

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Булинской Екатерины Владимировны “Вероятностно-геометрические свойства пространственного ветвящегося случайного блуждания”, представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.4 теория вероятностей и математическая статистика.

Докторская диссертационная работа Е.Вл. Булинской основана на 30 трудах автора (все без соавторов, из них 15 статей в ведущих рецензируемых научных изданиях), написанных и опубликованных после защиты кандидатской диссертации. В ней приводятся исследования асимптотических свойств ряда семейств моделей каталитических ветвящихся случайных блужданий – стохастических моделей, описывающих одновременно размножение, гибель и перемещение частиц в пространстве с течением времени. Потребность исследования моделей такого типа порождена прикладными задачами статистической физики и восходит к работам Я.Б. Зельдовича 1980-х годов. В настоящее время исследуется множество разнообразных моделей ветвящихся случайных блужданий, в которых используются различные виды ветвления и блуждания, причем в разных сочетаниях. Работы автора сконцентрированы на модели марковского случайного блуждания по целочисленной решетке произвольной размерности с непрерывным временем для отдельных частиц и не более чем счетным количеством точек катализа, где частицы могут гибнуть и размножаться. Даже для фиксированных моделей может существовать несколько различных подходов к исследованию их свойств. Широко распространен операторный метод. Отличительной особенностью диссертационной работы является опора на глубокие теоретико-вероятностные методы. Это приводит к доказательству результатов при менее ограничительных условиях неоднородности процесса в русле классического описания свойств ветвящихся случайных процессов и случайных блужданий.

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и заключения. Ее объем составляет 238 страниц, включая 6 рисунков. Список литературы содержит 170 наименований.

Во введении обосновывается актуальность исследований, цели диссертационной работы, представлены основные положения, выносимые на защиту, и их научная новизна, практическая значимость, методология и методы исследования, апробация работы, кратко изложено содержание работы. Следует отметить, что результаты и методы исследований автора диссертационной работы органически взаимосвязаны с почти сотней опубликованных ранее статей и разделов монографий. Автор очень доступно

и лаконично излагает эти связи и историю развития данных научных направлений исследований.

В первой главе диссертации Е.Вл. Булинской исследуется более общая, чем каталитические ветвящиеся случайные блуждания, модель – каталитические ветвящиеся процессы. Последние являются цепью Маркова с перемещением частиц не только по решетке, но и по любому не более чем счетному множеству. Для каталитических ветвящихся процессов решена глобальная проблема их полной классификации. На основе перронава корня определенной матрицы, предложенной автором диссертации, установлены предельные теоремы для общей и локальных численностей частиц в докритическом, критическом и надкритическом случаях. В частности, описана асимптотика всех факториальных моментов. Завершается глава описанием вероятности глобального и локального вырождения популяции, а также новыми предельными теоремами о сходимости почти наверно и по вероятности для совместных распределений общей и локальных численностей частиц в надкритических каталитических ветвящихся процессах.

Классификация основана на использовании представлений времен достижения состояний с запретами попадания в фиксированные множества состояний и определяемых по распределению цепи вспомогательных процессов Беллмана–Харриса с большим количеством типов частиц. Основным вкладом автора являются: идея привлечения мощного аппарата табувероятностей и развитие последнего для решаемых задач, сведение описания ряда характеристик к свойствам специально подобранных процессов Беллмана–Харриса с большим количеством типов частиц и сочетание этих двух техник. В частности, условие для вероятности конечности времени достижения состояний было выведено ранее только для случаев одноэлементного и пустого множества запретов, а автор доказывает ее для произвольных множеств. Использование вспомогательных процессов Беллмана–Харриса для изучения каталитических ветвящихся случайных блужданий с единственным центром катализа восходят к работе 2004 года В.А. Ватутина, В.А. Топчия и Е.Б. Яровой. В диссертации все доведено до совершенства: проведен переход к неоднородным каталитическим ветвящимся процессам с произвольным конечным количеством центров катализа, получены качественно новые результаты. Развитый подход может быть использован при изучении других характеристик каталитических ветвящихся процессов.

Эти результаты применяются в главе 2 при исследованиях характера распространения популяции частиц в каталитических ветвящихся случайных блужданиях по целочисленным решеткам произвольной размерности, но они, безусловно, представляют самостоятельный научный интерес.

