ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертационной работе
Промыслова Валентина Валерьевича
“Графы и алгебраические конструкции”,

представленной на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5

Диссертация Промыслова В.В. посвящена интересным вопросам алгебры матриц и алгебры многочленов над полем о строении и свойствах так называемых тотального графа $T_n(F)$ и регулярного графа $\Gamma_n(F)$ с вершинами в матрицах $n\times n$ над полем F. Некоторые из рассматриваемых вопросов решаются благодаря утверждениям о том, что отображение $M_n(F)\to M_n(F)$ множества $n\times n$ матриц в себя, обладающее теми или иными свойствами, имеет стандартный вид, т.е. $A\mapsto PAQ$ $A\mapsto PA^TQ$, где Т означает транспонирование. Среди таких свойств рассматриваются биективность, инъективность, сюръективность, линейность, аддитивность в сочетании с сохранением определителя, перманента, вырожденности, невырожденности, ранга и т.д. Первые результаты (о стандартности отображения) были получены Фробениусом в конце XIX века, а также Дьёдонне в середине XX века, затем они многократно обобщались, и до сих пор исследования в этом направлении не прекращаются. Диссертация В.В.Промыслова вносит существенный вклад в развитие этой теории.

Диссертация содержит введение, 5 глав, заключение и список литературы.

Во введении автор приводит исторический обзор рассматриваемой тематики, основные понятия, а также обзор результатов самой диссертации.

Первая глава также носит вводный характер. В ней устанавливаются связи между задачей описания автоморфизмов тотального графа и условиями на отображения множества матриц в себя. Вводится понятие тотального графа $T_A(F^n)$ и регулярного графа $\Gamma_A(F^n)$ подмножества $A\subseteq F^n$. Поднимается вопрос о конечности или бесконечности кликового числа $\omega(G)$ и хроматическом числе $\chi(G)$, где G – один из этих графов.

Во второй главе доказываются три теоремы (2.1.4, 2.1.5 и 2.1.6), утверждающие стандартный вид отображений, удовлетворяющих определённым условиям, одним из которых является слабое пучковое условие. Теорема 2.1.4 обобщает результат Костары 2020 года.

В главе 3 описываются автоморфизмы тотального графа. Вводится понятие ориентированного тотального графа $T_n(F,\lambda_0)$, который зависит от некоторого параметра λ_0 и превращается в $T_n(F)$ при $\lambda_0=1$. В теореме 3.2.4 доказывается, что при $\lambda_0\neq -1$ все неориентированные клики, состоящие из невырожденных матриц, конечны. Приведён пример, показывающий, что при $\lambda_0=-1$ утверждение теоремы неверно. Наконец, в теореме 3.2.8 описаны все автоморфизмы графа $T_n(F,\lambda_0)$, а значит, и графа $T_n(F)$ в предположении, что $|F|\geq 3$.

Глава 4 в основном посвящена тотальному и регулярному графам многочленов. Если $p(x_1,\dots,x_n)$ – многочлен и $V(p)$ – множество его нулей, то по определению $T_p(F^n)=T_{V(p)}(F^n)$ и $\Gamma_p(F^n)=\Gamma_{V(p)}(F^n)$, а $N_p(F^n)$ – подграф графа $T_p(F^n)$, порождённый множеством $V(p)$. Доказано, что при $|F|>3$ и $n>1$ граф $\Gamma_n(F)$ связен и имеет диаметр, равный 2 (предложение 4.1.1 и последующее замечание). Далее, кликовое число

$\omega(T_p(F^n))$ конечно тогда и только тогда, когда $\omega(N_p(F^n))$ конечно (утверждение 4.2.3). Для многочленов, множество нулей которых не содержит прямых, получены оценки сверху числа $\omega(N_p(F^n))$. Отдельно рассмотрены графы $\Gamma_p(\mathbb{R}^2)$ кривых второго порядка. Доказана их связность, вычислены диаметр, кликовое число и другие характеристики, доказано, что любое конечное дерево вкладывается в этот граф.

В заключительной главе 5 более детально рассматриваются тотальный и регулярный графы множеств. В теореме 5.1.9 приведено разбиение на классы изоморфных графов $T_A(F^1)$ и $\Gamma_A(F^1)$, где F – поле характеристики 0, а A – множество из трё1х элементов прямой, а в теореме 5.2.10 приведена классификация для графов трёхточечных подмножеств пространства F^n.

Все утверждения работы снабжены убедительными доказательствами или ссылками. При доказательстве автором использовались различные алгебраические и комбинаторные методы.

Автореферат диссертации правильно и полно отражает её содержание.

Отмечу некоторые недостатки работы. В определении автоморфизма (с. 23) не хватает требования взаимной однозначности. Вопрос 1.3.11 (с. 35) сформулирован неудачно. В утверждении 2.3.5 (с. 47) непонятно, что такое ν. На с. 35 в 4-й строке снизу пропущено слово «хроматического». В условии предложения 4.1.1 (с. 74) требуется, чтобы $\operatorname{char} F \neq 2$, а после этого предложения автор делает замечание о том, что утверждение верно и для полей характеристики 2, но не для поля $\mathbb{Z}_2$. Наверное, лучше было бы расширить формулировку предложения. В формулировке леммы 2.3.7 (с. 48) слово «при» лишнее. В формулировке следствия 3.1.4 (с. 61) вместо «тогда» должно быть «то». Имеются неудачные обороты (с. 31, 4-я строка снизу, с. 94, 12-я сверху) и опечатки (с. 31, 9-я снизу, с. 32, 5-я сверху, с. 466, 12-я сверху, с. 127, 4-я сверху).

Указанные недостатки не изменяют общего положительного впечатления о работе. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно, в работах с соавторами автор отмечает, что сделано им самим. Результаты диссертации могут быть использованы в спецкурсах по алгебре, читаемых в МГУ, НГУ, Казанском и Уральском федеральных университетах, а также быть полезны специалистам научно-исследовательских математических институтов.

Считаю, что диссертационная работа “Графы и алгебраические конструкции” удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор Промыслов Валентин Витальевич заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 – математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Автор отзыва Кожухов Игорь Борисович, доктор физико-математических наук, специальность 01.01.06, профессор кафедры ВМ-1 Национального исследовательского университета “МИЭТ”. Домашний адрес и телефон: 124460, Москва, корп. 1209, кв. 51, +7 (916)-715-55-02. Электронная почта: kozhuhov_i_b@mail.ru

4 декабря 2023 года

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры ВМ-1 НИУ МИЭТ И.Б.Кожухов

Подпись Кожухова И.Б. удостоверяю

Учёный секретарь Учёного совета МИЭТ
к.т.н. , доцент А.В.Козлов