МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Бакай Гавриил Андреевич

Большие уклонения для регенерирующих последовательностей

1.1.4 – теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2024

Диссертация подготовлена на кафедре математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Шкляев Александр Викторович,**
кандидат физико-математических наук.

Официальные оппоненты: **Павлов Юрий Леонидович,**
доктор физико-математических наук, профессор,
Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Федеральный исследовательский центр
"Карельский научный центр Российской академии наук",
главный научный сотрудник,

Топчий Валентин Алексеевич,
доктор физико-математических наук,
Омский филиал федерального государственного
бюджетного учреждения науки Институт математики
им. С.Л. Соболева Сибирского отделения
Российской академии наук,
ведущий научный сотрудник,

Рядовкин Кирилл Сергеевич,
кандидат физико-математических наук,
Санкт-Петербургское отделение Математического
института им. В.А. Стеклова Российской академии наук,
научный сотрудник.

Защита диссертации состоится 31 мая 2024 г. в 16 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета МГУ.011.3 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1. МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-24.

E-mail: mexmat_disser85@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале https://dissovet.msu.ru/dissertation/2959

Автореферат разослан 25 апреля 2024 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.3,
доктор физико-математических наук В.Б. Шерстюков

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Исследование асимптотики локальных вероятностей для сумм случайных величин было начато в работах Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова. В работе Б. В. Гнеденко[1] получены результаты в случае, когда случайные величины являются независимыми и одинаково распределенными (н.о.р.) и имеют конечный второй момент. Так, если $X_i,\ i \in \mathbb{N}$, – н.о.р. случайные величины с арифметическим распределением и $\mu = \mathbf{E}X_1,\ \sigma^2 = \mathbf{D}X_1 > 0$, то справедливо соотношение

$$\mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma} \exp\left(-\frac{(k-\mu n)^2}{2n\sigma^2}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \to \infty.$$

Соотношение выполняется равномерно по $k \in \mathbb{Z}$.

Методы, предложенные Х. Крамером[2], в том числе, крамеровское преобразование мер, позволили расширить соответствующие результаты в случае н.о.р. величин на более широкую зону, включающую нормальные, умеренные и большие уклонения. В многомерном случае данная задача рассматривалась, например, А. А. Боровковым[3].

В работе А. Н. Колмогорова[4] получены аналогичные результаты в том случае, когда случайные величины образуют марковскую цепь с конечным множеством состояний. Однако, разработанный аппарат позволяет исследовать вероятности для сумм случайных величин только в окрестности среднего.

Одним из основных результатов настоящей работы является теорема об асимптотике вероятностей больших уклонений в локальной форме для первого момента достижения уровня случайным блужданием в случайной среде (СБСС). Модель случайного блуждания в случайной среде была впервые введена в работе F. Solomon[5], в которой исследовались критерии для возвратности и транзиентности блуждания. Предельные теоремы для СБСС были получены H. Kesten, M. V. Kozlov, F. Spitzer[6]. A. Greven и F. den Hollander[7]

---

[1]Гнеденко Б. В. О локальной предельной теореме теории вероятностей // Успехи математических наук — 1948. — Т. 3. — Вып. 3 — С. 187–194.

[2]Cramér H. Sur un nouveau theoreme-limite de la theorie des probabilities // Scientifiques et Industrielles. 1938. Vol. 736. P. 5–23.

[3]Боровков А. А., Могульский А. А. О больших и сверхбольших уклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. I // Теория вероятностей и ее применения — 2006. — Т. 51. — Вып. 2 — С. 260–294.

[4]Колмогоров А. Н. Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова // Известия Российской академии наук. Серия математическая — 1949. — Т. 13. — Вып. 4 — С. 281–300.

[5] Solomon F. Random walks in a random environment // The Annals of Probability. 1975. Vol. 3. no. 1. P. 1–31.

[6]Kesten H., Kozlov M. V., Spitzer F. A limit law for random walk in a random environment // Compositio mathematica. 1975. Vol. 30. no. 2. P. 145–168.

[7] Greven A., den Hollander F. Large deviations for a random walk in random environment // The Annals of Probability. 1994. Vol. 22. no. 3. P. 1381–1428.

доказали принцип больших уклонений, его дальнейшее обобщение на случай сред, не представляющих набор н.о.р. величин, были произведены F. Comets, N. Gantert, O. Zeitouni[8]. Отметим также работу D. Buraczewski, P. Dyszewski[9] (теоремы 1.2 и 1.4), где получены результаты о нижних уклонениях СБСС.

Известно, что в модели СБСС последовательность первых моментов достижения уровней n, которую мы обозначим $\{T_n,\ n \geq 0\}$, можно представить в виде последовательности, обладающей свойством регенерации[10]. Более формально, можно ввести вспомогательное вероятностное пространство, на котором задать такие величины $\widehat{T}_n$, что при каждом натуральном n величины T_n и $\widehat{T}_n$ совпадают по распределению. При этом величины $\widehat{T}_n$ допускают следующее представление:

$$\widehat{T}_n = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i + \zeta_n, \quad N_n := \max\{k \in \mathbb{N} :\ \eta_1 + \ldots + \eta_k \leq n\}.$$

Здесь случайные векторы $(\xi_i, \eta_i), i \in \mathbb{N}$, являются н.о.р. случайными векторами, случайные величины ζ_n таковы, что для произвольных $r, n \in \mathbb{N},\ k \leq n$ условное распределение ζ_n при условии событий

$$\{(\xi_i, \eta_i),\ i \leq r,\ \eta_1 + \ldots + \eta_r = n - k, \eta_{r+1} > k\}$$

зависит только k, но не от значений (ξ_i, η_i). Так, если величины ζ_n равны нулю почти наверное, то процесс является обобщенным процессом восстановления. Таким образом, первым шагом к решению задачи о больших уклонениях момента достижения уровня n в модели СБСС стало исследование в области теории больших уклонений для обобщенных процессов восстановления.

