1}^3 \int d\mathbf{x} \Psi_l^\dagger(\mathbf{x}, t) \Phi_l(\mathbf{x}, t), \quad (1.4)$$

где суммирование производится по трем компонентам вектора при разложении по базису $e^{(l)}$, которые представляют собой биспиноры Ψ_l, Φ_l . Тогда исследуемое пространство является прямой суммой пространств неприводимых представлений группы Пуанкаре, отвечающих массе m . Таким образом, построенное пространство представления описывает мультиплет, все компоненты которого имеют одну и ту же массу m .

Однако возможно и представление, которое описывает мультиплет частиц с разными массами. Такое пространство представления удастся построить, так как алгебра дифференцирований группы Пуанкаре содержит не только генераторы трансляций P^μ и генераторы лоренцевских поворотов $M^{\mu\nu}$, но и генератор дилатаций (растяжений) D , удовлетворяющий следующим коммутационным соотношениям (см., например, [88])

$$[P^\mu, D] = P^\mu, \quad [M^{\mu\nu}, D] = 0, \quad (1.5)$$

Наличие такого элемента в алгебре дифференцирований приводит к существованию внешнего автоморфизма. Используя оператор дилатаций, можно построить сплетающий оператор, связывающий описанное выше представление с отличным от него представлением расширенной группы симметрии. Так как масса частицы связана с операторами дифференцирования по координатам, то именно сплетающий оператор, содержащий растяжение координатного пространства, позволяет от пространства представления, характеризующегося всего одной массой m , перейти к другому пространству представления, характеризующемуся сразу несколькими различными массами. В этом смысле различие масс фермионов Стандартной модели можно рассматривать как следствие изменения координат пространства

событий для разных частиц, а параметры растяжения связать с юкавскими константами.

Получим явный вид сплетающего оператора. Для этого сначала подействуем на выбранные ранее базисные векторы $e^{(l)}$ унитарной матрицей V^i и получим новый ортонормированный базис $n^{(l)}$

$$n_s^{(l)} = \sum_{r=1}^3 V_{sr}^i e_r^{(l)}. \quad (1.6)$$

Мы можем проводить эту операцию для разных мультиплетов частиц, используя в общем случае различные матрицы V^i , индекс i может принимать значения $i = e, \nu, u, d$ для заряженных лептонов, нейтрино, верхних кварков или нижних кварков соответственно.

Далее с помощью полученного таким образом базиса запишем ортогональные проекторы

$$P_l^{(i)} = n^{(l)} \otimes n^{*(l)}, \quad P_l^{(i)} P_k^{(i)} = \delta_{lk} P_l^{(i)}, \quad \sum_{l=1,2,3} P_l^{(i)} = \mathbb{I}. \quad (1.7)$$

Используя соображения, приведенные в работах [44, 45], можно записать явный вид искомого сплетающего оператора как

$$\mathcal{K}^{(i)} = \sum_{l=1}^3 \mathcal{D}_{(l)}^{(i)} (n^{(l)} \otimes e^{(l)}), \quad (1.8)$$

где $\mathcal{D}_{(l)}^{(i)}$ определяются выражением

$$\mathcal{D}_{(l)}^{(i)} = \exp \left(\ln \mu_l^{(i)} \left(x_\nu \partial^\nu + \frac{3}{2} \right) \right) \quad (1.9)$$

и зависят от произвольных положительных чисел $\mu_l^{(i)}$, физический смысл которых будет ясен позже.

Сплетающий оператор (1.8) позволяет построить новое пространство представления, для которого условие неприводимости выглядит следующим образом:

$$\mathcal{K}^{(i)} (i\gamma_\mu \partial^\mu \mathbb{I} - m\mathbb{I}) \mathcal{K}^{(i)-1} \Psi^{(i)}(x) = 0. \quad (1.10)$$

Построенное таким образом представление унитарно эквивалентно тензорному, однако, как будет видно далее, оно может иметь совершенно другой физический смысл, в связи с чем уместно вспомнить замечание Дирака, произнесенное во время дискуссии на XII Сольвеевском конгрессе “Теория поля”³.

Приведем соотношение (1.10) к более привычному виду. Так как на решениях уравнения Дирака выполняется соотношение

$$[(i\gamma^\mu \partial_\mu \mathbb{I} - m\mathbb{I}), D] = i\gamma^\mu \partial_\mu \mathbb{I} = m\mathbb{I}, \quad (1.11)$$

то оператор в левой части уравнения (1.10) можно переписать как

$$\mathcal{K}^{(i)} (i\gamma_\mu \partial^\mu \mathbb{I} - m\mathbb{I}) \mathcal{K}^{(i)-1} = \left(i\gamma_\mu \partial^\mu \mathbb{N}^{(i)} - m\mathbb{I} \right), \quad (1.12)$$

где

$$\mathbb{N}^{(i)} = \sum_{l=1}^3 (\mu_l^{(i)})^{-1} \mathbb{P}_l^{(i)}. \quad (1.13)$$

Матрицы $\mathbb{N}^{(i)}$ невырожденные, если все три числа $\mu_l^{(i)}$ выбраны отличными от нуля. В этом случае существует обратная матрица

$$\left(\mathbb{N}^{(i)} \right)^{-1} = \sum_{l=1}^3 \mu_l^{(i)} \mathbb{P}_l^{(i)} \quad (1.14)$$

и условие неприводимости построенного таким образом представления принимает более привычный вид

$$\left(i\gamma_\mu \partial^\mu \mathbb{I} - \mathbb{M}^{(i)} \right) \Psi^{(i)} = 0, \quad (1.15)$$

где $\mathbb{M}^{(i)} = m \left(\mathbb{N}^{(i)} \right)^{-1}$. Диагональную матрицу $\mathbb{M}^{(i)}$ с собственными значениями $m_l^{(i)} = m\mu_l^{(i)}$ мы будем называть массовой матрицей мультиплетта.

³В книге: П.А.М. Дирак, Собрание научных трудов, том 3. стр. 341. М.: Физматлит, 2004.: “Некоторые из моих коллег, мыслящих математически, говорили мне о том, что все представления неоднородной группы Лоренца давно известны. Под этими словами неявно подразумевается, что они знают все представления, необходимые в квантовой теории поля. Однако эти математики предполагают, что два представления эквивалентны, если они связаны унитарным преобразованием. При этом подразумевается, что нахождение любого унитарного преобразования тривиально. Огромные усилия в атомной физике сосредоточены на попытках найти S-матрицу, которая, будучи унитарным преобразованием, при этом отнюдь не является тривиальной.”

Таким образом, для того, чтобы получить массовую матрицу, собственные значения которой совпадают с массами частиц Стандартной модели, требуется специальным образом выбрать параметры $\mu_l^{(i)}$, содержащиеся в операторе (1.9) и, следовательно, в сплетающем операторе (1.8). При этом пространства представлений, построенные таким образом для разных мультиплетов частиц, в общем случае не совпадают.

Введем базис $\Psi_{q,\zeta,\mu_l^{(i)}}^{(i)}$ в пространстве волновых функций нейтрино. Его можно построить, подействовав оператором $\mathcal{K}^{(i)}$ на функции (1.3)

$$\Psi_{q,\zeta,\mu_l^{(i)}}^{(i)}(x) = \frac{(\mu_l^{(i)})^{3/2}}{\sqrt{2q^0}} u_{q,\zeta} e^{-i\mu_l^{(i)}(qx)} n^{(l)}, \quad (1.16)$$

где $q^0 = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}$, а биспиноры $u_{q,\zeta}$ удовлетворяют уравнению

$$(\gamma^\mu q_\mu - m)u_{q,\zeta} = 0, \quad \bar{u}_{q,\zeta} u_{q,\zeta'} = 2m\delta_{\zeta,\zeta'}. \quad (1.17)$$

Явный вид генераторов представления можно найти в работах [44, 45]. Для нас наиболее интересным является тот факт, что генераторы трансляций построенного таким образом представления отличаются от канонического импульса:

$$P_\mu^{(i)} = \mathcal{K}^{(i)} P_\mu \mathcal{K}^{(i)-1} = i\partial_\mu \mathbb{N}^{(i)}, \quad (1.18)$$

а генераторы лоренцевских поворотов свой вид не меняют, так как коммутируют с оператором дилатаций (см. (1.5)).

Оператор Казимира $P_\mu^{(i)} P^{\mu(i)}$ для этого представления имеет то же собственное значение, что и для тензорного произведения представлений

$$P_\mu^{(i)} P^{\mu(i)} \Psi^{(i)} = m^2 \Psi^{(i)}, \quad (1.19)$$

однако теперь вид этого оператора отличается от суммы квадратов дифференцирования по координатам, и мы не интерпретируем m^2 как квадрат наблюдаемой массы частицы.

Так как коммутатор (1.11) отличен от нуля при $m \neq 0$, то можно построить разные пространства представления, описывающие мультиплеты массивных фермионов, которые будут отличаться выбранными значениями $\mu_l^{(i)}$. При этом конкретное значение m не играет существенной роли,

так как смысл наблюдаемых масс фермионов имеют произведения $m\mu_l^{(i)}$. Таким образом, одно и то же пространство возможно построить, используя разные затравочные массы m . Последний факт позволяет выбрать параметр m одинаковым для всех мультиплетов и связать эту величину с вакуумным ожиданием поля Хиггса, а параметры $\mu_l^{(i)}$ — с юкавскими константами.

Используя такой подход, можно рассматривать нейтрино с разными массами не как самостоятельные частицы, а как различные квантовые состояния одного и того же мультиплета. Для того, чтобы работать с построенными мультиплетными в рамках квантовой теории поля, требуется обобщить лагранжиан Стандартной модели, оставив при этом основные его свойства неизменными. При этом под Стандартной моделью будем понимать Стандартную модель, дополненную правыми синглетами массивных нейтрино.

1.3 Квантовополевое описание нейтрино в вакууме

Объединим в мультиплеты все фундаментальные частицы, обладающие одинаковыми электрослабыми квантовыми числами. Таким образом, лагранжиан будет записан для четырех мультиплетов фермионов, то есть для нейтрино, заряженных лептонов, верхних кварков и нижних кварков. Лагранжиан \mathcal{L} электрослабого сектора Стандартной модели будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}, \quad (1.20)$$

где

$$\mathcal{L}_0 = \frac{i}{2} \sum_{i=\nu,e,u,d} [\bar{\Psi}^{(i)} \gamma^\mu (\partial_\mu \Psi^{(i)}) - (\partial_\mu \bar{\Psi}^{(i)}) \gamma^\mu \Psi^{(i)}] - \sum_{i=\nu,e,u,d} \bar{\Psi}^{(i)} \mathbf{M}^{(i)} \Psi^{(i)} \quad (1.21)$$

лагранжиан свободных полей, а

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{int} = & - \sum_{i=\nu,e,u,d} \bar{\Psi}^{(i)} \mathbb{M}^{(i)} (H/v) \Psi^{(i)} - \\
 & - \frac{g}{2\sqrt{2}} \left(\bar{\Psi}^{(e)} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \Psi^{(\nu)} W_\mu^- + \bar{\Psi}^{(\nu)} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \Psi^{(e)} W_\mu^+ \right) - \\
 & - \frac{g}{2\sqrt{2}} \left(\bar{\Psi}^{(d)} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \Psi^{(u)} W_\mu^- + \bar{\Psi}^{(u)} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \Psi^{(d)} W_\mu^+ \right) - \\
 & - e \sum_{i=e,u,d} Q^{(i)} \bar{\Psi}^{(i)} \gamma^\mu \Psi^{(i)} A_\mu - \\
 & - \frac{g}{2 \cos \theta_W} \sum_{i=\nu,e,u,d} \bar{\Psi}^{(i)} \gamma^\mu \left(T^{(i)} - 2Q^{(i)} \sin^2 \theta_W + T^{(i)} \gamma^5 \right) \Psi^{(i)} Z_\mu \quad (1.22)
 \end{aligned}$$

лагранжиан взаимодействия с векторными бозонами W_μ^\pm , Z_μ , A_μ и полем Хиггса H . Здесь v — вакуумное среднее поля Хиггса, g — константа слабого взаимодействия, θ_W — угол Вайнберга, $e = g \sin \theta_W$ — электрический заряд позитрона, $Q^{(i)}$ — электрический заряд мультиплета в единицах заряда позитрона, T^i — проекция слабого изоспина ($T^{(\nu)} = T^{(u)} = 1/2$, $T^{(e)} = T^{(d)} = -1/2$).

В лагранжиане (1.22) в явном виде не фигурирует матрица смешивания. Смешивание возникает в представлении взаимодействия за счет использования 12-компонентных волновых функций мультиплетов. Если матрицы $\mathbb{V}^{(i)}$, связанные с нейтрино и с заряженными лептонами, одинаковы, мы приходим к модели, описывающей три независимых поколения фермионов. Однако при построении пространства представления мы работали с мультиплетами по отдельности и вполне можем взять эти матрицы различными. В этом случае в членах, описывающих взаимодействие через заряженные токи, автоматически появляется смешивание. Для всех мультиплетов частиц матрицы $\mathbb{V}^{(i)}$, содержащиеся в выражении (1.6) и, соответственно, в сплетающих операторах вида (1.8), следует выбрать таким образом, чтобы определяющая смешивание лептонов матрица

$$\mathbb{U}^{PMNS} = \mathbb{V}^{(e)\dagger} \mathbb{V}^{(\nu)} \quad (1.23)$$

совпадала с матрицей смешивания Понтекорво–Маки–Накагавы–Сакаты,

а определяющая смешивание кварков матрица

$$U^{CKM} = V^{(u)\dagger} V^{(d)} \quad (1.24)$$

совпадала с матрицей Кабиббо–Кобаяши–Маскавы. При этом, по крайней мере в древесном приближении, результаты вычислений процессов будут совпадать с результатами общепринятого подхода, что проиллюстрировано на примере распада π^+ -мезона в работе [45].

При квантовании полевых функций используем стандартную процедуру, описанную, например, в книге [91]. Компоненты полевой функции запишем в виде

$$\begin{aligned} \Psi(x)^{(i)} = & \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=1}^3 \sum_{\zeta=\pm 1} \int \frac{d\mathbf{q}}{\sqrt{2q^0}} (\mu_l^{(i)})^{3/2} n_s^{(l)} \times \\ & \times [e^{-i\mu_l^{(i)}(qx)} u_{q,\zeta} a_{l,\zeta,(i)}^-(\mathbf{q}) + e^{i\mu_l^{(i)}(qx)} u_{-q,\zeta} a_{l,\zeta,(i)}^+(\mathbf{q})], \quad (1.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(x)^{(i)} = & \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=1}^3 \sum_{\zeta=\pm 1} \int \frac{d\mathbf{q}}{\sqrt{2q^0}} (\mu_l^{(i)})^{3/2} n_s^{*(l)} \times \\ & \times [e^{-i\mu_l^{(i)}(qx)} \bar{u}_{-q,\zeta} a_{l,\zeta,(i)}^{*-}(\mathbf{q}) + e^{i\mu_l^{(i)}(qx)} \bar{u}_{q,\zeta} a_{l,\zeta,(i)}^{*+}(\mathbf{q})]. \quad (1.26) \end{aligned}$$

В работах [44,45] показано, что операторы $a_{l,\zeta}^{*+}(\mathbf{q})$ и $a_{l,\zeta}^-(\mathbf{q})$ можно интерпретировать как операторы рождения и уничтожения нейтрино, причем эти операторы удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} \left[a_{l,\zeta,(i)}^-(\mathbf{q}), a_{k,\zeta',(i)}^{*+}(\mathbf{q}') \right]_+ &= \delta_{lk} \delta_{\zeta\zeta'} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}'), \\ \left[a_{l,\zeta,(i)}^{*-}(\mathbf{q}), a_{k,\zeta',(i)}^+(\mathbf{q}') \right]_+ &= \delta_{lk} \delta_{\zeta\zeta'} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}'). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Также удовлетворяет каноническим коммутационным соотношениям и их линейные комбинации вида

$$a_{\alpha,\zeta}^{\pm}(\mathbf{q}) = \sum_{l=1,2,3} \mathcal{U}_{\alpha,l} a_{l,\zeta}^{\pm}(\mathbf{q}), \quad a_{\alpha,\zeta}^{*\pm}(\mathbf{q}) = \sum_{l=1,2,3} \mathcal{U}_{\alpha,l}^* a_{l,\zeta}^{*\pm}(\mathbf{q}), \quad (1.28)$$

где $\mathcal{U}_{\alpha,l}$ — элементы произвольной унитарной матрицы 3×3 . Если в качестве такой матрицы выбрать матрицу U_{PMNS} , то соотношение (1.28)

означает, что построенные операторы являются операторами рождения и уничтожения состояний нейтрино, которые в ультрарелятивистском пределе примерно соответствуют флейворным состояниям, используемым в феноменологической теории осцилляций. Отличие заключается в том, что все компоненты, соответствующие разным массовым состояниям, в нашем случае характеризуются одним квантовым числом q^μ , которое не совпадает с импульсом нейтрино. Использование такого квантового числа отчасти напоминает приближение равных скоростей в феноменологической теории осцилляций.

Теперь для суперпозиции массовых состояний нейтрино указан способ построения пространства Фока. Как следствие, для описания процессов с участием нейтрино в рамках используемой модели можно использовать все стандартные методы квантовой теории поля, в том числе разложение Дайсона. Возможность использования теории возмущений в свою очередь позволяет работать в картине Фарри [92], то есть рассматривать процессы при наличии внешних полей⁴.

В указанном подходе осцилляции нейтрино в вакууме получаются автоматически, так как построенные волновые функции могут описывать частицу, находящуюся в состоянии, являющемся суперпозицией массовых состояний. При этом выражение для длины осцилляций зависит от выбранного набора непрерывных квантовых чисел, описывающих состояние нейтрино. В ультрарелятивистском подходе результаты согласуются с выводами феноменологической теории осцилляций, которые подтверждены экспериментально.

⁴Отметим, что в отечественной литературе этот подход также называют методом точных решений Соколова.

1.4 Уравнение, описывающее взаимодействие с веществом и электромагнитным полем

Как уже указывалось ранее, волновые функции нейтрино удовлетворяют модифицированному уравнению Дирака (1.15)

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu \mathbb{I} - \mathbb{M}^{(\nu)} \right) \Psi^{(\nu)}(x) = 0,$$

где массовая матрица мультиплета нейтрино может быть представлена в виде

$$\mathbb{M}^{(\nu)} = \sum_{l=1}^3 m_l^{(\nu)} \mathbb{P}_l^{(\nu)}. \quad (1.29)$$

Так как пространство Фока для модели успешно построено, использование диаграммной техники возможно не только в древесном приближении, но и для расчета радиационных поправок. В том числе можно записать уравнение, аналогичное уравнению Дирака–Швингера квантовой электродинамики (см., например, [91]).

Будем рассматривать распространение нейтрино в среде, состоящей из электронов, протонов и нейтронов (e, p, n). Таким образом, мы предполагаем, что плотность потока нейтрино достаточно мала для того, чтобы можно было пренебречь эффектом коллективных осцилляций нейтрино, исследованным, например, в работах [93, 94]. Следуя [52], получим уравнение, описывающее взаимодействие нейтрино с веществом. Это взаимодействие, связанное с упругим рассеянием нейтрино вперед на фермионах среды, в рамках квантовой теории поля можно учесть, добавив в волновое уравнение массовый оператор нейтрино. В низшем порядке теории возмущения аналог уравнения Дирака–Швингера для нейтринного мультиплета принимает

вид

$$\begin{aligned}
 & \left(i\gamma^\mu \partial_\mu \mathbb{I} - \mathbb{M}^{(\nu)} \right) \Psi^{(\nu)}(x) + \\
 & + i \frac{g^2}{8} \int d^4 y \gamma^\mu (1 + \gamma^5) S^{(e)}(x, y|\mathbf{g}) \gamma^\nu (1 + \gamma^5) D_{\nu\mu}^W(y - x) \Psi(y) - \\
 & - i \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta_W} \mathbb{I} \sum_{i=e,p,n} \int d^4 y \gamma^\mu (1 + \gamma^5) D_{\mu\nu}^Z(x - y) \times \\
 & \times \text{Tr} \left\{ \gamma^\nu \left(T^{(i)} - 2Q^{(i)} \sin^2 \theta_W + T^{(i)} \gamma^5 \right) S^{(i)}(y, y|\mathbf{g}) \right\} \Psi^{(\nu)}(x) = 0. \quad (1.30)
 \end{aligned}$$

Функции Грина свободных W и Z бозонов обозначены как $D_{\mu\nu}^W(x - y)$ и $D_{\mu\nu}^Z(x - y)$, а $S^{(i)}(x, y|\mathbf{g})$ — функции Грина мультиплетов фермионов в формализме реального времени [95] (см. также [96, 97] и цитированную там литературу) с учетом влияния внешних условий \mathbf{g} , то есть температуры и химического потенциала системы.

Для относительно низких энергий нейтрино, когда $\mathcal{E}_\nu \ll M_W^2/\mathcal{E}_F \lesssim M_W^2/T_f$, $\mathcal{E}_F \lesssim T_f \ll M_W$, где \mathcal{E}_F, T_f — энергия Ферми и температура фермионов среды (см., например, [98]), можно использовать приближение Ферми. Тогда

$$D_{\mu\nu}^W(x - y) \approx \frac{g_{\mu\nu}}{M_W^2} \delta(x - y), \quad D_{\mu\nu}^Z(x - y) \approx \frac{g_{\mu\nu}}{M_Z^2} \delta(x - y) \quad (1.31)$$

и уравнение (1.30) принимает вид

$$\begin{aligned}
 & \left(i\gamma^\mu \partial_\mu \mathbb{I} - \mathbb{M}^{(\nu)} \right) \Psi^{(\nu)}(x) + i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left\{ \gamma^\mu (1 + \gamma^5) S^{(e)}(x, x|\mathbf{g}) \gamma_\mu (1 + \gamma^5) - \right. \\
 & \left. - \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \mathbb{I} \sum_{i=e,p,n} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \left(T^{(i)} - 2Q^{(i)} \sin^2 \theta_W + T^{(i)} \gamma^5 \right) S^{(i)}(x, x|\mathbf{g}) \right\} \right\} \times \\
 & \times \Psi^{(\nu)}(x) = 0, \quad (1.32)
 \end{aligned}$$

где G_F — константа Ферми.

Мнимая часть функции Грина после суммирования по квантовым числам фермионов среды сводится к матрице плотности, то есть $S^{(i)}(x, x|\mathbf{g}) \Rightarrow -i\rho^{(i)}(x, x|\mathbf{g})$. Структура матриц плотности для фермионов со спином 1/2 известна из общих соображений [99]. Так как теперь необходимо рассматривать составляющие частицы среды как компоненты мультиплета, для

соответствующих матриц плотности имеем

$$\varrho^{(i)}(x, x|\mathbf{g}) = \sum_{l=1,2,3} \mathbb{P}_l^{(i)} \frac{n_l^{(i)}}{4p_l^{0(i)}} (\gamma_\alpha p_l^{\alpha(i)} + m_l^{(i)}) (1 - \gamma^5 \gamma_\beta s_l^{\beta(i)}), \quad (1.33)$$

где $m_l^{(i)}$ — массы компонент мультиплета, $n_l^{(i)}$ — плотности компонент мультиплетов, а $p_l^{\alpha(i)}$, $s_l^{\beta(i)}$ — усредненные 4-импульс и 4-поляризация компонент мультиплета.

Уравнение (1.32) может быть представлено в более наглядном виде, если мы введем эффективные потенциалы, связанные с 4-векторами тока $j_l^{\mu(i)}$ и поляризации $\lambda_l^{\mu(i)}$ фермионов среды типа (i)

$$j_l^{\mu(i)} = n_l^{(i)} \frac{p_l^{\mu(i)}}{p_l^{0(i)}} = \{ \bar{n}_l^{(i)} v_l^{0(i)}, \bar{n}_l^{(i)} \mathbf{v}_l^{(i)} \}, \quad (1.34)$$

$$\lambda_l^{\mu(i)} = n_l^{(i)} \frac{s_l^{\mu(i)}}{p_l^{0(i)}} = \left\{ \bar{n}_l^{(i)} (\boldsymbol{\zeta}_l^{(i)} \mathbf{v}_l^{(i)}), \bar{n}_l^{(i)} \left(\boldsymbol{\zeta}_l^{(i)} + \frac{\mathbf{v}_l^{(i)} (\boldsymbol{\zeta}_l^{(i)} \mathbf{v}_l^{(i)})}{1 + v_l^{0(i)}} \right) \right\}. \quad (1.35)$$

В этих формулах $\bar{n}_l^{(i)}$ и $\boldsymbol{\zeta}_l^{(i)}$ ($0 \leq |\boldsymbol{\zeta}_l^{(i)}|^2 \leq 1$) — плотности и средние значения вектора поляризации компонент среды в системе отсчета, где средний импульс фермионов (i) равен нулю. 4-скорость системы отсчета обозначена как $v_l^{\mu(i)} = \{v_l^{0(i)}, \mathbf{v}_l^{(i)}\}$. Ток $j_l^{\mu(i)}$ и поляризация $\lambda_l^{\mu(i)}$ характеризуют фермионы среды как целое. Мы вводим эффективные потенциалы $f^{\mu(e)}$ и $f^{\mu(N)}$, таким образом обобщая подход, предложенный в работе [56]. Потенциал

$$f^{\mu(e)} = \sqrt{2} G_F \left(j^{\mu(e)} - \lambda^{\mu(e)} \right) \quad (1.36)$$

определяет взаимодействие со средой через заряженные токи, потенциал

$$f^{\mu(N)} = \sqrt{2} G_F \sum_{i=e,p,n} \left(j^{\mu(i)} \left(T^{(i)} - 2Q^{(i)} \sin^2 \theta_W \right) - \lambda^{\mu(i)} T^{(i)} \right) \quad (1.37)$$

определяет взаимодействие со всеми фермионами среды через нейтральные токи. Таким образом, волновое уравнение нейтрино принимает вид

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu \mathbb{I} - \mathbb{M} - \frac{1}{2} \gamma^\mu f_\mu^{(e)} (1 + \gamma^5) \mathbb{P}^{(e)} - \frac{1}{2} \gamma^\mu f_\mu^{(N)} (1 + \gamma^5) \mathbb{I} \right) \Psi(x) = 0, \quad (1.38)$$

где $P^{(e)}$ — проектор на состояние нейтрино с электронным флейвором, $M \equiv M^{(\nu)}$ и $\Psi(x) \equiv \Psi^{(\nu)}(x)$.

Подчеркнем, что волновые функции $\Psi(x)$ описывают нейтринный мультиплет в целом. Они представляют собой 12-компонентные объекты, которые преобразуются по тензорному произведению дираковского представления группы Пуанкаре и фундаментального представления группы $SU(3)$. Уравнение (1.38) обобщает уравнение, которое использовалось в работах [100, 101] для описания прецессии спина нейтрино в плотной среде. Если потенциалы не зависят от координат пространства событий, то решения этого уравнения можно записать в виде матричных экспонент, используя метод, развитый в работах [102, 103].

Уравнение (1.38) можно обобщить, добавив в него слагаемые, отвечающие за взаимодействие с электромагнитным полем. Как уже упоминалось, будучи дираковской частицей, нейтрино обладает аномальным магнитным моментом. Вследствие наличия смешивания, нейтрино рождаются и детектируются в определенных состояниях, которые называются флейворными и обычно описываются суперпозицией волновых функций массовых состояний. При этом в рамках Стандартной модели магнитные моменты определены для массовых состояний нейтрино, причем матрица магнитных моментов содержит как диагональные элементы, так и недиагональные, которые называются переходными магнитными моментами. Кроме того, нейтрино также характеризуется дипольными электрическими моментами, матрица которых не содержит элементов на диагонали. Теоретические предсказания для величин этих моментов в рамках Стандартной модели получены еще в работе [54] (см. также [104]), экспериментальное измерение этих величин крайне затруднено вследствие их малых значений.