Во второй главе диссертации описывается скорость распространения

популяции частиц по пространству в каталитических ветвящихся случайных блужданиях при неограниченно растущем времени. Точнее, изучена эволюция в пространстве и времени должным образом нормированного случайного облака частиц. Исследуются надкритические каталитические ветвящиеся случайные блуждания при условии однородности по пространству и времени случайного блуждания. Получено полное описание как нормирующих функций для положений частиц случайного облака, обеспечивающих существование нетривиальной предельной формы фронта, так и описание этих предельных форм. Оказалось, что как скорость распространения популяции, так и предельная форма фронта существенным образом зависят от "тяжести" хвостов распределения скачков блуждания. Выделено три типа хвостов распределения скачков блуждания: легкие, тяжелые (правильно меняющиеся) и умеренно тяжелые (типа семиэкспоненциальных распределений). Следует отметить, что в каждом из случаев асимптотические свойства фронта качественно отличаются друг от друга и исследуются принципиально различными методами. Распространение фронта каталитических ветвящихся случайных блужданий по \mathbb{Z}^d с легкими хвостами асимптотически линейно по времени, а форма фронта распространения не зависит от количества катализаторов и их расположения, а зависит только от значения мальтусовского параметра ν и логарифмической производящей функции моментов для величины скачков блуждания Ψ . Случай тяжелых хвостов описан для блужданий на \mathbb{Z} и фактически фронт является максимумом процесса. В отличие от случайных блужданий, у которых хвосты распределения скачка либо легкие, либо правильно меняющиеся, блуждания по \mathbb{Z}^d с семиэкспоненциальным распределением скачков имеют зоны, для которых вероятности больших уклонов существенно образом отличаются. А именно, выделяются зоны уклонов Крамера, промежуточная и зона аппроксимации максимальным скачком. В диссертации рассматриваются две последних, поскольку они играют определяющую роль в асимптотическом поведении фронта популяции.

Особый интерес представляют четыре конкретных примера вычисления и визуализации нормированного фронта распространения популяции частиц по пространству. В частности, для процессов на \mathbb{Z}^d с семиэкспоненциальным распределением скачков предельная поверхность фронта распространения представляет собой границу звездообразного множества с центром в точке 0, которая симметрична или нет, когда хвосты распределения координат скачка блуждания имеют одинаковую или различную "тяжесть", соответственно.

Полученные результаты обнаруживают новые неожиданные эффекты, существенно обобщают ряд предшествующих работ и носят приоритетный характер.

В третьей главе решен букет разнообразных задач, относящихся к исследованию каталитических ветвящихся случайных блужданий по \mathbb{Z}^d , когда множество катализаторов конечно или бесконечно и периодически. Последняя модель также называется ветвящимися случайными блужданиями с периодически расположенными источниками ветвления (в случае, когда характеристики всех источников ветвления одинаковы) или ветвящимися случайными блужданиями на периодических графах (в случае, когда характеристики ветвления могут быть различными и тоже варьируются периодически).

Прежде всего, для надкритических каталитических ветвящихся случайных блужданий по \mathbb{Z} доказана сильная предельная теорема о нормированном величинной u моменте первого выхода популяции за уровень u . Далее автор переходит к простым симметричным и несимметричным случайным блужданиям по \mathbb{Z} , которые начинаются в нуле, и ноль является единственной точкой катализа. В этом случае доказано, что максимальное отклонение вправо от начала координат имеет предельное распределение и описана его асимптотика. Теоремы для симметричного случая описывают новые эффекты и представляют основной интерес. Они кардинально улучшают соответствующие утверждения для ветвящихся случайных блужданий по \mathbb{Z} , полученные ранее другими авторами.

В разделе 3.3 автор завершает исследование общих и локальных численностей частиц в каталитических ветвящихся случайных блужданиях по \mathbb{Z}^d с одним катализатором в докритическом случае. Описаны асимптотики первых моментов, вероятностей наличия частиц в узлах и получены условные предельные теоремы. Е.Вл. Булинской удается отказаться от конечности вторых моментов, что можно перенести и на критический случай. Критический при конечности вторых моментов и надкритический случаи с одним источником ветвления были описаны ранее с использованием операторного подхода. В диссертационной работе доказательство основано на представлении комплекснозначных мер в терминах банаховых алгебр и на тауберовых теоремах для производных преобразований Лапласа.