Для исследования вероятностей больших уклонений обобщенных процессов восстановления применяется анализ так называемой меры восстановления, а именно функции

$$E(k, n) := \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(S_j^{\xi} = k,\ S_j^{\eta} = n\right), \quad k \in \mathbb{Z}^d,\ n \in \mathbb{N},$$

$$S_j^{\xi} := \sum_{i=1}^{j} \xi_i, \quad S_j^{\eta} := \sum_{i=1}^{j} \eta_i.$$

В случае нерешетчатого распределения вектора (ξ_1, η_1) локальные вероятности заменяются интегро-локальными.

[8] Comets F., Gantert N., Zeitouni O. Quenched, annealed and functional large deviations for one-dimensional random walk in random environment // Probability theory and related fields. 2000. Vol. 118. no. 1. P. 65–114.

[9] Buraczewski D., Dyszewski P. Precise large deviations for random walk in random environment // Electron. J. Probab.. 2018. Vol. 23. P. 1–26.

[10] Афанасьев В. И. Двуграничная задача для случайного блуждания в случайной среде // Теория вероятностей и ее применения — 2018. — Т. 63. — Вып. 3 — С. 417–430.

Функция $E(k,n)$ в более общей постановке

$$H(V) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\left(S_j^{\xi}, S_j^{\eta}\right) \in V\right),\ V \in \mathbb{B}\left(\mathbb{R}^{d+1}\right),$$

изучалась в работе А. А. Боровкова и А. А. Могульского[11], в которой получены точные асимптотики и асимптотические разложения для различных типов множеств V, растущих к бесконечности, в частности, для функции $E(k,n)$. По всей видимости, в указанной работе впервые введена вторая функция уклонений для случайного вектора (ξ_1, η_1) и изучены ее свойства.

Дальнейшие продвижения в этом направлении, теории больших уклонений для обобщенных процессов восстановления, содержатся в серии работ А. А. Боровкова, А. А. Могульского и Е. И. Прокопенко. Пусть

$$U_T := \sum_{i=0}^{N_T} \xi_i, \quad N_T = \max\{k \in \mathbb{N} : \eta_0 + S_k^{\eta} \le T\},\ T \in \mathbb{R}.$$

Случайный процесс U_T является неоднородным обобщенным процессом восстановления. Здесь случайный вектор (ξ_0, η_0) не зависит от последовательности $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ и имеет, вообще говоря, отличное от (ξ_1, η_1) распределение. Наряду с процессом U_T рассматривался также процесс Y_T, задаваемый формулой $Y_T = \sum_{i=0}^{N_T+1} \xi_i$. В нерешетчатом одномерном случае ($d = 1$, где d – размерность вектора ξ_1) получены[12,13] точные асимптотики вероятностей больших уклонений в интегро-локальной форме (равномерные по k/n в широком диапазоне значений $k = k(n)$) для величин U_T и Y_T в *регулярной зоне уклонений*, также получены асимптотики вероятностей больших уклонений для конечномерных распределений соответствующих процессов.

В многомерном ($d \ge 2$) нерешетчатом случае известны[14,15] аналоги этих результатов для процесса U_T в *регулярной* и *нерегулярной зонах уклонений*. Точные асимптотики больших уклонений для процесса Y_T получены А. А. Мо-

[11]Боровков А. А., Могульский А. А. Вторая функция уклонений и асимптотические задачи восстановления и достижения границы для многомерных блужданий // Сибирский математический журнал — 1996. — Т. 37. — Вып. 4 — С. 745–782.

[12]Боровков А. А., Могульский А. А. Интегро-локальные предельные теоремы для обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера. I // Сибирский математический журнал — 2018. — Т. 59. — Вып. 3 — С. 491–513.

[13]Боровков А. А., Могульский А. А. Интегро-локальные предельные теоремы для обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера. II // Сибирский математический журнал — 2018. — Т. 59. — Вып. 4 — С. 736–758.

[14]Могульский А. А., Прокопенко Е. И. Интегро-локальные теоремы для многомерных обобщенных процессов восстановления при моментном условии Крамера. I // Сибирские электронные математические известия — 2018. — Т. 15. — С. 475–502.

[15]Могульский А. А., Прокопенко Е. И. Интегро-локальные теоремы для многомерных обобщенных процессов восстановления при моментном условии Крамера. II // Сибирские электронные математические известия — 2018. — Т. 15. — С. 503–527.

гульским и Е. И. Прокопенко[16].

В арифметическом случае аналоги этих результатов получены А. А. Могульским в одномерном случае[17] и А. А. Могульским и Е. И. Прокопенко в многомерном случае[18].

Отметим, что в указанных выше работах используется метод, основанный на анализе асимптотики меры восстановления.

Родственные результаты получены[19] автором совместно с А. В. Шкляевым: в арифметическом случае получена асимптотика вероятностей больших уклонений процесса с регенерацией, который представим в виде

$$\widetilde{U}_n = \sum_{i=0}^{N_n} \xi_i + \zeta_n$$

для достаточно общего вида ζ_n.