Таким образом, чтобы обобщить уравнение (1.38) на случай нейтрино, взаимодействующего как с веществом, так и с электромагнитным полем, следует добавить слагаемые, описывающие прямое взаимодействие нейтрино с полем за счет наличия у нейтрино аномальных магнитных и элект-

трических моментов [47] аналогично уравнению Дирака–Паули [55]

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu \mathbb{I} - \mathbb{M} - \frac{1}{2}\gamma^\mu f_\mu^{(e)}(1 + \gamma^5)\mathbb{P}^{(e)} - \frac{1}{2}\gamma^\mu f_\mu^{(N)}(1 + \gamma^5)\mathbb{I} - \right. \\ \left. - \frac{i}{2}F^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\mathbb{M}_d - \frac{i}{2}F^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\mathbb{M}_h - \frac{i}{2}{}^*F^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\mathbb{M}_{ah} \right) \Psi(x) = 0. \quad (1.39)$$

Здесь $F^{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля, ${}^*F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}e^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\rho\lambda}$ — дуальный к нему тензор. Взаимодействие с $\mu^{(ij)}$, $\varepsilon^{(ij)}$ определено с помощью эрмитовых матриц переходных магнитных моментов \mathbb{M}_h и переходных электрических моментов \mathbb{M}_{ah} . В низшем порядке разложения по степеням величины M_l^2/M_W^2 , где M_l ($l = e, \mu, \tau$) — массы заряженных лептонов, M_W — масса W -бозона, матрица диагональных магнитных моментов \mathbb{M}_d пропорциональна массовой матрице с коэффициентом

$$\mu_0 = \frac{3eG_F}{8\sqrt{2}\pi^2}. \quad (1.40)$$

Уравнение (1.39) можно унитарным поворотом привести к такому виду, что содержащаяся в нем массовая матрица \mathbb{M} будет иметь диагональный вид. В этом случае матрицы магнитных и электрических переходных моментов определяются формулами

$$\mathbb{M}_h = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & (m_1 + m_2)k_{12} & (m_1 + m_3)k_{13} \\ (m_2 + m_1)k_{21} & 0 & (m_2 + m_3)k_{23} \\ (m_3 + m_1)k_{31} & (m_3 + m_2)k_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

$$\mathbb{M}_{ah} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & (m_1 - m_2)k_{12} & (m_1 - m_3)k_{13} \\ (m_2 - m_1)k_{21} & 0 & (m_2 - m_3)k_{23} \\ (m_3 - m_1)k_{31} & (m_3 - m_2)k_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.42)$$

где

$$k_{ij} = -\frac{\mu_0}{2} \sum_{l=e,\mu,\tau} \mathcal{U}_{li}^* \mathcal{U}_{lj} \frac{M_l^2}{M_W^2}, \quad (1.43)$$

где M_l ($l = e, \mu, \tau$) — массы заряженных лептонов, M_W — масса W -бозона, \mathcal{U}_{ij} — элементы матрицы смешивания лептонов \mathbb{U} .

Так как в нашей модели уравнение (1.39) возникает вследствие редукции массового оператора нейтрино, диапазон энергий, для которых оно применимо, ограничен только сверху. При этом для нейтрино произвольно низких энергий уравнение остается справедливо и может быть использовано даже для описания реликтовых нейтрино. Стоит отметить, что альтернативный подход к описанию осцилляций нейтрино в электромагнитном поле, основанный на квантовой теории поля, был использован в работе [105], обобщающей предложенный И.П. Волобуевым метод описания осцилляций нейтрино в вакууме [65, 66].

Уравнение (1.39) справедливо для случая, когда внешние условия меняются достаточно медленно и значения внешних полей и потенциалов невелики. Тем не менее, матричная структура уравнения в произвольном случае остается той же.

1.5 Массовые и флейворные состояния

Рассмотрим структуру уравнения (1.38). Как уже было сказано, волновые функции $\Psi(x)$ являются 12-компонентными объектами. Удобно ввести блочную структуру этих объектов, которая определяет волновую функцию как набор дираковских биспиноров $\psi_i(x)$ следующим образом

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

При этом γ -матрицы в уравнении эволюции действуют на компоненты дираковских биспиноров, в то время как матрицы M , $P^{(e)}$, M_d , M_h и M_{ah} переставляют местами $\psi_i(x)$ в $\Psi(x)$.

Аналогично γ -матрицам в обычном уравнении Дирака, матрицы M , $P^{(e)}$, M_h и M_{ah} , действующие на векторы в флейворном пространстве, могут быть записаны в разных представлениях, связанных между собой унитарными преобразованиями. Назовем “массовым представлением” такое представление, при котором массовая матрица диагональна, то есть принимает

вид

$$\mathbb{M}_{mass} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

“Флейворным представлением” назовем такое, в котором проекторы на флейворные состояния принимают вид

$$\mathbb{P}_{fl}^{(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}_{fl}^{(\mu)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}_{fl}^{(\tau)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.46)$$

Массовая матрица и проекторы на состояния с определенным флейвором связаны матрицей смешивания Понтекорво–Маки–Накагавы–Сакаги U (см. [18])

$$\mathbb{P}_{mass}^{(l)} = U^\dagger \mathbb{P}_{fl}^{(l)} U, \quad \mathbb{M}_{fl} = U \mathbb{M}_{mass} U^\dagger. \quad (1.47)$$

Аналогично матрицу любого оператора также можно преобразовать из массового представления в флейворное, используя матрицу смешивания

$$U = U U' U^\dagger, \quad (1.48)$$

где U' — матрица в массовом представлении, которая в общем случае может зависеть от координат, U — матрица того же оператора в флейворном представлении.

Любое решение уравнения (1.38) соответствует какому-то состоянию нейтрино. Мы определяем массовые состояния нейтрино как состояния, описываемые волновыми функциями $\Psi'_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$), которые в любой точке пространства-времени принимают вид

$$\Psi'_1(x) = \begin{pmatrix} \psi'_1(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi'_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi'_2(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi'_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi'_3(x) \end{pmatrix}. \quad (1.49)$$

Стоит отметить, что в случае, если массовая матрица не коммутирует с оператором уравнения (1.38), решений волнового уравнения, соответствующих массовым состояниям, может не существовать. Другими словами,

решения уравнения (1.38) не всегда могут принимать вид (1.49) во всех точках пространства.

Очевидно, что аналогичное определение флейворных состояний нейтрино невозможно ввиду наличия осцилляций даже при распространении в вакууме. Поэтому состояниями нейтрино с определенным флейвором в точке с координатами x^μ мы назовем состояния, которые именно в этой точке описываются волновыми функциями $\Psi_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$), имеющими в флейворном представлении вид

$$\Psi_1(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_3(x) \end{pmatrix}. \quad (1.50)$$

Именно состояния, определенные таким образом, далее будут называться состояниями с определенным флейвором.

1.6 Квазиклассическое приближение

Используя уравнение (1.38), можно изучать поведение нейтрино сколько угодно низких энергий, в том числе и реликтовые нейтрино. Тем не менее, все экспериментальные результаты в физике нейтрино были получены для нейтрино с энергиями, удовлетворяющими условию $m_i^2/\mathcal{E}_\nu^2 \ll 1$. Для таких энергий феноменологический подход к описанию осцилляций вполне справедлив. В нашем подходе в этом случае можно использовать квазиклассическое приближение уравнение (1.38) для описания осцилляций нейтрино. Так как для ультрарелятивистских нейтрино длина волны де Бройля мала, координату пространства событий x^μ в уравнении (1.38) можно интерпретировать как координату нейтрино. В работе [45] было показано, что различные массовые состояния нейтрино в вакууме могут характеризоваться одним и тем же непрерывным квантовым числом w^μ , которое имеет смысл 4-скорости. Как было показано в работе [103], выбор аналогичного квантового числа возможен и для описания распространения незаряженной дираковской массивной частицы, взаимодействующей одновременно

со средой и электромагнитным полем. Поэтому условие $m_l^2/\mathcal{E}_\nu^2 \ll 1$ дает возможность считать, что даже при распространении в веществе и электромагнитном поле мультиплет нейтрино обладает 4-скоростью $u^\mu = \{u^0, \mathbf{u}\}$, которая определяет его прямолинейную траекторию. Тогда эволюция частицы определяется только поворотом ее спина и вращением во флейворном пространстве.

Если мы рассмотрим мультиплет нейтрино, характеризующийся постоянной 4-скоростью u^μ ($u^2 = 1$), то можно сделать подстановку $x^\mu = \tau u^\mu$. Таким образом, эволюция нейтрино характеризуется единственным параметром — собственным временем нейтрино τ . Собственное время связано с длиной пробега L следующим образом

$$\tau = L/|\mathbf{u}|. \quad (1.51)$$

Введем объекты $\Psi^{(\nu)}(\tau)$, которые, по аналогии со спиновыми квазиклассическими волновыми функциями, введенными для описания вращения спина нейтральных частиц в работе [106], назовем спин-флейворными квазиклассическими волновыми функциями. Эти волновые функции описывают когерентные спин-флейворные состояния нейтрино. Соответствующее уравнение эволюции следует из (1.39), если сделать подстановку

$$\gamma^\mu \partial_\mu \Rightarrow \gamma^\mu \left(\frac{\partial \tau}{\partial x^\mu} \right) \frac{d}{d\tau} = \gamma^\mu u_\mu \frac{d}{d\tau}. \quad (1.52)$$

Стоит отметить, что подстановка (1.52) вполне корректна только в случае $u^\mu = \text{const}$. В этом случае спин-флейворные квазиклассические волновые функции нейтрино удовлетворяют условию $\gamma^\mu u_\mu \Psi(\tau) = \Psi(\tau)$, уравнение эволюции принимает вид

$$\left(i\mathbb{I} \frac{d}{d\tau} - \mathcal{F} \right) \Psi(\tau) = 0, \quad (1.53)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \mathbb{M} - \mathbb{M}_d \gamma^5 \gamma^\mu {}^*F_{\mu\nu} u^\nu - \mathbb{M}_h \gamma^5 \gamma^\mu {}^*F_{\mu\nu} u^\nu + \mathbb{M}_{ah} \gamma^5 \gamma^\mu F_{\mu\nu} u^\nu + \\ & + \frac{1}{2} (f^{(e)} u) \mathbb{P}^{(e)} + \frac{1}{2} (f^{(N)} u) \mathbb{I} + \frac{1}{2} R_e \mathbb{P}^{(e)} \gamma^5 \gamma^\sigma s_\sigma^{(e)} \gamma^\mu u_\mu + \frac{1}{2} R_N \mathbb{I} \gamma^5 \gamma^\sigma s_\sigma^{(N)} \gamma^\mu u_\mu. \end{aligned} \quad (1.54)$$

В уравнении (1.54) мы используем следующие обозначения

$$R(f) = \sqrt{(fu)^2 - f^2}, \quad s^\mu(f) = \frac{u^\mu(fu) - f^\mu}{\sqrt{(fu)^2 - f^2}}, \quad (1.55)$$

$$R_e = R(f^{(e)}), \quad R_N = R(f^{(N)}), \quad s_{(e)}^\mu = s^\mu(f^{(e)}), \quad s_{(N)}^\mu = s^\mu(f^{(N)}). \quad (1.56)$$

Так как описание нейтрино производится на основе представления прямого произведения группы внутренней симметрии и группы Пуанкаре, естественным образом учитываются как флейворные осцилляции, так и поворот спина нейтрино, который возникает при распространении массивной частицы во внешних полях. Как хорошо известно, в квазиклассическом приближении уравнение, описывающее поворот спина, называется уравнением Баргмана–Мишеля–Телегди [107], хотя было получено еще в работе Томаса [108]⁵. Для нейтрино в электромагнитном поле эффект поворота спина без учета осцилляций активно исследовался в работах М. Б. Волошина, М. И. Высоцкого и Л. Б. Окуня [110, 111] (см. также обзор [104]). В работе [112] было показано, что наличие плотной среды также приводит к повороту спина нейтрино. Обзор результатов изучения этого эффекта можно найти в работе [113]. Получение релятивистки ковариантного уравнения в виде (1.39), описывающего как осцилляции, так и поворот спина нейтрино в поляризованной движущейся среде и электромагнитном поле, впервые обосновано в нашей работе [47]. Это уравнение обобщает уравнение, использованное в работах [100, 101] для описания прецессии спина массовых состояний нейтрино в веществе. Уравнение, описывающее прецессию спина массового состояния нейтрино и учитывающее взаимодействие как со средой, так и с электромагнитным полем, было детально исследовано в работе [103]. Следует также отметить, что исследование одновременно поворота спина и осцилляций на основе уравнения, практически совпадающего с полученным нами, хотя и записанного без строгого вывода, производилось в работах М. С. Дворникова (см., например, [114]).

Когда среда неоднородна, входящие в уравнение (1.53) эффективные потенциалы $f_\mu^{(e)}$, $f_\mu^{(N)}$ можно считать некоторыми функциями собственного

⁵Здесь можно вспомнить нулевую теорему истории науки, она же — принцип Арнольда [109].

времени τ . Условия, которые должны выполняться, чтобы такое описание оставалось корректно, будут обсуждаться в главе, посвященной распространению нейтрино в неоднородном электромагнитном поле.

Глава 2

Взаимодействие нейтрино с веществом

2.1 Вероятности спин-флейворных переходов в модели двух флейворов

Для начала рассмотрим один из наиболее простых частных случаев. В модели двух флейворов найдем вероятности переходов между состояниями с определенным флейвором и поляризацией в случае, если нейтрино распространяется в движущейся с постоянной скоростью однородной среде, поляризация которой постоянна. В уравнении эволюции нейтрино (1.53), то есть в уравнении

$$\left(i\mathbb{I} \frac{d}{d\tau} - \mathcal{F} \right) \Psi(\tau) = 0,$$

матрица \mathcal{F} определяется формулой (1.54), которая в исследуемом частном случае выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \mathbb{M} + \frac{1}{2}(f^{(e)}u)\mathbb{P}^{(e)} + \frac{1}{2}(f^{(N)}u)\mathbb{I} + \\ + \frac{1}{2}R_e\mathbb{P}^{(e)}\gamma^5\gamma^\sigma s_\sigma^{(e)}\gamma^\mu u_\mu + \frac{1}{2}R_N\mathbb{I}\gamma^5\gamma^\sigma s_\sigma^{(N)}\gamma^\mu u_\mu. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В выражении (2.1) учтено, что взаимодействие со средой может происходить как через заряженные, так и через нейтральные токи.

Решение уравнения (1.53) можно записать с помощью оператора эволюции $U(\tau)$ в виде

$$\Psi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2u^0}}U(\tau)\Psi_0, \quad (2.2)$$

где

$$\Psi_0 = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5 \gamma_\mu s_0^\mu) (\gamma^\nu u_\nu + 1) (\psi^0 \otimes e_j), \quad \bar{\Psi}_0 \Psi_0 = 2. \quad (2.3)$$

Здесь ψ^0 — постоянный биспинор, нормированный таким образом, что $\bar{\Psi}_0 \Psi_0 = 2$, e_j — произвольный единичный вектор в трехмерном векторном пространстве над полем комплексных чисел, который позволяет задать начальное состояние мультиплета как состояние с определенным флейвором, а s_0^μ — 4-вектор поляризации начального состояния нейтрино, удовлетворяющий условию $(us_0) = 0$. Оператор эволюции уравнения (1.53) в случае постоянных внешних условий задается выражением

$$U(\tau) = e^{-i\tau\mathcal{F}}. \quad (2.4)$$

Когда матрица \mathcal{F} определяется выражением (2.1), матричная экспонента $U(\tau)$ выглядит следующим образом

$$U(\tau) = \exp \left\{ -i\tau \left(\mathbb{M} + \frac{1}{2}(f^{(e)}u)\mathbb{P}^{(e)} + \frac{1}{2}(f^{(N)}u)\mathbb{I} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2}R_e \mathbb{P}^{(e)} \gamma^5 \gamma^\sigma s_\sigma^{(e)} \gamma^\mu u_\mu + \frac{1}{2}R_N \mathbb{I} \gamma^5 \gamma^\sigma s_\sigma^{(N)} \gamma^\mu u_\mu \right) \right\}. \quad (2.5)$$

Если среда неполяризована и все ее компоненты движутся с одинаковой скоростью, то эффективные потенциалы, связанные с заряженными и нейтральными токами, пропорциональны. Далее мы будем обозначать как f^μ потенциал взаимодействия через заряженные токи $f^{(e)\mu}$, тогда $f^{(N)\mu} = a f^\mu$. Выражение для коэффициента пропорциональности a следует из формул (1.36), (1.37)

$$a = \sum_{i=e,p,n} \frac{n^{(i)}}{n^{(e)}} (T^{(i)} - 2 \sin^2 \theta_W Q^{(i)}), \quad (2.6)$$

где $n^{(i)}$ — плотность компоненты среды в системе отсчета наблюдателя. Тогда вследствие определения (1.55) 4-векторы $s^{(e)\mu}$ и s_N^μ равны, а величины R_N и R_e пропорциональны с коэффициентом a . Введем обозначение $R = R_e$, тогда $R_N = aR$. Также введем для равных 4-векторов новое обозначение $s^\mu = s^{(e)\mu} = s^{(N)\mu}$. Тогда выражение (2.5) можно записать в виде

$$U(\tau) = \exp \left\{ -i\tau \left(\mathbb{M} + \frac{1}{2}(\mathbb{P}^{(e)} + a\mathbb{I}) + \frac{1}{2}R(\mathbb{P}^{(e)} + a\mathbb{I}) \gamma^5 \gamma^\sigma s_\sigma \gamma^\mu u_\mu \right) \right\}. \quad (2.7)$$

Введем спиновый проектор

$$\Lambda_\zeta = \frac{1}{2} [1 - \zeta \gamma^5 \gamma^\sigma s_\sigma \gamma^\mu u_\mu], \quad (2.8)$$

имеющий собственные значения $\zeta = \pm 1$. В этом случае экспонента сводится к виду (см. Приложение А)

$$U(\tau) = \sum_{\zeta=\pm 1} \exp \left\{ -i\tau \left(\frac{1}{2} ((fu) - \zeta R) (\mathbb{P}^{(e)} + a\mathbb{I}) + \mathbb{M} \right) \right\} \Lambda_\zeta. \quad (2.9)$$

Так как явный вид матриц $\mathbb{P}^{(e)}$ и \mathbb{M} в показателе матричной экспоненты (2.9) известен, можно записать решение уравнения эволюции и получить вероятности спин-флейворных переходов нейтрино в явном виде. Однако полученные таким образом вероятности переходов в модели трех флейворов будут громоздкими и не очень наглядными. Поэтому, хотя известно, что число флейворов нейтрино равно трем, мы ограничимся исследованием поведения нейтрино в модели двух флейворов, в которой рассматривается смешивание только двух массовых состояний. Серьезное преимущество модели двух флейворов заключается в сравнительной простоте вычислений и итоговых формул. По этой причине многие эффекты качественно исследуются именно в модели двух флейворов.

В модели двух флейворов матрица смешивания задается всего одним углом смешивания θ и является действительной

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Таким образом, матрицу смешивания можно записать через матрицы Паули σ_i ($i = 1, 2, 3$) в виде

$$\mathbb{U} = \cos \theta + i\sigma_2 \sin \theta. \quad (2.11)$$

Так как вероятности переходов между двумя состояниями не зависят от выбора базиса, будем работать во флейворном представлении, в котором флейворные проекторы диагональны и имеют единственный отличный от нуля элемент, равный единице (см. Раздел 1.5 диссертации). Поэтому

в модели двух флейворов проектор на состояние с флейвором α можно записать следующим образом

$$\mathbb{P}^\alpha = \frac{1}{2}(1 + \xi_\alpha \sigma_3), \quad (2.12)$$

где $\xi_\alpha = \pm 1$. Для записи проектора на состояние с электронным флейвором следует выбрать $\xi_\alpha = 1$, тогда соответствующий проектор принимает вид

$$\mathbb{P}^{(e)} = \frac{1}{2}(1 + \sigma_3). \quad (2.13)$$

Чтобы записать в этом представлении массовую матрицу, воспользуемся формулой (1.47). В результате получаем следующее выражение

$$\mathbb{M} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) - \frac{1}{2}(m_2 - m_1) [\sigma_3 \cos 2\theta - \sigma_1 \sin 2\theta]. \quad (2.14)$$

Коммутационные соотношения для матриц Паули хорошо известны, что позволяет раскрыть матричную экспоненту (подробнее см. Приложение В) и привести оператор эволюции к виду

$$U(\tau) = \sum_{\zeta=\pm 1} \exp \left\{ -\frac{i}{2}\tau \left(((fu) - \zeta R)(1/2 + a) + (m_1 + m_2) \right) \right\} \times \\ \times \left\{ \cos(\tau Z_\zeta/2) - i \sin(\tau Z_\zeta/2) [\sigma_1 X_\zeta - \sigma_3 Y_\zeta] \right\} \Lambda_\zeta. \quad (2.15)$$

Здесь

$$X_\zeta = \frac{1}{Z_\zeta} \left((m_2 - m_1) \sin 2\theta \right), \\ Y_\zeta = \frac{1}{Z_\zeta} \left((m_2 - m_1) \cos 2\theta - ((fu) - \zeta R)/2 \right), \\ Z_\zeta = \left\{ \left(((fu) - \zeta R)/2 - (m_2 - m_1) \cos 2\theta \right)^2 + \left((m_2 - m_1) \sin 2\theta \right)^2 \right\}^{1/2}. \quad (2.16)$$

Если считать, что $u^0 \approx |\mathbf{u}|$, то для покоящейся среды

$$Y_+ = \cos 2\theta, \quad X_+ = \sin 2\theta, \\ Y_- = \cos 2\theta_{eff}, \quad X_- = \sin 2\theta_{eff}, \quad (2.17)$$

где θ_{eff} — эффективный угол смешивания в веществе, хорошо известный в феноменологической теории осцилляций.

Так как $X_\zeta^2 + Y_\zeta^2 = 1$, можно определить величину θ_ζ следующим образом

$$X_\zeta = \sin 2\theta_\zeta, \quad Y_\zeta = \cos 2\theta_\zeta \quad (2.18)$$

и трактовать θ_ζ как эффективный угол смешивания. Эффективный угол смешивания определяет связь между состояниями нейтрино с определенным флейвором и стационарными состояниями, которые в веществе не являются массовыми [115].

Для вычисления вероятностей переходов из одного состояния нейтрино в другое удобно использовать квазиклассические спин-флейворные матрицы плотности, которые вводятся аналогично квазиклассическим спиновым матрицам плотности (см. [106]). Матрица плотности состояния, характеризующаяся в начальный момент поляризацией $s_0^{(\alpha)\mu}$ и флейвором α , в момент времени τ имеет вид

$$\rho_\alpha(\tau) = \frac{1}{4}U(\tau) \left[1 - \gamma^5 \gamma_\mu s_0^{(\alpha)\mu} \right] \mathbb{P}^\alpha \bar{U}(\tau). \quad (2.19)$$

где \mathbb{P}^α — проектор на состояние с флейвором α . В уравнении (2.19) используется обозначения $\bar{U}(\tau) = \gamma^0 U^\dagger(\tau) \gamma^0$. Вероятность перехода из состояния α в состояние β за время τ , которое связано с расстоянием от источника до детектора соотношением (1.51), определяется выражением [116, 117]

$$W_{\alpha \rightarrow \beta} = \text{Tr} \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta^\dagger(0). \quad (2.20)$$

Так как в нашем случае состояния мультиплета нейтрино с точки зрения квантовой механики являются чистыми состояниями, все результаты можно получить, используя только волновые функции нейтрино, а не матрицы плотности. Тем не менее, использование матриц плотности оказывается удобнее, так как в противном случае может оказаться необходимым расписывать в явном виде волновую функцию мультиплета, которая в модели двух флейворов представляет собой 8-компонентный объект, а в реалистичной модели трех флейворов — 12-компонентный.

Воспользуемся выражением для оператора эволюции (2.15). Уравнение (2.20) содержит прямое произведение дираковских и флейворных матриц.

Как хорошо известно, след прямого произведения произвольных матриц A и B может быть вычислен как $\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}A\text{Tr}B$. Используя это свойство, получим все вероятности переходов между состояниями с определенным флейвором и спиральностью.

Будем полагать, что переходы происходят между флейворными состояниями нейтрино, для которых проекторы задаются матрицами

$$P^\alpha = \frac{1}{2}(1 + \xi_\alpha \sigma_3), \quad P^\beta = \frac{1}{2}(1 + \xi_\beta \sigma_3), \quad \xi_\alpha, \xi_\beta = \pm 1. \quad (2.21)$$

Чтобы получить проекторы на начальное и конечное состояния нейтрино с электронным флейвором, следует выбрать $\xi_\alpha, \xi_\beta = 1$, для нейтрино второго флейвора $\xi_\alpha, \xi_\beta = -1$. Также будем считать, что начальное и конечное состояния характеризуются определенной поляризацией. Вообще говоря, можно вычислить вероятности переходов между состояниями, характеризующимися различными 4-векторами поляризации $s_0^{(\alpha)\mu}$ и $s_0^{(\beta)\mu}$. Однако наиболее интересен случай переходов между состояниями, характеризующимися определенной спиральностью. Для таких состояний 4-векторы поляризации задаются выражениями

$$s_0^{(\alpha)\mu} = \zeta_\alpha s_{sp}^\mu, \quad s_0^{(\beta)\mu} = \zeta_\beta s_{sp}^\mu, \quad (2.22)$$

где

$$s_{sp}^\mu = \left\{ |\mathbf{u}|, u_0 \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \right\}. \quad (2.23)$$

Для нейтрино, имеющего левую спиральность, в выражениях (2.22) следует выбрать $\zeta_\alpha, \zeta_\beta = -1$, для нейтрино с правой спиральностью $\zeta_\alpha, \zeta_\beta = 1$.

Результат вычисления вероятностей переходов между состояниями с определенным флейвором и поляризацией удобно представить в следующем виде

$$W_{\alpha \rightarrow \beta} = \frac{1 + \xi_\alpha \xi_\beta}{2} \frac{1 + \zeta_\alpha \zeta_\beta}{2} W_1 + \frac{1 + \xi_\alpha \xi_\beta}{2} \frac{1 - \zeta_\alpha \zeta_\beta}{2} W_2 + \\ + \frac{1 - \xi_\alpha \xi_\beta}{2} \frac{1 + \zeta_\alpha \zeta_\beta}{2} W_3 + \frac{1 - \xi_\alpha \xi_\beta}{2} \frac{1 - \zeta_\alpha \zeta_\beta}{2} W_4, \quad (2.24)$$

где W_1 — вероятность выживания нейтрино с определенным флейвором и поляризацией, W_2 — вероятность перехода между состояниями с одинаковым флейвором и противоположной поляризацией, W_3 — вероятность перехода между состояниями с различными флейворами и одинаковой поляризацией, W_4 — вероятность перехода с изменением и флейвора, и поляризации. Используя формулу (2.20), получаем следующие выражения для этих вероятностей

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (1 - \zeta_\alpha(ss_{sp}))^2 (1 - S_{+1}^2 X_{+1}^2) + \frac{1}{2} (1 + \zeta_\alpha(ss_{sp}))^2 (1 - S_{-1}^2 X_{-1}^2) + \right. \\
 &\quad \left. + (1 - (ss_{sp})^2) (C_{+1} C_{-1} + S_{+1} S_{-1} Y_{+1} Y_{-1}) \cos(\omega\tau) + \right. \\
 &\quad \left. + \xi_\alpha (1 - (ss_{sp})^2) (S_{-1} Y_{-1} C_{+1} - C_{-1} S_{+1} Y_{+1}) \sin(\omega\tau) \right), \\
 W_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (1 - (ss_{sp})^2) (2 - S_{+1}^2 X_{+1}^2 - S_{-1}^2 X_{-1}^2) - \right. \\
 &\quad \left. - (1 - (ss_{sp})^2) (C_{+1} C_{-1} + S_{+1} S_{-1} Y_{+1} Y_{-1}) \cos(\omega\tau) - \right. \\
 &\quad \left. - \xi_\alpha (1 - (ss_{sp})^2) (S_{-1} Y_{-1} C_{+1} - C_{-1} S_{+1} Y_{+1}) \sin(\omega\tau) \right), \\
 W_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (1 - \zeta_\alpha(ss_{sp}))^2 S_{+1}^2 X_{+1}^2 + \frac{1}{2} (1 + \zeta_\alpha(ss_{sp}))^2 S_{-1}^2 X_{-1}^2 + \right. \\
 &\quad \left. + (1 - (ss_{sp})^2) S_{+1} S_{-1} X_{+1} X_{-1} \cos(\omega\tau) \right), \\
 W_4 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (1 - (ss_{sp})^2) (S_{+1}^2 X_{+1}^2 + S_{-1}^2 X_{-1}^2) - \right. \\
 &\quad \left. - (1 - (ss_{sp})^2) S_{+1} S_{-1} X_{+1} X_{-1} \cos(\omega\tau) \right).
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Здесь

$$C_{\pm 1} = \cos(\tau Z_{\pm 1}/2), \quad S_{\pm 1} = \sin(\tau Z_{\pm 1}/2), \quad \omega = R(1/2 + a). \tag{2.26}$$

В общем случае все вероятности в уравнении (2.25) отличны от нуля. Таким образом, в движущейся среде у массивных нейтрино изменяется не только флейвор, но и спиральность. Так как вероятности зависят от коэффициента a , заданного формулой (2.6), то в эффект поворота спина дают существенный вклад и заряженные, и нейтральные токи. Поскольку эффективно регистрируются только левополяризованные нейтрино, то

вследствие перехода нейтрино в правополяризованное состояние результаты измерений потока нейтрино будут зависеть от скорости внешней среды относительно наблюдателя, то есть, фактически, от выбора системы отсчета. На это обстоятельство указывалось еще в работе [112], и в нем нет ничего странного, так как для массивной частицы спиральность действительно зависит от системы отсчета.

