

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Мещеряков Николай Павлович

Теоремы о неперенормировке в $\mathcal{N} = 1$
суперсимметричных теориях Янга–Миллса

1.3.3. – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук

Степаньянц Константин Викторович

Москва – 2022

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Двухпетлевая проверка теоремы о перенормировке тройных духово-калибровочных вершин	27
1.1. Суперполевая формулировка $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий Янга–Миллса	27
1.2. Квантование теории и ее регуляризация методом высших кова- риантных производных	30
1.3. Перенормировка	36
1.4. Теорема о перенормировке тройных духово-калибровочных вершин	40
1.5. Стратегия двухпетлевой проверки конечности тройных духово- калибровочных вершин	42
1.6. Двухпетлевая проверка конечности $\bar{c}^+ V c$ -вершины	43
Глава 2. Вычисление трехпетлевых вкладов духов Фадде- ева–Попова в β-функцию с помощью модифицированных ва- куумных суперграфов	60
2.1. NSVZ β -функция и ее новая форма	60
2.2. Метод вычисления вкладов в β -функцию на основе модифициро- ванных вакуумных суперграфов	67
2.3. Применение метода модифицированных вакуумных суперграфов для вычисления вкладов духов Фаддеева–Попова в β -функцию в трехпетлевом приближении	69
Глава 3. Двухпетлевая перенормировка духов Фаддеева–Попова и проверка духовой части новой формы NSVZ соотношения .	77

3.1.	Двухпетлевые вклады в аномальную размерность духов Фаддеева–Попова	77
3.2.	Проверка новой формы NSVZ соотношения для суперграфов, содержащих пропагаторы духов Фаддеева–Попова	79
3.3.	Двухпетлевая аномальная размерность духов Фаддеева–Попова .	83
Глава 4. Применение метода модифицированных вакуумных суперграфов для вычисления трехпетлевого вклада в β-функцию $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики с N_f ароматами и проверка NSVZ соотношения		
4.1.	Суперполевая формулировка $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики с N_f ароматами, регуляризованной высшими производными	88
4.2.	NSVZ соотношение и метод модифицированных вакуумных суперграфов для вычисления вкладов в β -функцию $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики с N_f ароматами . . .	92
4.3.	Трехпетлевой вклад в β -функцию, вычисленный методом модифицированных вакуумных суперграфов	95
4.4.	Проверка NSVZ соотношения для рассматриваемых вкладов в случае $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики с N_f ароматами	98
Заключение		105
Приложение А. Детали вычислений двухпетлевых квантовых поправок к тройной духово-калибровочной вершине		
		109
Приложение Б. Выражения для функций f, g и h, входящих в однопетлевой поляризационный оператор квантового калибровочного суперполя		
		112

Приложение В. Некоторые вклады в β -функцию и функцию G_c в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса	115
Приложение Г. Некоторые вклады в β -функцию и функцию G в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамике с N_f ароматами	119
Список литературы	124

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования

Один из наиболее элегантных вариантов расширения Стандартной модели, предоставляющий механизмы устранения многих ее недостатков [1–6], основан на суперсимметрии [7–10]. Суперсимметричные обобщения Стандартной модели позволяют не только получить в ряде случаев гораздо более точное соответствие с предсказаниями теорий Великого объединения (в некоторых из которых время жизни протона достаточно велико и находится вне пределов современных экспериментальных возможностей его измерения), но и решить проблему тонкой подстройки массы бозона Хиггса благодаря сокращению квадратичных расходимостей. Прямые эксперименты по обнаружению суперпартнеров на Большом адронном коллайдере к настоящему времени не увенчались успехом, ставя под сомнение идею низкоэнергетической (на масштабе порядка $\mathcal{O}(1)$ ТэВ) суперсимметрии, тем не менее их активные поиски продолжаются. В конечном счете суперсимметричная феноменология довольно разнообразна и сильно зависит от конкретной модели, в том числе и от механизма нарушения суперсимметрии, и полученные к настоящему времени ограничения не полностью закрывают возможные области пространства параметров моделей с низкоэнергетической реализацией суперсимметрии.

Переходя к более подробному обсуждению характерных теоретических особенностей калибровочных теорий с глобальной суперсимметрией (вопросы, связанные с супергравитацией, не рассматриваются в данной работе), прежде всего отметим наличие т.н. теорем о неперенормировке, выражающих нетривиальную взаимосвязь между расходимостями в таких теориях. Пожалуй, самым известным примером является конечность $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричных теорий Янга–Миллса во всех порядках теории возмущений [11–15]. В свою очередь, небелевы калибровочные теории с $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией имеют ультрафиолетовые расходимости только в однопетлевом приближении [12, 15, 16]. Обратим

внимание, что суперсимметричные обобщения Стандартной модели строятся, как правило, на основе теорий Янга–Миллса с $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрией, имеющих более приемлемый с феноменологической точки зрения состав полей, чем теории с $\mathcal{N} > 1$.

В $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теориях Янга–Миллса теоремы о перенормировке также имеют место. Во-первых, известно, что суперпотенциал не получает расходящихся вкладов во всех порядках теории возмущений [17]. Это приводит к тому, что взаимосвязанными оказываются константы перенормировки киральных суперполей материи, масс и юкавских констант связи, стоящих в кубичном по киральным суперполям материи слагаемом лагранжиана. Во-вторых, тройные духово-калибровочные вершины, содержащие одну внешнюю линию квантового калибровочного суперполя и две внешние линии духовых суперполей Фаддеева–Попова, конечны в ультрафиолетовой области во всех порядках [18]. Как следствие, константы перенормировки квантового калибровочного суперполя, духов Фаддеева–Попова и калибровочной константы связи также взаимосвязаны. В-третьих, точная β -функция Новикова–Шифмана–Вайнштейна–Захарова (NSVZ) [19–22] устанавливает соотношение между перенормировкой калибровочной константы связи и киральных суперполей материи. В этом смысле она близка по содержанию к теоремам о перенормировке и поэтому может быть поставлена с ними в один ряд. Данная диссертация посвящена исследованию двух последних утверждений из вышперечисленных.

Отметим, что известны аналоги теоремы о перенормировке тройных духово-калибровочных вершин, справедливые в калибровке Ландау $\xi_0 = 0$, в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теориях Янга–Миллса, сформулированных в терминах компонентных полей в калибровке Весса–Зумино [23], и даже в несуперсимметричных теориях Янга–Миллса [24–26]. Они были проверены трехпетлевыми [23] и четырехпетлевыми вычислениями [27], соответственно. Уточним, что в данной диссертации исследуется именно утверждение, доказанное в работе [18] в формализме $\mathcal{N} = 1$ суперполей для случая общей ξ -калибровки.

Важным обстоятельством, от которого зависит выполнение теорем о перенормировке во всех порядках теории возмущений, является выбор подходящих перенормировочных предписаний. При этом желательно использовать инвариантную регуляризацию, не нарушающую симметрии теории на квантовом уровне, а также необходимо построить надлежащую схему вычитаний.

Вообще говоря, вопрос о способе инвариантной регуляризации суперсимметричных калибровочных теорий отнюдь не является простым [28]. Как известно, использование наиболее популярной (вследствие своего удобства для практических петлевых вычислений) размерной регуляризации [29–32] влечет за собой потерю инвариантности относительно преобразований суперсимметрии [33]. В то же время регуляризация посредством размерной редукции [34] довольно успешно применяется для вычислений в низших порядках теории возмущений [35]. Однако в достаточно высоких порядках она также может вызывать нарушение суперсимметрии [36–38] и поэтому не является оптимальным выбором при изучении всепетлевых соотношений, опирающихся на явную суперсимметричную инвариантность теории. Например, вычисления, проведенные с помощью размерной редукции в \overline{DR} -схеме в работах [39–42], свидетельствуют о том, что уже в третьем и четвертом порядках NSVZ соотношение не выполняется. Тем не менее, в этих случаях удалось специальным образом подобрать конечную перенормировку калибровочной константы связи так, чтобы восстановить справедливость NSVZ β -функции.

В целом, использование конечных перенормировок для восстановления NSVZ соотношения в каждом порядке теории возмущений представляется достаточно трудоемкой процедурой (и весьма нетривиальной из-за наличия некоторых схемно-независимых следствий [43, 44] NSVZ β -функции). Значительно более привлекательным вариантом является установление общих перенормировочных предписаний, обеспечивающих выполнение NSVZ соотношения во всех порядках, — т.н. всепетлевых NSVZ схем. Как оказалось, построение таких схем возможно в случае применения метода регуляризации высшими ковариантны-

ми производными.

Отметим, что высшие производные впервые были использованы для инвариантной регуляризации несуперсимметричных теорий в работах [45, 46]. Также следует обратить внимание на то, что данный метод не позволяет регуляризовать однопетлевые (под)расходимости и поэтому нуждается в дополнении. В связи с этим было предложено использовать несколько модифицированный метод Паули–Вилларса [47], предполагающий введение определенных детерминантов полей Паули–Вилларса в производящий функционал. В дальнейшем суперсимметричные обобщения метода высших ковариантных производных были сделаны на случай $\mathcal{N} = 1$ суперпространства в статьях [48, 49] и $\mathcal{N} = 2$ гармонического суперпространства [50] в статье [51].