Результаты первой главы дополняют указанные теоремы об асимптотиках вероятностей больших уклонений, распространяя их на случай обрывающихся процессов восстановления. В данном случае случайная величина η_1 является несобственной, а именно, справедливо соотношение

$$\mathbf{P}(\eta_1 < +\infty) \in (0, 1).$$

Результаты автора в этом направлении позволяют исследовать асимптотику вероятностей больших уклонений для момента достижения уровня n в модели СБСС в том случае, когда блуждание уходит в минус бесконечность с вероятностью 1.

Однако, при применении полученных результатов теории больших уклонений для обобщенных процессов восстановления возникает ряд сложностей. Во-первых, выражение для функций в асимптотиках вероятностей, и, во-вторых, условия применимости данных теорем (условие Крамера на регенерирующую последовательность) в описанных выше работах были получены в терминах распределений случайных векторов

$$(\xi_0, \eta_0),\ (\xi_1, \eta_1), \quad \zeta_n,\ n \geq 0.$$

[16] Могульский А. А., Прокопенко Е. И. Интегро-локальные теоремы для многомерных обобщенных процессов восстановления при моментном условии Крамера. III // Сибирские электронные математические известия — 2018. — Т. 15. — С. 528–553.

[17] Могульский А. А. Локальные теоремы для арифметических обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера // Сибирские электронные математические известия — 2019. — Т. 16. — С. 21–41.

[18] Могульский А. А., Прокопенко Е. И. Локальные теоремы для арифметических многомерных обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера // Математические труды — 2019. — Т. 22. — Вып. 2 — С. 106–133.

[19] Бакай Г. А., Шкляев А. В. Большие уклонения обобщенного процесса восстановления // Дискретная математика — 2019. — Т. 31. — Вып. 1 — С. 21–55.

В модели СБСС непосредственная проверка условий теорем и вычисление параметров асимптотики вероятностей больших уклонений в терминах распределений указанных векторов не представляется возможным. Чтобы обойти данное затруднение, в работе автора[20] получены результаты, дающие новое выражение функций в асимптотиках вероятностей больших уклонений для регенерирующих последовательностей, и позволяющие, среди прочего, проверить выполнение условия Крамера для регенерирующей последовательности. Вторая глава настоящей диссертации содержит результаты в этом направлении.

Доказательство содержащихся во второй главе теорем 5 и 6, посвященных этому вопросу, основано на анализе асимптотического поведения производящей функции моментов регенерирующей последовательности. При этом ключевым условием является следующее: найдется такое открытое множество $H \subset \mathbb{R}^d$, что для любого его компактного подмножества K найдется такое $\delta = \delta(K)$, что справедливо соотношение

$$\mathbf{E} \exp\left(h\widehat{T}_n\right) = \rho_0(h)\rho^n(h) + o(\delta^n \rho^n(h)), \quad n \to \infty,$$

где $o(1)$ равномерно мало по $h \in K$.

Данное условие сходно с условием (A.2) работы C. Joutard[21]. В указанной работе исследуются асимптотики вероятностей больших уклонений для произвольных случайных последовательностей. Однако, условия на поведение функций ρ и ρ_0 в ней значительно более ограничительные. Так, функция ρ должна быть трижды дифференцируемой, функция ρ_0 – непрерывно-дифференцируемой. В теореме автора от функции ρ требуется непрерывность на H, от функции ρ_0 – отделенность от нуля и бесконечности на K.

Еще одним качественным отличием является то, что наличие регенерационной структуры позволяет обойти введенное в названной работе условие (A.3) на поведение функции $\rho(h)$ на комплексной плоскости. В работе N. Chaganty, J. Sethuraman[22] методами, схожими с методами работы Joutard, исследуется асимптотика вероятностей больших уклонений в многомерном случае, что, опять же, требует существенно более сложных для проверки условий, чем в настоящей работе.

Отметим, что полученные автором результаты выполняются равномерно в широком диапазоне уклонений x/n, тогда как в работах Joutard и Chaganty, Sethuraman равномерность не изучалась.

Вторая глава также содержит пример приложения разработанного аппарата к задаче о больших уклонениях максимума случайного блуждания.

[20]Бакай Г. А. О характеризации вероятностей больших уклонений для регенерирующих последовательностей // Труды МИАН — 2022. — Т. 316. — С. 47–63.

[21] Joutard C. Strong large deviations for arbitrary sequences of random variables // Annals of the Institute of Statistical Mathematics. 2013. Vol. 65. P. 49–67.

[22] Chaganty N., Sethuraman J. Multidimensional strong large deviation theorems // Journal of statistical planning and inference. 2013. Vol. 55, no. 3. P. 265–280.

Данная задача, уже решенная ранее в работах А. А. Боровкова и А. А. Могульского[23], А. А. Боровкова[24], М. В. Козлова[25] и А. В. Шкляева[26], приведена в настоящей работе как иллюстрация подхода к отысканию параметров асимптотики вероятностей больших уклонений регенерирующей последовательности (последовательность максимумов случайного блуждания обладает свойством регенерации), а также к проверке выполнения условия Крамера для такого рода последовательностей.