В общем случае спин-флейворные переходы характеризуются шестью частотами и, таким образом, шестью длинами осцилляций. Если считать, что $u^0 \approx |\mathbf{u}|$, то параметр

$$L_{osc}^0 = \frac{2\pi|\mathbf{u}|}{Z_{+1}} \quad (2.27)$$

представляет собой длину флейворных осцилляций в вакууме, а параметр

$$L_{osc}^f = \frac{2\pi|\mathbf{u}|}{Z_{-1}} \quad (2.28)$$

— длину флейворных осцилляций в веществе [56]. Четыре комбинационные длины осцилляций

$$L_{osc}^c = \left| \frac{4\pi|\mathbf{u}|}{Z_{-1} \pm Z_{+1} \pm 2\omega} \right| \quad (2.29)$$

возникают из-за корреляций между флейворными переходами и переверотом спиральности. Число таких длин при определенных условиях может стать равным двум. Так, для электрически нейтральной среды, когда плотность электронов равна плотности протонов, коэффициент a пропорционален отношению плотностей нейтронов и электронов: если плотности нейтронов и электронов в среде равны, то параметр ω обращается в нуль.

Стоит отметить, что формулы (2.25) применимы для исследования переходов между спиновыми состояниями, которые отличны от спиральных, но задаются одинаковыми с точностью до знака 4-векторами поляризации нейтрино s_0^μ , если во всех выражениях сделать замену $s_{sp}^\mu \rightarrow s_0^\mu$.

Особого внимания заслуживает случай, когда доля электронов в веществе мала и можно положить $f_\mu^{(e)} = 0$. При этом взаимодействие с веществом идет только через нейтральные токи. Такая ситуация приближенно

имеет место, когда нейтрино проходит через нейтронную звезду (см., например, [118]). Тогда уравнение (1.53) сводится к

$$\left(i \frac{d}{d\tau} - \mathbb{M} - \frac{1}{2} \left[(f^{(N)}u) + R_N \gamma^5 \gamma^\sigma s_\sigma^{(N)} \gamma^\mu u_\mu \right] \mathbb{I} \right) \Psi^{(\nu)}(\tau) = 0. \quad (2.30)$$

Оператор эволюции этого уравнения факторизуется

$$U(\tau) = \exp \left\{ -i\tau \mathbb{M} \right\} U_{rot}(\tau). \quad (2.31)$$

Поэтому вероятности переходов сводятся к произведению вероятностей флейворных осцилляций в вакууме и вероятностей переворота спина. Часть оператора эволюции $U_{rot}(\tau)$, описывающая поворот спина, удовлетворяет уравнению

$$\left(i \frac{d}{d\tau} - \frac{1}{2} \left[(f^{(N)}u) + R_N \gamma^5 \gamma^\sigma s_\sigma^{(N)} \gamma^\mu u_\mu \right] \right) U_{rot}(\tau) = 0, \quad (2.32)$$

которое разрешимо в квадратурах в ряде частных случаев. Например, если среда однородна и ее поляризация сохраняется, то

$$U_{rot}(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\zeta=\pm 1} e^{-i\tau((f^{(N)}u)-\zeta R_N)/2} \left[1 - \zeta \gamma^5 \gamma^\sigma s_\sigma^{(N)} \gamma^\mu u_\mu \right]. \quad (2.33)$$

Поведение спина нейтрино в такой среде детально изучено в работе [103].

Вероятности переходов в этом случае выражаются формулами

$$\begin{aligned} W_1 &= (1 - S^2 \sin^2 2\theta) \left[1 - \left(1 - (s^{(N)} s_{sp})^2 \right) \sin^2(\omega\tau) \right], \\ W_2 &= (1 - S^2 \sin^2 2\theta) \left(1 - (s^{(N)} s_{sp})^2 \right) \sin^2(\omega\tau), \\ W_3 &= S^2 \sin^2 2\theta \left[1 - \left(1 - (s^{(N)} s_{sp})^2 \right) \sin^2(\omega\tau) \right], \\ W_4 &= S^2 \sin^2 2\theta \left(1 - (s^{(N)} s_{sp})^2 \right) \sin^2(\omega\tau). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Здесь

$$S = \sin(\pi L/L_{osc}), \quad L_{osc} = \frac{2\pi |\mathbf{u}|}{|m_2 - m_1|} \approx \frac{4\pi \mathcal{E}_\nu}{|m_2^2 - m_1^2|}, \quad (2.35)$$

где \mathcal{E}_ν — энергия нейтрино. Таким образом, полученная нами величина L_{osc} представляет собой хорошо известную из феноменологической теории

длину флейворных осцилляций в вакууме, выраженную в терминах других квантовых чисел.

Когда внешняя среда покоится, а именно этот случай детально исследован в работах по осцилляциям нейтрино, имеем

$$s^\mu = s_{sp}^\mu, \quad (s s_{sp}) = -1. \quad (2.36)$$

Следовательно, переходы с изменением спиральности отсутствуют (см. (2.25)). То есть $W_2, W_4 = 0$, а

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2}(1 + \zeta_\alpha)(1 - S^2 \sin^2 2\theta) + \frac{1}{2}(1 - \zeta_\alpha)(1 - S_{eff}^2 \sin^2 2\theta_{eff}), \\ W_3 &= \frac{1}{2}(1 + \zeta_\alpha)S^2 \sin^2 2\theta + \frac{1}{2}(1 - \zeta_\alpha)S_{eff}^2 \sin^2 2\theta_{eff}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

где

$$\begin{aligned} S_{eff} &= \sin(\pi L / L_{osc}^{matter}), \\ L_{osc}^{matter} &\approx \frac{4\pi \mathcal{E}_\nu}{\sqrt{(2f^0 \mathcal{E}_\nu - (m_2^2 - m_1^2) \cos 2\theta)^2 + (m_2^2 - m_1^2)^2 \sin^2 2\theta}}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Это выражение для L_{osc}^{matter} в феноменологической теории называется длиной осцилляций нейтрино в веществе. Таким образом, формулы (2.37) и (2.38) означают, что флейворные осцилляции левополяризованных нейтрино в покоящейся среде определяются хорошо известными формулами феноменологической теории для осцилляций в веществе, при этом флейворные осцилляции правополяризованных нейтрино определяются известными формулами для осцилляций в вакууме (см., например, [34, 35]).

Интересно заметить, что и в модели с тремя флейворами спиральность нейтрино в неподвижной неполяризованной среде сохраняется. Для нейтрино, имеющего определенную спиральность, уравнение эволюции сводится к

$$\left(i \frac{d}{d\tau} - M - \frac{1}{2} (u^0 - \zeta_\alpha |\mathbf{u}|) \left(f^{(e)0} \mathbb{P}^{(e)} + f^{(N)0} \mathbb{I} \right) \right) \Psi(\tau) = 0. \quad (2.39)$$

Как видно из (2.39), в этом случае взаимодействие через нейтральные токи приводит, даже если среда неоднородна, только к появлению в решении

фазового фактора, который не влияет на вероятности переходов. При этом взаимодействие с заряженными токами существенно влияет на выражения для вероятностей флейворных переходов и, как уже говорилось, в случае неоднородной среды может приводить к известному эффекту Михеева–Смирнова–Вольфенштейна.

2.2 Вероятность переворота спина

В общем случае переходы характеризуются шестью частотами, четыре из которых возникают вследствие корреляций между флейворными осцилляциями и поворотом спиральности.

Исследуем детально вероятность W переворота спина нейтрино с учетом корреляций с флейворными осцилляциями. Она равна сумме W_2 и W_4 и определяется выражением

$$W = \frac{1}{2} \mathcal{A} (A_1(1 - \cos \omega_1 \tau) + A_2(1 - \cos \omega_2 \tau) + A_3(1 - \cos \omega_3 \tau) + A_4(1 - \cos \omega_4 \tau)), \quad (2.40)$$

где

$$\mathcal{A} = 1 - (ss_{sp})^2. \quad (2.41)$$

Вероятность W характеризуется только четырьмя частотами

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega + \frac{Z_{+1} + Z_{-1}}{2}, & \omega_2 &= \omega + \frac{Z_{+1} - Z_{-1}}{2}, \\ \omega_3 &= \omega - \frac{Z_{+1} - Z_{-1}}{2}, & \omega_4 &= \omega - \frac{Z_{+1} + Z_{-1}}{2}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Соответствующие амплитуды осциллирующих членов определяются формулами

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{4} (1 - Y_{+1} Y_{-1} - X_{+1} X_{-1} + \xi_\alpha (Y_{+1} - Y_{-1})), \\ A_2 &= \frac{1}{4} (1 + Y_{+1} Y_{-1} + X_{+1} X_{-1} + \xi_\alpha (Y_{+1} + Y_{-1})), \\ A_3 &= \frac{1}{4} (1 + Y_{+1} Y_{-1} + X_{+1} X_{-1} - \xi_\alpha (Y_{+1} + Y_{-1})), \\ A_4 &= \frac{1}{4} (1 - Y_{+1} Y_{-1} - X_{+1} X_{-1} - \xi_\alpha (Y_{+1} - Y_{-1})), \end{aligned} \quad (2.43)$$

из которых следует, что

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1. \quad (2.44)$$

Таким образом, вероятность переворота спина ограничена сверху величиной (2.41)

$$\mathcal{A} = \frac{(v_0^2 - 1) \sin^2 \vartheta}{(v_0 u_0 - \sqrt{u_0^2 - 1} \sqrt{v_0^2 - 1} \cos \vartheta)^2 - 1}, \quad (2.45)$$

которую мы будем называть полной амплитудой вероятности. Она зависит от 4-скоростей среды v^μ и нейтрино u^μ , но не зависит от плотности среды. Через ϑ обозначен угол между векторами скорости нейтрино и среды в системе отсчета наблюдателя. Здесь u_0, v_0 — лоренц-факторы нейтрино и среды соответственно.

Если скорость нейтрино больше скорости среды, полная амплитуда принимает максимальное значение, когда

$$\cos \vartheta_{max} = \frac{\sqrt{v_0^2 - 1}/v_0}{\sqrt{u_0^2 - 1}/u_0}, \quad (2.46)$$

то есть когда косинус ϑ_{max} равен отношению скоростей среды и нейтрино. Значение полной амплитуды при этом равно

$$\mathcal{A}_{max} = \frac{v_0^2 - 1}{u_0^2 - 1}. \quad (2.47)$$

Если скорость нейтрино меньше скорости среды, полная амплитуда принимает максимальное значение, когда

$$\cos \vartheta_{max} = \frac{\sqrt{u_0^2 - 1}/u_0}{\sqrt{v_0^2 - 1}/v_0}, \quad (2.48)$$

то есть когда косинус ϑ_{max} равен отношению скоростей нейтрино и среды. Значение полной амплитуды при этом равно

$$\mathcal{A}_{max} = 1. \quad (2.49)$$

Для нейтрино в покоящейся среде эффект переворота спина отсутствует. Так как в этом случае $v_0 = 1$, как видно из формулы (2.45), полная амплитуда вероятности равна нулю.

Еще раз отметим, что мы рассматриваем нейтрино ультрарелятивистских энергий. Из формулы (2.47) следует, что при скоростях среды, значительно меньших скорости нейтрино, эффект переворота спина нейтрино существенно подавлен. Для сред, движущихся примерно с той же скоростью, что и нейтрино, вероятности переходов с переворотом спина достигают наибольшего значения при почти сонаправленном движении нейтрино и среды (см. выражения (2.46)-(2.49)). Характерный вид зависимости полной амплитуды \mathcal{A} переворота спина от угла ϑ между направлением движения нейтрино и среды приведен на Рис. 2.1.

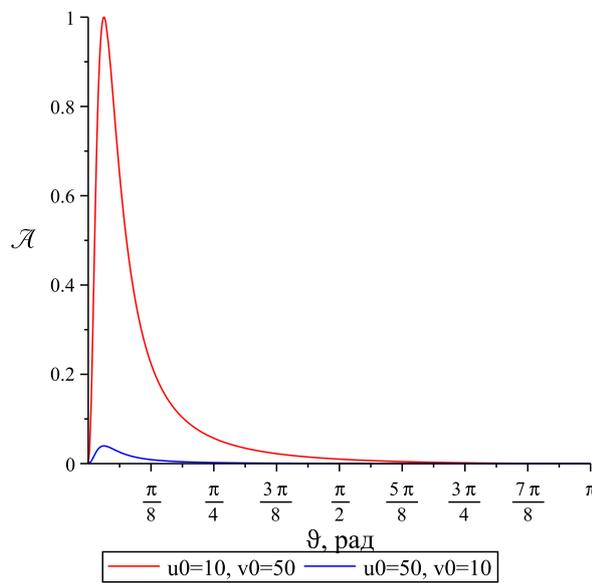


Рис. 2.1: Зависимость полной амплитуды переворота спина от угла ϑ

Чтобы проиллюстрировать основные закономерности эволюции спина нейтрино в веществе, рассмотрим среду, состоящую только из электронов. В этом случае коэффициент пропорциональности между 4-потенциалами взаимодействия с веществом через заряженные и через нейтральные токи составляет $a = -1/2 + 2 \sin^2 \theta_W$. Графики зависимости вероятности переворота спина от расстояния между источником и детектором L построены как функции безразмерного параметра L/L_{osc} , где L_{osc} — длина флейворных осцилляций в вакууме (см. (2.35)). При этом поведение вероятности

зависит от безразмерного параметра

$$k = \frac{\sqrt{2}G_F n^{(e)}}{|m_1 - m_2|}, \quad (2.50)$$

в котором $n^{(e)}$ — плотность электронов в системе отсчета наблюдателя. При построении графиков для определенности мы выбираем значение угла смешивания $\sin^2 \theta = 0.437$, что примерно соответствует θ_{23} [18].

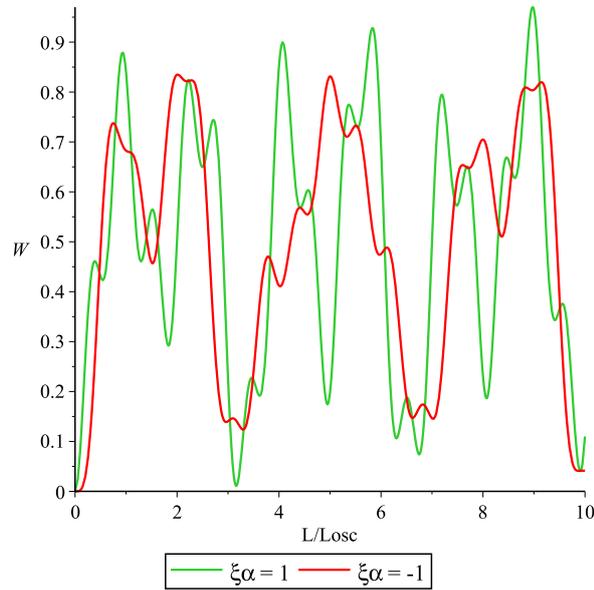


Рис. 2.2: Вероятность переворота спина при $\xi_\alpha = \pm 1$, $u_0 = 10$, $v_0 = 50$, $k = 10$, $\cos \vartheta = \cos \vartheta_{max}$

На Рис. 2.2 представлена зависимость вероятности переворота спина от расстояния между источником и детектором, когда скорость среды больше скорости нейтрино. Здесь выбран угол между скоростями нейтрино и среды, который соответствует максимальному значению полной амплитуды переворота спина ($\cos \vartheta_{max} \approx 0.995$, см. формулу (2.48)). Параметр k , определяющий плотность среды, выбран равным 10. Как видно из графиков, характер спиновых осцилляций существенно зависит от исходного флейвора нейтрино ξ_α . Для нейтрино, которые изначально имели электронный флейвор ($\xi_\alpha = +1$), переворот спина происходит чаще, чем для нейтрино другого флейвора ($\xi_\alpha = -1$). При увеличении плотности среды, как видно

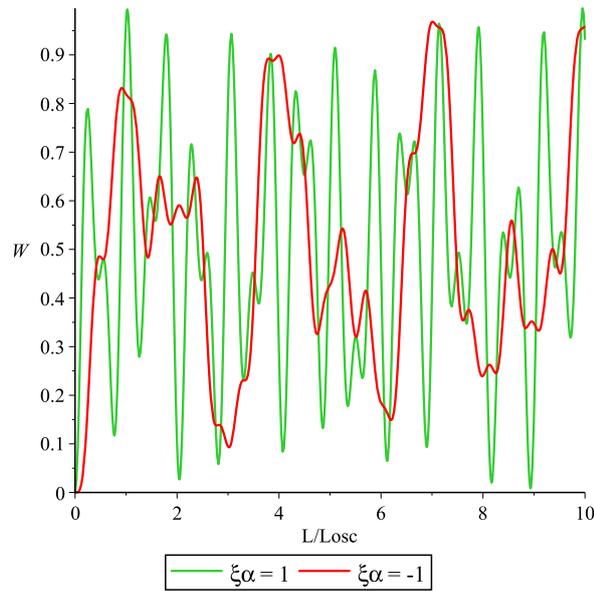


Рис. 2.3: Вероятность переворота спина при $\xi_\alpha = \pm 1$, $u_0 = 10$, $v_0 = 50$, $k = 20$, $\cos \vartheta = \cos \vartheta_{max}$

из Рис. 2.3 (здесь $k = 20$), различие характеров эволюции спина для нейтрино, имеющих разные исходные флейворы, становится более заметно.

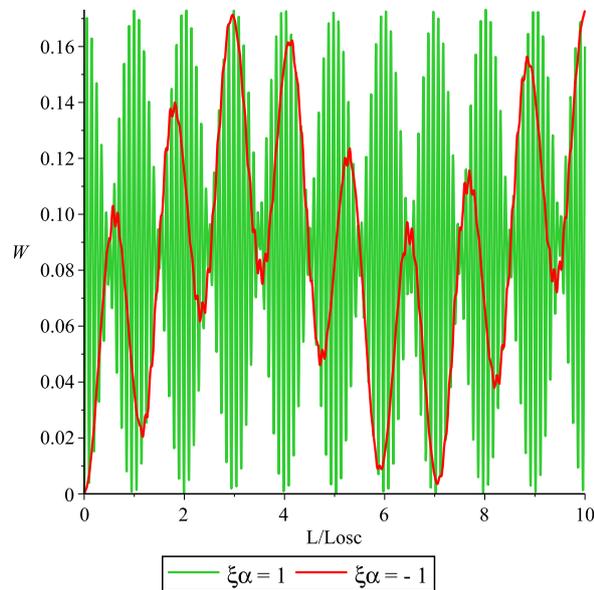


Рис. 2.4: Вероятность переворота спина при $\xi_\alpha = \pm 1$, $u_0 = 10$, $v_0 = 50$, $k = 10$, $\cos \vartheta = 0.9$

Если представленные на Рис. 2.2, 2.3 графики построены при значении угла ϑ , соответствующем максимальному значению полной амплитуды

вероятности поворота спина нейтрино, то на Рис. 2.4 изображена зависимость вероятности переворота спина от параметра L/L_{osc} при $\cos \vartheta = 0.9$, то есть при большем значении угла между направлениями движения нейтрино и среды. В этом случае максимальное значение вероятности переворота спина для любого начального флейвора нейтрино значительно меньше единицы, а характерные частоты значительно больше, чем в случае $\cos \vartheta = \cos \vartheta_{max}$ при том же значении $k = 10$.

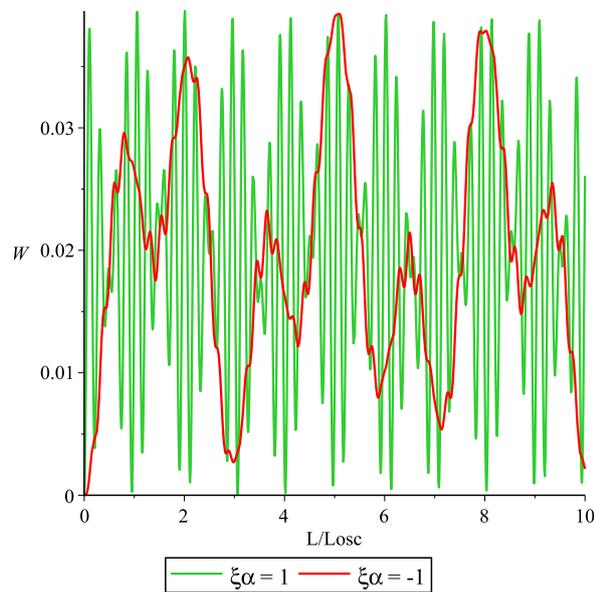


Рис. 2.5: Вероятность переворота спина при $\xi_\alpha = \pm 1$, $u_0 = 50$, $v_0 = 10$, $k = 10$, $\cos \vartheta = \cos \vartheta_{max}$

Рис. 2.5 отвечает случаю, когда нейтрино движется быстрее, чем среда. Хотя при построении графика выбрано значение $\vartheta = \vartheta_{max}$, соответствующее максимуму полной амплитуды вероятности переворота спина, видно, что полная амплитуда осцилляций существенно меньше, чем в случае, рассмотренном ранее.

В заключение перечислим основные закономерности поведения спина нейтрино в движущейся среде. Вероятность переворота спина нейтрино при учете флейворных осцилляций в модели двух флейворов характеризуется четырьмя частотами, при этом характер спиновых осцилляций существенно зависит от исходного флейвора нейтрино. Полная амплитуда веро-

ятности переворота спина зависит только от скоростей среды и нейтрино относительно наблюдателя, но не зависит от плотности среды. Вероятность переворота спина подавлена, если скорость среды значительно меньше скорости нейтрино. В случае сопоставимых по величине скоростей нейтрино и среды максимальное значение вероятности переворота спиральности достигается при практически сонаправленном движении нейтрино и среды относительно наблюдателя.

Глава 3

Нейтрино в постоянном электромагнитном поле

3.1 Вероятности переходов в модели двух флейворов

Найдем вероятности спин-флейворных переходов нейтрино в постоянном электромагнитном поле. Как уже указывалось выше, уравнение эволюции нейтрино (1.53)

$$\left(i\mathbb{I}\frac{d}{d\tau} - \mathcal{F} \right) \Psi(\tau) = 0$$

определяется матрицей \mathcal{F} , которая задана формулой (1.54). Для нейтрино, распространяющегося в электромагнитном поле эта матрица принимает вид

$$\mathcal{F} = M - M_d \gamma^5 \gamma^\mu {}^*F_{\mu\nu} u^\nu - M_h \gamma^5 \gamma^\mu {}^*F_{\mu\nu} u^\nu + M_{ah} \gamma^5 \gamma^\mu F_{\mu\nu} u^\nu. \quad (3.1)$$

Стоит отметить, что в рамках Стандартной модели отношение всех переходных моментов к диагональным очень мало, так как оно задается квадратом отношения масс лептонов и W -бозона (см. формулы (1.41), (1.42) и (1.43)). При этом электрические переходные моменты, пропорциональные разнице масс, несколько меньше магнитных переходных моментов, которые с тем же коэффициентом пропорциональны сумме масс. Так как учет переходных электрических моментов существенно затрудняет получение аналитического решения уравнения, далее мы не будем учитывать электрические моменты нейтрино.

Для нейтрино в электромагнитном поле оператор эволюции $U(\tau)$, который при постоянных внешних условиях задается матричной экспонентой (2.4), принимает вид

$$U(\tau) = \exp \left\{ -i\tau \left(\mathbb{M} - \mathbb{M}_d \gamma^5 \gamma^\mu {}^*F_{\mu\nu} u^\nu - \mathbb{M}_h \gamma^5 \gamma^\mu {}^*F_{\mu\nu} u^\nu \right) \right\}. \quad (3.2)$$

Как и в прошлой главе, для нахождения вероятностей найдем явный вид оператора эволюции $U(\tau)$.

В рассматриваемом случае существует спиновый интеграл движения, который определяет проекцию спина на направление магнитного поля в системе покоя нейтрино. Этот интеграл движения задается выражением

$$\mathcal{S} = \gamma^5 \gamma^\mu {}^*F_{\mu\nu} u^\nu / N, \quad N = \sqrt{u_\mu {}^*F^{\mu\alpha} {}^*F_{\alpha\nu} u^\nu}. \quad (3.3)$$

Соответствующий 4-вектор поляризации нейтрино определяется как

$$\bar{s}^\mu = -{}^*F^{\mu\nu} u_\nu / N. \quad (3.4)$$

Тогда (см. Приложение А) выражение (3.2) можно переписать в виде

$$U(\tau) = \sum_{\zeta=\pm 1} e^{-i\tau(\mathbb{M} - \zeta \mathbb{M}_d N - \mathbb{M}_h \zeta N)} \Lambda_\zeta, \quad (3.5)$$

где спиновые проекторы задаются выражениями

$$\Lambda_\zeta = \frac{1}{2} (1 + \zeta \mathcal{S}), \quad [\gamma^\mu u_\mu, \Lambda_\zeta] = 0, \quad \zeta = \pm 1. \quad (3.6)$$

Если учитывать также переходные электрические моменты нейтрино, то поиск интегралов движения задачи становится существенно сложнее, так как чисто спинового интеграла движения не существует.

Матричную экспоненту можно раскрыть в общем случае, но как и в прошлой главе, для наглядности мы будем рассматривать модель двух флейворов, где $\Psi(\tau)$ представляет собой 8-компонентный объект. Так как в массовом представлении массовая матрица диагональна, то в модели двух флейворов она может быть записана через матрицы Паули σ_i ($i = 1, 2, 3$) следующим образом

$$\mathbb{M} = \frac{1}{2} \left((m_1 + m_2) + \sigma_3 (m_1 - m_2) \right). \quad (3.7)$$

Матрица диагональных магнитных моментов в этом случае принимает вид

$$\mathbb{M}_d = \frac{1}{2}((\mu_1 + \mu_2) + \sigma_3(\mu_1 - \mu_2)), \quad (3.8)$$

где μ_1, μ_2 — значения диагональных магнитных моментов.

Матрица переходных магнитных моментов, определяемая выражением (1.41), эрмитова, симметрична и имеет на диагонали нули, поэтому в модели двух флейворов ее можно определить следующим образом

$$\mathbb{M}_h = \mu_{12}\sigma_1, \quad (3.9)$$

где коэффициент μ_{12} задает значение переходных магнитных моментов.

Используя свойства матриц Паули (см. Приложение В), можно получить явный вид оператора эволюции в массовом представлении

$$U'(\tau) = \sum_{\zeta=\pm 1} e^{-i\tau\tilde{T}_\zeta/2} (\cos(\tau\tilde{Z}_\zeta/2) - i(\tilde{X}'_\zeta\sigma_1 - \tilde{Y}'_\zeta\sigma_3) \sin(\tau\tilde{Z}_\zeta/2)) \Lambda_\zeta, \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{X}'_\zeta &= \frac{1}{\tilde{Z}_\zeta} \left(-2\zeta\mu_{12}N \right), \\ \tilde{Y}'_\zeta &= \frac{1}{\tilde{Z}_\zeta} \left(m_2 - m_1 - \zeta(\mu_2 - \mu_1)N \right), \\ \tilde{Z}_\zeta &= \left\{ \left(m_2 - m_1 - \zeta(\mu_2 - \mu_1)N \right)^2 + \left(2\mu_{12}N \right)^2 \right\}^{1/2}, \\ \tilde{T}_\zeta &= m_2 + m_1 - \zeta(\mu_2 + \mu_1)N. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Обратим внимание, что в этой главе для оператора эволюции в массовом представлении и величин, входящих в него, используются обозначения со штрихом. Для оператора эволюции и соответствующих величин в флейворном представлении используются обозначения без штриха.

Используя преобразование (1.48), запишем выражение для оператора эволюции в флейворном представлении

$$U(\tau) = \sum_{\zeta=\pm 1} e^{-i\tau\tilde{T}_\zeta/2} (\cos(\tau\tilde{Z}_\zeta/2) - i(\tilde{X}_\zeta\sigma_1 - \tilde{Y}_\zeta\sigma_3) \sin(\tau\tilde{Z}_\zeta/2)) \Lambda_\zeta, \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{X}_\zeta &= \frac{1}{\tilde{Z}_\zeta} \left((m_2 - m_1 - \zeta(\mu_2 - \mu_1)N) \sin 2\theta - 2\zeta\mu_{12}N \cos 2\theta \right), \\ \tilde{Y}_\zeta &= \frac{1}{\tilde{Z}_\zeta} \left((m_2 - m_1 - \zeta(\mu_2 - \mu_1)N) \cos 2\theta + 2\zeta\mu_{12}N \sin 2\theta \right).\end{aligned}\quad (3.13)$$

Введем следующие обозначения

$$\tilde{X}'_\zeta = \sin 2\theta_\zeta^m, \quad \tilde{Y}'_\zeta = \cos 2\theta_\zeta^m, \quad (3.14)$$

где θ_ζ^m — вещественное число. Такое переобозначение возможно, так как $\tilde{X}'_\zeta{}^2 + \tilde{Y}'_\zeta{}^2 = 1$. Тогда

$$\tilde{X}_\zeta = \sin 2\theta_\zeta = \sin 2(\theta_\zeta^m + \theta), \quad \tilde{Y}_\zeta = \cos 2\theta_\zeta = \cos 2(\theta_\zeta^m + \theta). \quad (3.15)$$

Оператор эволюции (3.12) имеет ту же матричную структуру, что и оператор эволюции в флейворном представлении для нейтрино в веществе (2.15). Этот факт дает нам возможность трактовать величину θ_ζ как эффективный угол смешивания в электромагнитном поле для нейтрино, поляризация которого задается 4-вектором $\zeta \bar{s}^\mu$. Как уже указывалось выше, эффективный угол смешивания необходим, когда стационарные состояния нейтрино, распространяющегося в среде или веществе, отличаются от массовых состояний. Если для угла смешивания в веществе такое отличие обусловлено разным характером взаимодействия электронных нейтрино и нейтрино остальных флейворов со средой, то в электромагнитном поле оно возникает вследствие наличия у нейтрино переходных магнитных моментов.