В недавних работах [18, 52–54] регуляризация высшими ковариантными производными была использована для доказательства во всех порядках точной NSVZ β -функции $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий Янга–Миллса с простой калибровочной группой. (Для NSVZ β -функции $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики [55, 56] это было сделано ранее в статьях [57, 58].) Уточним, что речь идет о NSVZ соотношении для ренормгрупповых функций, заданных через голые константы связи, которые не зависят от схемы вычитаний при фиксированном выборе регуляризации [59]. С помощью теоремы о непрерывной нормировке тройных духово-калибровочных вершин NSVZ соотношение было записано в более удобной эквивалентной форме [18], связывающей некоторый L -петлевой вклад в β -функцию с $(L - 1)$ -петлевыми вкладами в аномальные размерности суперполей материи, духов Фаддеева–Попова и квантового калибровочного суперполя. Механизм данной связи основан на том, что β -функция, определенная через голые параметры, дается петлевыми интегралами от двойных полных производных по петлевым импульсам в случае применения регуляризации высшими ковариантными производными [52]. Присутствие безмассовых пропагаторов, на которые действуют двойные полные производные, приводит к появлению сингулярностей в подынтегральном выражении. Таким обра-

зом, задача о получении во всех порядках NSVZ β -функции, определенной в терминах голых параметров, сводится к задаче суммирования во всех петлях соответствующих сингулярных вкладов, идущих от безмассовых пропагаторов суперполей материи, духов Фаддеева–Попова и квантового калибровочного суперполя, и выражения результата в терминах соответствующих аномальных размерностей. Она была решена в работах [53, 54].

Необходимо отметить, что описанная выше факторизация интегралов, дающих β -функцию, в интегралы от двойных полных производных подтверждается явными вычислениями в низших порядках теории возмущений [60–62], выполненными с помощью регуляризации высшими ковариантными производными. Между тем при использовании регуляризации размерной редукцией соответствующие петлевые интегралы, вообще говоря, уже не имеют подобной структуры [63], и NSVZ соотношение для ренормгрупповых функций, определенных через голые константы связи, нарушается, начиная с трехпетлевого приближения [64] (см. также работу [65]).

Для доказательства NSVZ β -функции, определенной в терминах перенормированных констант связи, требуется построить схемы вычитаний, в которых она справедлива. В неабелевом случае всепетлевую NSVZ схему дает предписание HD+MSL [18, 54], которое означает регуляризацию теории методом высших ковариантных производных в сочетании с минимальными вычитаниями логарифмов [66, 67]. Это объясняется тем, что в HD+MSL схеме совпадают оба определения ренормгрупповых функций, заданных через перенормированные и через голые константы связи, при соответствующем переобозначении их аргументов [54, 59]. В частном случае абелевых $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий еще одну всепетлевую NSVZ схему, наряду с HD+MSL [59], дает схема вычитаний на массовой поверхности [68]. Кроме того, было показано, что и в абелевом [69], и в неабелевом [70, 71] случаях существует бесконечный набор NSVZ схем, связанных между собой конечными перенормировками.

Следует также обратить внимание на многочисленные полезные примене-

ния NSVZ β -функции. Например, при определенных условиях из нее следуют упоминавшиеся ранее теоремы о перенормировке для калибровочных теорий с расширенной суперсимметрией [72] (см. также [51, 73]). Более того, NSVZ β -функцию можно использовать для исследования условий конечности $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий [74, 75], а также теорий с мягко нарушенной $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрией [76, 77]. Знакомство с NSVZ β -функцией и идеями, на которых основано ее всепетлевое доказательство, может быть полезно при изучении некоторых NSVZ-подобных соотношений. К ним относится, к примеру, D -функция Адлера [78] в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой хромодинамике [79, 80] или соотношения, описывающие перенормировку масс калибрино в теориях с мягко нарушенной $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрией [81–83].

Кроме того, в работах [52, 84] был сформулирован новый метод вычисления вкладов в β -функцию $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий Янга–Миллса, регуляризованных высшими ковариантными производными. Он основан на вычислении вакуумных супердиаграмм, модифицированных вставкой некоторого суперполевого выражения, а также построении (по предложенному алгоритму) дифференциального оператора, содержащего двойные полные производные. В результате применения данного метода искомый вклад в β -функцию получается непосредственно в виде интегралов от двойных полных производных по петлевым импульсам. С практической точки зрения данный метод предполагает значительно меньший объем вычислений по сравнению со стандартным способом вычисления вкладов в β -функцию с помощью супердиаграмм с двумя внешними калибровочными линиями.

Необходимо отметить, что некоторые обсуждавшиеся выше новые соотношения и методы, на которых основано доказательство NSVZ β -функции во всех порядках, были проверены явными вычислениями лишь в самых простейших случаях. Вычисления, проведенные в данной диссертации, в некоторой степени восполняют этот пробел, предоставляя им существенно более нетривиальную проверку.

Например, утверждение о конечности тройных духово-калибровочных вершин ранее было проверено в общей ξ -калибровке с помощью суперполевых вычислений лишь в однопетлевом приближении [18]. К тому же явные проверки новой формы NSVZ соотношения, включающей аномальные размерности всех квантовых суперполей, не затрагивали вкладов духов Фаддеева–Попова в тех порядках, в которых важна схемная зависимость ренормгрупповых функций. В работе [66] (см. также [85]) однопетлевые вклады в аномальные размерности квантовых суперполей были сопоставлены с соответствующими двухпетлевыми вкладками в β -функцию. Это было сделано при использовании упрощенной версии регуляризации высшими производными, нарушающей BRST-инвариантность, в случае выбора калибровки Фейнмана $\xi_0 = 1$, в которой однопетлевая аномальная размерность духов Фаддеева–Попова равна 0. Более нетривиальные трехпетлевые проверки новой формы NSVZ β -функции были проведены в работах [61, 62], но также в калибровке Фейнмана и только для вкладов, содержащих юкавские константы связи.

В свою очередь, метод модифицированных вакуумных суперграфов для построения вкладов в β -функцию ранее был использован для вычисления двухпетлевой β -функции в общей ξ -калибровке в неабелевых $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теориях [84]. Частная проверка данного метода была осуществлена в статье [52], в которой трехпетлевые вклады в β -функцию, пропорциональные юкавским константам, были получены методом модифицированных вакуумных суперграфов (в калибровке Фейнмана) и затем сопоставлены с результатами стандартного вычисления, проведенного в работах [61, 62]. Аналогичная проверка в общей ξ -калибровке была выполнена в статье [86].

Цели и задачи работы

Диссертационное исследование посвящено изучению и явной проверке с помощью регуляризации высшими ковариантными производными ключевых утверждений и методов, на которых основано всепетлевое доказательство NSVZ β -функции в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теориях Янга–Миллса: теоремы о непе-

ренормировке тройных духово-калибровочных вершин, новой формы NSVZ соотношения, содержащей аномальные размерности всех квантовых суперполей, а также нового метода вычисления вкладов в β -функцию, основанного на вычислении модифицированных вакуумных суперграфов.

Для выполнения данных целей были поставлены следующие задачи:

1. Вычислить определенные двухпетлевые квантовые поправки к тройным духово-калибровочным вершинам при произвольном значении калибровочного параметра.
2. Выполнить суммирование всех двухпетлевых вкладов в одну из тройных духово-калибровочных вершин и проверить, является ли полученное суммарное выражение конечным в ультрафиолетовой области в общей ξ -калибровке.
3. Применить метод модифицированных вакуумных суперграфов, сформулированный в работе [52], для вычисления некоторых трехпетлевых вкладов духов Фаддеева–Попова в β -функцию $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий Янга–Миллса, регуляризованных высшими ковариантными производными.
4. Вычислить двухпетлевые вклады в аномальную размерность духов Фаддеева–Попова, идущие от суперграфов с двумя внешними линиями духов Фаддеева–Попова, которые графически получаются путем разрезания пропагаторов духов Фаддеева–Попова в трехпетлевых вакуумных суперграфах, рассмотренных в предыдущем пункте.
5. На уровне петлевых интегралов проверить, связаны ли полученные в двух предыдущих пунктах вклады в трехпетлевую β -функцию и двухпетлевую аномальную размерность духов Фаддеева–Попова так, как предписывает новая форма NSVZ соотношения для ренормгрупповых функций, заданных через голые константы связи.

6. С помощью метода модифицированных вакуумных суперграфов вычислить определенный трехпетлевой вклад в β -функцию в общей ξ -калибровке для случая $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики.
7. Вычислить двухпетлевой вклад в аномальную размерность суперполей материи, идущий от двухточечных супердиаграмм, которые графически получаются посредством разрезания пропагаторов суперполей материи в трехпетлевом вакуумном суперграфе, рассмотренном в пункте 6.
8. На уровне петлевых интегралов проверить абелеву форму NSVZ соотношения для найденных вкладов в трехпетлевую β -функцию и двухпетлевую аномальную размерность суперполей материи, определенных в терминах голой константы связи.