В заключительной, третьей главе приведены теоремы об асимптотиках вероятностей больших уклонений для первого момента достижения уровня n случайным блужданием в случайной среде. Для применения результатов второй главы к данной задаче автором показано, что математическое ожидание

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(h\widehat{T}_n\right);\ G_n\right), \quad h<0,\ n\in\mathbb{N},$$

$$G_n=\bigsqcup_{k=1}^{+\infty}\{\omega:\ \eta_1+\ldots+\eta_k=n\},$$

можно представить как действие n-ой степени некоторого оператора, действующего на некотором банаховом пространстве, на некоторые вектор и ковектор. Таким образом, асимптотическое поведение указанного математического ожидания может быть исследовано методами спектральной теории. При этом, автором были применены результаты работ H. Schaefer[27,28], I. Marek[29] и результаты монографии Т. Като[30].

Целью работы является доказательство теоремы об асимптотике вероятностей больших уклонений первого момента достижения уровня n случайным блужданием в случайной среде и получение нового представления для параметров асимптотики вероятностей больших уклонений регенерирующих последовательностей в терминах производящих функций моментов настоящих последовательностей.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**.

[23]Боровков А. А., Могульский А. А. Предельные теоремы в задаче достижения границы многомерным блужданием // Сибирский математический журнал — 2001. — Т. 42. — Вып. 2— С. 289–317.

[24]Боровков А. А. О преобразовании Крамера, больших уклонениях в граничных задачах и условном принципе инвариантности // Сибирский математический журнал — 1995. — Т. 36. — Вып. 3— С. 417–434.

[25]Козлов М. В. О больших уклонениях максимума крамеровского случайного блуждания и процесса ожидания // Теория вероятностей и ее применения — 2013. — Т. 58. — Вып. 1— С. 81–116.

[26]Шкляев А. В. Предельные теоремы для случайного блуждания при условии большого уклонения максимума // Теория вероятностей и ее применения — 2010. — Т. 55. — Вып. 3— С. 590–598.

[27]Schaefer H. Some spectral properties of positive linear operators // Pacific Journal of Mathematics. 1960. Vol. 10, no. 3. P. 1009–1019.

[28]Schaefer H. On the point spectrum of positive operators // Proceedings of the American Mathematical Society. 1964. Vol. 15, no. 1. P. 56–60.

[29]Marek I. Frobenius theory of positive operators: Comparison theorems and applications // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1970. Vol. 19, no. 3. P. 607–628.

[30]Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир. 1972.

1. Доказать теорему об асимптотике вероятностей больших уклонений для обрывающегося процесса восстановления.

2. Разработать отличный от известных ранее подход для проверки условия Крамера и выражения функций в асимптотиках вероятностей больших уклонений для регенерирующих последовательностей.

3. Применить полученный подход к модели СБСС, используя спектральную теорию линейных операторов.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Для обрывающегося обобщенного процесса восстановления в нерегулярной зоне уклонений получена точная асимптотика вероятностей больших уклонений в локальной форме.

2. Найдены альтернативные выражения параметров асимптотики вероятностей больших уклонений регенерирующих последовательностей.

3. Для первого момента достижения далекого уровня случайным блужданием в случайной среде получена точная асимптотика вероятностей больших уклонений.

Научная новизна:

1) впервые получены точные асимптотики вероятностей больших уклонений для обрывающегося обобщенного процесса восстановления;

2) впервые получены теоремы, которые позволяют проверить условие Крамера и получить выражение для функций в асимптотиках вероятностей больших уклонений для регенерирующих последовательностей, не обращаясь напрямую к распределению цикла регенерации;

3) впервые получены точные асимптотики вероятностей больших уклонений для момента достижения уровня n случайным блужданием в случайной среде.

Практическая значимость. Результаты главы 1 продолжают исследования в области теории больших уклонений для обобщенных процессов восстановления в случае обрывающейся регенерации. Таким образом, они продолжают цикл работ А. А. Боровкова, А. А. Могульского и Е. И. Прокопенко, опубликованных в последнее десятилетие.

Разработанный в главе 2 аппарат для проверки условия Крамера и выражения параметров асимптотики вероятностей больших уклонений для регенерирующих последовательностей открывает дорогу для исследования широкого класса моделей: случайного блуждания в случайной среде, возмущенного случайного блуждания, случайного блуждания в случайном сценарии (случайном медиа) и других. Задача о больших уклонениях для случайного блуждания в случайной среде является достаточно сложной и интересной. Грубая (логарифмическая) асимптотика была известна ранее. Точная асимптотика вероятностей больших уклонений, по-видимому, была получена впервые.

Достоверность полученных результатов обусловлена знакомством с ним научного сообщества. Результаты неоднократно излагались на научных семинарах, всероссийских и международных конференциях, публиковались в ведущих рецензируемых журналах и согласуются с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на семинаре "Случайные блуждания, ветвящиеся процессы" кафедры математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, семинаре отдела дискретной математики МИАН, конференциях "Ломоносов 2018", "Ломоносовские чтения 2019", "Пятая Санкт-Петербургская зимняя молодёжная конференция по теории вероятностей и математической физике" (21-24 декабря 2021 г.) и "Branching Processes, Random Walks and Probability on Discrete Structures" (21–24 июня 2022 г.). Приложения методов, разработанных в разделе 2, излагались на конференции "Вторая конференция Математических центров России. Секция «Теория вероятностей»" (7-11 ноября 2022 г.)

Личный вклад. Автором лично доказаны все теоремы, выносимые на защиту.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в шести печатных изданиях, из них [1] –[4] – работы в журналах, рекомендованных ВАК, и два – сборники тезисов международных конференций. Работ в соавторстве нет. Список их приведен в конце автореферата.