Если мы не учитываем переходные магнитные моменты, то $\theta_\zeta^m = 0$. Именно в этом случае волновые функции нейтрино с определенным флейвором можно рассматривать как суперпозиции волновых функций массовых состояний, и только в этом случае массовые состояния нейтрино являются стационарными состояниями в квантовомеханическом смысле. Величина θ_ζ определяет, как волновая функция флейворного состояния может быть разложена на волновые функции стационарных состояний. Аналогично величина θ_ζ^m определяет, как волновая функция массового состояния

может быть представлена в виде линейной комбинации волновых функций стационарных состояний. Таким образом, величину θ_ζ^m можно назвать углом смешивания для массовых состояний в электромагнитном поле, а величину θ_ζ — углом смешивания для флейворных состояний в электромагнитном поле.

Выражения (3.15) задают различные эффективные углы смешивания для нейтрино различной поляризации. Так как при распространении нейтрино в покоящейся среде сохраняется спиральность, а правополяризованные нейтрино почти не взаимодействуют с веществом, при определении угла смешивания обычно подразумевается тот факт, что исследуются именно нейтрино с левой спиральностью. В нашем случае сохраняется не спиральность нейтрино, а проекция спина на направление магнитного поля в системе покоя нейтрино. Таким образом, оба угла смешивания θ_ζ влияют на выражения для вероятностей.

Теперь вычислим вероятности спин-флейворных переходов между различными состояниями нейтрино. Для этого удобно записать матрицу оператора эволюции в флейворном представлении, то есть использовать выражение (3.10). Будем рассматривать переходы между состояниями с определенным флейвором и спиральностью. Определим проекторы на состояния с определенным флейвором так же, как и в прошлой главе, то есть формулой (2.21). При этом $\xi_\alpha, \xi_\beta = 1$ соответствуют электронному флейвору нейтрино, а $\xi_\alpha, \xi_\beta = -1$ — второму флейвору. В модели двух флейворов все вероятности можно представить в виде (2.24), то есть в виде выражения

$$W_{\alpha \rightarrow \beta} = \frac{1 + \xi_\alpha \xi_\beta}{2} \frac{1 + \zeta_\alpha \zeta_\beta}{2} W_1 + \frac{1 + \xi_\alpha \xi_\beta}{2} \frac{1 - \zeta_\alpha \zeta_\beta}{2} W_2 + \\ + \frac{1 - \xi_\alpha \xi_\beta}{2} \frac{1 + \zeta_\alpha \zeta_\beta}{2} W_3 + \frac{1 - \xi_\alpha \xi_\beta}{2} \frac{1 - \zeta_\alpha \zeta_\beta}{2} W_4,$$

где начальному и конечному состояниям с правой спиральностью соответствуют значения $\zeta_\alpha, \zeta_\beta = 1$, а с левой спиральностью $\zeta_\alpha, \zeta_\beta = -1$. Как и в прошлой главе, зная явный вид оператора эволюции (3.12) в флейворном представлении и используя матрицу плотности (2.19), по формуле (2.20) получим явный вид вероятности перехода с сохранением флейвора и поля-

ризации W_1 , вероятность перехода с сохранением флейвора и изменением поляризации W_2 , вероятность перехода с изменением флейвора и сохранением поляризации W_3 и вероятность перехода с изменением флейвора и поляризации W_4 . Полученные таким образом вероятности имеют вид

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (1 - \zeta_\alpha (\bar{s}s_{sp}))^2 (1 - S_{+1}^2 \tilde{X}_{+1}^2) + \frac{1}{2} (1 + \zeta_\alpha (\bar{s}s_{sp}))^2 (1 - S_{-1}^2 \tilde{X}_{-1}^2) + \right. \\
 &\quad \left. + (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) (C_{+1} C_{-1} + S_{+1} S_{-1} \tilde{Y}_{+1} \tilde{Y}_{-1}) \cos(\tilde{\omega}\tau) + \right. \\
 &\quad \left. + \xi_\alpha (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) (S_{-1} \tilde{Y}_{-1} C_{+1} - C_{-1} S_{+1} \tilde{Y}_{+1}) \sin(\tilde{\omega}\tau) \right), \\
 W_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) (2 - S_{+1}^2 \tilde{X}_{+1}^2 - S_{-1}^2 \tilde{X}_{-1}^2) - \right. \\
 &\quad \left. - (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) (C_{+1} C_{-1} + S_{+1} S_{-1} \tilde{Y}_{+1} \tilde{Y}_{-1}) \cos(\tilde{\omega}\tau) - \right. \\
 &\quad \left. - \xi_\alpha (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) (S_{-1} \tilde{Y}_{-1} C_{+1} - C_{-1} S_{+1} \tilde{Y}_{+1}) \sin(\tilde{\omega}\tau) \right), \\
 W_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (1 - \zeta_\alpha (\bar{s}s_{sp}))^2 S_{+1}^2 \tilde{X}_{+1}^2 + \frac{1}{2} (1 + \zeta_\alpha (\bar{s}s_{sp}))^2 S_{-1}^2 \tilde{X}_{-1}^2 + \right. \\
 &\quad \left. + (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) S_{+1} S_{-1} \tilde{X}_{+1} \tilde{X}_{-1} \cos(\tilde{\omega}\tau) \right), \\
 W_4 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) (S_{+1}^2 \tilde{X}_{+1}^2 + S_{-1}^2 \tilde{X}_{-1}^2) - \right. \\
 &\quad \left. - (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) S_{+1} S_{-1} \tilde{X}_{+1} \tilde{X}_{-1} \cos(\tilde{\omega}\tau) \right),
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

где для краткости использованы следующие обозначения

$$\begin{aligned}
 C_{\pm 1} &= \cos(\tau \tilde{Z}_{\pm 1}/2), & S_{\pm 1} &= \sin(\tau \tilde{Z}_{\pm 1}/2), \\
 \tilde{\omega} &= (\mu_2 + \mu_1) N.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Вероятности переходов, определяемые выражением (3.16), зависят от шести частот. Вполне естественно, что вероятности перехода без изменения спиральности W_1 и W_3 зависят от начальной поляризации ζ_α . Более интересно, что вероятности перехода с сохранением флейвора W_1 и W_2 также зависят от начального флейвора ξ_α .

Если пренебречь переходными моментами в уравнении (3.16) (то есть положить $\mu_{12} = 0$), а также положить $(\bar{s}s_{sp}) = 0$, то есть рассматривать нейтрино, движущееся перпендикулярно магнитному полю в лабораторной

системе отсчета, то выражения для вероятностей переходов, которые в данном случае мы обозначим как W^0 , выглядят следующим образом

$$\begin{aligned}
 W_1^0 &= \frac{1}{4} \left(2 - (S'_{+1}{}^2 + S'_{-1}{}^2) \sin^2 2\theta + 2(C'_{+1}C'_{-1} + S'_{+1}S'_{-1} \cos^2 2\theta) \cos(\tilde{\omega}\tau) + \right. \\
 &\quad \left. + 2\xi_\alpha (S'_{-1}C'_{+1} - C'_{-1}S'_{+1}) \cos 2\theta \sin(\tilde{\omega}\tau) \right), \\
 W_2^0 &= \frac{1}{4} \left(2 - (S'_{+1}{}^2 + S'_{-1}{}^2) \sin^2 2\theta - 2(C'_{+1}C'_{-1} + S'_{+1}S'_{-1} \cos^2 2\theta) \cos(\tilde{\omega}\tau) - \right. \\
 &\quad \left. - 2\xi_\alpha (S'_{-1}C'_{+1} - C'_{-1}S'_{+1}) \cos 2\theta \sin(\tilde{\omega}\tau) \right), \\
 W_3^0 &= \frac{1}{4} \left(S'_{+1}{}^2 + S'_{-1}{}^2 + 2S'_{+1}S'_{-1} \cos(\tilde{\omega}\tau) \right) \sin^2 2\theta, \\
 W_4^0 &= \frac{1}{4} \left(S'_{+1}{}^2 + S'_{-1}{}^2 - 2S'_{+1}S'_{-1} \cos(\tilde{\omega}\tau) \right) \sin^2 2\theta,
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

где

$$C'_{\pm 1} = \cos(\tau \tilde{Z}'_{\pm 1}/2), \quad S'_{\pm 1} = \sin(\tau \tilde{Z}'_{\pm 1}/2), \quad \tilde{Z}'_\zeta = (m_2 - m_1 - \zeta(\mu_2 - \mu_1)N). \tag{3.19}$$

Если в начальный момент времени нейтрино имеет электронный флейвор ($\xi_\alpha = 1$), то формулы (3.18) совпадают с полученными в работах [119, 120]. Вероятности в этом случае все еще зависят от шести частот. Следует отметить, что выбор направления скорости нейтрино перпендикулярно направлению магнитного поля приводит к тому, что зависимость от начальной поляризации нейтрино ζ_α исчезает.

Выражения (3.16) по структуре полностью совпадают с выражениями (2.25), хотя физическое содержание этих формул различно. Это связано с тем, что как для нейтрино в движущейся поляризованной среде, так и для нейтрино в электромагнитном поле, существует чисто спиновый интеграл движения. В общем случае однако все интегралы движения задаются матрицами, содержащими одновременно как спиновые операторы, так и матрицы, перемешивающие флейворные компоненты. Этот случай не рассматривается в диссертации, так как для нахождения собственных значений таких матриц даже в модели двух флейворов необходимо решать уравнение по крайней мере четвертой степени, а в более реалистичной модели трех флейворов степень характеристического уравнения будет не ниже шестой.

Как и в случае взаимодействия с веществом знаменатели функций $\tilde{Y}_\zeta = \cos 2\theta_\zeta$ и $\tilde{X}_\zeta = \sin 2\theta_\zeta$, которые определяют эффективный угол смешивания, имеют резонансный характер. Условием такого резонанса будет обращение в нуль величины $\tilde{Y}_\zeta = \cos 2\theta_\zeta$, то есть условие резонанса имеет вид

$$\left| \frac{\mu_2 - \mu_1 - 2\mu_{12}\text{tg}2\theta}{m_2 - m_1} \right| N = 1. \quad (3.20)$$

Вследствие малости переходных магнитных моментов, для нейтрино, описываемого в рамках Стандартной модели, резонансное условие $\cos 2\theta_\zeta = 0$ в первом приближении принимает вид $\mu_0 N = 1$, где μ_0 — коэффициент пропорциональности между массами нейтрино и диагональными магнитными моментами. В частном случае распространения нейтрино параллельно полю это условие было получено в работе [121].

Важно понимать, что обращение в нуль косинуса двойного эффективно-го угла смешивания еще не обязательно означает резонансное поведение вероятностей. Для проверки существования резонанса необходимо рассмотреть случай медленно меняющегося поля по аналогии с тем, как это делается при исследовании резонанса Михеева–Смирнова–Вольфенштейна. Анализ этой ситуации приведен в главе, посвященной распространению нейтрино в неоднородном электромагнитном поле.

3.2 Вероятность переворота спина

Так как выражения для нейтрино в электромагнитном поле по форме совпадают с выражениями для нейтрино в веществе, также приведем здесь анализ выражений для вероятности переворота спина $W = W_2 + W_4$ для нейтрино в магнитном поле, аналогичный выполненному в Разделе 2.2 диссертации. Вероятность переворота спина имеет вид

$$W = \frac{1}{2} \mathcal{A}(A_1(1 - \cos \omega_1 \tau) + A_2(1 - \cos \omega_2 \tau) + A_3(1 - \cos \omega_3 \tau) + A_4(1 - \cos \omega_4 \tau)), \quad (3.21)$$

где

$$\mathcal{A} = 1 - (\bar{s}s_{sp})^2, \quad (3.22)$$

а коэффициенты A_i ($i = 1 \dots 4$) задаются выражениями, аналогичными (2.43) с точностью до замены $X_\zeta \rightarrow \tilde{X}_\zeta$, $Y_\zeta \rightarrow \tilde{Y}_\zeta$. Вероятность поворота спина при этом характеризуется четырьмя частотами

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \tilde{\omega} + \frac{\tilde{Z}_{+1} + \tilde{Z}_{-1}}{2}, & \omega_2 &= \tilde{\omega} + \frac{\tilde{Z}_{+1} - \tilde{Z}_{-1}}{2}, \\ \omega_3 &= \tilde{\omega} - \frac{\tilde{Z}_{+1} - \tilde{Z}_{-1}}{2}, & \omega_4 &= \tilde{\omega} - \frac{\tilde{Z}_{+1} + \tilde{Z}_{-1}}{2}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Частоты \tilde{Z}_{+1} и \tilde{Z}_{-1} характеризуют флейворные осцилляции нейтрино различной поляризации. Четыре комбинационные частоты $\tilde{\omega} \pm (\tilde{Z}_{+1} \pm \tilde{Z}_{-1})/2$ возникают вследствие корреляций между флейворными осцилляциями и поворотом спина нейтрино. Зависимость вероятностей перехода в различные состояния от расстояния носит характер достаточно сложных биений.

Когда нейтрино распространяется в магнитном поле, полная амплитуда переходов с переворотом спина (3.22) может быть представлена в виде

$$\mathcal{A} = \frac{u_0^2 \sin^2 \vartheta_M}{u_0^2 - |\mathbf{u}|^2 \cos^2 \vartheta_M}, \quad (3.24)$$

где ϑ_M — угол между направлением распространения нейтрино и вектором индукции магнитного поля. Таким образом, полная амплитуда зависит от скорости нейтрино и направления магнитного поля, однако не зависит от величины магнитной индукции.

Полная амплитуда (3.24) отличается от единицы только тогда, когда $\vartheta_M \approx 0$ или $\vartheta_M \approx \pi$. Более того, диапазон углов, для которых это отличие существенно, сужается при росте лоренц-фактора нейтрино u_0 . Зависимость полной амплитуды \mathcal{A} от угла ϑ_M проиллюстрирована на Рис. 3.1.

Так как переходный момент для нейтрино, описывающегося Стандартной моделью, крайне мал, то вдали от точки резонанса, определяемой условием $\mu_0 N = 1$, выполняются следующие соотношения

$$\tilde{Y}_\zeta \approx \cos 2\theta, \quad \tilde{X}_\zeta \approx \sin 2\theta, \quad (3.25)$$

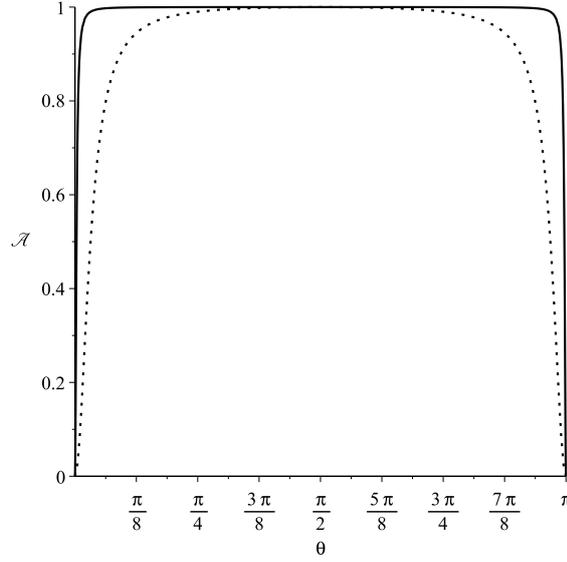


Рис. 3.1: Полная амплитуда поворота спина в электромагнитном поле. Пунктирная линия соответствует $u_0 = 10$, сплошная соответствует $u_0 = 100$.

иными словами, эффективный угол смешивания практически совпадает с вакуумным. Таким образом, коэффициенты, соответствующие осциллирующим членам, выглядят следующим образом

$$A_1 \approx 0, \quad A_2 \approx \frac{1}{2}(1 + \xi_\alpha \cos 2\theta), \quad A_3 \approx \frac{1}{2}(1 - \xi_\alpha \cos 2\theta), \quad A_4 \approx 0. \quad (3.26)$$

То есть, биения эффективно характеризуются только частотами ω_2 и ω_3 .

Напротив, если выполняется условие резонанса $\mu_0 N \approx 1$, то

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{+1} &\approx \sin 2\theta, & \tilde{X}_{+1} &\approx -\cos 2\theta, \\ \tilde{Y}_{-1} &\approx \cos 2\theta, & \tilde{X}_{-1} &\approx \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Для соответствующих осциллирующих членов получаем

$$\begin{aligned} A_1 &\approx \frac{1}{4}(1 + \xi_\alpha(\sin 2\theta - \cos 2\theta)), \\ A_2 &\approx \frac{1}{4}(1 + \xi_\alpha(\sin 2\theta + \cos 2\theta)), \\ A_3 &\approx \frac{1}{4}(1 - \xi_\alpha(\sin 2\theta + \cos 2\theta)), \\ A_4 &\approx \frac{1}{4}(1 - \xi_\alpha(\sin 2\theta - \cos 2\theta)). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Все эти коэффициенты отличны от нуля. Однако в случае резонанса только две частоты существенно отличаются друг от друга. Таким образом, в этом случае биения тоже характеризуются двумя частотами.

Отметим, что как и в случае распространения нейтрино в веществе, формулу (3.16) можно использовать не только для исследования нейтрино с определенной спиральностью, но и для исследования нейтрино с произвольной поляризацией. Для этого достаточно заменить s_{sp}^μ в выражении (3.16) произвольным 4-вектором поляризации s_0^μ . В этом случае вероятно могут вести себя иначе. Как уже указывалось, спиральность нейтрино не меняется при распространении в покоящейся неполяризованной среде или вдоль линии магнитного поля. Тем не менее, если выбрать начальную поляризацию нейтрино, отличающуюся от продольной, даже в этих случаях возможен переворот спина.

Глава 4

Нейтрино в неоднородном магнитном поле

4.1 Резонанс в электромагнитном поле

В общем случае матрица оператора эволюции может быть записана как мультипликативный интеграл Вольтерра (см., например, [122]), или, что фактически то же самое, с помощью T -экспоненты, однако записать выражение в явном виде возможно только в нескольких частных случаях. По этой причине мы ограничимся исследованием эволюции нейтрино в неоднородном электромагнитном поле в адиабатическом приближении.

Как мы уже видели, когда магнитная индукция поля является постоянной, оператор (3.3)

$$\mathcal{S} = \gamma^5 \gamma^\mu {}^*F_{\mu\nu} u^\nu / N, \quad N = \sqrt{u_\mu {}^*F^{\mu\alpha} {}^*F_{\alpha\nu} u^\nu}$$

является интегралом движения для уравнения эволюции (1.53) и определяет проекцию спина на направление магнитного поля в системе покоя нейтрино. Соответствующий вектор поляризации нейтрино определен следующим образом (3.4)

$$\bar{s}^\mu = - {}^*F^{\mu\nu} u_\nu / N.$$

Если магнитное поле меняется медленно, оператор \mathcal{S} можно рассматривать как приближенный интеграл движения в случае, если энергия взаимодействия нейтрино с полем за счет наличия магнитного момента существенно

превышает обратное время изменения поля. Более аккуратно условие применимости этого приближения получено в работе [106] и выглядит следующим образом

$$\frac{\kappa}{2\mu_0 N} \ll 1, \quad (4.1)$$

$$\frac{\varkappa}{\kappa} \ll 1, \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa &= \sqrt{H^2 \dot{H}^2 - (H \dot{H})^2 / N^2}, \\ \varkappa &= \frac{N}{H^2 \dot{H}^2 - (H \dot{H})^2} e^{\alpha\beta\gamma\delta} \ddot{H}_\alpha \dot{H}_\beta H_\gamma u_\delta. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь $H^\mu = {}^*F^{\mu\nu} u_\nu$, точкой обозначено дифференцирование по собственному времени.

При преобразовании Лоренца в систему покоя нейтрино продольная компонента магнитного поля остается той же, в то время как поперечная компонента возрастает пропорционально лоренц-фактору нейтрино u_0 . Так как значение лоренц-фактора достаточно велико $u_0 \gg 1$, направление магнитной индукции в системе покоя нейтрино становится почти перпендикулярно скорости этой системы отсчета, за исключением случая, когда нейтрино распространяется в точности вдоль или против направления поля. Кроме указанного случая, направления первой и второй производной магнитного поля также почти перпендикулярны скорости нейтрино, вследствие чего условие (4.2) для ультрарелятивистских нейтрино выполняется почти всегда.

Когда внешние условия меняются медленно, наличие приближенного интеграла движения \mathcal{S} с собственными значениями ζ позволяет записать в явном виде оператор эволюции $U(\tau)$. В этом случае матрицу, определяющую эволюцию нейтрино, можно записать в виде

$$\mathcal{F} = \sum_{\zeta=\pm 1} \mathcal{F}_\zeta \Lambda_\zeta, \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\zeta(\tau) &= \mathbb{M} - \zeta \mathbb{M}_d N(\tau) - \zeta \mathbb{M}_h N(\tau), \\ \Lambda_\zeta &= \frac{1}{2} (1 + \zeta \mathcal{S}), \quad [\gamma^\mu u_\mu, \Lambda_\zeta] = 0, \quad \zeta = \pm 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Каждая из матриц (4.5), определяющих эволюцию состояний с определенной поляризацией $\zeta = \pm 1$, может быть диагонализирована в произвольный момент времени τ . Если все матрицы записаны в массовом представлении, то эти матрицы диагонализуются поворотом с помощью матрицы

$$\mathbb{U}_{\zeta}^{(eff)}(\tau) = \begin{pmatrix} \cos \theta'_{\zeta}(\tau) & \sin \theta'_{\zeta}(\tau) \\ -\sin \theta'_{\zeta}(\tau) & \cos \theta'_{\zeta}(\tau) \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

где $\theta'_{\zeta}(\tau)$ — угол смешивания для массовых состояний нейтрино в электромагнитном поле (см. Раздел 3.1 диссертации). Диагонализованная матрица при этом принимает вид

$$\mathcal{F}'_{\zeta}{}^{diag}(\tau) = \mathbb{U}_{\zeta}^{(eff)\dagger}(\tau) \mathcal{F}'(\tau) \mathbb{U}_{\zeta}^{(eff)}(\tau) \quad (4.7)$$

и, с учетом определения (3.14), сводится к виду

$$\mathcal{F}'_{\zeta}{}^{diag}(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{T_{\zeta}(\tau) - Z_{\zeta}(\tau)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{T_{\zeta}(\tau) + Z_{\zeta}(\tau)}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Адиабатическое приближение справедливо, если поле меняется достаточно медленно, то есть когда $|\dot{\theta}_{\zeta}| \ll \tilde{Z}_{\zeta}$, где \tilde{Z}_{ζ} определяется формулой (3.11). Можно получить параметр адиабатичности Γ для нейтрино в электромагнитном поле по аналогии с тем, что обычно делается для нейтрино в веществе (см., например, [123]). Условие адиабатичности принимает вид

$$\Gamma = \frac{Z_{\zeta}^3}{\mu_{12} |\dot{N}(\tau)| (m_2 - m_1)} \gg 1. \quad (4.9)$$

Если выполняется это условие, то оператор эволюции в адиабатическом приближении можно записать в виде [124]

$$U(\tau) = \sum_{\zeta=\pm 1} \mathbb{U}_{\zeta}^{(eff)}(\tau) e^{-i \int_0^{\tau} d\tilde{\tau} \mathcal{F}'_{\zeta}{}^{diag}(\tilde{\tau})} \mathbb{U}_{\zeta}^{(eff)\dagger}(0) \Lambda_{\zeta}. \quad (4.10)$$

Указанный алгоритм вполне идентичен тому, что обычно делается для описания резонанса Михеева–Смирнова–Вольфенштейна. Фактически в этом методе предполагается, что стационарные состояния, описываемые

собственными функциями матрицы \mathcal{F} , с некоторой точностью остаются стационарными в любой момент времени.

Таким образом, оператор эволюции $U'(\tau)$ в массовом представлении в адиабатическом приближении принимает вид

$$\begin{aligned}
 U'(\tau) = \sum_{\zeta=\pm 1} e^{-i \int_0^{\tau} (T_{\zeta}(\tilde{\tau})/2) d\tilde{\tau}} \times & \left(C_{\zeta} \cos(\theta'_{\zeta}(\tau) - \theta'_{\zeta}(0)) - \right. \\
 & - i S_{\zeta} \sigma_1 \sin(\theta'_{\zeta}(\tau) + \theta'_{\zeta}(0)) + i C_{\zeta} \sigma_2 \sin(\theta'_{\zeta}(\tau) - \theta'_{\zeta}(0)) + \\
 & \left. + i S_{\zeta} \sigma_3 \cos(\theta'_{\zeta}(\tau) + \theta'_{\zeta}(0)) \right) \Lambda_{\zeta}, \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}
 S_{\zeta} &= \sin \int_0^{\tau} (Z_{\zeta}(\tilde{\tau})/2) d\tilde{\tau}, \quad C_{\zeta} = \cos \int_0^{\tau} (Z_{\zeta}(\tilde{\tau})/2) d\tilde{\tau}, \quad (4.12) \\
 T_{\zeta}(\tau) &= (m_2 + m_1 - \zeta(\mu_1 + \mu_2)N(\tau)),
 \end{aligned}$$

которые обобщают обозначения, использованные в **Главе 3** для нейтрино в постоянном электромагнитном поле.

Чтобы получить оператор эволюции в флейворном представлении, следует использовать соотношение (1.48). Полученное в результате этого преобразования выражение имеет ту же форму, что и (4.11), но зависит от эффективного угла смешивания для флейворных состояний, который определяется как $\theta_{\zeta}(\tau) = \theta + \theta'_{\zeta}(\tau)$:

$$\begin{aligned}
 U(\tau) = \sum_{\zeta=\pm 1} e^{-i \int_0^{\tau} (T_{\zeta}(\tilde{\tau})/2) d\tilde{\tau}} \times & \left(C_{\zeta} \cos(\theta_{\zeta}(\tau) - \theta_{\zeta}(0)) - \right. \\
 & - i S_{\zeta} \sigma_1 \sin(\theta_{\zeta}(\tau) + \theta_{\zeta}(0)) + i C_{\zeta} \sigma_2 \sin(\theta_{\zeta}(\tau) - \theta_{\zeta}(0)) + \\
 & \left. + i S_{\zeta} \sigma_3 \cos(\theta_{\zeta}(\tau) + \theta_{\zeta}(0)) \right) \Lambda_{\zeta}. \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

Как и в предыдущих главах, зная явный вид оператора эволюции, получим вероятности спин-флейворных переходов нейтрино в виде (2.24)

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha \rightarrow \beta} = & \frac{1 + \xi_{\alpha} \xi_{\beta}}{2} \frac{1 + \zeta_{\alpha} \zeta_{\beta}}{2} W_1 + \frac{1 + \xi_{\alpha} \xi_{\beta}}{2} \frac{1 - \zeta_{\alpha} \zeta_{\beta}}{2} W_2 + \\
 & + \frac{1 - \xi_{\alpha} \xi_{\beta}}{2} \frac{1 + \zeta_{\alpha} \zeta_{\beta}}{2} W_3 + \frac{1 - \xi_{\alpha} \xi_{\beta}}{2} \frac{1 - \zeta_{\alpha} \zeta_{\beta}}{2} W_4,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \frac{1}{8} \left((1 - \zeta_\alpha (\bar{s}s_{sp}))^2 (1 + C_{+1}^2 \cos 2\Delta_{+1}(\tau) + S_{+1}^2 \cos 2\Theta_{+1}(\tau)) + \right. \\
 &\quad \left. + (1 + \zeta_\alpha (\bar{s}s_{sp}))^2 (1 + C_{-1}^2 \cos 2\Delta_{-1}(\tau) + S_{-1}^2 \cos 2\Theta_{-1}(\tau)) \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) (\xi_\alpha F_1(\tau) \sin \Phi(\tau) + D_1(\tau) \cos \Phi(\tau)), \\
 W_2 &= \frac{1}{8} \left((1 - (\bar{s}s_{sp})^2) (1 + C_{+1}^2 \cos 2\Delta_{+1}(\tau) + S_{+1}^2 \cos 2\Theta_{+1}(\tau)) + \right. \\
 &\quad \left. + (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) (1 + C_{-1}^2 \cos 2\Delta_{-1}(\tau) + S_{-1}^2 \cos 2\Theta_{-1}(\tau)) \right) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) (\xi_\alpha F_1(\tau) \sin \Phi(\tau) + D_1(\tau) \cos \Phi(\tau)), \\
 W_3 &= \frac{1}{8} \left((1 - \zeta_\alpha (\bar{s}s_{sp}))^2 (1 - C_{+1}^2 \cos 2\Delta_{+1}(\tau) - S_{+1}^2 \cos 2\Theta_{+1}(\tau)) + \right. \\
 &\quad \left. + (1 + \zeta_\alpha (\bar{s}s_{sp}))^2 (1 - C_{-1}^2 \cos 2\Delta_{-1}(\tau) - S_{-1}^2 \cos 2\Theta_{-1}(\tau)) \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) (\xi_\alpha F_2(\tau) \sin \Phi(\tau) + D_2(\tau) \cos \Phi(\tau)), \\
 W_4 &= \frac{1}{8} \left((1 - (\bar{s}s_{sp})^2) (1 - C_{+1}^2 \cos 2\Delta_{+1}(\tau) - S_{+1}^2 \cos 2\Theta_{+1}(\tau)) + \right. \\
 &\quad \left. + (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) (1 - C_{-1}^2 \cos 2\Delta_{-1}(\tau) - S_{-1}^2 \cos 2\Theta_{-1}(\tau)) \right) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) (\xi_\alpha F_2(\tau) \sin \Phi(\tau) + D_2(\tau) \cos \Phi(\tau)).
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Здесь используются следующие обозначения

$$\begin{aligned}
 \Phi(\tau) &= (\mu_1 + \mu_2) \int_0^\tau N(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau}, \\
 F_1(\tau) &= C_{+1} S_{-1} \cos \Delta_{+1}(\tau) \cos \Theta_{-1}(\tau) - S_{+1} C_{-1} \cos \Theta_{+1}(\tau) \cos \Delta_{-1}(\tau), \\
 D_1(\tau) &= C_{+1} C_{-1} \cos \Delta_{+1}(\tau) \cos \Delta_{-1}(\tau) + S_{+1} S_{-1} \cos \Theta_{+1}(\tau) \cos \Theta_{-1}(\tau), \\
 F_2(\tau) &= C_{+1} S_{-1} \sin \Delta_{+1}(\tau) \sin \Theta_{-1}(\tau) - S_{+1} C_{-1} \sin \Theta_{+1}(\tau) \sin \Delta_{-1}(\tau), \\
 D_2(\tau) &= C_{+1} C_{-1} \sin \Delta_{+1}(\tau) \sin \Delta_{-1}(\tau) + S_{+1} S_{-1} \sin \Theta_{+1}(\tau) \sin \Theta_{-1}(\tau),
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

где

$$\Delta_{\pm 1}(\tau) = \theta_{\pm 1}(\tau) - \theta_{\pm 1}(0), \quad \Theta_{\pm 1}(\tau) = \theta_{\pm 1}(\tau) + \theta_{\pm 1}(0). \tag{4.16}$$

4.2 Зависимость резонанса от поляризации

В общем случае выражения для вероятностей оказываются достаточно громоздкими даже в модели двух флейворов. По этой причине мы рассмотрим частный случай нейтрино, сгенерированных внутри области с достаточно большими значениями магнитного поля и зарегистрированных на большом удалении от источника, то есть положим значение магнитного поля в конечной точке равным нулю. Такая модель вполне применима для описания нейтрино, исходящих от астрофизических объектов, обладающих большим магнитным полем.