Методология и методы исследований

В диссертации применяется хорошо разработанный аппарат квантовой теории поля. Формулировка теорий дается в терминах суперполей в $\mathcal{N} = 1$ суперпространстве, и все вычисления проводятся в явно $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричном виде. Метод континуального интеграла используется для построения теории возмущений. Регуляризация осуществляется методом высших (ковариантных) производных, дополненным введением инвариантных детерминантов Паули–Вилларса в производящий функционал для регуляризации однопетлевых (под)расходимостей. Для вычисления супердиаграмм применяются правила Фейнмана в $\mathcal{N} = 1$ суперпространстве и известная алгебра суперсимметричных ковариантных производных (см., например, [87, 88]).

Положения, выносимые на защиту

1. С помощью регуляризации высшими ковариантными производными вычислен в общей ξ -калибровке большой набор двухпетлевых квантовых поправок к тройным духово-калибровочным вершинам, содержащим одну

внешнюю линию квантового калибровочного суперполя и две внешние линии духов Фаддеева–Попова, в наиболее общих перенормируемых $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теориях Янга–Миллса с простой калибровочной группой.

2. Выполнено суммирование всех необходимых вкладов в одну из тройных духово-калибровочных вершин в рассматриваемом порядке и показано, что теорема о неперенормировке для тройных духово-калибровочных вершин выполняется в двухпетлевом приближении при произвольном значении калибровочного параметра.
3. С помощью метода модифицированных вакуумных суперграфов, предложенного в работе [52], вычислен ряд трехпетлевых вкладов духов Фаддеева–Попова в β -функцию $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий Янга–Миллса, регуляризованных высшими ковариантными производными.
4. Вычислены двухпетлевые вклады в аномальную размерность духов Фаддеева–Попова от двухточечных супердиаграмм, графически получающихся посредством разрезания пропагаторов духов Фаддеева–Попова в трехпетлевых вакуумных суперграфах, рассмотренных в предыдущем пункте.
5. На уровне петлевых интегралов показано, что полученные вклады в трехпетлевую β -функцию и двухпетлевую аномальную размерность духов Фаддеева–Попова связаны так, как предписывает NSVZ β -функция, представленная в терминах аномальных размерностей всех квантовых суперполей.
6. В $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамике с N_f ароматами, регуляризованной высшими производными, вычислен некоторый трехпетлевой вклад в β -функцию в общей ξ -калибровке на основе метода модифицированных вакуумных суперграфов.

7. Вычислены двухпетлевые вклады в аномальную размерность суперполей материи в общей ξ -калибровке от двухточечных суперграфов, графически получающихся посредством разрезания внутренних линий суперполей материи в трехпетлевом вакуумном суперграфе, рассмотренном в предыдущем пункте.
8. Для полученных вкладов в трехпетлевую β -функцию и двухпетлевую аномальную размерность суперполей материи проверено абелево NSVZ соотношение на уровне интегралов по петлевым импульсам.

Научная новизна

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми.

Достоверность результатов

Все результаты, полученные в диссертации, находятся в полном соответствии с известными и надежно установленными общими положениями квантовой теории поля, в частности, с теорией перенормировок и ренормализационной группы.

Отметим, что явная проверка новой формы NSVZ соотношения предполагает сопоставление на ее основе результатов независимых вычислений двух типов ренормгрупповых функций: аномальных размерностей квантовых суперполей и β -функции, которая в рассматриваемом случае должна иметь вполне определенную структуру. А именно, она выражается в виде интегралов от двойных полных производных по петлевым импульсам. Таким образом, специфика данной проверки довольно сильно ограничивает возможность ошибки в случае совпадения сравниваемых результатов.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертационное исследование предоставляет многочисленные примеры вычислений различных квантовых поправок в формализме $\mathcal{N} = 1$ суперполей при использовании регуляризации высшими ковариантными производными. Во-первых, с их помощью был найден полный двухпетлевой вклад в одну

из тройных духово-калибровочных вершин в пределе нулевых внешних импульсов [89, 90]. Это вычисление подтвердило справедливость теоремы о перенормировке тройных духово-калибровочных вершин в общей ξ -калибровке в рассматриваемом приближении. Напомним, что утверждение об ультрафиолетовой конечности данных вершин лежит в основе всепетлевого доказательства NSVZ β -функции в неабелевом случае, хотя, безусловно, оно представляет и самостоятельную ценность, поскольку раскрывает неочевидную взаимосвязь между перенормировкой калибровочной константы связи, духов Фаддеева–Попова и квантового калибровочного суперполя в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теориях Янга–Миллса.

Во-вторых, результаты, полученные в данной диссертации, были использованы для вычисления двухпетлевой аномальной размерности духов Фаддеева–Попова в общей ξ -калибровке [91], а также полного трехпетлевого вклада духов Фаддеева–Попова в β -функцию [92] на основе метода модифицированных вакуумных суперграфов [52]. В свою очередь, это позволило провести крайне нетривиальную проверку духового сектора новой формы NSVZ соотношения в том порядке теории возмущений, в котором важна зависимость от схемы перенормировки.

В-третьих, результаты диссертации были использованы для проверки метода модифицированных вакуумных суперграфов на примере вычисления в общей ξ -калибровке трехпетлевой β -функции в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамике с N_f ароматами [93]. Выражение, построенное на основе данного метода, полностью совпало с выражением для трехпетлевой β -функции, которое было вычислено ранее в калибровке Фейнмана $\xi_0 = 1$ в случае $N_f = 1$ стандартным способом, с помощью рассмотрения соответствующих супердиаграмм с двумя внешними линиями калибровочного суперполя (см. работу [94] и ссылки в ней). Кроме того, в общей ξ -калибровке была вычислена двухпетлевая аномальная размерность суперполей материи. Данные результаты позволили явным образом продемонстрировать справедливость абеле-

левой формы NSVZ соотношения в рассматриваемом приближении.

Перечисленные выше общие вычисления также обсуждаются в диссертации, поскольку они служат важными примерами применения результатов, выносимых на защиту, и помогают лучше понять, какое место занимает личный вклад автора диссертации в совместных работах [89–93].

В перспективе, полученные в диссертации результаты могут служить основой для различных обобщений. Например, может быть рассмотрен случай многозарядных теорий, к тому же для этого направления уже имеется ряд серьезных теоретических результатов [71]. В целом, исследования теорем о перенормировке в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теориях могут помочь при изучении конечных теорий с нерасширенной суперсимметрией, а также с мягко нарушенной суперсимметрией.

Апробация результатов

Часть результатов, полученных в диссертации, докладывалась автором на конференциях:

1. «Двухпетлевая перенормировка духов Фаддеева–Попова в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теориях, регуляризованных высшими ковариантными производными», XXV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2018», Москва, Россия, 9 – 13 апреля 2018.
2. «Использование нового метода для вычисления вкладов духов Фаддеева–Попова в β -функцию $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий Янга–Миллса в трехпетлевом приближении», XXVII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2020», Москва, Россия, 10 – 27 ноября 2020.

Также часть результатов работы была представлена в докладах соавторов совместных публикаций (Новгородцева С. В. и Кузьмичева М. Д.) на конференциях:

1. «Two-loop anomalous dimension of the Faddeev–Popov ghosts in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric theories», 19th Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics, Москва, Россия, 22 – 28 августа 2019.
2. «Трехпетлевая бета-функция для $\mathcal{N} = 1$ SQED в неминимальной калибровке», XXVII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2020», Москва, Россия, 10 – 27 ноября 2020.

Публикации

Результаты диссертации были опубликованы в ведущих мировых научных журналах, индексируемых в базах Web of Science и Scopus:

1. Kazantsev A. E., Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shirokov I. E., Skoptsov M. B. and Stepanyantz K. V. Two-loop renormalization of the Faddeev–Popov ghosts in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories regularized by higher derivatives // JHEP. — 2018. — Vol. 06. — P. 020.
2. Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shirokov I. E. and Stepanyantz K. V. Three-loop contribution of the Faddeev–Popov ghosts to the β -function of $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories and the NSVZ relation // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Vol. 79, no. 9. — P. 809.
3. Aleshin S. S., Durandina I. S., Kolupaev D. S., Korneev D. S., Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Petrov I. A., Shatalova V. V., Shirokov I. E., Shirokova V. Y., and Stepanyantz K. V. Three-loop verification of a new algorithm for the calculation of a β -function in supersymmetric theories regularized by higher derivatives for the case of $\mathcal{N} = 1$ SQED // Nucl. Phys. B. — 2020. — Vol. 956. — P. 115020.
4. Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shirokov I. E., Stepanyantz K. V. Finiteness of the two-loop matter contribution to the triple

gauge-ghost vertices in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories regularized by higher derivatives // Phys. Rev. D. — 2021. — Vol. 104, no. 2. — P. 025008.

5. Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shatalova V. V., Shirokov I. E., Stepanyantz K. V. Finiteness of the triple gauge-ghost vertices in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories: the two-loop verification // Eur. Phys. J. C. — 2022. — Vol. 82, no. 1. — P. 69.

Также были сделаны публикации в тезисах докладов:

1. Казанцев А. Е., Кузьмичев М. Д., Мещеряков Н. П., Новгородцев С. В., Скопцов М. Б., Широков И. Е. Двухпетлевая перенормировка духов Фаддеева-Попова в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теориях, регуляризованных высшими ковариантными производными // В электронном сборнике материалов XXV Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2018», секция Физика, подсекция Теоретическая физика. / Отв.ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. — Электрон. текстовые дан. (1500 Мб.) — М.: МАКС Пресс. — 2018. — Режим доступа: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2018/index.htm, свободный.
2. Kazantsev A. E., Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shirokov I. E., Skoptsov M. B. and Stepanyantz K. V. Two-loop anomalous dimension of the Faddeev-Popov ghosts in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric theories // Particle Physics at the Year of 150th Anniversary of the Mendeleev’s Periodic Table of Chemical Elements / Ed. by Studenikin A. I. — Proceedings of the 19th Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics: Moscow, Russia, August 22–28, 2019. — Singapore: World Scientific Pub., 2021. — P. 544–546.
3. Кузьмичев М. Д., Мещеряков Н. П., Новгородцев С. В., Широков И. Е. Использование нового метода для вычисления вкладов духов Фаддеева-Попова в β -функцию $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий Янга-Миллса в трехпетлевом приближении // В электронном сборнике материа-

лов XXVII Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2020», секция Физика, подсекция Теоретическая физика. / Отв.ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. — Электрон. текстовые дан. (1500 Мб.) — М.: МАКС Пресс. — 2020. — Режим доступа: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2020/index.htm, свободный.

4. Дурандина И. С., Кузьмичев М. Д., Мещеряков Н. П., Новгородцев С. В., Петров И. А., Шаталова В. В., Широков И. Е. Трехпетлевая бета-функция для $\mathcal{N} = 1$ SQED в неминимальной калибровке // В электронном сборнике материалов XXVII Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2020», секция Физика, подсекция Теоретическая физика. / Отв.ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. — Электрон. текстовые дан. (1500 Мб.) — М.: МАКС Пресс. — 2020. — Режим доступа: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2020/index.htm, свободный.

Личный вклад автора

Результаты данной диссертации были опубликованы в перечисленных выше статьях с соавторами. Специфика данной области исследований предполагает высокую трудоемкость вычислений, и поэтому некоторые общие задачи, требующие получения *полного выражения* для той или иной функции Грина в рассматриваемом порядке теории возмущений, были разбиты на непересекающиеся части, предполагающие вычисления *определенных вкладов*. Каждый из соавторов совместных публикаций независимо выполнял свою часть вычислений (см. работы [95–99]), и после объединения всех результатов были получены искомые полные выражения. Автор данной диссертации вычислял набор суперграфов, являющийся одним из наиболее сложных, поэтому его вклад во все совместные работы является существенным, а в публикации, посвященные двухпетлевой проверке теоремы о неперенормировке тройных духово-калибровочных вершин, — главным. При этом в основе диссертационного исследования лежит исключительно личный вклад автора, и все результаты, выносимые на

защиту, получены автором самостоятельно. В тех местах диссертации, где идет обсуждение общих итогов вычислений, полученных совместно с соавторами, это всегда отдельно оговаривается и приводятся необходимые ссылки.

Структура и объем диссертации

Диссертация включает введение, 4 главы основного текста, заключение, 4 приложения и список литературы. Общий объем диссертации составляет 135 страниц, количество рисунков — 17. Список литературы содержит 127 наименований.

Краткое содержание

Глава 1 посвящена двухпетлевой проверке теоремы о неперенормировке тройных духово-калибровочных вершин, содержащих одну внешнюю линию квантового калибровочного суперполя и две внешние линии суперполей духов Фаддеева–Попова.

В параграфе **1.1** рассматривается формулировка наиболее общих перенормируемых $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий Янга–Миллса с простой калибровочной группой в формализме $\mathcal{N} = 1$ суперпространства.

В параграфе **1.2** описывается квантование данных теорий с использованием метода фонового (супер)поля, а также их инвариантная регуляризация методом высших ковариантных производных, дополненным добавлением детерминантов Паули–Вилларса в производящий функционал.

Основные аспекты перенормировки рассматриваемых теорий описываются в параграфе **1.3**. В частности, вводятся определения констант перенормировки и рассматривается структура части эффективного действия, квадратичной по суперполям.

В параграфе **1.4** приводятся основные сведения о тройных духово-калибровочных вершинах и обсуждается теорема об их ультрафиолетовой конечности.

В параграфе **1.5** обосновываются некоторые упрощения, которые в дальнейшем используются при проведении двухпетлевой проверки теоремы о перенормировке тройных духово-калибровочных вершин. Принимая во внимание пе-

ренормируемость рассматриваемых теорий, достаточно вычислить, например, вклады в функцию \mathcal{S} , содержащую определенную часть квантовых поправок к вершине $\bar{c}^+ V c$ (где V обозначает квантовое калибровочное суперполе, а c и \bar{c}^+ — суперполя духов и антидухов Фаддеева–Попова, соответственно), в пределе нулевых внешних импульсов.

Соответствующие супердиаграммы, которые дают вклады порядка $\mathcal{O}(e_0^4)$ в функцию \mathcal{S} , рассматриваются в параграфе **1.6**. Для удобства вся совокупность исследуемых супердиаграмм разделяется на пять групп, и далее последовательно обсуждаются результаты вычислений супердиаграмм из каждой группы [89, 90]. Попутно приводятся выражения для пропагаторов и вершин, которые были использованы при вычислении супердиаграмм. Для каждой из пяти групп супердиаграмм вычисляются суммарные вклады в функцию \mathcal{S} в пределе нулевых внешних импульсов. Общий суммарный вклад оказывается равным 0. С учетом аргументов, изложенных в параграфе 1.5, это позволяет сделать вывод о том, что тройные духово-калибровочные вершины являются конечными в ультрафиолетовой области в рассматриваемом порядке теории возмущений при произвольном значении калибровочного параметра.

В **главе 2** рассматривается новый метод вычисления вкладов в β -функцию, основанный на вычислении модифицированных вакуумных суперграфов, для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий Янга–Миллса, регуляризованных высшими ковариантными производными. Необходимо отметить, что имеется в виду β -функция, определенная в терминах голых констант связи.

Определения ренормгрупповых функций в терминах голых параметров и в терминах перенормированных параметров даются в параграфе **2.1**. Также в нем обсуждается NSVZ β -функция и основные идеи, на которые опирается ее всепетлевое доказательство. В частности, рассматривается новая форма NSVZ соотношения, которая связывает β -функцию не только с аномальной размерностью суперполей материи, но и с аномальными размерностями квантового калибровочного суперполя и духов Фаддеева–Попова. Кроме того, описывается

графическая интерпретация новой формы NSVZ соотношения, а также механизм ее пертурбативного возникновения, который основан на факторизации петлевых интегралов, дающих β -функцию, в интегралы от двойных полных производных (в случае использования регуляризации высшими ковариантными производными). Также приводятся основные сведения о HD+MSL схеме вычитаний, которая является примером всепетлевой NSVZ схемы в неабелевом случае.

В параграфе **2.2** формулируется метод вычисления ($L \geq 2$)-петлевых вкладов в β -функцию, заданную в терминах голых параметров, с помощью модифицированных вакуумных суперграфов. В результате его применения искомым вклад в β -функцию получается непосредственно в виде петлевых интегралов от двойных полных производных.

В параграфе **2.3** метод модифицированных вакуумных суперграфов используется для вычисления некоторых трехпетлевых вкладов в β -функцию, идущих от суперграфов с петлей духов Фаддеева–Попова, в общей ξ -калибровке.

Глава 3 посвящена проверке духовой части новой формы NSVZ соотношения для вкладов рассматриваемых супердиаграмм и применению полученных результатов в контексте общих вычислений, выполненных совместно с соавторами: полной трехпетлевой проверки духовой части новой формы NSVZ соотношения [92], а также вычисления двухпетлевой аномальной размерности духов Фаддеева–Попова [91].

В параграфе **3.1** обсуждаются результаты вычисления двухпетлевых вкладов в аномальную размерность духов Фаддеева–Попова от двухточечных супердиаграмм, образующихся в результате разрезания внутренних линий духов Фаддеева–Попова в трехпетлевых вакуумных суперграфах, рассмотренных в параграфе 2.3.