Соответствие паспорту научной специальности. Тема диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.4 - «Теория вероятностей и математическая статистика» (физико-математические науки).

Области исследований: 6. Предельные теоремы. 12. Теория восстановления и теория массового обслуживания.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, описаны научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена исследованию асимптотики вероятностей больших уклонений для обрывающихся обобщенных процессов восстановления. Будем говорить, что последовательность случайных векторов $\{U_n\}_{n\geq 0}$, определенная на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $U_n \in \mathbb{R}^d$, обладает *регенерационной структурой*, если $U_0 = 0$ и при $n > 0$

$$U_n = \begin{cases} \xi_0;\ \eta_0 \geq n, \\ \xi_0 + \zeta_n;\ \eta_0 = n-k,\ \eta_1 > k,\ 0 < k \leq n, \\ \xi_0 + \sum\limits_{j=1}^{r} \xi_j + \zeta_n;\ \eta_0 + \sum\limits_{j=1}^{r} \eta_j = n-k,\ \eta_{r+1} > k,\ 0 \leq k \leq n,\ r \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{1}$$

где ξ_j, $j \geq 0$, – d-мерные случайные векторы, η_0 – неотрицательная собственная случайная величина, η_j – положительные, но, возможно, несобственнные величины, ζ_n – случайные векторы в $\mathbb{R}^d$. При этом предполагается выполнение следующих условий.

1. Векторы (ξ_j, η_j), $j \in \mathbb{N}$, одинаково распределены и независимы в совокупности,
   $\xi_1 \in \mathbb{R}^d$, $\eta_1 \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

2. Вектор (ξ_0, η_0) не зависит от последовательности $\{(\xi_j, \eta_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$, $\eta_0 \in \mathbb{N}_0$, где
   $$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

3. Случайный вектор ζ_n при любом r при условии события
   $$\left\{\eta_0 + \sum_{j=1}^{r} \eta_j = n-k, k < \eta_{r+1} < +\infty\right\}, \quad n \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq k \leq n,\ r \in \mathbb{N}_0$$
   имеет распределение, не зависящее от r и n, и не зависит от случайных векторов $\{(\xi_j, \eta_j)\}_{j=0}^{r}$ при условии того же события при любом $r \in \mathbb{N}_0$. Будем использовать обозначение $\widehat{\xi}_k$ для вектора с описанным выше распределением. На событии
   $$\left\{\eta_0 + \sum_{j=1}^{r} \eta_j = n-k,\ \eta_{r+1} = +\infty\right\}$$
   вектор ζ полагаем равным нулю.

Неформально говоря, мы рассматриваем некоторую последовательность, которая через независимые времена η_i перезапускается независимо от прошлого. При этом ξ_i – некоторый продукт, произведенный последовательностью за один цикл. Первый цикл при этом может быть распределен иначе чем остальные. Величина ζ при этом описывает количество продукта, произведенного в последнем, незаконченном цикле. Случай бесконечного η соответствует обрыву циклической структуры, при этом мы предполагаем, что величина ζ равна нулю. Примером такой последовательности может служить аддитивный функционал

$$U_n = \sum_{i=0}^{n} g(X_i)$$

на счетной однородной марковской цепи $\{X_i\}$, где g – некоторая векторнозначная функция на множестве состояний. Тогда в качестве η_i можно рассматривать циклы по возвращению в некоторое фиксированное состояние, полагая

$$\xi_i = \sum_{j=\eta_0+\dots+\eta_{i-1}+1}^{\eta_0+\dots+\eta_i} g(X_j).$$

При этом в случае, когда состояние невозвратно, величина η_i может принимать бесконечное значение с положительной вероятностью.

Будем использовать обозначение (ξ, η) в качестве общего обозначения для величин с тем же распределением (ξ_j, η_j), $j \in \mathbb{N}$. Если

$$\mathbf{P}(\eta < +\infty) = 1,$$

то регенерационную структуру будем называть собственной, если же

$$\mathbf{P}(\eta < +\infty) \in (0, 1),$$

то регенерационную структуру будем называть обрывающейся или несобственной.

Основная цель первой главы – получение локальной предельной теоремы для U_n в широком диапазоне значений, включающем нормальные, умеренные и большие уклонения. Ключевое отличие от опубликованных ранее работ здесь заключается в том, что мы рассматриваем обрывающуюся регенерационную структуру, что качественным образом меняет асимптотику локальных вероятностей.

Для описания теоремы нам понадобится ряд обозначений. Введем при $h \in \mathbb{R}^d$ и $t \in \mathbb{R}$ следующие функции:

$$R(h,t) := \mathbf{E}(\exp(\langle h, \xi_1\rangle + t\eta_1);\ \eta_1 < +\infty) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{tk}\mathbf{E}(\exp(\langle h, \xi_1\rangle);\ \eta_1 = k), \tag{2}$$

$$\widehat{R}(h,t) := \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk}\widehat{r}_k(h), \quad \widehat{r}_k(h) := \mathbf{E}\exp\left(\left\langle h, \widehat{\xi}_k\right\rangle\right)\mathbf{P}(k < \eta_1 < +\infty), \tag{3}$$

$$R_0(h,t) := \mathbf{E}\exp(\langle h, \xi_0\rangle + t\eta_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk}\mathbf{E}(\exp(\langle h, \xi_0\rangle);\ \eta_0 = k), \tag{4}$$

$$\widehat{R}_0(h,t) := \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk}\mathbf{E}(\exp(\langle h, \xi_0\rangle);\ \eta_0 > k). \tag{5}$$

Введем множество

$$A := \operatorname{int}\left\{h \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}:\ \max\left(R(h,t), \widehat{R}(h,t), R_0(h,t), \widehat{R}_0(h,t)\right) < +\infty\right\}.$$

Пусть

$$B := \operatorname{int}\{h \in \mathbb{R}^d:\ \exists t:\ (h,t) \in A,\ 1 < R(h,t) < +\infty\}. \tag{6}$$

Будем предполагать, что множество B непусто. На множестве B определим неявную функцию

$$t_0(h):\ R(h, t_0(h)) = 1.$$

Данное определение корректно в силу монотонности функции $R(h_0,t)$ как функции аргумента t при каждом фиксированном h_0.