При такой постановке задачи значение эффективного угла смешивания для флейворных нейтрино в конечном состоянии совпадает с вакуумным $\theta_\zeta(\tau) = \theta$, а значение эффективного угла смешивания в начальный момент времени мы обозначим как $\theta_\zeta^0 = \theta_\zeta(0)$. Так как, вообще говоря, у нас нет точной информации о точке рождения нейтрино, целесообразно усреднить вероятности по собственному времени τ . После усреднения значения вероятностей задаются в виде

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \frac{1}{8} \left((1 - \zeta_\alpha(\bar{s}s_{sp}))^2 (1 + \cos 2\theta \cos 2\theta_{+1}^0) + \right. \\
 &\quad \left. + (1 + \zeta_\alpha(\bar{s}s_{sp}))^2 (1 + \cos 2\theta \cos 2\theta_{-1}^0) \right), \\
 W_2 &= \frac{1}{8} (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) (2 + \cos 2\theta (\cos 2\theta_{+1}^0 + \cos 2\theta_{-1}^0)), \\
 W_3 &= \frac{1}{8} \left((1 - \zeta_\alpha(\bar{s}s_{sp}))^2 (1 - \cos 2\theta \cos 2\theta_{+1}^0) + \right. \\
 &\quad \left. + (1 + \zeta_\alpha(\bar{s}s_{sp}))^2 (1 - \cos 2\theta \cos 2\theta_{-1}^0) \right), \\
 W_4 &= \frac{1}{8} (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) (2 - \cos 2\theta (\cos 2\theta_{+1}^0 + \cos 2\theta_{-1}^0)).
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Для нейтрино высоких энергий предположение $(\bar{s}s_{sp}) = 0$ хорошо выполняется для всех направлений скорости нейтрино за исключением достаточно узкого диапазона углов, когда скорость нейтрино почти параллельна направлению магнитного поля (см. Рис. 3.1). Таким образом, вероятности

принимают вид

$$\begin{aligned} W_{1,2} &= \frac{1}{8} \left(2 + \cos 2\theta (\cos 2\theta_{+1}^0 + \cos 2\theta_{-1}^0) \right), \\ W_{3,4} &= \frac{1}{8} \left(2 - \cos 2\theta (\cos 2\theta_{+1}^0 + \cos 2\theta_{-1}^0) \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Учитывая формулы (3.11)-(3.15), получаем

$$\cos 2\theta_{\zeta}^0 = Y'_{\zeta} \cos 2\theta - X'_{\zeta} \sin 2\theta. \quad (4.19)$$

В явном виде это выражение записывается следующим образом

$$\begin{aligned} \cos 2\theta_{\zeta}^0 &= \left((m_2 - m_1 - \zeta(\mu_2 - \mu_1)N(0)) \cos 2\theta + 2\zeta\mu_{12}N(0) \sin 2\theta \right) \times \\ &\times \left(\left((m_2 - m_1 - \zeta(\mu_2 - \mu_1)N(0)) \right)^2 + \left(2\mu_{12}N(0) \right)^2 \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Как уже указывалось ранее (см. выражение (3.20)), условие резонанса имеет вид

$$N \frac{|\mu_2 - \mu_1|}{|m_2 - m_1|} = |1 - r \operatorname{tg} 2\theta|^{-1},$$

где $r = 2\mu_{12}/|\mu_2 - \mu_1|$.

Рис. 4.1 иллюстрирует поведение вероятности сохранения флейвора $W_1 + W_2$ для разных значений r в случае, когда скорость нейтрино перпендикулярна вектору магнитной индукции. Значение вакуумного угла смешивания для определенности выбрано $\sin^2 \theta = 0.307$.

В соответствии с теоретическими предсказаниями Стандартной модели, $\mu_{12}/\mu_i \sim 10^{-4} \cdot (m_1 + m_2)/m_i$, и, как уже указывалось, диагональные магнитные моменты в первом приближении пропорциональны массам нейтрино $\mu_i = \mu_0 m_i$. Как следствие, можно ожидать, что $r \ll 1$, и условие резонанса сводится к виду

$$\mu_0 N = 1.$$

Тогда вероятности переходов принимают вид

$$\begin{aligned} W_{1,2} &= \frac{1}{8} \left(2 + \left(1 + \operatorname{sgn}(1 - \mu_0 N(0)) \right) \cos^2 2\theta \right), \\ W_{3,4} &= \frac{1}{8} \left(2 - \left(1 + \operatorname{sgn}(1 - \mu_0 N(0)) \right) \cos^2 2\theta \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

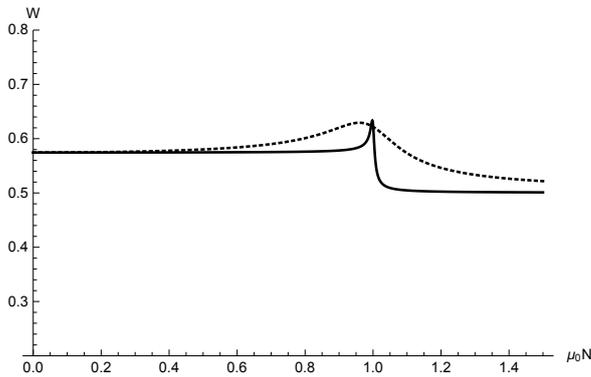


Рис. 4.1: Зависимость вероятности сохранения флейвора от начального значения магнитной индукции при $r = 0.005$ (сплошная линия) и при $r = 0.1$ (пунктирная линия) при распространении нейтрино перпендикулярно полю.

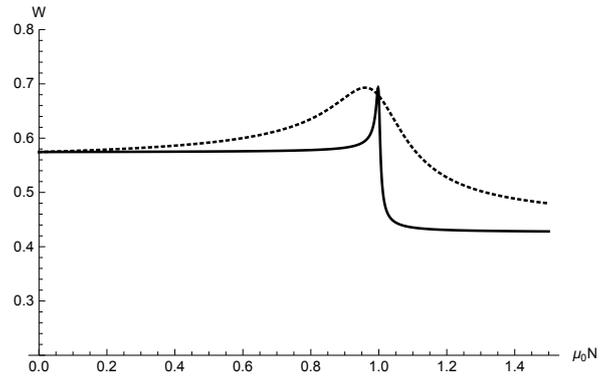


Рис. 4.2: Зависимость вероятности сохранения флейвора нейтрино от начального значения магнитной индукции при распространении левополяризованных нейтрино против поля (или правополяризованных вдоль поля) при $r = 0.005$ (сплошная линия) и при $r = 0.1$ (пунктирная линия).

Очевидно, когда $\mu_0 N(0) \approx 1$, выражение (4.21) неприменимо, и требуется использовать более точную формулу (4.18).

Несмотря на то, что в большинстве случаев условие $(\bar{s}s_{sp}) = 0$ выполняется, есть достаточно узкий диапазон углов, для которого векторы магнитной индукции и скорости нейтрино почти параллельны. Как уже указывалось, для ультррелятивистских энергий нейтрино даже небольшое отклонение от параллельного распространения приводит к тому, что нейтрино ведет себя так же, как в случае распространения перпендикулярно полю [47]. Вследствие этой неустойчивости, исследование указанного случая имеет не очень много практического смысла.

Тем не менее, именно указанный случай помогает разобраться, почему число нейтрино второго флейвора может возрасти слабее (см. Рис. 4.1), чем в случае эффекта Михеева–Смирнова–Вольфенштейна. Рассмотрим предельный случай, когда нейтрино движется по полю или против поля. В этом случае оператор спиральности становится интегралом движения, и переходы с переворотом спина становятся невозможными. Математически это следует из того, что $(\bar{s}s_{sp}) = \pm 1$, то есть $W_2 = W_4 = 0$.

Для нейтрино, распространяющегося против направления поля, получаем $(\bar{s}s_{sp}) = 1$. Таким образом,

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1 - \zeta_\alpha}{4} (1 + \cos 2\theta \cos 2\theta_{+1}^0) + \frac{1 + \zeta_\alpha}{4} (1 + \cos 2\theta \cos 2\theta_{-1}^0), \\ W_3 &= \frac{1 - \zeta_\alpha}{4} (1 - \cos 2\theta \cos 2\theta_{+1}^0) + \frac{1 + \zeta_\alpha}{4} (1 - \cos 2\theta \cos 2\theta_{-1}^0). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Для нейтрино Стандартной модели можно записать приближенные выражения для вероятностей переходов

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1 - \zeta_\alpha}{4} \left(1 + \operatorname{sgn} \left(1 - \mu_0 N(0) \right) \cos^2 2\theta \right) + \frac{1 + \zeta_\alpha}{4} (1 + \cos^2 2\theta), \\ W_3 &= \frac{1 - \zeta_\alpha}{4} \left(1 - \operatorname{sgn} \left(1 - \mu_0 N(0) \right) \cos^2 2\theta \right) + \frac{1 + \zeta_\alpha}{4} (1 - \cos^2 2\theta). \end{aligned} \quad (4.23)$$

В соответствии с этими формулами, резонанс присутствует для нейтрино левой поляризации, в то время как для правополяризованных нейтрино резонанс отсутствует. Зависимость вероятности сохранения флейвора $W_1 + W_2$ от значения магнитной индукции для левополяризованных нейтрино проиллюстрирована на Рис. 4.2.

Если нейтрино распространяется вдоль направления магнитного поля, то $(\bar{s}s_{sp}) = -1$. Вероятности переходов в этом случае можно получить, заменив $\zeta_\alpha \rightarrow -\zeta_\alpha$ в выражениях (4.22), (4.23). В этом случае, резонанс присутствует только для нейтрино правой поляризации, которые не наблюдаются в эксперименте. Таким образом, и при распространении нейтрино вдоль поля, и при распространении против поля вероятности переходов носят резонансный характер, если начальное направление спина нейтрино — вдоль вектора магнитной индукции, а в случае, если направление спина против поля, резонанс полностью отсутствует.

Таким образом мы приходим к важному выводу. Наличие резонанса зависит от поляризации нейтрино. Для левополяризованной массивной частицы, распространяющейся ортогонально магнитному полю, вероятности обнаружить проекцию спина в направлениях по полю и против поля равны $1/2$, и вероятности спин-флейворных переходов нейтрино (4.18) равны полусумме резонансного и нерезонансного слагаемого. Хорошо известно,

что резонанс Михеева–Смирнова–Вольфенштейна возможен только для левополяризованных нейтрино. Так как для нейтрино в покоящейся среде спиральность сохраняется, связь возможности резонанса с поляризацией частиц не исследовалась при изучении резонанса в веществе. Вследствие эффекта поворота спина описание резонанса в магнитном поле является более сложной задачей.

Для достаточно высоких значений магнитного поля все вероятности спин-флейворных переходов становятся равными

$$W_1 = W_2 = W_3 = W_4 = \frac{1}{4}. \quad (4.24)$$

Это означает, что теряется любая информация о начальном состоянии нейтрино. Стоит отметить, что условие $r \ll 1$, вообще говоря, не требуется для того, чтобы выражение (4.24) следовало из (4.18).

Тем не менее, когда не выполняется условие адиабатичности, полученные выражения для вероятностей не являются справедливыми. Таким образом, даже для начальных значений поля, превышающих резонансное значение, мы не получаем резонансное поведение вероятностей. Так как в области резонанса $Z_\zeta \approx 2\mu_{12}N$, то параметр адиабатичности Γ в (4.9) становится пропорционален μ_{12}^2 . Несмотря на то, что величина μ_{12} существенно меньше величины диагональных магнитных моментов μ_i и по этой причине может быть опущена в выражении (4.21), наличие резонанса обусловлено именно отличными от нуля недиагональными элементами матрицы магнитных моментов.

Коэффициент r влияет на диапазон полей, при которых величиной μ_{12} можно пренебречь: чем больше r , тем шире область резонанса, а для меньших значений r условие адиабатичности (4.9) приводит к более строгим ограничениям на возможные значения градиента поля.

Несмотря на то, что наличие ненулевых переходных электрических моментов не позволяет получить аналитическое решение задачи, можно утверждать, что резонансное поведение вероятностей флейворных переходов в этом случае сохранится. Действительно, резонансное поведение

вероятностей определяется диагональными в массовом представлении элементами матрицы \mathcal{F} , содержащейся в волновом уравнении нейтрино. Для нейтрино в Стандартной модели влияние переходных моментов становится существенным, только когда значение начального магнитного поля находится в области резонанса $\mu_0 N(0) \approx 1$. Таким образом, резонансный знаменатель эффективного угла смешивания содержит значение Z_ζ , которое примерно равно

$$Z_\zeta \approx \left(((m_2 - m_1 - \zeta(\mu_2 - \mu_1)N))^2 + (2\mu_{12}N)^2 + (2\alpha\varepsilon_{12}\tilde{N})^2 \right)^{1/2}, \quad (4.25)$$

где ε_{12} — переходный электрический момент, α — коэффициент, для которого выполняется $|\alpha| \leq 1$. Действительно, взаимодействие с переходным электрическим моментом определяется спиновым оператором

$$\tilde{\mathfrak{S}} = -\gamma^5 \gamma^\mu F_{\mu\nu} u^\nu / \tilde{N}, \quad \tilde{N} = \sqrt{u_\mu F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} u^\nu}, \quad (4.26)$$

который, в отличие от оператора (3.3), определяется обычным тензором электромагнитного поля, а не дуальным тензором. Квадрат этого оператора, как квадрат любого спинового оператора, равен единице, откуда и получено приближенное соотношение (4.25). Когда переходные электрические моменты учитываются, не существует чисто спинового интеграла движения уравнения (1.53), то есть интеграла движения, не содержащего флейворных матриц. Как следствие, собственное состояние, в котором нейтрино распространяется, устроено более сложно, чем состояние с определенной поляризацией. Это может привести к следующим последствиям. Во-первых, само значение резонансного поля может немного измениться. Во-вторых, вероятности W_1 и W_2 могут отличаться друг от друга, как могут отличаться W_3 и W_4 (см. (4.18)).

Как уже указывалось ранее, условие резонанса задается приближенным равенством $\mu_0 N \approx 1$, то есть определяется значением магнитной индукции в системе покоя нейтрино. Так как значение μ_0 , заданное Стандартной моделью, мало, требуются чрезвычайно большие поля для того, чтобы это условие выполнилось. Для нейтрино, распространяющегося перпендикулярно полю, резонанс достигается при $u_0 B / B_0 \approx 1.3 \times 10^{13}$, где

$B_0 = 4.41 \times 10^{13}$ Гаусс — швингеровское магнитное поле. Таким образом, $B \approx 5.8 \times 10^{26}(m_\nu/\mathcal{E}_\nu)$ Гаусс, где m_ν — характерная масса нейтрино, а \mathcal{E}_ν — энергия нейтрино. Для нейтрино с массой $m_\nu = 0.033$ эВ в магнитном поле $B = 10^{16}$ Гаусс для достижения резонанса требуется энергия примерно равная 1.9 ГэВ.

В связи с этим возникает вопрос, возможен ли поворот спина в наблюдаемых на данный момент астрофизических объектах. Для выбранных значений массы нейтрино и магнитной индукции характерная длина поворота спина оказывается равной $L = \pi/(\mu_\nu B) \approx 1070$ км. Здесь для магнитного момента нейтрино мы использовали оценку в рамках Стандартной модели $\mu_i = \mu_0 m_i \approx 3 \cdot 10^{-19}(m_\nu/1\text{eV})\mu_B$. Таким образом, L существенно превышает характерные размеры магнетаров, которые составляют $R_{mgt} \approx 20 - 30$ км. Еще раз отметим, что даже использованное нами значение магнитной индукции $B = 10^{16}$ Гаусс не наблюдается для известных на данный момент астрономических объектов. Кроме того, чем меньше поле, тем больше должен быть размер астрофизического объекта для того, чтобы поворот спина нейтрино при распространении внутри него был существенным. Однако, как будет показано в следующих разделах этой главы, дополнительный вклад в поворот спина может дать поле вокруг компактного астрофизического объекта, например магнетара. При этом для решения такой задачи отсутствует необходимость хорошо знать структуру объекта, и можно ограничиться лишь общими достаточно реалистичными предположениями об его устройстве.

Также важно учитывать, что для нейтрино Стандартной модели $r \ll 1$, а значит, условие адиабатичности (4.9), которое может быть переписано в виде

$$\frac{r^2(m_2^2 - m_1^2)}{\mathcal{E}_\nu} \gg \frac{|dN/dx|}{N}, \quad (4.27)$$

задает достаточно строгие ограничения на значение градиента магнитного поля dN/dx . Здесь \mathcal{E}_ν — энергия нейтрино, а x — пространственная координата вдоль траектории нейтрино. Даже когда магнитное поле и энергия нейтрино достигают резонансных значений, если нарушено условие

(4.27), резонансного поведения вероятностей наблюдаться не будет. Указанный резонанс может стать наблюдаемым для нейтрино, описываемых в рамках Стандартной модели, если будет обнаружен достаточно крупный астрофизический объект с существенно большим магнитным полем, чем у известных на данный момент магнетаров. Тем не менее, понимание природы указанного резонанса, как и учет явления поворота спина, могут быть полезны при исследовании процессов в Ранней Вселенной, так как эти эффекты изменяют флейвор и спиральность потоков нейтрино и могут таким образом влиять на взаимодействие нейтрино и фонового вещества.

Тем не менее, есть теории, выходящие за рамки Стандартной модели, которые предполагают значения магнитного момента, значительно превышающие значения $\mu_i = \mu_0 m_i \sim 3 \cdot 10^{-19} \left(\frac{m_\nu}{1\text{eV}} \right) \mu_B$. В связи с тем, что текущее экспериментальное ограничение $\mu_i < 2.9 \cdot 10^{-11} \mu_B$ [125, 126] существенно менее строгое, такие модели на данный момент нельзя исключить. Если одна из них подтвердится экспериментально, то вблизи магнетаров эффект поворота спина и даже резонансного поведения вероятностей вполне может наблюдаться (см. Рис. 4.1). Для таких моделей матрица диагональных магнитных моментов не обязательно будет пропорциональна массовой матрице. В этом случае наши результаты также могут быть применены, если значения переходных моментов будут существенно меньше, чем диагональных.

Если же величины переходных моментов сопоставимы с величинами диагональных и справедливо $r \gtrsim 1$, то условие адиабатичности принимает вид

$$\frac{(m_2^2 - m_1^2)}{\mathcal{E}_\nu} \gg \frac{|dN/dx|}{N}. \quad (4.28)$$

Тогда следующие эффекты могут стать наблюдаемыми. Поворот спина может существенно ослаблять поток левых нейтрино, испущенных магнетаром или другим компактным объектом с высоким полем. Так как только левые нейтрино наблюдаются с помощью детекторов, эффективно мы увидим уменьшение потока нейтрино по сравнению с исходным потоком. Для

солнечных нейтрино влияние поворота спина на поток нейтрино обсуждалось еще в работе [111]. Также флейворный состав нейтрино, рождающихся внутри компактного астрофизического объекта, может существенно отличаться от флейворного состава того же потока, измеряемого в земных условиях, вследствие наличия резонанса. Стоит отметить, что возможность и выраженность этих эффектов зависит от конкретного значения μ_i . Для подобных моделей в случае высоких значений магнитного поля все вероятности спин-флейворных переходов при усреднении также становятся равны и составляют $1/4$.

4.3 Вероятности переходов в дорезонансной области в модели трех флейворов

Как было показано выше (см. также [47, 48]), влияние переходных моментов на эволюцию нейтрино существенно только при энергиях, близких к энергии резонанса. Таким образом, рассматривая случай дорезонансных энергий нейтрино, можно положить в уравнении (1.53) M_h и M_{ah} равными нулю. Вычисление вероятностей переходов мы будем производить, используя оператор эволюции (2.4) для этого уравнения. Такая постановка задачи позволяет получить вероятности переходов даже в модели трех флейворов.

Так как мы пренебрегаем переходными моментами нейтрино, то смешивание в рассматриваемом случае определяется вакуумной матрицей смешивания, а волновая функция нейтрино является линейной комбинацией волновых функций массовых состояний. Это обстоятельство позволяет получить явное решение уравнения.

Если направление магнитного поля остается неизменным на траектории нейтрино, то при равенстве нулю переходных магнитных моментов для уравнения (1.53) существует спиновый интеграл движения \mathcal{S} , заданный выражением (3.3)

$$\mathcal{S} = \gamma^5 \gamma^\mu {}^*F_{\mu\nu} u^\nu / N, \quad N = \sqrt{u_\mu {}^*F^{\mu\alpha} {}^*F_{\alpha\nu} u^\nu}$$

и определяющий проекцию спина на нейтрино на направление магнитного поля в системе покоя. Этому интегралу движения соответствует 4-вектор поляризации нейтрино, заданный формулой (3.4)

$$\bar{s}^\mu = - {}^*F_{\mu\nu} u^\nu / N.$$

Для нейтрино в чисто магнитном поле с индукцией \mathbf{B} величина N определяется выражением $N = |\mathbf{B}| \sqrt{u_0^2 - |\mathbf{u}|^2 \cos^2 \vartheta_M}$, где ϑ_M — угол между направлением движения нейтрино и вектором магнитной индукции в лабораторной системе отсчета. В этом случае мы получаем точное выражение для оператора эволюции в следующем виде

$$U(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2,3} \sum_{\zeta=\pm 1} e^{-i \int_0^\tau (m_i - \zeta \mu_i N(\tilde{\tau})) d\tilde{\tau}} \times (1 - \zeta \gamma^5 \gamma^\mu \bar{s}_\mu) \mathbb{P}^i, \quad (4.29)$$

где \mathbb{P}^i представляет собой проектор на состояние с определенной массой m_i . Суммирование по $\zeta = \pm 1$ соответствует различным значениям проекции спина нейтрино на направление магнитного поля в системе покоя нейтрино.

Пусть направление магнитного поля достаточно медленно меняется относительно направления скорости нейтрино, а именно скорость изменения направления поля удовлетворяет условиям (4.1), (4.2). Тогда оператор \mathcal{S} можно рассматривать как интеграл движения приближенно, и можно записать приближенно с достаточно хорошей точностью как оператор эволюции (4.29), так и выражения для вероятностей переходов между состояниями с определенными флейвором и спиральностью.

Получим вероятности переходов из состояния с определенным флейвором α и спиральностью ζ_α ($\zeta_\alpha = -1$ для левополяризованных нейтрино и $\zeta_\alpha = 1$ для правополяризованных нейтрино) в состояние с конечным флейвором β и конечной спиральностью ζ_β .

При вычислении следа по формуле (2.20) учтем соотношение

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\mathbb{P}^k \mathbb{P}^\alpha \mathbb{P}^{l\dagger} \mathbb{P}^{\beta\dagger}\} &= \text{Tr}\{\mathbb{P}^k \mathbb{U}^\dagger \mathbb{P}_0^\alpha \mathbb{U} \mathbb{P}^l \mathbb{U}^\dagger \mathbb{P}_0^\beta \mathbb{U}\} = \\ &= \mathcal{U}_{\alpha k}^* \mathcal{U}_{\alpha l} \mathcal{U}_{\beta l}^* \mathcal{U}_{\beta k} = R_{kl\alpha\beta} + iI_{kl\alpha\beta}, \quad (4.30) \end{aligned}$$

где $R_{ij\alpha\beta}$ — вещественная часть четверного произведения элементов матрицы смешивания, $I_{kl\alpha\beta}$ — мнимая часть, причем $R_{kl\alpha\beta} = R_{lk\alpha\beta}$, а $I_{lk\alpha\beta} = -I_{kl\alpha\beta}$ (см. [35]). В этом выражении P_0^α и P_0^β — проекторы на флейворные состояния во флейворном представлении, которые связаны с использованными нами ранее проекторами в массовом представлении соотношениями $P^\alpha = U^\dagger P_0^\alpha U$, $P^\beta = U^\dagger P_0^\beta U$, где U — матрица смешивания Понтекорво–Маки–Накагавы–Сакаты, а $U_{\alpha k}$ — ее матричные элементы. След матриц Дирака вычисляется стандартным образом.

В результате мы получаем выражения для вероятностей спин-флейворных переходов нейтрино

$$\begin{aligned}
 W_{(\alpha),\zeta_\alpha \rightarrow (\beta),\zeta_\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{k,l=1}^3 U_{\alpha k}^* U_{\alpha l} U_{\beta l}^* U_{\beta k} \sum_{\zeta,\zeta'=\pm 1} e^{-i(m_k \tau - \zeta \Phi_k(\tau))} e^{i(m_l \tau - \zeta' \Phi_l(\tau))} \times \\
 &\times \left\{ \frac{1 + \zeta_\alpha \zeta_\beta}{2} (1 - \zeta_\alpha (\zeta + \zeta') (\bar{s} s_{sp}) + \zeta \zeta' (\bar{s} s_{sp})^2) + \right. \\
 &\quad \left. + + \frac{1 - \zeta_\alpha \zeta_\beta}{2} \zeta \zeta' (1 - (\bar{s} s_{sp})^2) \right\}, \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

где

$$\Phi_k(\tau) = \mu_k \int_0^\tau N d\tau. \quad (4.32)$$

Для удобства записи вероятностей переходов далее мы используем обозначения

$$\Delta \Phi_{kl} = \Phi_k(\tau) - \Phi_l(\tau), \quad \Delta m_{kl} = m_k - m_l. \quad (4.33)$$

Суммируя по индексам ζ, ζ' , получаем вероятность перехода нейтрино из состояния с флейвором α и поляризацией ζ_α в состояние с флейвором β

без изменения спиральности в виде

$$\begin{aligned}
 W_{(\alpha),\zeta_\alpha \rightarrow (\beta),\zeta_\beta = \zeta_\alpha} &= \sum_{k=1}^3 |\mathcal{U}_{\alpha k}|^2 |\mathcal{U}_{\beta k}|^2 (\cos^2 \Phi_k(\tau) + (\bar{s}s_{sp})^2 \sin^2 \Phi_k(\tau)) + \\
 &+ \sum_{k>l}^3 R_{\alpha\beta kl} \left\{ \frac{1}{2} (1 - \zeta_\alpha (\bar{s}s_{sp}))^2 \cos(\tau \Delta m_{kl} - \Delta \Phi_{kl}) + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} (1 + \zeta_\alpha (\bar{s}s_{sp}))^2 \cos(\tau \Delta m_{kl} + \Delta \Phi_{kl}) + \\
 &\quad \left. + (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) \cos(\tau \Delta m_{kl}) \cos(\Phi_k(\tau) + \Phi_l(\tau)) \right\} + \\
 &+ \sum_{k>l}^3 I_{\alpha\beta kl} \left\{ \frac{1}{2} (1 - \zeta_\alpha (\bar{s}s_{sp}))^2 \sin(\tau \Delta m_{kl} - \Delta \Phi_{kl}) + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} (1 + \zeta_\alpha (\bar{s}s_{sp}))^2 \sin(\tau \Delta m_{kl} + \Delta \Phi_{kl}) + \\
 &\quad \left. + (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) \sin(\tau \Delta m_{kl}) \cos(\Phi_k(\tau) + \Phi_l(\tau)) \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Вероятность перехода с изменением спиральности определяется выражением

$$\begin{aligned}
 W_{(\alpha),\zeta_\alpha \rightarrow (\beta),\zeta_\beta \neq \zeta_\alpha} &= \sum_{k=1}^3 |\mathcal{U}_{\alpha k}|^2 |\mathcal{U}_{\beta k}|^2 (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) \sin^2 \Phi_k(\tau) + \\
 &+ \sum_{k>l}^3 R_{\alpha\beta kl} \left\{ \frac{1}{2} (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) \cos(\tau \Delta m_{kl} - \Delta \Phi_{kl}) + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) \cos(\tau \Delta m_{kl} + \Delta \Phi_{kl}) - \\
 &\quad \left. - (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) \cos(\tau \Delta m_{kl}) \cos(\Phi_k(\tau) + \Phi_l(\tau)) \right\} + \\
 &+ \sum_{k>l}^3 I_{\alpha\beta kl} \left\{ \frac{1}{2} (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) \sin(\tau \Delta m_{kl} - \Delta \Phi_{kl}) + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) \sin(\tau \Delta m_{kl} + \Delta \Phi_{kl}) - \\
 &\quad \left. - (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) \sin(\tau \Delta m_{kl}) \cos(\Phi_k(\tau) + \Phi_l(\tau)) \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Естественно, в модели двух флейворов, когда матрица смешивания приоб-

ретаает вид (2.10), формулы (4.34), (4.35) согласуются с полученными ранее при исследовании поведения нейтрино как в постоянном однородном, так и в слабо меняющемся поле. Следует отметить, что если пренебречь влиянием поля, т.е. положить $N = 0$, то полученные соотношения переходят в стандартные выражения для осцилляций нейтрино в вакууме (см., например, [35]), полученные в рамках феноменологического подхода. Очевидно, что в вакууме переходы с переворотом спина отсутствуют.