В параграфе **3.2** показывается, что вычисленные в параграфе 2.3 трехпетлевые вклады в β -функцию связаны с найденными в параграфе 3.1 двухпет-

левыми вкладами в аномальную размерность духов Фаддеева–Попова так, как предписывает новая форма NSVZ соотношения. Также в нем рассматривается применение полученных результатов в контексте полной трехпетлевой проверки духовой части новой формы NSVZ соотношения.

В параграфе **3.3** обсуждается вычисление двухпетлевой аномальной размерности духов Фаддеева–Попова (в общей ξ -калибровке) как в случае ее определения через голые параметры, так и в случае ее определения в терминах перенормированных параметров.

В **главе 4** рассматривается применение метода модифицированных вакуумных суперграфов для вычисления вкладов в β -функцию в случае $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики с N_f ароматами, регуляризованной высшими производными.

В параграфе **4.1** $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная квантовая электродинамика с N_f ароматами формулируется в безмассовом пределе в терминах $\mathcal{N} = 1$ суперполей. Для ее регуляризации используется метод высших производных, дополненный введением детерминантов Паули–Вилларса в производящий функционал. В этом же разделе приводятся основные сведения о перенормировке данной теории.

В параграфе **4.2** рассматривается абелева форма NSVZ соотношения, а также адаптация метода вычисления вкладов в β -функцию с помощью модифицированных вакуумных суперграфов для абелева случая.

В параграфе **4.3** обсуждается применение метода модифицированных вакуумных суперграфов для вычисления некоторого трехпетлевого вклада в β -функцию в общей ξ -калибровке. В нем также содержатся необходимые выражения для пропагаторов и вершин.

В параграфе **4.4** приводится результат вычисления двухпетлевого вклада в аномальную размерность суперполей материи от двухточечной супердиаграммы, получающейся путем разрезания петли материи в трехпетлевом вакуумном суперграфе, рассмотренном в параграфе 4.3. Затем на уровне петлевых инте-

гралов показывается, что вычисленные вклады в ренормгрупповые функции действительно связаны абелевым NSVZ соотношением. Суммирование полученных вкладов с другими необходимыми результатами [93] подтверждает справедливость NSVZ соотношения в трехпетлевом приближении. При этом итоговые выражения для входящих в него ренормгрупповых функций являются калибровочно независимыми. В частности, полученное выражение для трехпетлевой β -функции совпадает с результатом, найденным ранее стандартным способом в частном случае $N_f = 1$ при выборе калибровки Фейнмана (см., например, работу [94] и ссылки в ней).

В **Заключении** подводятся итоги проведенного исследования и перечисляются основные полученные результаты.

В **Приложении А** обсуждаются некоторые детали вычислений квантовых поправок к тройной духово-калибровочной вершине $\bar{c}^+ V c$, идущих от супердиаграмм из первой группы (определенной в параграфе 1.6), которые вычислял автор диссертации.

В **Приложении Б** приводятся выражения для функций, определяющих поляризационный оператор квантового калибровочного суперполя в однопетлевом приближении [100]. Кроме того, в нем записаны результаты вычисления некоторых интегралов, содержащих эти функции, которые применяются при вычислении двухпетлевой аномальной размерности духов Фаддеева–Попова в параграфе 3.3.

В **Приложении В** собраны выражения для вкладов в β -функцию и двухточечную функцию Грина духов Фаддеева–Попова (в пределе нулевого внешнего импульса), которые были вычислены в работах [91, 92]. Данные выражения используются в параграфах 3.2 и 3.3 в контексте обсуждения результатов общих вычислений, посвященных полной трехпетлевой проверке духовой части новой формы NSVZ β -функции, а также получению двухпетлевой аномальной размерности духов Фаддеева–Попова.

Приложение Г содержит выражения для некоторых вкладов в

β -функцию и двухточечную функцию Грина суперполей материи (в пределе нулевого внешнего импульса) $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики с N_f ароматами. Они были вычислены при произвольном значении калибровочного параметра на уровне петлевых интегралов в работе [93]. Данные выражения используются в параграфе 4.4 при обсуждении трехпетлевой проверки NSVZ соотношения в абелевом случае.

Глава 1

Двухпетлевая проверка теоремы о неперенормировке тройных духово-калибровочных вершин

1.1. Суперполевая формулировка $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий Янга–Миллса

Данная глава посвящена явной проверке в двухпетлевом приближении теоремы о неперенормировке тройных духово-калибровочных вершин, которые содержат две внешние линии духов Фаддеева–Попова и одну внешнюю линию квантового калибровочного суперполя. Согласно этой теореме указанные вершины конечны в ультрафиолетовой области во всех порядках теории возмущений при произвольном значении калибровочного параметра. Данное утверждение было доказано в работе [18] для неабелевых $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий, регуляризованных BRST-инвариантной версией метода высших ковариантных производных, при использовании суперполевого формализма. Напомним, что координатами $\mathcal{N} = 1$ суперпространства являются (x^μ, θ) , где x^μ — координаты пространства Минковского, метрика которого в наших обозначениях равна $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, а θ — антикоммутирующий майорановский спинор. В данной диссертации также будет рассматриваться формулировка $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий именно в формализме $\mathcal{N} = 1$ суперпространства, поскольку это позволяет сохранить суперсимметрию в явном виде на всех стадиях вычислений.

Действие наиболее общей перенормируемой $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с простой калибровочной группой G имеет вид

$$S = \frac{1}{2e_0^2} \text{Re tr} \int d^4x d^2\theta W^a W_a + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^{*i} (e^{2V})_i{}^j \phi_j +$$

$$+ \left(\int d^4x d^2\theta \left(\frac{1}{4} m_0^{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} \lambda_0^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \right) + \text{к.с.} \right). \quad (1.1)$$

В этом выражении V обозначает эрмитово калибровочное суперполе, ϕ_i — киральные суперполя материи в некотором представлении R группы G , W_a — суперсимметричная напряженность калибровочного суперполя, которая определяется равенством

$$W_a = \frac{1}{8} \bar{D}^2 (e^{-2V} D_a e^{2V}), \quad (1.2)$$

где $\bar{D}^2 \equiv \bar{D}^{\dot{a}} \bar{D}_{\dot{a}}$, и в наших обозначениях a и \dot{a} — правый и левый спинорный индекс, соответственно, причем над левыми спинорами будем ставить черту. Кроме того, в выражении (1.1) константы e_0 , m_0^{ij} и λ_0^{ijk} обозначают голые величины заряда, массовой матрицы и юкавских констант, соответственно.

Внутри W_a калибровочное суперполе раскладывается по генераторам фундаментального представления t^A по формуле $V = e_0 V^A t^A$, в то время как во втором слагаемом действия (1.1) аналогичное разложение уже будет проводиться по генераторам T^A представления R , т.е. $V = e_0 V^A T^A$. Коэффициенты V^A в этих разложениях являются вещественными суперполями, а генераторы удовлетворяют соотношениям

$$\text{tr}(t^A t^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB}, \quad (1.3)$$

$$\text{tr}(T^A T^B) = T(R) \delta^{AB}, \quad (1.4)$$

$$(T^A T^A)_i^j = C(R)_i^j, \quad (1.5)$$

где величина $C(R)_i^j$ соответствует квадратичному оператору Казимира в представлении R , а $2T(R)$ — индексу Дынкина данного представления. В присоединенном представлении генераторы выражаются через структурные константы f^{ABC} в соответствии с формулой

$$(T_{Adj}^A)_B^C = -i f^{ABC}. \quad (1.6)$$

Квадратичный оператор Казимира C_2 в присоединенном представлении может быть определен как

$$\text{tr}(T_{Adj}^A T_{Adj}^B) = f^{ACD} f^{BCD} = C_2 \delta^{AB}. \quad (1.7)$$

Будем считать, что голые массы и юкавские константы удовлетворяют условиям

$$m_0^{ik} (T^A)_k{}^j + m_0^{kj} (T^A)_k{}^i = 0; \quad (1.8)$$

$$\lambda_0^{ijm} (T^A)_m{}^k + \lambda_0^{imk} (T^A)_m{}^j + \lambda_0^{mjk} (T^A)_m{}^i = 0. \quad (1.9)$$

В этом случае действие (1.1) является инвариантным относительно калибровочных преобразований

$$\phi_i \rightarrow (e^A)_i{}^j \phi_j; \quad (1.10)$$

$$e^{2V} \rightarrow e^{-A^+} e^{2V} e^{-A}, \quad (1.11)$$

параметризуемых киральным суперполем A , которое принимает значения в алгебре Ли калибровочной группы. Отметим, что при этом $W_a \rightarrow e^A W_a e^{-A}$.

Наряду с условиями (1.8) и (1.9), будем также требовать выполнения соотношения

$$m_0^{ik} m_{0kj}^* = m_0^2 \delta_j^i. \quad (1.12)$$

Тогда с учетом формул (1.8) и (1.12) находим

$$\begin{aligned} m_0^2 \text{tr}(T^A T^B T^C) &= m_{0ij}^* m_0^{jk} (T^A)_k{}^l (T^B)_l{}^m (T^C)_m{}^i \\ &= -m_{0ij}^* m_0^{mi} (T^A)_k{}^j (T^B)_l{}^k (T^C)_m{}^l = -m_0^2 \text{tr}(T^A T^C T^B). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Следовательно, генераторы T^A должны удовлетворять условию

$$\text{tr}(T^A \{T^B, T^C\}) = 0, \quad (1.14)$$

которое, как известно [101], выполняется в теориях без калибровочных аномалий.