Положим

$$B' := \operatorname{int}\{-\operatorname{grad} t_0(h):\ h \in B\}.$$

Пусть

$$G(h) := \widehat{R}(h, t_0(h))R_0(h, t_0(h)), \quad B_1 := \operatorname{int}\{h \in B : G(h) < +\infty\}, \tag{7}$$

$$B_0 := \{h \in B:\ t_0(h) = 0\},\ B_1' := \{-\operatorname{grad} t_0(h),\ h \in B_1\}, \tag{8}$$

$$B_0' := \operatorname{int}\{-\beta \operatorname{grad} t_0(h),\ h \in B_0,\ \beta \in (0,1)\}. \tag{9}$$

Совместное распределение, определяемое формулой

$$\mathbf{P}(\xi_1 \in A_1, \eta_1 \in A_2 | \eta_1 < +\infty), \quad A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

предполагается сильно арифметическим, а именно, предполагается, что существует такая матрица C_ξ размера $d \times d$, что условное распределение случайного вектора $(C_\xi^{-1}\xi_1, \eta_1)$ при условии события $\{\eta_1 < +\infty\}$ является арифметическим. Определитель матрицы C_ξ будем обозначать q_ξ.

Будем предполагать, что при всех n выполнены соотношения

$$\mathbf{P}\left(\xi_0 \in C_\xi \mathbb{Z}^d\right) = 1, \quad \mathbf{P}\left(\widehat{\xi}_n \in C_\xi \mathbb{Z}^d\right) = 1.$$

Основным результатом первой главы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть последовательность $\{U_n, n \geq 0\}$ обладает несобственной сильно арифметической регенерационной структурой, и множество B_0', определенное соотношением (9), непусто. Пусть при всех $k \geq 0$ случайные векторы $\widehat{\xi}_k$ равны нулю и $(\xi_0, \eta_0) = 0$. Пусть $\theta = \theta(n) = x/n$. Тогда*

$$\mathbf{P}\left(U_n = x\right) \sim q_\xi \frac{F_0(\theta)}{n^{(d-1)/2}} \exp(-L_0(\theta)n), \quad n \to \infty. \tag{10}$$

Соотношения выполнены равномерно по $\theta = \theta(n) \in K_0'$, K_0' — произвольное компактное подмножество B_0', где предполагается, что при всех n векторы $(x(n), n)$ принадлежат решетке распределения $C_\xi \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}$.

Здесь

$$\beta_0 = \beta_0(\theta) \in \mathbb{R}: \ t_0\left(h_{\theta/\beta_0}\right) = 0, \quad \gamma = \gamma(\theta) := \theta/\beta_0(\theta) \in \mathbb{R}^d, \ \theta \in B_0', \tag{11}$$

$$L_0(\theta) := \left\langle h_{\gamma(\theta)}, \theta \right\rangle = \left\langle h_{\gamma(\theta)}, \gamma(\theta) \right\rangle \beta_0(\theta), \quad \alpha_0(h) := \left(\left. \frac{R_t'(h,t)}{R(h,t)} \right|_{h, t_0(h)} \right)^{-1}, \tag{12}$$

$$G(\gamma) := \frac{\alpha_0(h_\gamma)\,\mathbf{P}(\eta = +\infty)}{\sqrt{-\det(t_0''(h_\gamma))}\,\sqrt{\langle \gamma, (-t_0''(h_\gamma))^{-1}\gamma \rangle}}, \tag{13}$$

$$F_0(\theta) := G(\gamma(\theta))\left(\sqrt{2\pi\beta_0(\theta)}\right)^{-(d-1)}. \tag{14}$$

Таким образом, основным результатом первой главы является теорема об асимптотике вероятностей больших уклонений для последовательности $\{U_n, n \geq 0\}$, которая в данном случае

$$(\xi_0, \eta_0) = (0, 0), \quad \widehat{\xi}_n = 0, \ n \in \mathbb{N},$$

является обрывающимся обобщенным процессом восстановления.

Во **второй главе** разрабатывается альтернативный подход для проверки выполнения условия Крамера, то есть непустоты множества B_1' или B_0', для последовательностей, обладающих регенерационной структурой (как собственной, так и несобственной). В множестве рассматриваемых в теории случайных последовательностей моделей установить наличие регенерационной структуры для последовательности случайных величин или векторов достаточно просто. В то же время проверка выполнения условий теорем об асимптотике вероятностей больших уклонений вызывает значительные трудности. Для изложения результатов второй главы нам потребуются дополнительные обозначения.