Как было показано выше, величины полей, необходимые для сколь угодно значимого проявления эффекта поворота спина нейтрино, очень велики. Однако даже если использовать экспериментальное ограничение на величину магнитного момента $\mu_\nu < 2.7 \cdot 10^{-11} \mu_B$ [125, 126], ясно, что поля, которые можно получить в земных условиях, явно недостаточны для наблюдения указанного эффекта. Поэтому имеет смысл рассматривать только удаленные источники нейтрино. Поскольку нас интересуют поля, которые могут быть сгенерированы локализованным источником, то для достаточно больших τ у фаз $\Phi_k(\tau)$ существует конечный предел:

$$\Phi_k(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \Phi_k. \quad (4.36)$$

Следовательно, на больших расстояниях от источника эволюция нейтрино характеризуется вакуумными длинами осцилляций, а параметры Φ_k определяют только сдвиги фаз. В этом случае, если считать, что разброс расстояний между источником нейтрино и точкой регистрации значительно превосходит характерную длину вакуумных осцилляций нейтрино, необходимо произвести усреднение вероятностей переходов по собственному времени. В результате получаем

$$\begin{aligned} W_{(\alpha), \zeta_\alpha \rightarrow (\beta), \zeta_\beta = \zeta_\alpha} &= \sum_{k=1}^3 |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 (\cos^2 \Phi_k + (\bar{s} s_{sp})^2 \sin^2 \Phi_k), \\ W_{(\alpha), \zeta_\alpha \rightarrow (\beta), \zeta_\beta = -\zeta_\alpha} &= \sum_{k=1}^3 |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 (1 - (\bar{s} s_{sp})^2) \sin^2 \Phi_k. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Вероятность сохранения спиральности, которая представляет собой сумму вероятностей переходов в состояния со всеми возможными флейворами

β , задается формулой

$$W_{(\alpha)\zeta_\alpha \rightarrow \zeta_\alpha} = \sum_{(\beta)} W_{(\alpha), \zeta_\alpha \rightarrow (\beta), \zeta_\beta = \zeta_\alpha} = \sum_{k=1}^3 |\mathcal{U}_{\alpha k}|^2 (\cos^2 \Phi_k + (\bar{s}s_{sp})^2 \sin^2 \Phi_k). \quad (4.38)$$

Как хорошо известно, с высокой точностью только нейтрино левой поляризации взаимодействуют с частицами Стандартной модели. Поэтому если считать, что $\zeta_\alpha = -1$, то с помощью этого соотношения можно определить величину потока нейтрино, который возможно зарегистрировать на больших расстояниях от источника.

Соответствующая вероятность процесса с переворотом спина имеет вид

$$W_{(\alpha)\zeta_\alpha \rightarrow -\zeta_\alpha} = \sum_{(\beta)} W_{(\alpha), \zeta_\alpha \rightarrow (\beta), \zeta_\beta = -\zeta_\alpha} = \sum_{k=1}^3 |\mathcal{U}_{\alpha k}|^2 (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) \sin^2 \Phi_k. \quad (4.39)$$

Так как правополяризованные нейтрино почти стерильны, то это соотношение определяет различие между исходным потоком нейтрино от источника и потоком нейтрино, который может наблюдаться.

4.4 Нейтрино в поле точечного диполя

В качестве примера рассмотрим нейтрино в поле точечного диполя, которое, как хорошо известно, задается формулой [127]

$$\mathbf{B} = B_0 \frac{R_0^3}{r^5} (3\mathbf{r}(\mathbf{m}\mathbf{r}) - r^2\mathbf{m}). \quad (4.40)$$

Здесь \mathbf{m} — направление оси диполя, \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из центра диполя, а B_0 — величина магнитного поля на расстоянии R_0 от центра при $(\mathbf{m}\mathbf{r}) = 0$.

Если скорость нейтрино направлена по радиусу, то

$$\frac{N}{|\mathbf{u}|} = B_0 \frac{R_0^3}{r^3} \sqrt{\sin^2 \varphi + (3 \cos^2 \varphi + 1)/|\mathbf{u}|^2} \approx B_0 \frac{R_0^3}{r^3} \sin \varphi, \quad (4.41)$$

где φ — угол между осью диполя и направлением вылета нейтрино. Стоит отметить, что в этом случае использование адиабатического приближения

не является необходимым, поскольку полученное решение уравнения эволюции является точным.

Пусть нейтрино летит по направлению из центра диполя и имеет определенный флейвор α и спиральность ζ_α на расстоянии R_0 от центра. Тогда

$$\Phi_k = \frac{\mu_k}{|\mathbf{u}|} \int_{R_0}^{\infty} N dr = \frac{R_0}{2} \mu_k B_0 \sin \varphi = \frac{\pi R_0}{L_k} \sin \varphi, \quad (4.42)$$

где

$$L_k = \frac{2\pi}{\mu_k B_0} \quad (4.43)$$

— характерная длина поворота спина. Если L_k существенно превышает радиус объекта, то влияние магнитного поля на эволюцию нейтрино пренебрежимо мало. Однако если $L_k \lesssim R_0$, влияние магнитного поля становится существенным.

Так как мы не знаем точных значений масс нейтрино, то исследовать следствия формулы (4.38) в полном объеме не представляется возможным. Поэтому рассмотрим наиболее наглядный случай квазивырожденного спектра масс нейтрино, когда все массы почти равны между собой $m_k \approx m$, и, следовательно, $\Phi_k \approx \Phi$, $L_k \approx L_0$ ($k = 1, 2, 3$). В этом случае вероятность сохранения спиральности и вероятность поворота спина определяются соотношениями

$$\begin{aligned} W_{(\alpha)\zeta_\alpha \rightarrow \zeta_\alpha} &= \cos^2 \Phi + (\bar{s}s_{sp})^2 \sin^2 \Phi, \\ W_{(\alpha)\zeta_\alpha \rightarrow -\zeta_\alpha} &= (1 - (\bar{s}s_{sp})^2) \sin^2 \Phi, \end{aligned} \quad (4.44)$$

которые не зависят от углов смешивания.

Для простоты мы положим $(\bar{s}s_{sp}) = 0$. Величина $(\bar{s}s_{sp})$ зависит от угла ϑ между направлением распространения нейтрино и вектором магнитной индукции, однако для нейтрино ультрарелятивистских энергий эта величина отлична от нуля только внутри узкого диапазона углов вблизи $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$, имеющего ширину порядка обратного лоренц-фактора нейтрино (подробнее см. **Главу 3**), поэтому такое приближение вполне состоятельно. Тогда

$$W_{(\alpha)\zeta_\alpha \rightarrow \zeta_\alpha} = \cos^2 \Phi, \quad (4.45)$$

$$W_{(\alpha)\zeta_\alpha \rightarrow -\zeta_\alpha} = \sin^2 \Phi. \quad (4.46)$$

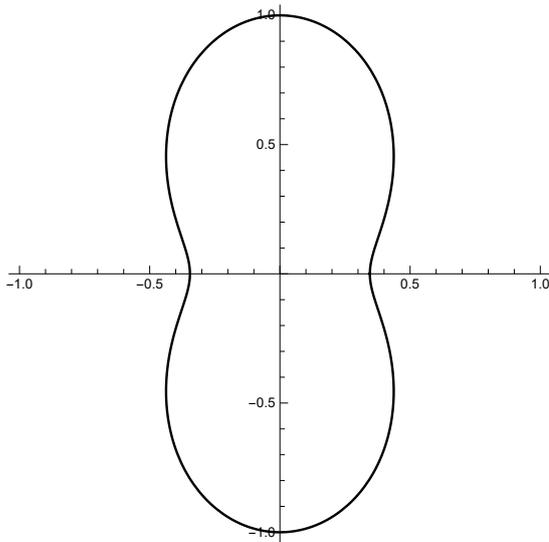


Рис. 4.3: Угловое распределение вероятности сохранения спиральности нейтрино для $b \approx 0.3$

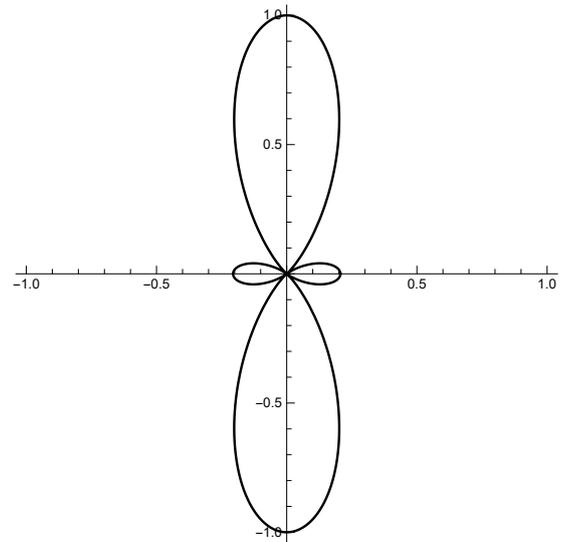


Рис. 4.4: Угловое распределение вероятности сохранения спиральности нейтрино для $b \approx 0.65$

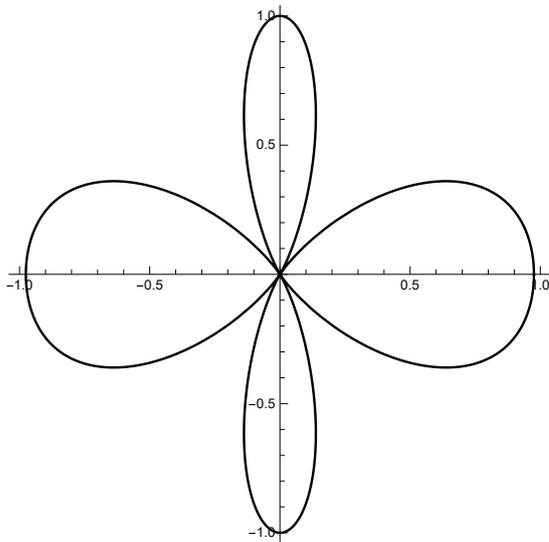


Рис. 4.5: Угловое распределение вероятности сохранения спиральности нейтрино для $b \approx 0.95$

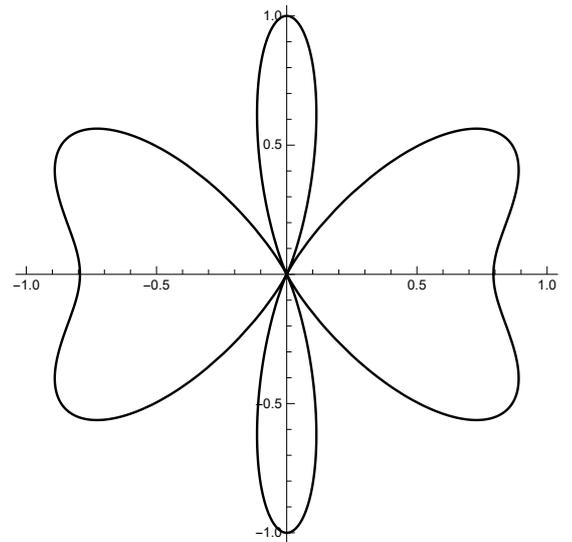


Рис. 4.6: Угловое распределение вероятности сохранения спиральности нейтрино для $b \approx 1.15$

Вероятность сохранения спиральности (4.45) в случае поля точечного диполя принимает вид

$$W_{(\alpha)\zeta_\alpha \rightarrow \zeta_\alpha} = \cos^2 \left(\frac{\pi R_0}{L_0} \sin \varphi \right) = \cos^2 \left(\pi b \sin \varphi \right) \quad (4.47)$$

и определяется только параметром

$$b = R_0/L_0 = \frac{R_0}{2\pi} \mu B_0, \quad (4.48)$$

который пропорционален как размеру источника, так и величине поля на его поверхности.

Для различных значений параметра b распределение потоков нейтрино в пространстве существенно меняется. На Рис. 4.3–4.6 показана зависимость вероятности сохранения спиральности в зависимости от угла между осью диполя и направлением вылета нейтрино. С увеличением b анизотропия углового распределения левополяризованных нейтрино становится более ярко выраженной, причем когда выполняется условие $b > 1/2$, появляются выделенные направления, при распространении вдоль которых поток потенциально наблюдаемых нейтрино полностью исчезает.

Глава 5

T -нарушение в осцилляциях нейтрино

5.1 Формальное решение уравнения эволюции нейтрино в веществе и электромагнитном поле

Рассмотрим теперь нейтрино, взаимодействующее как с веществом, так и с электромагнитным полем. В этом разделе мы будем рассматривать только случай неизменных во времени и пространстве внешних условий, а именно электромагнитного поля и потенциалов взаимодействия с веществом.

Как уже говорилось в **Главе 2** и **Главе 3**, когда внешнее поле и эффективные потенциалы не зависят от координат пространства событий, матрицу оператора эволюции $U(\tau)$ уравнения (1.53) можно записать в виде матричной экспоненты (2.4). Однако матричная структура уравнения показывает, что хотя эффективные потенциалы не зависят от координат пространства событий, в общем случае не удастся разделить спиновые и флейворные степени свободы. Иными словами, не всегда существуют интегралы движения, которые характеризуют отдельно флейворные осцилляции и поворот спина. Когда таких интегралов не существует, стационарными являются достаточно сложно устроенные спин-флейворные состояния нейтрино, волновые функции которых не удастся записать в явном виде, так как для этого требуется решать алгебраические уравнения высших степеней.

Тем не менее, мы в состоянии вычислить вероятность перехода из со-

стояния α в состояние β в момент времени τ , которая определяется выражением (2.20)

$$W_{\alpha \rightarrow \beta} = \text{Tr} \left\{ \rho_{\alpha}(\tau) \rho_{\beta}^{\dagger}(\tau = 0) \right\}.$$

Для этого можно, используя формулу Бейкера–Кэмпбелла–Хаусдорфа, записать эту вероятность в виде ряда

$$\begin{aligned} W_{\alpha \rightarrow \beta} &= \frac{1}{2u^0} \text{Tr} \left\{ e^{-i\tau \mathcal{F}} \mathcal{P}_0^{(\alpha)} e^{i\tau \mathcal{F}} \mathcal{P}_0^{(\beta)} (\gamma^{\mu} u_{\mu} + 1) \gamma^0 \right\} = \\ &= \frac{1}{2u^0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\tau)^n}{n!} \text{Tr} \left\{ D_n \mathcal{P}_0^{(\beta)} (\gamma^{\mu} u_{\mu} + 1) \gamma^0 \right\}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где

$$D_0 = \mathcal{P}_0^{(\alpha)}, \quad D_1 = [\mathcal{F}, \mathcal{P}_0^{(\alpha)}], \quad D_2 = [\mathcal{F}, [\mathcal{F}, \mathcal{P}_0^{(\alpha)}]] \dots \quad (5.2)$$

Здесь $\mathcal{P}_0^{(\alpha)}$ и $\mathcal{P}_0^{(\beta)}$ — проекторы на состояния с определенным флейвором и поляризацией. Проектор на начальное спин-флейворное состояние $\mathcal{P}_0^{(\alpha)}$ может быть представлен как произведение флейворного проектора P_0^{α} и спинового проектора

$$\frac{1}{2} \left(1 - \gamma^5 \gamma_{\mu} s_0^{(\alpha)\mu} \right), \quad \zeta_{\alpha}, \zeta_{\beta} = \pm 1, \quad (5.3)$$

где $s_0^{(\alpha)\mu}$ — 4-вектор, определяющий начальную поляризацию нейтрино. Аналогично может быть представлен проектор на конечное спин-флейворное состояние $\mathcal{P}_0^{(\beta)}$.

Вследствие соотношения между собственным временем и длиной пробега нейтрино (1.51), параметр разложения в формуле (5.1) представляет собой отношение расстояния между источником и детектором к длине осцилляций в вакууме L/L_{osc} .

Выражение (5.1) хорошо сходится, так как представляет собой ряд экспоненциального типа. Таким образом, его удобно использовать для нахождения вероятностей переходов. Такой подход позволяет избежать проблем, возникающих при прямом вычислении вероятностей переходов с использованием численных решений уравнения (1.53), так как не предполагает численное интегрирование быстро осциллирующих функций.

5.2 Достаточное условие *T*-нарушения

Исследование свойств дискретных симметрий может быть важно для понимания эволюции Вселенной, так как без нарушения *CP*-инвариантности невозможно объяснить асимметрию вещества и антивещества [128]. Как известно, нарушение *CP*-инвариантности имеет место в кварковом секторе и обусловлено наличием комплексных элементов в матрице смешивания Кабиббо–Кобаяши–Маскавы [41]. Матрицу смешивания дираковских фермионов удобно параметризовать тремя углами и одной *CP*-нарушающей фазой. При этом *CP*-нарушение определяется инвариантом Ярлског [59]. Тем не менее, нарушения *CP*-инвариантности за счет мнимой части матрицы смешивания для кварков оказывается недостаточно для обеспечения существующей асимметрии вещества и антивещества во Вселенной (см., например, [129–131]).

В качестве дополнительного источника *CP*-нарушения можно рассматривать процессы с участием нейтрино. На данный момент не доказано наличие отличной от нуля *CP*-нарушающей фазы в матрице Понтекорво–Маки–Накагавы–Сакаты [24, 30], определяющей смешивание лептонов. Наличие такой фазы должно приводить к нарушению *T*-инвариантности вероятностей осцилляций нейтрино в вакууме (см., например, [35]).

Однако такой механизм нарушения *T*-инвариантности даже для нейтрино, описываемого в рамках Стандартной модели, оказывается не единственно возможным. Из вида уравнения (5.1) следует, что взаимодействие с веществом и электромагнитным полем может менять величину нечетного по τ вклада в вероятности нейтрино спин-флейворных переходов нейтрино. Нарушение *T*-симметрии возможно тогда и только тогда, когда какие-либо слагаемые нечетной по τ степени в выражении (5.1) отличны от нуля. Так как линейный по τ член тождественно равен нулю, достаточным условием нарушения *T*-симметрии является отличие от нуля члена третьей степени по τ . В вакуумном случае это условие может выполняться только если матрица смешивания нейтрино содержит комплексные элементы. В общем

случае взаимодействие со средой и электромагнитным полем может привести к наличию нетривиального коэффициента перед τ^3 даже тогда, когда *CP*-нарушающая фаза в матрице смешивания равна нулю. Указанный нами механизм нарушения *T*-симметрии для нейтрино Стандартной модели за счет влияния электромагнитного поля или окружающих потоков вещества может оказаться полезным при построении космологических моделей.

5.3 Нарушение *T*-инвариантности в модели двух флейворов

Исходя из характера смешивания в веществе, авторы работ, где ранее исследовалась возможность *T*-нарушения в модели двух флейворов (см., например, [132–134]), делали заключение, что такое нарушение невозможно. Однако этот вывод справедлив, только если нейтрино распространяется в неподвижной среде. Принципиальное отличие исследуемого нами случая состоит в том, что учет движения или поляризации среды приводит к появлению корреляций между осцилляциями и поворотом спина нейтрино, вследствие чего нельзя рассматривать эти процессы независимо. Таким образом, недостаточно рассматривать флейворные осцилляции, не учитывая возможность поворота спина нейтрино. Рассматриваемый нами случай является более общим, чем исследованный в указанных выше работах.

Будем исследовать *T*-нарушение в случае постоянных характеристик среды и электромагнитного поля. Если нейтрино распространяется в переменном электромагнитном поле или неоднородной среде, то формальная симметрия по отношению к операции обращения времени очевидным образом нарушается (см. **Главу 4**), так как начальное и конечное состояния системы соответствуют разным внешним условиям. Так как в общем случае результат зависит от поведения плотности вещества и характеристик электромагнитного поля, достаточно сложно разделить *T*-нарушение вследствие симметрии взаимодействия и наличия нечетных по τ вкладов, определяемых выбором конкретного профиля полей и потенциалов. Исхо-

дя из аналогичных соображений, начальное и конечное состояния нейтрино мы описываем в терминах квантовых чисел, соответствующих одним и тем же операторам наблюдаемых. В частности, для ультрарелятивистских нейтрино естественно рассматривать начальное и конечное состояния нейтрино, соответствующие собственным векторам оператора спиральности. Соответствующий 4-вектор поляризации нейтрино задается выражением (2.23)

$$s_{sp}^\mu = \left\{ |\mathbf{u}|, u_0 \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \right\}.$$

Рассматривать задачу, в которой начальное и конечное состояния задаются разными операторами, также возможно, но, как и в случае неоднородных полей, возникающий в этом случае нечетный по времени вклад в вероятностях переходов уже не свидетельствует о *T*-нарушении, связанном с симметрией взаимодействия.

Исследование всех возможных случаев *T*-нарушения за счет влияния внешних условий на основе формулы (5.1) является достаточно громоздкой задачей. Поэтому рассмотрим достаточно простой частный случай, допускающий аналитическое решение, и на его примере убедимся в возможности возникновения указанного эффекта в модели двух флейворов.

Найдем в явном виде вероятности переходов нейтрино, взаимодействующего с веществом через нейтральные токи и с электромагнитным полем. Рассматривая взаимодействие с электромагнитным полем, будем учитывать только диагональные магнитные моменты.

С учетом этих ограничений, матрица \mathcal{F} , определяющая уравнение эволюции (1.53)

$$\left(i\mathbb{I} \frac{d}{d\tau} - \mathcal{F} \right) \Psi(\tau) = 0,$$

принимает вид

$$\mathcal{F} = \mathbb{M} + \frac{1}{2}(f^{(N)}u)\mathbb{I} + \frac{1}{2}R_N\mathbb{I}\gamma^5\gamma^\sigma s_\sigma^{(N)}\gamma^\mu u_\mu - \mathbb{M}_d\gamma^5\gamma^\mu {}^*F_{\mu\nu}u^\nu. \quad (5.4)$$

Поскольку матрица (5.4) коммутирует с массовой матрицей, то есть $[\mathbb{M}, \mathcal{F}] = 0$, решения уравнения эволюции представляют собой линейные

комбинации волновых функций массовых состояний нейтрино. Таким образом, эффективный угол смешивания при распространении нейтрино равен вакуумному, что позволяет получить явный вид решения задачи.

Получим решение уравнения (1.53) с помощью оператора эволюции. В исследуемом случае оператор эволюции может быть получен как матричная экспонента (2.4), и, таким образом, принимает вид

$$U(\tau) = \exp \left\{ -i\tau \left(\mathbb{M} + \frac{1}{2}(f^{(N)}u)\mathbb{I} + \frac{1}{2}R_N \mathbb{I} \gamma^5 \gamma^\sigma s_\sigma^{(N)} \gamma^\mu u_\mu - \mathbb{M}_d \gamma^5 \gamma^\mu {}^*F_{\mu\nu} u^\nu \right) \right\}. \quad (5.5)$$

Так как в модели двух флейворов массовая матрица и матрица диагональных магнитных моментов в массовом представлении могут быть записаны с помощью матриц Паули в виде (3.7) и (3.8), то оператор эволюции определяется соотношением

$$U(\tau) = \frac{1}{4} \sum_{\zeta=\pm 1} \sum_{k=1,2} \exp \left\{ -i\tau \left[m_k + (f^{(N)}u) - \frac{1}{2}\zeta R_k \right] \right\} \times \\ \times \left(1 - (-1)^k \sigma_3 \right) \left(1 - \zeta \gamma^5 \gamma_\mu s_k^\mu \right), \quad (5.6)$$

где индексы $k = 1, 2$ соответствуют массовым состояниям нейтрино. Здесь использованы следующие обозначения

$$s_k^\mu = (u^\mu (f^{(N)}u) - f^{(N)\mu} - 2\mu_k {}^*F^{\mu\nu} u_\nu) / R_k, \\ R_k = \left((f^{(N)}u)^2 - (f^{(N)})^2 + 4\mu_k^2 u^\mu {}^*F_{\mu\alpha} {}^*F^{\alpha\nu} u_\nu - 4\mu_k f_\mu^{(N)} {}^*F^{\mu\nu} u_\nu \right)^{1/2}. \quad (5.7)$$

Запись оператора эволюции в виде (5.6) оказывается возможна, так как следствием определения (5.7) является тождество

$$\gamma^5 \left(\gamma_\mu \frac{1}{2} R_N s^{(N)\mu} - \mu_k \gamma_\mu {}^*F^{\mu\nu} u_\nu \right) \left(1 - \zeta \gamma^5 \gamma_\sigma s_k^\sigma \right) = -\frac{1}{2} \zeta R_k \left(1 - \zeta \gamma^5 \gamma_\mu s_k^\mu \right). \quad (5.8)$$

Как и в предыдущих разделах, зная явный вид оператора эволюции, найдем вероятность перехода из состояния с флейвором α и поляризацией ζ_α в состояние с флейвором β и поляризацией ζ_β . В модели двух флейворов проекторы на состояния с определенным флейвором в флейворном представлении задается выражением (2.12), где $\xi_\alpha = 1$ соответствует электронному флейвору, а $\xi_\alpha = -1$ — второму рассматриваемому флейвору.

Однако, так как в рассматриваемом в этом разделе случае не учитывается взаимодействие через заряженные токи, результаты применимы и для исследования переходов между мюонными и таонными нейтрино.