1.2. Квантование теории и ее регуляризация методом высших ковариантных производных

Квантование теории будем проводить при использовании метода фонового поля [102–104] в его соответствующей суперполево́й формулировке (см., например, [12, 88]). В неабелевом случае он подразумевает нелинейное расщепление исходного калибровочного суперполя на квантовую V и фоновую \mathbf{V} составляющие с помощью замены $e^{2V} \rightarrow e^{2V} e^{2\mathbf{V}}$ в действии теории. Вместе с тем необходимо принять во внимание, что для рассматриваемых теорий квантовое калибровочное суперполе требует нелинейной перенормировки [105–107], иначе уравнения ренормгруппы, вообще говоря, оказываются несамосогласованными. Это подтверждают и явные вычисления в низших порядках [108, 109]. Для того, чтобы учесть нелинейную перенормировку квантового калибровочного суперполя, можно провести формальную замену суперполя V на функцию $\mathcal{F}(V)$, содержащую бесконечный набор дополнительных параметров, которые перенормируются обычным линейным образом.

Тогда, принимая во внимание эти соображения, совершим в действии (1.1) формальную замену

$$e^{2V} \rightarrow e^{2\mathcal{F}(V)} e^{2\mathbf{V}}, \quad (1.15)$$

где фоновое калибровочное суперполе \mathbf{V} является эрмитовым, а квантовое калибровочное суперполе подчиняется условию $V^+ = e^{-2\mathbf{V}} V e^{2\mathbf{V}}$. При этом функция $\mathcal{F}(V)$ включает только нечетные степени суперполя V [110] и в низших порядках имеет вид [108, 109]

$$\mathcal{F}(V)^A = V^A + e_0^2 y_0 G^{ABCD} V^B V^C V^D + \dots, \quad (1.16)$$

где y_0 — один из дополнительных голых параметров, вводимых в теорию для описания нелинейной перенормировки квантового калибровочного суперполя, а G^{ABCD} — полностью симметричный тензор, составленный из структурных

констант,

$$G^{ABCD} \equiv \frac{1}{6} \left(f^{AKL} f^{BLM} f^{CMN} f^{DNK} + \text{перестановки } B, C \text{ и } D \right). \quad (1.17)$$

Разложение по генераторам производится в соответствии с формулой $\mathcal{F}(V) = e_0 \mathcal{F}(V)^A t^A$ или $\mathcal{F}(V) = e_0 \mathcal{F}(V)^A T^A$ (в слагаемых действия, которые содержат суперполя материи). В результате, действие теории после замены (1.15) принимает вид

$$S = \frac{1}{2e_0^2} \text{Re tr} \int d^4x d^2\theta W^a W_a + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^{*i} (e^{2\mathcal{F}(V)} e^{2\mathbf{V}})_{i,j} \phi_j + \left\{ \int d^4x d^2\theta \left(\frac{1}{4} m_0^{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} \lambda_0^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \right) + \text{к.с.} \right\}, \quad (1.18)$$

где суперсимметричная напряженность калибровочного суперполя теперь равна

$$W_a = \frac{1}{8} \bar{D}^2 \left(e^{-2\mathbf{V}} e^{-2\mathcal{F}(V)} D_a \left(e^{2\mathcal{F}(V)} e^{2\mathbf{V}} \right) \right). \quad (1.19)$$

Использование метода фонового поля приводит к тому, что действие (1.18) оказывается инвариантным относительно двух типов калибровочных преобразований: фоновых

$$\phi_i \rightarrow (e^A)_i^j \phi_j, \quad V \rightarrow e^{-A^+} V e^{A^+}, \quad e^{2\mathbf{V}} \rightarrow e^{-A^+} e^{2\mathbf{V}} e^{-A} \quad (1.20)$$

и квантовых

$$\phi_i \rightarrow (e^A)_i^j \phi_j, \quad e^{2\mathcal{F}(V)} \rightarrow e^{-A^+} e^{2\mathcal{F}(V)} e^{2\mathbf{V}} e^{-A} e^{-2\mathbf{V}}, \quad \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}. \quad (1.21)$$

Для регуляризации теории добавляем в действие слагаемые, содержащие высшие степени ковариантных производных,

$$\nabla_a = D_a, \quad \bar{\nabla}_{\dot{a}} = e^{2\mathcal{F}(V)} e^{2\mathbf{V}} \bar{D}_{\dot{a}} e^{-2\mathbf{V}} e^{-2\mathcal{F}(V)}, \quad (1.22)$$

собранные внутри двух функций-регуляторов в определенных комбинациях:

$$R = R \left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right), \quad F = F \left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right), \quad (1.23)$$

где Λ — параметр регуляризации высшими производными, имеющий размерность массы и фактически выступающий в роли импульса обрезания. При этом на обе введенные функции-регуляторы накладываются требования достаточно быстрого роста при стремлении их аргумента к бесконечности, а также условия $R(0) = F(0) = 1$. Регуляризованное действие имеет вид

$$\begin{aligned}
S_{\text{reg}} = & \frac{1}{2e_0^2} \text{Re tr} \int d^4x d^2\theta W^a \left[e^{-2\mathbf{V}} e^{-2\mathcal{F}(V)} R\left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2}\right) e^{2\mathcal{F}(V)} e^{2\mathbf{V}} \right]_{Adj} W_a \\
& + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^{*i} \left[F\left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2}\right) e^{2\mathcal{F}(V)} e^{2\mathbf{V}} \right]_i^j \phi_j + \left\{ \int d^4x d^2\theta \left(\frac{1}{4} m_0^{ij} \phi_i \phi_j \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{6} \lambda_0^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \right) + \text{к.с.} \right\}, \tag{1.24}
\end{aligned}$$

где индекс «*Adj*» означает, что оператор, имеющий этот индекс, действует на суперполе в присоединенном представлении калибровочной группы. Регуляризованное действие (1.24) по-прежнему инвариантно относительно и фоновых, и квантовых калибровочных преобразований.

Квантовая калибровочная инвариантность нарушается после добавления слагаемого, фиксирующего калибровку, которое мы выбираем в форме

$$S_{\text{gf}} = -\frac{1}{16\xi_0 e_0^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \nabla^2 V K\left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2}\right)_{Adj} \bar{\nabla}^2 V, \tag{1.25}$$

где ξ_0 — голое значение калибровочного параметра, и введена еще одна функция-регулятор $K\left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2}\right)$, удовлетворяющая тем же самым условиям в нуле и на бесконечности, что и регуляторы R и F . Фоновые ковариантные производные определяются соотношениями

$$\nabla_a = D_a; \quad \bar{\nabla}_{\dot{a}} = e^{2\mathbf{V}} \bar{D}_{\dot{a}} e^{-2\mathbf{V}}. \tag{1.26}$$

Применяемый метод квантования предписывает добавить в теорию антикоммутирующие суперполя духов Фаддеева–Попова [111] и Нильсена–Каллош [112, 113]. Действие Фаддеева–Попова в рассматриваемом случае записывается

в виде

$$S_{\text{FP}} = \frac{1}{2} \int d^4x d^4\theta \frac{\partial \mathcal{F}^{-1}(\tilde{V})^A}{\partial \tilde{V}^B} \Big|_{\tilde{V}=\mathcal{F}(V)} (e^{2V} \bar{c} e^{-2V} + \bar{c}^+)^A \times \left\{ \left(\frac{\mathcal{F}(V)}{1 - e^{2\mathcal{F}(V)}} \right)_{Adj} c^+ + \left(\frac{\mathcal{F}(V)}{1 - e^{-2\mathcal{F}(V)}} \right)_{Adj} \left(e^{2V} c e^{-2V} \right) \right\}^B, \quad (1.27)$$

и включает киральные суперполя духов c и антидухов \bar{c} , а также антикиральные суперполя духов c^+ и антидухов \bar{c}^+ , взаимодействующие с квантовым и фоновым калибровочным суперполем. В свою очередь, духи Нильсена–Каллош b и b^+ взаимодействуют только с фоновым калибровочным суперполем, как видно из их действия

$$S_{\text{NK}} = \frac{1}{2e_0^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta b^+ \left(K \left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right) e^{2V} \right)_{Adj} b, \quad (1.28)$$

причем b является киральным суперполем и, соответственно, b^+ — антикиральным. Как следствие, вклад духов Нильсена–Каллош исчерпывается однопетлевым приближением.