Обозначим коэффициенты в разложениях в степенной ряд введенных ранее функций $R_0, \widehat{R}$ и $\widehat{R}_0$ следующим образом:

$$\widehat{R}(h,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk}\widehat{r}_k(h), \quad \widehat{r}_k(h) = \mathbf{E}\exp\left(\left\langle h, \widehat{\xi}_k\right\rangle\right)\mathbf{P}(k < \eta_1 < +\infty),$$

$$R_0(h,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk}\mathbf{E}(\exp(\langle h, \xi_0\rangle);\ \eta_0 = k) =: \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} r_{0,k}(h),$$

$$\widehat{R}_0(h,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk}\mathbf{E}(\exp(\langle h, \xi_0\rangle);\ \eta_0 > k) =: \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk}\widehat{r}_{0,k}(h).$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть последовательность $\{U_n\}_{n\geq 0}$ обладает сильно арифметической регенерационной структурой вида (1). Рассмотрим непустое открытое множество $H \subset \mathbb{R}^d$. Пусть для произвольного компактного подмножества K множества H найдется такое $\delta = \delta(K) \in (0,1)$, что выполнены соотношения*

$$\mathbf{E}\exp(\langle h, U_n\rangle) = \rho_0(h)\rho^n(h) + o(1)(\delta\ \rho(h))^n, \quad n \to \infty, \tag{15}$$

$$\max\left(r_{0,n}(h),\ \widehat{r}_{0,n}(h),\ \widehat{r}_n(h)\right) = o(1)(\delta\ \rho(h))^n, \tag{16}$$

где $o(1)$ равномерно мало по $h \in K$. Предположим также, что функция $\rho(h)$ непрерывна и положительна на H, функция $\rho_0(h)$ положительна, ограничена и отделена от нуля на K.

Тогда множество B_1, определенное в (7), непусто, причем $H \subseteq B_1$. Более того, функция $\rho(h)$ бесконечно дифференцируема на H и при $h \in H$ справедливы соотношения

$$\rho_0(h) = R_0(h, t_0(h))\alpha_0(h)\widehat{R}(h, t_0(h)), \quad \rho(h) = \exp(-t_0(h)). \tag{17}$$

Таким образом, если для последовательности $\{U_n\}_{n\geq 0}$ выполнены условия теоремы 2, то для нее выполнены условия теоремы об асимптотике вероятностей больших уклонений, причем выражение для функции $F(\theta)$ в асимптотике вероятности может быть получено из соотношения (17).

Теорема 2 позволяет установить непустоту множества B_1, не используя напрямую распределения вектора (ξ, η) и явного вида функции $R(h,t)$. Однако, теорема 2 не включает в себя случай, рассмотренный в теореме 1.

Введем последовательность событий

$$G_0 := \Omega, \quad G_n := \left\{ \eta_0 = 0,\ \exists r \in \mathbb{N} : \ \sum_{i=1}^{r} \eta_i = n \right\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3. *Пусть последовательность $\{U_n\}_{n\geq 0}$ обладает сильно арифметической регенерацией вида (1). Рассмотрим непустое открытое множество $H_1 \subset \mathbb{R}^d$. Пусть для произвольного компактного подмножества K_1 множества H_1 найдется такое число $\delta_1 = \delta_1(K_1) \in (0,1)$, что выполнены соотношения*

$$\mathbf{E}\left(\exp(\langle h, U_n - \zeta - \xi_0 \rangle);\ G_n\right) = \rho_1(h)\rho^n(h) + o(1)(\delta_1\ \rho(h))^n, \quad n \to \infty, \quad (18)$$

где $o(1)$ равномерно мало по $h \in K_1$. Более того, предположим, что функция $\rho(h)$ непрерывна и положительна на H_1, функция $\rho_1(h)$ положительна, ограничена и отделена от нуля на K_1. Тогда множество B, определенное ранее в (6), непусто, $H_1 \subseteq B$, функция $\rho(h)$ бесконечно дифференцируема на H_1 и при $h \in H_1$ справедливы соотношения

$$\rho(h) = \exp(-t_0(h)), \quad \alpha_0(h) = \rho_1(h)\left(\mathbf{P}(\eta_0 = 0)\right)^{-1}. \quad (19)$$

Функция $\alpha_0(h)$ была определена ранее в (12).

Функция $t_0(h)$ выражается в соотношении (19) в терминах функции $\rho(h)$, заданной соотношением (18). Таким образом, проверка непустоты множества B_0 может быть произведена на основе анализа функции в левой части соотношения (18), не используя напрямую распределение циклов регенерации.

Третья глава посвящена исследованию асимптотики вероятности больших уклонений для первого момента достижения уровня n случайным блужданием в случайной среде (СБСС). СБСС определяется следующим образом. Пусть $p_i,\ i \in \mathbb{Z},$ – независимые и одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины со значениями в интервале $(0,1)$ и $\mathbf{p} = \{p_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Положим $q_i := 1 - p_i$. Пусть $W_0 = 0$,

$$\mathbf{P}(W_{j+1} = i+1 | W_0, \ldots, W_j = i, \mathbf{p}) = p_i,$$
$$\mathbf{P}(W_{j+1} = i-1 | W_0, \ldots, W_j = i, \mathbf{p}) = q_i,\ j \geq 0,\ i \in \mathbb{Z}.$$

Последовательность случайных величин $\{W_n\}_{n\geq 0}$ называется *случайным блужданием в случайной среде (СБСС)*, а случайный элемент $\mathbf{p}$ называют *случайной средой.*