Полученная на основе оператора эволюции (5.6) вероятность может быть представлена в виде (2.24)

$$W_{\alpha \rightarrow \beta} = \frac{1 + \xi_\alpha \xi_\beta}{2} \frac{1 + \zeta_\alpha \zeta_\beta}{2} W_1 + \frac{1 + \xi_\alpha \xi_\beta}{2} \frac{1 - \zeta_\alpha \zeta_\beta}{2} W_2 + \\ + \frac{1 - \xi_\alpha \xi_\beta}{2} \frac{1 + \zeta_\alpha \zeta_\beta}{2} W_3 + \frac{1 - \xi_\alpha \xi_\beta}{2} \frac{1 - \zeta_\alpha \zeta_\beta}{2} W_4,$$

где

$$W_1 = \frac{1}{8} \left\{ (1 - \xi_\alpha \cos 2\theta)^2 (1 + (s_2 s_{sp})^2) + (1 + \xi_\alpha \cos 2\theta)^2 (1 + (s_1 s_{sp})^2) + \right. \\ + (1 - \xi_\alpha \cos 2\theta)^2 (1 - (s_2 s_{sp})^2) \cos \tau R_2 + \\ + (1 + \xi_\alpha \cos 2\theta)^2 (1 - (s_1 s_{sp})^2) \cos \tau R_1 + \\ + \sin^2 2\theta \left[(1 - \zeta_\alpha (s_2 s_{sp})) (1 - \zeta_\alpha (s_1 s_{sp})) \cos \Delta^{(-)} + \right. \\ + (1 + \zeta_\alpha (s_2 s_{sp})) (1 + \zeta_\alpha (s_1 s_{sp})) \cos \Delta^{(+)} + \\ + (1 - \zeta_\alpha (s_2 s_{sp})) (1 + \zeta_\alpha (s_1 s_{sp})) \cos \Phi^{(-)} + \\ \left. \left. + (1 + \zeta_\alpha (s_2 s_{sp})) (1 - \zeta_\alpha (s_1 s_{sp})) \cos \Phi^{(+)} \right] \right\}, \quad (5.9)$$

$$W_2 = \frac{1}{8} \left\{ (1 - \xi_\alpha \cos 2\theta)^2 (1 - (s_2 s_{sp})^2) + (1 + \xi_\alpha \cos 2\theta)^2 (1 - (s_1 s_{sp})^2) - \right. \\ - (1 - \xi_\alpha \cos 2\theta)^2 (1 - (s_2 s_{sp})^2) \cos \tau R_2 - \\ - (1 + \xi_\alpha \cos 2\theta)^2 (1 - (s_1 s_{sp})^2) \cos \tau R_1 - \\ - \sin^2 2\theta ((s_2 s_1) + (s_2 s_{sp})(s_1 s_{sp})) \times \\ \times \left[\cos \Delta^{(-)} + \cos \Delta^{(+)} - \cos \Phi^{(-)} - \cos \Phi^{(+)} \right] + \\ \left. + \zeta_\alpha \sin^2 2\theta e_{\mu\nu\rho\lambda} u^\mu s_{sp}^\nu s_1^\rho s_2^\lambda \left[\sin \Delta^{(-)} + \sin \Delta^{(+)} - \sin \Phi^{(-)} - \sin \Phi^{(+)} \right] \right\}, \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned}
 W_3 = \frac{1}{8} \sin^2 2\theta & \left\{ (1 + (s_2 s_{sp})^2) + (1 + (s_1 s_{sp})^2) + \right. \\
 & + (1 - (s_2 s_{sp})^2) \cos \tau R_2 + (1 - (s_1 s_{sp})^2) \cos \tau R_1 - \\
 & - \left[(1 - \zeta_\alpha (s_2 s_{sp})) (1 - \zeta_\alpha (s_1 s_{sp})) \cos \Delta^{(-)} + \right. \\
 & + (1 + \zeta_\alpha (s_2 s_{sp})) (1 + \zeta_\alpha (s_1 s_{sp})) \cos \Delta^{(+)} + \\
 & + (1 - \zeta_\alpha (s_2 s_{sp})) (1 + \zeta_\alpha (s_1 s_{sp})) \cos \Phi^{(-)} + \\
 & \left. \left. + (1 + \zeta_\alpha (s_2 s_{sp})) (1 - \zeta_\alpha (s_1 s_{sp})) \cos \Phi^{(+)} \right] \right\}, \tag{5.11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_4 = \frac{1}{8} \sin^2 2\theta & \left\{ (1 - (s_2 s_{sp})^2) + (1 - (s_1 s_{sp})^2) - \right. \\
 & - (1 - (s_2 s_{sp})^2) \cos \tau R_2 - (1 - (s_1 s_{sp})^2) \cos \tau R_1 + \\
 & + ((s_2 s_1) + (s_2 s_{sp})(s_1 s_{sp})) \left[\cos \Delta^{(-)} + \cos \Delta^{(+)} - \cos \Phi^{(-)} - \cos \Phi^{(+)} \right] - \\
 & \left. - \zeta_\alpha e_{\mu\nu\rho\lambda} u^\mu s_{sp}^\nu s_1^\rho s_2^\lambda \left(\sin \Delta^{(-)} + \sin \Delta^{(+)} - \sin \Phi^{(-)} - \sin \Phi^{(+)} \right) \right\}. \tag{5.12}
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \Delta^{(\pm)} &= \tau ((m_2 - m_1) \pm (R_2 - R_1)/2), \\
 \Phi^{(\pm)} &= \tau ((m_2 - m_1) \pm (R_2 + R_1)/2). \tag{5.13}
 \end{aligned}$$

В отличие от вакуумного случая, выражения для вероятностей переходов для нейтрино в веществе и электромагнитном поле не являются T -четными. Слагаемые, нарушающие T -инвариантность, появляются в выражениях для вероятностей переходов с изменением поляризации W_2 и W_4 . Эти слагаемые пропорциональны величине $\zeta_\alpha e_{\mu\nu\rho\lambda} u^\mu s_{sp}^\nu s_i^\rho s_j^\lambda$. Эту величину можно переписать, используя трехмерные величины, которые определены в лабораторной системе отсчета

$$\zeta_\alpha e_{\mu\nu\rho\lambda} u^\mu s_{sp}^\nu s_i^\rho s_j^\lambda = 2\zeta_\alpha \frac{\mu_j - \mu_i}{R_i R_j} \frac{1}{|\mathbf{u}|} ([\mathbf{u} \times \mathbf{f}](u_0 \mathbf{B} - [\mathbf{u} \times \mathbf{E}])). \tag{5.14}$$

Здесь \mathbf{E} , \mathbf{B} — напряженности электрического и магнитного полей, \mathbf{f} — пространственная часть 4-потенциала взаимодействия со средой, которая определяется скоростью движения среды как целого и ее поляризациями. T -нарушающий вклад обращается в нуль, когда как минимум два из трех векторов \mathbf{u} , \mathbf{f} и $(u_0 \mathbf{B} - [\mathbf{u} \times \mathbf{E}])$ коллинеарны. То есть, вероятности не T -инвариантны только тогда, когда внешние условия характеризуются двумя

выделенными пространственными направлениями. В частности, когда мы рассматриваем нейтрино в покоящейся неполяризованной среде, все выражения для вероятностей переходов *T*-четны.

Стоит отметить, что переход в систему отсчета, где среда покоится, можно сделать, но для этого необходимо учитывать, что левая часть выражения (5.14) представляет собой лоренцевский скаляр. Поэтому для перехода в систему отсчета, где среда неподвижна, следует преобразовать 4-векторы u^μ , s_{sp}^ν , s_i^ρ и s_j^λ , входящие в левую часть выражения (5.14). Так как нейтрино имеет массу, в системе покоя среды 4-вектор поляризации нейтрино не будет иметь вид (2.23), а значит, в этой системе отсчета нейтрино не будет характеризоваться определенной спиральностью. Таким образом, вероятности, полученные из выражений (5.9) и (5.10) переходом в систему покоя среды, не будут представлять собой вероятности переходов между состояниями нейтрино с определенной спиральностью в неподвижной среде.

Если положить значение потенциала взаимодействия с веществом и тензора электромагнитного поля равными нулю, то вероятности, определяемые формулами (5.9)–(5.12), в ультрарелятивистском приближении не противоречат общеизвестным выражениям (см., например, [35]). Вероятности переходов с поворотом спина нейтрино W_2 и W_4 в вакууме оказываются равными нулю для любых флейворов. Вид формул для W_1 и W_3 , полученный из (5.9) и (5.11) при переходе к вакуумному случаю, отличается от стандартного за счет того, что для описания осцилляций мы используем не канонический импульс, а квантовое число u^μ . В эквивалентности формул, выраженных через указанные квантовые числа, наиболее легко убедиться, произведя замену $|\mathbf{p}| = |\mathbf{u}|(m_1 + m_2)/2$.

Таким образом, мы убедились, что *T*-нарушение возникает уже в модели двух флейворов, когда нейтрино распространяется в веществе и электромагнитном поле. В этом случае *T*-нарушение обусловлено влиянием внешних условий и не требует наличия комплексных элементов в матрице смешивания. Более того, в рассмотренном выше случае взаимодействие с веществом происходит только за счет нейтральных токов. Как хорошо из-

вестно, взаимодействие нейтрино с покоящейся средой через нейтральные токи не дает вклада в вероятности переходов. Однако, когда присутствует также взаимодействие с электромагнитным полем, а среда движется, даже взаимодействие с веществом через нейтральные токи приводит к появлению *T*-нарушающих вкладов в вероятности переходов. Следует отметить, что, хотя *T*-нарушающие вклады в нашем случае присутствуют только в вероятностях переходов с переворотом спина, тем не менее *T*-нарушение не наблюдается для массовых состояний нейтрино, распространяющихся в веществе и электромагнитном поле [103]. Это означает, что причиной *T*-нарушения является не поворот спина и не характер смешивания в веществе сами по себе, а наличие корреляций между этими процессами. При такой трактовке становится вполне очевидно, почему для моделей, не предполагающих возможность поворота спина нейтрино, была доказана невозможность *T*-нарушения в модели двух флейворов.

5.4 Нарушение *T*-инвариантности в модели трех флейворов

Результаты, полученные в модели двух флейворов, интересно обобщить для реалистичной модели трех флейворов. Как уже говорилось, элементы матрицы смешивания нейтрино в модели трех флейворов могут содержать мнимую часть. Таким образом, *T*-нарушение может возникать даже в случае осцилляций нейтрино в вакууме. Однако при наличии внешних полей и потенциалов взаимодействия с веществом в общем случае также возможны корреляции между двумя типами *T*-нарушающих вкладов.

В модели трех флейворов оператор эволюции так же, как и в модели двух флейворов, определяется матричной экспонентой (5.5)

$$U(\tau) = \exp \left\{ -i\tau \left(M + \frac{1}{2} (f^{(N)} u) \mathbb{I} + \frac{1}{2} R_N \mathbb{I} \gamma^5 \gamma^\sigma s_\sigma^{(N)} \gamma^\mu u_\mu - M_d \gamma^5 \gamma^\mu {}^*F_{\mu\nu} u^\nu \right) \right\},$$

однако массовая матрица и матрица диагональных магнитных моментов являются матрицами 3×3 , диагональными в массовом представлении. В

явном виде оператор эволюции можно записать следующим образом:

$$U(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2,3} \sum_{\zeta_i=\pm 1} \exp \left\{ -i\tau \left(m_i + \frac{1}{2}(fu) - \frac{1}{2}\zeta_i R_i \right) \right\} \mathbb{P}_i (1 - \zeta_i \gamma^5 \gamma_\mu s_i^\mu), \quad (5.15)$$

где \mathbb{P}_i — проектор на состояния с определенной массой m_i ($i = 1, 2, 3$). В выражении (5.15) используются обозначения

$$s_i^\mu = (u^\mu(fu) - f^\mu - 2\mu_i {}^*F^\mu{}_\nu u^\nu) / R_i, \\ R_i = \sqrt{(fu)^2 - f^2 + 4\mu_i^2 (u_\alpha {}^*F^{\alpha\mu} {}^*F_{\mu\nu} u^\nu) - 4\mu_i (f^\mu {}^*F_{\mu\nu} u^\nu)},$$

где μ_i — диагональные магнитные моменты нейтрино.

Таким образом, вероятности спин-флейворных переходов задаются соотношением

$$W_{\alpha \rightarrow \beta} = \frac{1}{8} \sum_{i,j} e^{-i\tau(m_i - m_j)} \sum_{\zeta_i, \zeta_j} e^{i\tau(\zeta_i R_i - \zeta_j R_j)/2} \text{Tr} \{ \mathbb{P}^i \mathbb{P}^\alpha \mathbb{P}^{j\dagger} \mathbb{P}^{\beta\dagger} \} \times \\ \times \frac{1}{4} \text{Tr} \{ (1 - \zeta_i \gamma^5 \gamma_\mu s_i^\mu) (1 - \zeta_\alpha \gamma^5 \gamma_\sigma s_{sp}^\sigma) (1 - \zeta_j \gamma^5 \gamma_\nu s_j^\nu) (1 - \zeta_\beta \gamma^5 \gamma_\rho s_\rho^\rho) (\gamma_\lambda u^\lambda + 1) \}. \quad (5.16)$$

При вычислении следа матриц Дирака важно, что начальная и конечная поляризация нейтрино характеризуются одинаковыми (с точностью до знака) 4-векторами s_{sp}^μ

$$\frac{1}{4} \text{Tr} \{ (1 - \zeta_i \gamma^5 \gamma_\mu s_i^\mu) (1 - \zeta_\alpha \gamma^5 \gamma_\sigma s_{sp}^\sigma) (1 - \zeta_j \gamma^5 \gamma_\nu s_j^\nu) (1 - \zeta_\beta \gamma^5 \gamma_\rho s_\rho^\rho) (\gamma_\lambda u^\lambda + 1) \} = \\ = (1 + \zeta_\alpha \zeta_\beta) (1 - \zeta_\alpha (\zeta_i (s_i s_{sp}) + \zeta_j (s_j s_{sp})) + \zeta_i \zeta_j (s_i s_{sp}) (s_j s_{sp})) + \\ + (1 - \zeta_\alpha \zeta_\beta) \zeta_i \zeta_j (-(s_i s_{sp}) (s_j s_{sp}) - \zeta_\alpha i e_{\mu\nu\rho\lambda} s_i^\mu s_j^\nu s_{sp}^\rho u^\lambda - (s_i s_j)). \quad (5.17)$$

В случае, если начальное и конечное состояния отличаются от состояний с определенной спиральностью, но характеризуются одинаковыми с точностью до знака 4-векторами поляризации $\zeta_\alpha s_0^\mu$ и $\zeta_\beta s_0^\mu$, все выводы этого раздела останутся справедливы. Однако если начальное и конечное состояния характеризуются разными 4-векторами поляризации, то выражение

для следа матриц Дирака будет иметь более сложную структуру, чем выражение (5.17). При этом в выражениях для вероятностей появятся дополнительные *T*-нечетные слагаемые. Как уже указывалось, появление этих слагаемых обусловлено выбором начальных условий, но не отражает свойства симметрии взаимодействия.

Для записи итоговых формул введем обозначения для вещественной и мнимой части входящего в выражение (5.16) следа флейворных матриц. След флейворных матриц вычисляется по формуле, аналогичной (4.30)

$$\text{Tr}\{\mathbb{P}^i \mathbb{P}^\alpha \mathbb{P}^{j\dagger} \mathbb{P}^{\beta\dagger}\} = \mathcal{U}_{\alpha i}^* \mathcal{U}_{\alpha j} \mathcal{U}_{\beta j}^* \mathcal{U}_{\beta i} = R_{ij\alpha\beta} + iI_{ij\alpha\beta}, \quad (5.18)$$

где $R_{ij\alpha\beta}$ — вещественная часть четверного произведения элементов матрицы смешивания, $I_{ij\alpha\beta}$ — мнимая.

Таким образом, вероятность перехода с сохранением поляризации задается выражением

$$\begin{aligned} W_+ = & \sum_i |\mathcal{U}_{\alpha i}|^2 |\mathcal{U}_{\beta i}|^2 \left(\cos^2 \frac{R_i \tau}{2} + \sin^2 \frac{R_i \tau}{2} (s_{sp} s_i)^2 \right) + \\ & + 2 \sum_{i < j} (R_{ij\alpha\beta} \cos(m_j - m_i) \tau - I_{ij\alpha\beta} \sin(m_j - m_i) \tau) \times \\ & \times \left(\cos \frac{R_i \tau}{2} \cos \frac{R_j \tau}{2} + \sin \frac{R_i \tau}{2} \sin \frac{R_j \tau}{2} (s_i s_{sp})(s_j s_{sp}) \right) + \\ & + 2 \sum_{i < j} (R_{ij\alpha\beta} \sin(m_j - m_i) \tau + I_{ij\alpha\beta} \cos(m_j - m_i) \tau) \times \\ & \times \left(-\sin \frac{R_i \tau}{2} \cos \frac{R_j \tau}{2} \zeta_\alpha(s_i s_{sp}) + \cos \frac{R_i \tau}{2} \sin \frac{R_j \tau}{2} \zeta_\alpha(s_j s_{sp}) \right), \quad (5.19) \end{aligned}$$

а вероятность перехода с изменением поляризации задается выражением

$$\begin{aligned} W_- = & \sum_i |\mathcal{U}_{i\alpha}|^2 |\mathcal{U}_{i\beta}|^2 (1 - (s_i s_{sp})^2) + \\ & + 2 \sum_{i < j} (R_{ij\alpha\beta} \cos(m_j - m_i) \tau - I_{ij\alpha\beta} \sin(m_j - m_i) \tau) \times \\ & \times \sin \frac{R_i}{2} \tau \sin \frac{R_j}{2} \tau (-(s_i s_j) - (s_i s_{sp})(s_j s_{sp})) + \\ & + 2 \sum_{i < j} \zeta_\alpha (R_{ij\alpha\beta} \sin(m_j - m_i) \tau + I_{ij\alpha\beta} \cos(m_j - m_i) \tau) \times \\ & \times \sin \frac{R_i}{2} \tau \sin \frac{R_j}{2} \tau e_{\mu\nu\rho\lambda} s_i^\mu s_j^\nu s_{sp}^\rho u^\lambda. \quad (5.20) \end{aligned}$$

T-нарушение в вероятностях переходов с сохранением поляризации определяется только мнимой частью следа (5.18), то есть инвариантом Ярлског $I_{ij\alpha\beta}$. Однако в выражениях для переходов с переворотом спина в *T*-нарушение также вносят вклад слагаемые, пропорциональные вещественной части следа (5.18) и величине $e_{\mu\nu\rho\lambda} s_i^\mu s_j^\nu s_{sp}^\rho u^\lambda$. Множители такого же типа определяли *T*-нарушение в модели двух флейворов.

Интересно отметить, что вклад, нарушающий *T*-инвариантность вследствие влияния внешних условий, не содержит зависимости от мнимой части матрицы смешивания, а определяется только ее действительной частью. Именно этот факт является причиной того, что в модели двух флейворов *T*-нарушение также присутствует.

В полученных нами вероятностях *T*-нарушение за счет влияния внешних условий присутствует только в вероятностях переходов с переворотом спина. Тем не менее, это является не общим свойством такого типа нарушения, а следствием выбора нами упрощенной модели взаимодействия со средой. Как показано в работе [46], при наличии взаимодействия со средой через нейтральные и заряженные токи присутствуют корреляции между флейворными осцилляциями и переворотом спина нейтрино. Таким образом, в общем случае можно ожидать, что вероятности флейворных переходов с сохранением поляризации в общем случае также могут содержать *T*-нарушающие слагаемые, обусловленные влиянием внешних условий.

5.5 Дискретные симметрии вероятностей переходов

В квазиклассическом приближении операции *T*-отражения соответствует изменение знака собственного времени τ . Операция *P*-отражения является хорошо определенной формальной операцией, производимой над квантованной волновой функцией частицы. Далее мы будем исследовать свойства симметрии итоговых выражений для вероятностей, которые представляют собой наблюдаемые величины. Как хорошо известно, *P*-отражение приводит к изменению знака поляризации частицы в выражениях для

вероятностей процессов (см. [18]). Следовательно, в качестве процедуры *P*-отражения можно рассматривать изменение знаков ζ_α и ζ_β , определяющих начальную и конечную поляризации нейтрино. Операцию зарядового сопряжения следует производить для решений волнового уравнения (1.39) обычным образом [135] (см. также [90]). Физический смысл этой операции прост: вместо нейтрино мы исследуем антинейтрино, фоновое электромагнитное поле и характеристики среды остаются неизменными. При этом система, полученная в результате указанного выше преобразования, отличается от исходной. В уравнении (1.39) в результате *C*-сопряжения меняется киральный проектор, знаки потенциалов взаимодействия с веществом и знак магнитного момента. В модели трех флейворов в этом уравнении также необходимо сделать комплексное сопряжение флейворных матриц. В результате последней операции меняет знак мнимая часть следа (5.18), входящего в выражения для вероятностей. В выражениях для вероятностей переходов зарядовое сопряжение приводит к следующим изменениям. Во-первых, меняются все знаки магнитных моментов. Во-вторых, одновременная замена кирального проектора и знака потенциала приводит к следующему правилу: когда потенциал входит в вектор спина s_i^μ , знак его не меняется, в противном случае необходимо изменить знак потенциала. В-третьих, меняют знак величины $I_{ij\alpha\beta}$.

Разумеется, полученные нами вероятности не являются инвариантными относительно *CPT*-преобразования, проведенного только для волновой функции нейтрино при тех же внешних условиях. Как уже было сказано выше, исследуемая модель является теорией с нарушением лоренц-инвариантности [136–138]. Следовательно, *CPT*-теорема неприменима. Стоит отметить, что в квантовой теории поля *C*, *P* и *T* операции определяются для операторов рождения и уничтожения в волновых функциях квантованных полей (см., например, [90]), поэтому достаточно сложно обобщить их на классическое фоновое электромагнитное поле, определяемое тензором $F^{\mu\nu}$, а также на потенциал взаимодействия с веществом $f_\mu^{(N)}$. Соответствующие слагаемые в уравнении (1.39) являются результа-

том редукции радиационных поправок, и, следовательно, взаимодействие с этими полями не является минимальным. Именно по этой причине не удается обобщить дискретные преобразования на случай моделей с нарушенной лоренц-инвариантностью так же изящно, как удалось это сделать с понятием лоренц-инвариантности в блестящей работе [139], где рассматривалось минимальное взаимодействие электрона с внешним электромагнитным полем.

Однако, так как природа конденсатов известна, мы вполне можем исследовать поведение нейтрино в среде, состоящей из античастиц, не обобщая понятия C и P операций для внешних полей. Вид потенциалов взаимодействия с веществом известен (см. **Главу 1**). Аналогичным образом вывод потенциалов взаимодействия можно воспроизвести для среды, состоящей из античастиц. При этом эффективный потенциал взаимодействия нейтрино со средой, частицы которой характеризуются определенной поляризацией, отличается только знаком от потенциала взаимодействия нейтрино с античастицами противоположной поляризации.

Теперь рассмотрим взаимодействие антинейтрино со средой, состоящей из античастиц. Для того, чтобы наши соображения были более прозрачными, сначала рассмотрим два частных случая. Получим вероятности переходов антинейтрино, распространяющегося в среде, состоящей из античастиц, в случае, если электромагнитное поле отсутствует. Для того, чтобы записать вероятности для антинейтрино правой поляризации, необходимо изменить знак начальной и конечной поляризации частицы $\zeta_\alpha \rightarrow -\zeta_\alpha$ и $\zeta_\beta \rightarrow -\zeta_\beta$, знак всех множителей $I_{ij\alpha\beta}$, а также знаки $f_\mu^{(N)}$ по правилу, указанному выше. Если при этом среда состоит из античастиц, нужно еще раз изменить знак потенциала $f_\mu^{(N)}$ везде, где этот потенциал входит в вероятности. В результате этих действий мы получим исходные вероятности. Таким образом, в модели трех флейворов левые нейтрино распространяются в среде, состоящей из частиц, так же, как правые антинейтрино в среде, состоящей из античастиц.

Теперь рассмотрим взаимодействие антинейтрино только с электромаг-

нитным полем. Для того, чтобы описать движение антинейтрино, требуется изменить знак всех множителей $I_{ij\alpha\beta}$ и знак магнитных моментов нейтрино. Из вида полученных таким образом выражений следует, что в электромагнитном поле левые нейтрино распространяются так же, как правые антинейтрино. Как и в модели двух флейворов, мы получили, что для того, чтобы вероятности переходов совпали с исходными, надо сделать не только *C*-сопряжение, но и изменить поляризацию частицы, то есть сделать *P*-отражение. Если для взаимодействия нейтрино с веществом аналогичный результат был вполне ожидаемым, так как слабое взаимодействие *CP*-четно, то для нейтрино, участвующих только в электромагнитном взаимодействии, такой результат возникает исключительно тогда, когда мы рассматриваем частицу, имеющую более одного флейвора.

В этой главе мы получили вероятности спин-флейворных переходов для нейтрино, распространяющегося в веществе и электромагнитном поле. Для наглядности мы учли только диагональные магнитные моменты и взаимодействие с веществом через нейтральные токи. В этом случае замена нейтрино на антинейтрино и фермионов среды на их античастицы сводится к операциям, описанным выше. При этом оказывается, что левые нейтрино и правые антинейтрино распространяются различным образом. Однако исходные выражения можно восстановить, если изменить знак τ , что соответствует *T*-отражению. Еще раз подчеркнем, что полученный результат не является следствием *CPT*-теоремы, так как мы рассматриваем модель с нарушением лоренц-инвариантности.

Заключение

В диссертации построены основы математически непротиворечивого описания осцилляций и поворота спина ультрарелятивистских нейтрино в среде и электромагнитном поле на основе квантовополевого подхода. С помощью разработанного подхода исследовано влияние внешних условий на распространение нейтрино. Получены следующие основные результаты:

1. Получено квазиклассическое уравнение эволюции нейтрино, позволяющее описать как флейворные осцилляции, так и поворот спина нейтрино в веществе и электромагнитном поле.
2. Обнаружены корреляции между поворотом спина и осцилляциями нейтрино в плотной среде в модели двух флейворов. Выявлена зависимость вероятностей спин-флейворных переходов от начального флейвора нейтрино.
3. Исследовано распространение нейтрино в однородном электромагнитном поле в приближении двух флейворов с учетом переходных магнитных моментов. Выявлена зависимость вероятностей спин-флейворных переходов в электромагнитном поле от начального флейвора нейтрино.
4. Рассмотрено распространение нейтрино в переменном электромагнитном поле в адиабатическом приближении. Показано, что поведение вероятностей спин-флейворных переходов для нейтрино в электромагнитном поле при учете переходных магнитных моментов может носить резонансный характер, причем наличие и выраженность резо-

нанса в электромагнитном поле зависит от начальной поляризации нейтрино.

5. Найдено, что при учете взаимодействия нейтрино одновременно как с плотной средой, так и с электромагнитным полем, вероятности содержат нарушающие T -инвариантность вклады, которые отличны от нуля даже в случае вещественной матрицы смешивания и являются следствием влияния внешних условий. Показано, что в присутствии электромагнитного поля поведение левого нейтрино в среде из частиц и правого антинейтрино в среде из античастиц различно.

Автор выражает признательность А. В. Борисову, В. Ч. Жуковскому, И. П. Волобуеву, А. Д. Долгову, Е. М. Мурчиковой, В. А. Соколову, Д. Д. Соколову и А. О. Старинцу за плодотворные обсуждения. Также автор благодарит коллектив кафедры теоретической физики за замечательные учебные курсы и несомненную пользу, которую они принесли. И особенно автор благодарна А. Е. Лобанову за то, что имела возможность и удовольствие работать под его научным руководством в течение всего времени обучения на кафедре теоретической физики.

Приложение А

Спиновые проекторы

В Главах 2, 3 удастся свести оператор эволюции $U(\tau)$ к виду

$$U(\tau) = e^{-i\tau(\mathbb{A}+\mathbb{B}\mathcal{S})}, \quad (\text{A.1})$$

где \mathbb{A} , \mathbb{B} — матрицы в флейворном пространстве, а \mathcal{S} — спиновый интеграл движений, $\mathcal{S}^2 = 1$.

Если в этом случае ввести спиновые проекторы в виде

$$\Lambda_\zeta = \frac{1}{2}(1 + \zeta\mathcal{S}), \quad \zeta = \pm 1, \quad (\text{A.2})$$

то (A.1) можно переписать так

$$U(\tau) = \sum_{\zeta=\pm 1} e^{-i\tau(\mathbb{A}+\mathbb{B}\mathcal{S})} \Lambda_\zeta. \quad (\text{A.3})$$

Так как $\zeta^2 = 1$, то

$$\mathcal{S}\Lambda_\zeta = \mathcal{S}\frac{(1 + \zeta\mathcal{S})}{2} = \frac{1}{2}(\mathcal{S} + \zeta) = \zeta\Lambda_\zeta. \quad (\text{A.4})$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} e^{-i\tau(\mathbb{A}+\mathbb{B}\mathcal{S})} \Lambda_\zeta &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\tau)^n (\mathbb{A} + \mathbb{B}\mathcal{S})^n}{n!} \Lambda_\zeta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\tau)^n (\mathbb{A} + \zeta\mathbb{B})^n}{n!} \Lambda_\zeta = e^{-i\tau(\mathbb{A}+\zeta\mathbb{B})} \Lambda_\zeta. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Оператор эволюции представим в виде

$$U(\tau) = \sum_{\zeta=\pm 1} e^{-i\tau(\mathbb{A}+\zeta\mathbb{B})} \Lambda_{\zeta}. \quad (\text{A.6})$$

Таким образом из формулы (2.5) получаем (2.9), если выбрать в (A.1)

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \mathbb{M} + \frac{1}{2}((fu) - \zeta R)(\mathbb{P}^{(e)} + a\mathbb{I}), \\ \mathbb{B} &= \frac{1}{2}R(\mathbb{P}^{(e)} + a\mathbb{I}), \\ \mathbb{S} &= -\gamma^5 \gamma^{\mu} s_{\mu} \gamma^{\nu} u_{\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Аналогично из формулы (3.2) получаем (3.1), если выбрать в (A.1)

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \mathbb{M}, \\ \mathbb{B} &= -\mathbb{M}_d - \mathbb{M}_h, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

а спиновый оператор \mathbb{S} в виде (3.3).