Как известно [114], с помощью метода высших ковариантных производных удастся регуляризовать ультрафиолетовые расходимости, начиная только с двухпетлевого приближения, поэтому он нуждается в дополнении. Для этого удобно использовать модифицированный метод Паули–Вилларса [47], предполагающий включение в производящий функционал инвариантных детерминантов полей Паули–Вилларса, регуляризующих оставшиеся однопетлевые расходимости. Для рассматриваемого случая конкретная форма этих детерминантов может быть записана на основе работ [100, 115]. Во-первых, для регуляризации однопетлевых расходимостей, порождаемых петлей суперполей материи, вводится детерминант

$$\text{Det}(\text{PV}, M)^{-1} \equiv \int D\Phi \exp(iS_\Phi), \quad (1.29)$$

представляемый как функциональный интеграл от грассманово четных киральных суперполей Паули–Вилларса Φ_i , лежащих в некотором представлении R_{PV} . Их действие равно

$$S_{\Phi} = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \Phi^+ F \left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right) e^{2\mathcal{F}(V)} e^{2V} \Phi + \left(\frac{1}{4} \int d^4x d^2\theta M^{ij} \Phi_i \Phi_j + \text{к.с.} \right). \quad (1.30)$$

Массовое слагаемое не должно нарушать фоновую калибровочную инвариантность, поэтому накладывається условие

$$M^{ik} (T_{\text{PV}}^A)_k{}^j + M^{kj} (T_{\text{PV}}^A)_k{}^i = 0, \quad (1.31)$$

где T_{PV}^A — генераторы в представлении R_{PV} . С учетом дополнительного требования

$$M^{jk} M_{ki}^* = M^2 \delta_i^j, \quad (1.32)$$

получаем условие на генераторы T_{PV}^A , аналогичное (1.14),

$$\text{tr} \left(T_{\text{PV}}^A \{ T_{\text{PV}}^B, T_{\text{PV}}^C \} \right) = 0. \quad (1.33)$$

Выполнение этого условия необходимо для того, чтобы в регуляризованной теории также происходило сокращение калибровочных аномалий.

Наряду с детерминантом (1.29), требуется ввести еще один, который будет обеспечивать регуляризацию расходимостей, вносимых петлей духов и квантового калибровочного суперполя. Он имеет вид

$$\text{Det}(\text{PV}, M_{\varphi})^{-1} \equiv \int D\varphi_1 D\varphi_2 D\varphi_3 \exp(iS_{\varphi}), \quad (1.34)$$

где функциональное интегрирование ведется по трем грассманово четным киральным супер полям φ_1 , φ_2 и φ_3 , которые лежат в присоединенном представлении калибровочной группы и описываются действием

$$\begin{aligned}
S_\varphi = & \frac{1}{2e_0^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \left(\varphi_1^+ \left[R \left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right) e^{2\mathcal{F}(V)} e^{2\mathbf{V}} \right]_{Adj} \varphi_1 + \varphi_2^+ \left[e^{2\mathcal{F}(V)} e^{2\mathbf{V}} \right]_{Adj} \varphi_2 \right. \\
& \left. + \varphi_3^+ \left[e^{2\mathcal{F}(V)} e^{2\mathbf{V}} \right]_{Adj} \varphi_3 \right) + \frac{1}{2e_0^2} \left(\text{tr} \int d^4x d^2\theta M_\varphi (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2) + \text{к.с.} \right). \quad (1.35)
\end{aligned}$$

Будем считать, что массы суперполей Паули–Вилларса пропорциональны параметру Λ регуляризации высшими производными

$$M \equiv a\Lambda, \quad M_\varphi \equiv a_\varphi\Lambda, \quad (1.36)$$

где коэффициенты a и a_φ не зависят от констант связи. Тогда в теории будет присутствовать только один независимый размерный параметр регуляризации.

В результате, производящий функционал регуляризованной теории принимает вид

$$\begin{aligned}
Z = & \int D\mu \left(\text{Det}(\text{PV}, M) \right)^{T(R)/T(R_{\text{PV}})} \text{Det}(\text{PV}, M_\varphi)^{-1} \\
& \times \exp \left(iS_{\text{reg}} + iS_{\text{gf}} + iS_{\text{FP}} + iS_{\text{NK}} + iS_{\text{sources}} \right), \quad (1.37)
\end{aligned}$$

где $D\mu$ для краткости обозначает меру функционального интегрирования, величина $T(R_{\text{PV}})$ определяется из равенства $\text{tr}(T_{\text{PV}}^A T_{\text{PV}}^B) = T(R_{\text{PV}}) \delta^{AB}$, а действие для источников выбирается в форме

$$\begin{aligned}
S_{\text{sources}} = & \int d^4x d^4\theta V^A J^A + \int d^4x d^2\theta \left(j^i \phi_i + \eta^A c^A + \bar{\eta}^A \bar{c}^A \right) \\
& + \int d^4x d^2\bar{\theta} \left(j_i^* \phi^{*i} + c^{*A} \eta^{*A} + \bar{c}^{*A} \bar{\eta}^{*A} \right). \quad (1.38)
\end{aligned}$$

Производящий функционал связных функций Грина, как известно, определяется формулой

$$W = -i \ln Z. \quad (1.39)$$

Эффективное действие Γ можно построить из W с помощью преобразования Лежандра

$$\Gamma[\mathbf{V}, V, \phi, c, \dots] = W[\mathbf{V}, J, j, \eta, \dots] - S_{\text{sources}} \Big|_{J, j, \eta \dots \rightarrow V, \phi, c, \dots} \quad (1.40)$$

где источники необходимо выразить через суперполя из соотношений

$$V^A = \frac{\delta W}{\delta J^A}, \quad \phi_i = \frac{\delta W}{\delta j^i}, \quad c^A = \frac{\delta W}{\delta \eta^A}, \quad \text{и т.д.} \quad (1.41)$$

Построенная теория оказывается инвариантной относительно фоновых калибровочных преобразований (1.20), дополненных соответствующими преобразованиями для духов и суперполей Паули–Вилларса

$$\begin{aligned} c &\rightarrow e^A c e^{-A}; & \bar{c} &\rightarrow e^A \bar{c} e^{-A}; & b &\rightarrow e^A b e^{-A}; \\ \Phi_i &\rightarrow (e^A)_i^j \Phi_j; & \varphi_{1,2,3} &\rightarrow e^A \varphi_{1,2,3} e^{-A}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Кроме того, вместо нарушенной (процедурой фиксации калибровки) квантовой калибровочной инвариантности теория будет инвариантна относительно BRST преобразований [116, 117] в суперполево́й формулировке [105].

1.3. Перенормировка

Перенормируемость $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий Янга–Миллса исследовалась в работах [106, 118–120]. Ее доказательство опирается на использование тождеств Славнова–Тейлора [24, 121], при этом обязательным требованием является сокращение калибровочных аномалий. В рассматриваемом случае регуляризованная теория, описываемая производящим функционалом (1.37), инвариантна относительно BRST преобразований и фоновых калибровочных преобразований, и условия сокращения калибровочных аномалий (1.14) и (1.33) предполагаются выполненными. Как следствие, от расходимостей также можно избавиться перенормировкой параметров и суперполей. Еще раз обратим внимание на то, что, в отличие от несуперсимметричных теорий Янга–Миллса, квантовое калибровочное суперполе перенормируется нелинейно. В данном случае нелинейная перенормировка суперполя V описывается с помощью обычной мультипликативной перенормировки дополнительных параметров (y_0 и т.п.), которые содержит функция $\mathcal{F}(V)$.

Вследствие фоновой калибровочной симметрии фоновое калибровочное суперполе не перенормируется, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_R$ (перенормированные суперполя будем обозначать индексом R), и квантовые поправки к двухточечной функции Грина фонового калибровочного суперполя имеют поперечную структуру. Тогда квадратичная по суперполю \mathbf{V} часть эффективного действия может быть записана в импульсном представлении в форме

$$\Gamma_{\mathbf{V}}^{(2)} = -\frac{1}{16\pi} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^4 \theta \mathbf{V}^A(-p, \theta) \partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V}^A(p, \theta) d^{-1}(\alpha_0, \lambda_0, Y_0, \Lambda/p), \quad (1.43)$$

где суперсимметричный поперечный проектор определяется формулой

$$\partial^2 \Pi_{1/2} = -\frac{1}{8} D^a \bar{D}^2 D_a, \quad (1.44)$$

голая константа связи $\alpha_0 = e_0^2/4\pi$, и в древесном приближении $d^{-1}|_{\text{tree}} = \alpha_0^{-1}$. Для краткости введено обозначение для всей совокупности голых параметров, реализующих нелинейную перенормировку суперполя V , вместе с параметром фиксации калибровки ξ_0 :

$$Y_0 = (\xi_0, y_0, \dots). \quad (1.45)$$

Перенормированная константа связи $\alpha(\alpha_0, \lambda_0, Y_0, \Lambda/\mu)$, где μ — масштаб перенормировки, может быть найдена из условия, что функция d^{-1} , выраженная через перенормированные величины, т.е.

$$d^{-1}(\alpha_0(\alpha, \lambda, Y, \Lambda/\mu), \lambda_0(\alpha, \lambda, Y, \Lambda/\mu), Y_0(\alpha, \lambda, Y, \Lambda/\mu), \Lambda/p), \quad (1.46)$$