Положим

$$\gamma := \mathbf{E}\ln\left(\frac{q_i}{p_i}\right) \quad (20)$$

и введем последовательность, вообще говоря, несобственных случайных величин

$$T_0 := 0, \quad T_l := \min\{k \in \mathbb{N} : \ W_k = l\}, \quad l \in \mathbb{Z}. \tag{21}$$

Известно, что в случае $\gamma \leq 0$ величины $T_i, \ i \in \mathbb{N}$, почти наверное конечны. В то же время, при $\gamma > 0$ величина T_1 является несобственной, а именно, справедливо соотношение

$$\mathbf{P}(T_1 = +\infty) = \mathbf{P}(W_i \leq 0, i \geq 0) > 0.$$

В третьей главе доказывается, что последовательность $\{T_n, n \geq 0\}$ можно рассматривать как последовательность, обладающую свойством регенерации. Регенерационная структура является собственной при $\gamma \leq 0$ и несобственной – в противном случае. Основным результатом главы является следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть последовательность случайных величин $\{T_n\}_{n \geq 0}$ задана соотношением (21). Тогда при $n \to \infty$ выполнено соотношение*

$$\mathbf{P}(T_n = k) \sim \frac{F(k/n)}{\sqrt{n}} \exp\left(-L\left(\frac{k}{n}\right)n\right), \tag{22}$$

соотношение выполнено равномерно по таким k, что $n-k$ четно при всех n и отношение k/n принадлежит некоторому компакту $K' \subset B'$.

Выражения для функций F и L, а также множества B', получены в терминах семейства операторов $\{Q(h),\, h < 0\}$, введенного в доказательстве теоремы.

Случаи собственной и несобственной регенерации объединены в одну теорему, так как доказательство в обоих случаях сходное. Однако, между данными ситуациями существует значимое отличие. В собственном случае $\gamma = \mathbf{E}\ln(q_0/p_0) \leq 0$ суть большого уклонения заключается в том, что высокий уровень n достигается раньше, чем это происходит в нормальном случае (однако, этот уровень в любом случае будет рано или поздно достигнут). В несобственном случае само достижение уровня блужданием, уходящим в $-\infty$, уже имеет экспоненциально малую вероятность.

В **заключении** приведены основные результаты работы.

1. Получены точные асимптотики вероятностей больших уклонений для случайных последовательностей, обладающих свойством несобственной регенерации.

2. Разработан альтернативный метод для проверки условия Крамера в теоремах о больших уклонениях для регенерирующих последовательностей. Получены альтернативные выражения для функций в асимптотиках вероятностей.

3. Разработанный аппарат применен к задачам о больших уклонениях моментов достижения высокого уровня случайным блужданием в случайной среде с положительным и отрицательным сносом.

Разработанная в работе методика может быть использована для получения локальных предельных теорем для различных последовательностей, обладающих свойством регенерации, например, случайных блужданий в возмущенной случайной среде, случайных блужданий в случайном сценарии и других моделей.

Благодарность. Автор глубоко признателен своему научному руководителю кандидату физико-математических наук Шкляеву Александру Викторовичу за указанное направление научной деятельности, бесчисленные подсказки на данном пути, постановку задачи, всяческую помощь при ее решении, содействие в подготовке текстов статей и диссертации, и содействие в поисках научной литературы.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ.011.3 по специальности 1.1.4 - ”теория вероятностей и математическая статистика” и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI

[1] Бакай Г. А. Большие уклонения для обрывающегося обобщенного процесса восстановления // ТВП. — 2021. — Т. 66. — Вып. 2. — С. 261–283.

ИФ РИНЦ - 0.372 / 1.43 п.л.

Bakay G. A. Large Deviations for a Terminating Compound Renewal Process // Theory Probab. Appl. — Vol. 66, no. 2 — P. 209–227.

ИФ SJR - 0.37 / 1.18 п.л.

[2] Бакай Г. А. О характеризации вероятностей больших уклонений для регенерирующих последовательностей // Труды МИАН. — 2022. — Т. 316. — С. 47–63.

ИФ РИНЦ - 0.622 / 1.06 п.л.

Bakay G. A. Characterization of Large Deviation Probabilities for Regenerative Sequences // Proc. Steklov Inst. Math. — 2022 — Vol. 316 — P. 40–56.

ИФ SJR - 0.28 / 1.06 п.л.

[3] Бакай Г. А. О больших уклонениях момента достижения далекого уровня случайным блужданием в случайной среде // Дискретная математика. — 2022. — Т. 34.— Вып. 4. — С. 3–13.

ИФ РИНЦ - 0.494 / 0.68 п.л.

[4] Бакай Г. А. О больших уклонениях момента достижения далекого нижнего уровня случайным блужданием в случайной среде // Дискретная математика. — 2023. — Т. 35.— Вып. 4. — С. 3–17.

ИФ РИНЦ - 0.494 / 0.93 п.л.

Иные публикации

[5] Бакай Г. А. Большие уклонения обобщенного процесса восстановления // Материалы Международного молодежного научного форума ”ЛОМОНОСОВ-2018” — 2018.

[6] Bakai G. A. Large Deviations of Random Walk in Random Environment // International Conference ”Branching Processes, Random Walks and Probability on Discrete Structures”, Book of Abstracts — 2022. — C. 6–7.

Бакай Гавриил Андреевич
Большие уклонения для регенерирующих последовательностей
Автореф. дис. на соискание ученой степени канд.физ.-мат. наук
Подписано в печать __.__.____. Закак № 18.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография геологического факультета.