В работах М.В. Платоновой, К.С. Рядовкина было определено ветвящееся случайное блуждание с периодическими источниками ветвления и установлено асимптотическое разложение для средних локальных численностей частиц в момент времени $t \rightarrow \infty$. В разделе 3.4 автором описано поведение фронта распространения процесса в случае, когда хвосты распределения скачка случайного блуждания удовлетворяют условию Крамера. Благодаря введению вспомогательного процесса проблема свелась к исследованию в некотором смысле однородного в пространстве процесса. Это позволило свести поставленную задачу к уже решенной для обще-

го ветвящегося случайного блуждания. В результате доказана теорема, утверждающая асимптотически линейное (во времени) распространение популяции частиц в пространстве, и найден предельный вид облака частиц с линейно нормированными координатами.

В последнем разделе данной главы исследовано распространение популяции частиц в модели ВСВ с бесконечным множеством катализаторов, имеющим периодическую структуру, причем интенсивности катализаторов могут быть различными. Получены теоремы о пространственном распространении облака частиц с ростом времени. При этом не используются методы спектральной теории операторов, как в работах М.В. Платоновой, К.С. Рядовкина об асимптотическом по времени поведении локальных численностей частиц для этой модели, и поэтому не предполагается симметричность случайного блуждания.

В заключении тезисно перечислены основные результаты работы.

Все результаты, выносимые на защиту, новые, получены лично автором, опубликованы в ведущих рецензируемых теоретико-вероятностных изданиях, обладают внутренним единством, снабжены подробными удобными для чтения доказательствами, доложены на 20 международных и всероссийских конференциях высокого уровня, докладывались на 5 научных семинарах профильных учреждений. За цикл работ, на которых основана докторская диссертация Е.Вл. Булинской, она была в 2022 году признана победителем Первого Всероссийского конкурса по математике в номинации “Молодой ученый до 35 лет”. Для решения взаимосвязанных сложных задач потребовалось сочетание широкого спектра теоретико-вероятностных и аналитических методов из теорий восстановления и больших уклонений, мартингальная замена меры и метод каплинга, преобразования Лапласа и Лежандра–Фенхеля, выпуклый анализ и представление комплекснозначных мер в терминах банаховых алгебр, тауберовы теоремы, результаты о связи между дробными моментами случайных величин и дробными производными их преобразований Лапласа, анализ решений систем нелинейных интегральных уравнений. Автореферат соответствует содержанию диссертационной работы.

Существенных замечаний по изложению и оформлению диссертационного исследования нет. Отмечу лишь шероховатости в формулировке теоремы 8 из главы 1. Во второй и третьей главах в утверждениях теорем присутствует текст “с мальтусовским параметром $\nu > 0$ ”, если имеется такая зависимость. В формулировке теоремы 8 тоже желательно наличие этого текста. Он отразил бы зависимость $\varphi(\dots)$ в соотношениях (1.76) и (1.78) от ν . Иначе у $\varphi(\dots)$ формально должен присутствовать аргумент ν . Однако, это не влияет на суть утверждения и его доказательство.

На основании вышесказанного можно сделать вывод, что в представ-

ленной научно-квалификационной работе разработаны теоретические положения, совокупность которых является крупным научным достижением. Докторская диссертационная работа Булинской Екатерины Владимировны “Вероятностно-геометрические свойства пространственного ветвящегося случайного блуждания” отвечает всем требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.4 теория вероятностей и математическая статистика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 “Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова”, и оформлена согласно требованиям “Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова”. Считаю, что Булинская Екатерина Владимировна безусловно заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.4 теория вероятностей и математическая статистика.

Официальный оппонент

В.А. Топчий

Топчий Валентин Алексеевич

доктор физико-математических наук (специальность 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика), профессор, ведущий научный сотрудник Лаборатории комбинаторных и вычислительных методов алгебры и логики ОФ ИМ СО РАН,
e-mail: topchij@ofim.oscsbras.ru , тел. +7(3812) 23-65-67.

Омский филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, 644043, г. Омск, ул. Певцова, 13,
e-mail: admin@ofim.oscsbras.ru , тел. +7(3812) 23-65-67.

Подпись ведущего научного сотрудника Омского филиала Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, д.ф.-м.н., профессора В.А. Топчия

Директор ОФ ИМ СО РАН
д.ф.-м.н., доцент
Еремеев Антон Валентинович
26.08.2024 года