Приложение В

Свойства матриц Паули

Получим явный вид экспоненты, содержащей матрицы Паули σ_i и численные коэффициенты A, B, C, D

$$e^{-i\tau(A+B\sigma_1+C\sigma_2+D\sigma_3)}. \quad (\text{B.1})$$

Так как коммутатор единичной матрицы и матрицы $B\sigma_1 + C\sigma_2 + D\sigma_3$ равен нулю, выражение сводится к

$$e^{-i\tau A} e^{-i\tau(B\sigma_1+C\sigma_2+D\sigma_3)}. \quad (\text{B.2})$$

Экспоненту, содержащую три матрицы Паули, распишем в виде ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\tau)^n (B\sigma_1 + C\sigma_2 + D\sigma_3)^n}{n!}. \quad (\text{B.3})$$

Так как антикоммутатор двух различных матриц Паули равен нулю, то

$$\begin{aligned} (B\sigma_1 + C\sigma_2 + D\sigma_3)^{2n} &= (B^2 + C^2 + D^2)^n, \\ (B\sigma_1 + C\sigma_2 + D\sigma_3)^{2n+1} &= (B^2 + C^2 + D^2)^n (B\sigma_1 + C\sigma_2 + D\sigma_3). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\tau)^n (B\sigma_1 + C\sigma_2 + D\sigma_3)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \tau^{2n} (B^2 + C^2 + D^2)^n}{(2n)!} - \\ &\quad - i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \tau^{2n+1} (B^2 + C^2 + D^2)^n (B\sigma_1 + C\sigma_2 + D\sigma_3)}{(2n+1)!} = \\ &= \cos(\tau \sqrt{B^2 + C^2 + D^2}) - i \sin(\tau \sqrt{B^2 + C^2 + D^2}) \frac{(B\sigma_1 + C\sigma_2 + D\sigma_3)}{\sqrt{B^2 + C^2 + D^2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Формула (2.9) с учетом (2.13) и (2.14) сводится к виду (В.1), если выбрать

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + ((fu) - \zeta R) (a + 1/2)), \\
 B &= \frac{1}{2} \sin 2\theta (m_2 - m_1), \\
 C &= 0, \\
 D &= \frac{1}{2} \left(-(m_2 - m_1) \cos 2\theta + \frac{1}{2} ((fu) - \zeta R) \right),
 \end{aligned}
 \tag{В.6}$$

откуда следует (2.15) с учетом обозначений (2.16).

В Разделе 3.1 матричная экспонента определяется выражением для \mathcal{F} (3.1). В этом случае

$$U(\tau) = \sum_{\zeta=\pm 1} e^{-i\tau(M - M_d \zeta N - M_h \zeta N)} \Lambda_\zeta.
 \tag{В.7}$$

Это выражение сводится к (В.1), если выбрать

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2 - \zeta(\mu_1 + \mu_2)\zeta N), \\
 B &= -\frac{1}{2} \mu_{12} \zeta N, \\
 C &= 0, \\
 D &= \frac{1}{2} (-(m_2 - m_1) + \zeta(\mu_2 + \mu_1)N).
 \end{aligned}
 \tag{В.8}$$

Отсюда следует выражение (3.10) с учетом (3.11).

Литература

- [1] Fermi E. Tentativo di una teoria dei raggi β . // *La Ricerca Scientifica*. — 1933. — Vol. 4. — P. 491–495.
- [2] Cowan C. L. J., Reines F., Harrison F. B., Kruse H. W., and McGuire A. D. Detection of the free neutrino: A confirmation. // *Science*. — 1956. — Vol. 124. — P. 103–104.
- [3] Reines F. and Cowan C. L. Jr. The neutrino. // *Nature*. — 1956. — Vol. 178. — P. 446–449.
- [4] Reines F. and Cowan C. L. Jr. Neutrino physics. // *Physics Today*. — 1957. — Vol. 10. — P. 12–18.
- [5] Davis R. Jr. An attempt to detect the anti-neutrinos from a nuclear reactor by the $^{37}\text{Cl}(\nu, e^-)^{37}\text{Ar}$ reaction. // *Phys. Rev.* — 1955. — Vol. 97. — P. 766–769.
- [6] Sakata S. and Inouë T. On the correlations between mesons and yukawaparticles. // *Progr. Theor. Phys.* — 1946. — Vol. 1. — P. 143–150.
- [7] Schwinger J. A theory of the fundamental interactions. // *Annals of Physics* — 1957. — Vol. 2. — P. 407–434.
- [8] Feinberg G. Decays of the μ meson in the intermediate-meson theory. // *Phys. Rev.* — 1958. — Vol. 110. — P. 1482–1483.
- [9] Danby G., Gaillard J. M., Goulianos K., Lederman L. M., Mistry N. B., Schwartz M., and Steinberger J. Observation of high-energy neutrino

- reactions and the existence of two kinds of neutrinos. // *Phys. Rev. Lett.* — 1962. — Vol. 9. — P. 36–44.
- [10] Perl M. L. et al. Evidence for anomalous lepton production in e^+e^- annihilation. // *Phys. Rev. Lett.* — 1975. — Vol. 35. — P. 1489–1492.
- [11] Perl M. L. et al. Properties of the proposed τ charged lepton. // *Phys. Lett. B.* — 1977. — Vol. 70. — P. 487–490.
- [12] Kodama K. et al. [DONUT] Observation of tau neutrino interactions. // *Phys. Lett. B.* — 2001. — Vol. 504. — P. 218–224.
- [13] Glashow S. L. Partial-symmetries of weak interactions. // *Nucl. Phys.* — 1961. — Vol. 22. — P. 579–588.
- [14] Weinberg S. A Model of Leptons. // *Phys. Rev. Lett.* — 1967. — Vol. 19. — P. 1264–1266.
- [15] Salam A. Elementary Particle Theory. // ed. N. Svartholm, Almqvist and Wiksells, Stockholm. — 1968. — P. 367.
- [16] Janot P. and Jadash S. Improved bhabha cross section at lep and the number of light neutrino species. // *Phys. Lett. B.* — 2020. — Vol. 803. — P. 135319.
- [17] Voutsinas G et al. Beam-beam effects on the luminosity measurement at lep and the number of light neutrino species. // *Phys. Lett. B.* — 2020. — Vol. 800. — P. 135068.
- [18] Workman R. L. et al. [Particle data group] Review of Particle Physics. // *PTEP.* — 2022. — P. 083C01.
- [19] Minkowski P. $\mu \rightarrow e\gamma$ at a rate of one out of 109 muon decays? // *Phys. Lett. B.* — 1977. — Vol. 67. — P. 421–428.
- [20] Yanagida T. Horizontal gauge symmetry and masses of neutrinos. // In *Proceedings: Workshop on the Unified Theories and the Baryon Number in the Universe*, published in KEK, Japan, 1979.

- [21] Yanagida T. Horizontal symmetry and mass of the t quark. // *Phys. Rev. D.* — 1979 — Vol. 20. — P. 2986–2988.
- [22] Davis R. J., Harmer D. S., and Hoffman K. C. A search for neutrinos from the Sun. // *Phys. Rev. Lett.* — 1968. — Vol. 20. — P. 1205–1209.
- [23] Bahcall J. N., Bahcall N., and Shaviv G. Present status of the theoretical predictions for the ^{37}Cl solar-neutrino experiment. // *Phys. Rev. Lett.* — 1968. — Vol. 20. — P. 1209–1212.
- [24] Понтекорво Б. Мезоний и антимезоний. // *ЖЭТФ.* — 1957. — Т. 33. — С. 549–551.
Pontecorvo B. Mesonium and antimesonium. // *Sov. Phys. JETP.* — 1958. — Vol. 6. — P. 429–431.
- [25] Gell-Mann M. and Pais A. Behavior of neutral particles under charge conjugation. // *Phys. Rev.* — 1955. — Vol. 97. — P. 1387–1389.
- [26] Christenson J. H., Cronin J. W., Fitch V. L., and Turlay R. Evidence for the 2π Decay of the K_2^0 Meson. // *Phys. Rev. Lett.* — 1964. — Vol. 13. — P. 138–140.
- [27] Fukuda S. et al. [Super-Kamiokande] Solar ^8B and hep neutrino measurements from 1258 days of super-kamiokande data. // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 86. — P. 5651–5655.
- [28] Ahmad Q. R. et al. (SNO collaboration) Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the sudbury neutrino observatory. // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 89. — P. 011301.
- [29] Gribov V. and Pontecorvo B. Neutrino astronomy and lepton charge. // *Phys. Lett. B.* — 1969. — Vol. 28. — P. 493–496.
- [30] Maki Z., Nakagawa M., and Sakata S. Remarks on the Unified Model of Elementary Particles. // *Prog. Theor. Phys.* — 1962. — Vol. 28. — P. 870–880.

- [31] Bilenky S. M. and Pontecorvo B. Lepton mixing and neutrino oscillations. // *Physics Reports*. — 1978. — Vol. 41. — P. 225–261.
- [32] Kayser B., Gibrat-Debu F., and Perrier F. The physics of massive neutrinos. // *World Scientific, Singapore, 1989*. — 128 p.
- [33] Bilenky S. M. , Giunti C., and Grimus W. Phenomenology of neutrino oscillations. // *Prog. Part. Nucl. Phys.* — 1999. — Vol. 43. — P. 1–86.
- [34] Bilenky S. M. Introduction to the Physics of Massive and Mixed neutrinos. // *Lecture Notes in Physics 817, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010*. — 256 p.
- [35] Giunti C. and Kim C. W. Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics. // *Oxford university press, 2007*. — 728 p.
- [36] Fukugita M. and Yanagita T. Physics of Neutrinos: and Application to Astrophysics. // *Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2003*. — 593 p.
- [37] Ахмедов Е. Х., Смирнов А. Ю. Paradoxes of neutrino oscillations. // *ЯФ*. — 2009. — Т. 72. — С. 1417–1435.
- [38] Bellini G., Ludhova L., Ranucci G., and Villante F. L. Neutrino oscillations. // *Adv. High Energy Phys.* — 2014. — Vol. 2014. — P. 191960.
- [39] Bilenky S. M. Neutrino oscillations: From a historical perspective to the present status. // *Nucl. Phys. B.* — 2016. — Vol. 908. — P. 2–13.
- [40] Cabibbo N. Unitary symmetry and leptonic decays. // *Phys. Rev. Lett.* — 1963. — Vol. 10. — P. 531–532.
- [41] Kobayashi M. and Maskawa T. CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction. // *Prog. Theor. Phys.* — 1973. — Vol. 49. — P. 652.
- [42] Bargmann V. On unitary ray representations of continuous groups. // *Annals of Mathematics*. — 1954. — Vol. 59 — P. 1–46.

- [43] Wick G. C., Wightman A. S., and Wigner E. P. Superselection rule for charge. // *Phys. Rev. D.* — Vol. 1. — P. 3267–3269.
- [44] Лобанов А. Е. Осцилляции частиц в Стандартной модели. // *ТМФ.* — 2017. — Т. 192. — С. 70-88.
Lobanov A. E. Oscillations of particles in the Standard Model. // *Theor. Math. Phys.* — 2017. — Vol. 192. — P. 1000–1015.
- [45] Lobanov A. E. Particle quantum states with indefinite mass and neutrino oscillations. // *Ann. Phys.* — 2019. — Vol. 403. — P. 82–105.
- [46] Лобанов А. Е., Чухнова А. В. Осцилляции нейтрино в однородной движущейся среде. // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* — 2017. — Т. 58. — № 5. — С. 22–26.
Lobanov A. E., Chukhnova A. V. Neutrino oscillations in homogeneous moving matter. // *Mosc. Univ. Phys. Bull.* — 2017. — Vol. 72. — No. 5. — 454–459.
- [47] Chukhnova A. V. and Lobanov A. E. Neutrino flavor oscillations and spin rotation in matter and electromagnetic field. // *Phys. Rev. D.* — 2020. — Vol. 101. — P. 013003.
- [48] Chukhnova A. V. and Lobanov A. E. Resonance enhancement of neutrino oscillations due to transition magnetic moments. // *Eur. Phys. J. C.* — 2021. — Vol. 81. — P. 821.
- [49] Лобанов А. Е., Чухнова А. В. Асимметрия распространения левополяризованных нейтрино в неоднородном магнитном поле. // *ЖЭТФ.* — 2021. — Vol. 160. — P. 595–604.
Lobanov A. E., Chukhnova A. V. Asymmetry of the propagation of left-handed neutrinos in an inhomogeneous magnetic field. // *JETP.* — 2021. — Vol. 133. — P. 515–523.

- [50] Chukhnova A. V. and Lobanov A. E. T violation without complex entries in the lepton mixing matrix. // *Phys. Rev. D.* — 2022. — Vol. 105. — P. 073010.
- [51] Лобанов А. Е., Чухнова А. В. Нарушение Т-симметрии в осцилляциях нейтрино. // *ЖЭТФ.* — 2022. — Т. 162. — P. 364–372.
Lobanov A. E., Chukhnova A. V. T-violation in neutrino oscillations. // *JETP.* — 2022. — Vol. 135. — P. 312–319.
- [52] Лобанов А. Е. Осцилляции нейтрино в плотной среде. // *Известия высших учебных заведений. Физика.* — 2016. — Т. 59. — С. 141–144.
Lobanov A. E. Neutrino Oscillations in Dense Matter. // *Russ. Phys. J.* — 2017. — Vol. 59. — P. 1891–1895.
- [53] Fujikawa K. and Shrock R. E. Magnetic moment of a massive neutrino and neutrino-spin rotation. // *Phys. Rev. Lett.* — 1980. — Vol. 45. — P. 963–966.
- [54] Shrock R. E. Electromagnetic properties and decays of Dirac and Majorana neutrinos in a general class of gauge theories. // *Nucl. Phys. B.* — 1982. — Vol. 206. — P. 359–379.
- [55] Pauli W. Relativistic Field Theories of Elementary Particles. // *Rev. Mod. Phys.* — 1941. — Vol. 13. — P. 203–232.
- [56] Wolfenstein L. Neutrino oscillations in matter. // *Phys. Rev. D.* — 1978. — Vol. 17. — P. 2369–2374.
- [57] Михеев С. П., Смирнов А. Ю. Резонансное усиление осцилляций нейтрино в веществе и спектроскопия солнечных нейтрино. // *ЯФ.* — 1985. — Vol. 42. — P. 1441–1448.
Mikheev S. P., Smirnov A. Yu. Resonance Enhancement of Oscillations in Matter and Solar Neutrino Spectroscopy. // *Sov. J. Nucl. Phys.* — 1985. — Vol. 42. — P. 913.

- [58] Bethe H. A. Possible Explanation of the Solar-Neutrino Puzzle. // *Phys. Rev. Lett.* — 1986. — Vol. 56. — P. 1305–1308.
- [59] Jarlskog C. A basis independent formulation of the connection between quark mass matrices, cp violation and experiment. // *Z. Phys.* — 1985. — Vol. C29. — P. 491–497.
- [60] Kayser B. On quantum mechanics of neutrino oscillation. // *Phys. Rev. D.* — 1981. — Vol. 24. — P. 110–116.
- [61] Grimus W. and Stockinger P. Real oscillations of virtual neutrinos. // *Phys. Rev. D.* — 1996. — Vol. 54. — P. 3414–3419.
- [62] Grimus W. Revisiting the quantum field theory of neutrino oscillations in vacuum. // *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics.* — 2020. — Vol. 47. — P. 085004.
- [63] Giunti C. Neutrino Wave Packets in Quantum Field Theory. // *JHEP.* — 2002. — Vol. 2002. — P. 017.
- [64] Naumov V. A. and Shkirmanov D. S. Covariant asymmetric wave packet for a field theoretical description of neutrino oscillations. // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2015. — Vol. 30. — P. 1550110.
- [65] Волобуев И. П., Егоров В. О. Описание процессов осцилляций нейтрино в квантовой теории поля. // *Ядерная физика и инжиниринг.* — 2018. — Т. 9 — С. 429–432.
- [66] Volobuev I. P. Quantum field-theoretical description of neutrino and neutral kaon oscillations. // *International Journal of Modern Physics A.* — 2018. — Vol. 33. — P. 1850075.
- [67] Giunti C., Kim C. W., and Lee U. W. Remarks on the weak states of neutrinos. // *Phys. Rev. D.* — 1992. — Vol. 45. — P. 2414–2420.
- [68] Giunti C. Fock states of flavor neutrinos are unphysical. // *Eur. Phys. J. C.* — 2005. — Vol. 39. — P. 377–382.

- [69] Blasone M. and Vitiello G. Quantum field theory of fermion mixing. // Ann. Phys. — 1995. — Vol. 244. — P. 283–311. [Erratum-ibid. 1996. Vol. 249, P. 363.].
- [70] Blasone M., Henning P. A., and Vitiello G. The exact formula for neutrino oscillations. Phys. Lett. B. — 1999. — Vol. 451. — P. 140–145.
- [71] Blasone M. and Vitiello G. Remarks on the neutrino oscillation formula. // Phys. Rev. D. — 1999. — Vol. 60 — R111302.
- [72] Fujii K., Habe C., and Yabuki T. Note on the field theory of neutrino mixing. // Phys. Rev. D. — 1999. — Vol. 59. — P. 113003. [Erratum-ibid. 1999. Vol. 60, P. 099903.].
- [73] Fujii K., Habe C., and Yabuki T. Remarks on flavor-neutrino propagators and oscillation formulas. // Phys. Rev. D. — 2001. — Vol. 64. — P. 013011.
- [74] Feynman R. P. Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction. // Phys. Rev. D. — 1959. — Vol. 80. — P. 440.
- [75] Schwinger J. Quantum Electrodynamics. I. A Covariant Formulation. // Phys. Rev. D. — 1948. — Vol. 74. — 1439.
- [76] Dyson F. J. The radiation theories of tomonaga, schwinger, and feynman. // Phys. Rev. D. — 1949. — Vol. 75. — P. 486.
- [77] Ho C. M. On neutrino flavor states. // JHEP. — 2012. — Vol. 2012. — P. 22.
- [78] Вайтман А. С. Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей. // М.: Наука, 1968.
- [79] Hannabus K. C. and Latimer D. C. The quantum field theory of fermion mixing. // J. Phys. A: Math. Gen. — 2000. — Vol. 33. — P. 1369–1373.

- [80] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т. Общие принципы квантовой теории поля. // М.: Наука, 1987.
- [81] Wigner W. P. On unitary representations of the inhomogeneous lorentz group. // Ann. of Math. — 1939. — Vol. 40. — P. 149–204.
- [82] Michel L. Relations between internal symmetry and relativistic invariance. // Phys. Rev. B. — 1965. — Vol. 137. — P. 405–408.
- [83] Coleman S. Trouble with relativistic SU(6). // Phys. Rev. B. — 1965. — Vol. 138. — P. 1262–1256.
- [84] Weinberg S. Comments on relativistic supermultiplet theories. // Phys. Rev. — 1965. — Vol. 139. — P. B597.
- [85] Coleman S. and Mandula J. All possible symmetries of the s matrix. // Phys. Rev. — 1967. — Vol. 159. — P. 1251.
- [86] Jost R. Eine Bemerkung zu einem “Letter” von L. O’Raifeartaigh und einer Entgegnung von M. Flato und D. Sternheimer.// Helv. Phys. Acta. — 1966. — Vol. 39. — no. 4 — P. 369–375.
- [87] O’Raifeartaigh L. Mass differences and lie algebras of finite order. // Phys. Rev. Lett. — 1965. — Vol. 14. — P. 575.
- [88] Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. // М.: Мир, 1980.
- [89] Kaempffer F. A. Concepts in quantum mechanics. // New York: Academic press, 1965. — 386 p.
- [90] Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Том. 4. Квантовая электродинамика, изд. 3. // М.: Наука, 1989. — 728 с.
- [91] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей, изд. 2. // М.: Наука, 1973. — 416 с.

- [92] Furry W. H. On bound states and scattering in positron theory. // *Phys. Rev.* — 1951. — Vol. 81. — P. 115–124.
- [93] De Gouvêa A. and Shalgar S. Effect of transition magnetic moments on collective supernova neutrino oscillations. // *JCAP.* — 2012. — Vol. 2012. — N. 10. — P. 027.
- [94] Pehlivan Y., Balantekin A. B., and Kajino T. Neutrino magnetic moment, CP violation, and flavor oscillations in matter. // *Phys. Rev. D.* — 2014 — Vol. 90. — P. 065011.
- [95] Dolan L. and Jackiw R. Symmetry behavior at finite temperature. // *Phys. Rev. D.* — 1974. — Vol. 9. — P. 3320–3341.
- [96] Levinson E. J. Self-energy corrections to fermions in the presence of a thermal background. // *Phys. Rev. D.* — 1985. — Vol. 31. — P. 3280–3284.
- [97] Борисов А. В., Вшивцев А. С., Жуковский В. Ч., Эминов П. А. Фотон и лептоны во внешних полях при конечных температуре и плотности. // *УФН.* — 1997. — Т. 167. — С. 241–267.
- [98] Эминов П. А. Спин и дисперсия массивного дираковского нейтрино в замагниченной плазме. // *ЖЭТФ.* — 2016. — Т. 149. — С. 76.
P. A. Eminov. Spin and dispersion of a massive Dirac neutrino in a magnetized plasma. // *JETP.* — 2016. — Vol. 122. — P. 63–77.
- [99] Michel L. and Wightman A. A covariant formalism describing the polarization of spin one-half particles. // *Phys. Rev.* — 1955. — Vol. 98. — P. 1190.
- [100] Лобанов А. Е. Радиационные переходы нейтрино высоких энергий в плотной среде. // *Доклады Академии наук.* — 2005. — Т. 402. — С. 475–478.
Lobanov A. E. Radiative transitions of high-energy neutrinos in a dense medium. // *Dokl. Phys.* — 2005. — Vol. 50. — P. 286–289.

- [101] Studenikin A. I. and Ternov A. I. Neutrino quantum states and spin light in matter. // *Phys. Lett. B.* — 2005. — Vol. 608. — P. 107–114.
- [102] Lobanov A. E. High energy neutrino spin light. // *Phys. Lett. B.* — 2005. — Vol. 619. — P. 136–144.
- [103] Arbuzova E. V., Lobanov A. E., and Murchikova E. M. Pure quantum states of a neutrino with rotating spin in dense magnetized matter. // *Phys. Rev. D.* — 2010. — Vol. 81. — P. 045001.
- [104] Giunti C. and Studenikin A. Neutrino electromagnetic interactions: A window to new physics. // *Rev. Mod. Phys.* — 2015. — Vol. 87. — P. 531–591.
- [105] Егоров В. О., Волобуев И. П. Квантовое теоретико-полевое описание осцилляций нейтрино в магнитном поле и проблема солнечных нейтрино. // *ЖЭТФ.* — 2022. — Т. 162. — С. 226–239.
- Egorov V., Volobuev I. Quantum Field-Theoretical Description of Neutrino Oscillations in a Magnetic Field and the Solar Neutrino Problem. // *JETP.* — 2022. — Vol. 135. — 197–208.
- [106] Lobanov A. E. Radiation and self-polarization of neutral fermions in quasi-classical description. // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2006. — Vol. 39. — P. 7517–7529.
- [107] Bargmann V., Michel L., and Telegdi V. L. Precession of the polarization of particles moving in a homogeneous electromagnetic field. // *Phys. Rev. Lett.* — 1959. — Vol. 2. — P. 435–436.
- [108] Thomas L. H. The kinematics of the electron with the axis. // *Philos. Mag.* — 1927. — Vol. 3. — P. 1–22.
- [109] Jackson J. D. Examples of the zeroth theorem of the history of science. // *Am. J. Phys.* — 2008. — Vol. 76. — P. 704–719.

- [110] Волошин М. Б., Высоцкий М. И., Окунь Л. Б. Электродинамика нейтрино и возможные следствия для солнечных нейтрино. // ЖЭТФ. — 1986. — Т. 91. — С. 754–765.
- Voloshin M. B., Vysotsky M. I., Okun L. B. Neutrino electrodynamics and possible effects for solar neutrinos. // Sov. Phys. JETP. — 1986. — Vol. 64. — P. 446–452.
- [111] Окунь Л. Б., Волошин М. Б., Высоцкий М. И. // Об электромагнитных свойствах нейтрино и возможных полугодовых вариациях потока нейтрино от Солнца. // ЯФ. — 1986. — Т. 44. — С. 677.
- Okun L., Voloshin M., Vysotsky M. Electromagnetic properties of neutrino and possible semiannual variation cycle of the solar neutrino flux. // Sov. J. Nucl. Phys. — 1986. — Vol. 44. — P. 440.
- [112] Lobanov A. E. and Studenikin A. I. Neutrino oscillations in moving and polarized matter under the influence of electromagnetic fields. // Phys. Lett. B. — 2001. — Vol. 515. — P. 94–98.
- [113] Студеникин А. И. Нейтрино в электромагнитных полях и движущихся средах. // ЯФ. — 2004. — Т. 67. — С. 1014–1024.
- A. I. Studenikin. Neutrinos in electromagnetic fields and moving media. // Phys. Atom. Nucl. — 2004. — Vol. 67. — P. 993–1002.
- [114] Dvornikov M. and Maalampi J. Oscillations of Dirac and Majorana neutrinos in matter and a magnetic field. // Phys. Rev. D. — 2009. — Vol. 79. — P. 113015.
- [115] Chukhnova A. V. and Lobanov A. E. Stationary and non-stationary solutions of the evolution equation for neutrino in matter. // EPJ Web Conf. — 2018. — Vol. 191. — P. 03002.
- [116] Neumann J. Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik. // Nachrichten von der Gesellschaft der

- Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse.
— 1927. — Vol. 1927. — P. 245–272.
- [117] Landau L. D. Das dämpfungsproblem in der wellenmechanik. // Zeitschrift für Physik. — 1927. — Vol. 45. — P. 430-441.
- [118] Shapiro S. L. and Teukolsky S. A. Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects. // New York: Wiley, 1983.
- [119] Dvornikov M. and Maalampi J. Evolution of mixed Dirac particles interacting with an external magnetic field. // Phys. Lett. B. — 2007. — Vol. 657. — P. 217–227.
- [120] Popov A. and Studenikin A. Neutrino eigenstates and flavour, spin and spin-flavour oscillations in a constant magnetic field. // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Vol. 79. — P. 144.
- [121] Akhmedov E. Kh. and Khlopov M. Yu. Resonant amplification of neutrino oscillations in longitudinal magnetic field. // Mod. Phys. Lett. A. — 1988. — Vol. 3. — P. 451–457.
- [122] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц, изд. 5. // М.: Физматлит, 2004. — 560 с.
- [123] Giunti C. Neutrino flavour states and the quantum theory of neutrino oscillations. // J. Phys. G: Nucl. and Part. Phys. — 2007. — Vol. 34. — no. 2. — P. R93–R109.
- [124] Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. // М.: Наука, 1983. — 352 с.
- [125] Agostini M. et al. [Borexino] Limiting neutrino magnetic moments with Borexino Phase-II solar neutrino data. // Phys. Rev. D. — 2017. — Vol. 96. — P. 091103.

- [126] Beda A. G. et al. Gemma experiment: The results of neutrino magnetic moment search. // *Phys. Part. Nucl. Lett.* — 2013. — Vol. 10. — N. 2. — P. 139–143.
- [127] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Том 2. Теория поля, 7 изд.. // М.: Наука, 1988. — 512 с.
- [128] Сахаров А. Д. Нарушение CP-инвариантности, C-асимметрия и барионная асимметрия Вселенной. // *УФН.* — 1991. — Vol. 161. — № 5. — С. 61–64.
- [129] Fukugita M. and Yanagida T. Baryogenesis without grand unification. // *Phys. Lett. B.* — 1986. — Vol. 174. — P. 45.
- [130] Trodden M. Electroweak baryogenesis. // *Rev. Mod. Phys.* — 1999. — Vol. 71. — P. 1463–1500.
- [131] Davidson S., Nardi E., and Nir Y. Leptogenesis. // *Phys. Rep.* — 2008. — Vol. 466. — P. 105.
- [132] Naumov V. A. Three-neutrino oscillations in matter, cp-violation and topological phases. // *Int. Journ. of Mod. Phys. D.* — 1992. — Vol. 1. — P. 379–399.
- [133] Akhmedov E., Huber P., Lindner M., and Ohlsson T. T violation in neutrino oscillations in matter. // *Nucl. Phys. B.* — 2001. — Vol. 608. — P. 394–422.
- [134] Petcov S. T. and Zhou Y.-L. On neutrino mixing in matter and CP and T violation effects in neutrino oscillations. // *Phys. Lett. B.* — 2018. — Vol. 785. — P. 95–104.
- [135] Kramers H. A. The use of charge-conjugated wave functions in the hole theory of the electron. // *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.* — 1937. — Vol. 40. — P. 814–823.

-
- [136] Carroll S. M., Field G. B., and Jackiw R. Limits on a lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics. // *Phys. Rev. D.* — 1990. — Vol. 41. — P. 1231–1240.
- [137] Colladay D. and Kostelecký V. A. CPT violation and the standard model. // *Phys. Rev. D.* — 1997. — Vol. 55. — P. 6760–6774.
- [138] Coleman S. and Glashow S. L. High-energy tests of lorentz invariance. // *Phys. Rev. D.* — 1999. — Vol 59. — P. 116008.
- [139] Dirac P. A. M., Peierls R., and Pryce M. H. L. On lorentz invariance in the quantum theory. // *Proc. Cambr. Phil. Soc.* — 1942. — Vol. 38. — P. 193–200.