должна быть конечной в пределе снятия регуляризации $\Lambda \rightarrow \infty$. Соответствующая константа перенормировки определяется равенством

$$\frac{1}{\alpha_0} = \frac{Z_\alpha}{\alpha}. \quad (1.47)$$

Поперечной структурой обладают и квантовые поправки к двухточечной функции Грина квантового калибровочного суперполя, что может быть доказано с помощью тождеств Славнова–Тейлора. Как следствие, соответствующая

квадратичная часть эффективного действия представляется в виде

$$\Gamma_V^{(2)} - S_{\text{gf}}^{(2)} = -\frac{1}{4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} d^4 \theta V^A(-q, \theta) \partial^2 \Pi_{1/2} V^A(q, \theta) G_V(\alpha_0, \lambda_0, Y_0, \frac{\Lambda}{q}), \quad (1.48)$$

причем общий множитель выбран так, чтобы в древесном приближении $G_V|_{\text{tree}} = R$. Линейная составляющая перенормировки квантового калибровочного суперполя учитывается введением константы перенормировки Z_V ,

$$V^A = Z_V V_R^A. \quad (1.49)$$

Принимая во внимание разложения $V = e_0 V^A t^A$ и $V_R = e(V_R)^A t^A$, получаем

$$V = Z_V Z_\alpha^{-1/2} V_R. \quad (1.50)$$

Константа перенормировки Z_V находится из требования конечности функции

$$Z_V^2 G_V(\alpha_0(\alpha, \lambda, Y, \Lambda/\mu), \lambda_0(\alpha, \lambda, Y, \Lambda/\mu), Y_0(\alpha, \lambda, Y, \Lambda/\mu), \Lambda/q), \quad (1.51)$$

выраженной через перенормированные параметры, в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$. В свою очередь, нелинейная часть перенормировки суперполя V описывается с помощью перенормировки дополнительных параметров, входящих в функцию $\mathcal{F}(V)$,

$$y_0 = Z_y y \quad \text{и т.д.} \quad (1.52)$$

Еще одним следствием поперечности петлевых вкладов в двухточечную функцию Грина квантового калибровочного суперполя оказывается неперенормировка члена, фиксирующего калибровку. Благодаря этому, константа перенормировки калибровочного параметра, которая определяется равенством

$$\frac{1}{\xi_0} = \frac{Z_\xi}{\xi}, \quad (1.53)$$

связана с константой перенормировки квантового калибровочного суперполя соотношением

$$Z_\xi = Z_V^{-2}. \quad (1.54)$$

Очевидно, что действие для духов Нильсена–Каллош (1.28) тоже не перенормируется, а значит

$$b = Z_\alpha^{-1/2} b_R. \quad (1.55)$$

Для описания перенормировки духов Фаддеева–Попова достаточно ввести единственную константу перенормировки Z_c , которая в наших обозначениях определяется как

$$\bar{c}^A c^B = Z_c (\bar{c}_R)^A (c_R)^B. \quad (1.56)$$

Учитывая разложения $c = e_0 c^A t^A$, $c_R = e(c_R)^A t^A$ и т.п., находим, что

$$\bar{c}c = Z_c Z_\alpha^{-1} \bar{c}_R c_R. \quad (1.57)$$

Константы перенормировки суперполей материи, масс и юкавских констант определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \phi_i &= (\sqrt{Z_\phi})_i^j (\phi_R)_j; & m_0^{ij} &= m^{kn} (\sqrt{Z_m})_k^i (\sqrt{Z_m})_n^j; \\ \lambda_0^{ijk} &= \lambda^{lnp} (\sqrt{Z_\lambda})_l^i (\sqrt{Z_\lambda})_n^j (\sqrt{Z_\lambda})_p^k. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Вследствие теоремы о перенормировке суперпотенциала данные константы перенормировки оказываются взаимосвязанными, и можно выбрать такую схему вычитаний, в которой

$$(Z_m)_i^j = (Z_\lambda)_i^j = (Z_\phi^{-1})_i^j. \quad (1.59)$$

Слагаемые в эффективном действии, квадратичные по духам Фаддеева–Попова и суперполям материи, можно записать в виде

$$\Gamma_c^{(2)} = \frac{1}{4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} d^4 \theta \left(-\bar{c}^A(-q, \theta) c^{+A}(q, \theta) + \bar{c}^{+A}(-q, \theta) c^A(q, \theta) \right) G_c(\alpha_0, \lambda_0, Y_0, \Lambda/q); \quad (1.60)$$

$$\Gamma_\phi^{(2)} = \frac{1}{4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} d^4 \theta \phi^{*i}(-q, \theta) \phi_j(q, \theta) (G_\phi)_i^j(\alpha_0, \lambda_0, Y_0, \Lambda/q). \quad (1.61)$$

Петлевые вклады в двухточечные функции Грина духов Фаддеева–Попова и суперполей материи содержатся в функциях G_c и $(G_\phi)_i^j$, соответственно; на древесном уровне $G_c|_{\text{tree}} = 1$ и $(G_\phi)_i^j|_{\text{tree}} = F\delta_i^j$. Константы перенормировки Z_c и $(Z_\phi)_i^j$ можно найти из условия конечности функций $Z_c G_c$ и, соответственно, $(Z_\phi G_\phi)_i^j$, выраженных через перенормированные параметры, при $\Lambda \rightarrow \infty$.

1.4. Теорема о неперенормировке тройных духово-калибровочных вершин

Тройные духово-калибровочные вершины содержат две внешние линии, соответствующие духовому и антидуховому суперполям Фаддеева–Попова, и одну внешнюю линию квантового калибровочного суперполя. Таких вершин всего 4 типа: $\bar{c}^+ V c$, $\bar{c}^+ V c^+$, $\bar{c} V c$ и $\bar{c} V c^+$. Из действия Фаддеева–Попова (1.27) следует, что в древесном приближении они определяются выражением

$$\frac{ie_0}{4} f^{ABC} \int d^4x d^4\theta (\bar{c}^A + \bar{c}^{+A}) V^B (c^C + c^{+C}). \quad (1.62)$$

Структура слагаемых в эффективном действии, соответствующих данным вершинам, может быть установлена на основе анализа размерностей и киральностей. Например, для вершин $\bar{c}^+ V c$ и $\bar{c}^+ V c^+$ эта структура имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{\bar{c}^+ V c}^{(3)} = & \frac{ie_0}{4} f^{ABC} \int d^4\theta \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \bar{c}^{+A}(p+q, \theta) \left(s(p, q) \partial^2 \Pi_{1/2} V^B(-p, \theta) \right. \\ & \left. + \mathcal{S}_\mu(p, q) (\gamma^\mu)_a^b D_b \bar{D}^a V^B(-p, \theta) + \mathcal{S}(p, q) V^B(-p, \theta) \right) c^C(-q, \theta); \end{aligned} \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\bar{c}^+ V c^+}^{(3)} = & \frac{ie_0}{4} f^{ABC} \int d^4\theta \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \bar{c}^{+A}(p+q, \theta) \tilde{\mathcal{S}}(p, q) \\ & \times V^B(-p, \theta) c^{+C}(-q, \theta), \end{aligned} \quad (1.64)$$

где

$$\bar{c}^{+A}(p+q, \theta) = \int d^4x \bar{c}^{+A}(x, \theta) e^{i(p+q)_\mu x^\mu} \quad \text{и т.п.} \quad (1.65)$$

Аналогичные выражения получаются и для двух других вершин $\bar{c} V c$ и $\bar{c} V c^+$.

Учитывая определения констант перенормировки (1.47), (1.49) и (1.56), видим, что тройные духово-калибровочные вершины перенормируются с фактором $Z_\alpha^{-1/2} Z_c Z_V$. Согласно результатам работы [18] данные вершины являются конечными в ультрафиолетовой области, и поэтому справедлива формула

$$\frac{d}{d \ln \Lambda} (Z_\alpha^{-1/2} Z_c Z_V) = 0, \quad (1.66)$$

которая, при соответствующем выборе схемы вычитаний, приводит к соотношению

$$Z_\alpha^{-1/2} Z_c Z_V = 1. \quad (1.67)$$

Соотношения, аналогичные (1.67), известны и в других теориях: в несуперсимметричных теориях Янга–Миллса [24–26], а также в компонентной формулировке $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий Янга–Миллса в калибровке Весса–Зумино [23]. При этом в обоих случаях необходимым условием их выполнения является выбор калибровки Ландау $\xi_0 = 0$. Для упомянутых суперсимметричных калибровочных теорий это было проверено явными вычислениями в трехпетлевом приближении в $\overline{\text{DR}}$ -схеме при использовании формализма компонентных полей [23]. Для несуперсимметричного случая проверка была выполнена в четырехпетлевом приближении [27].

Напротив, формула (1.67) была доказана [18] в формализме $\mathcal{N} = 1$ суперпространства для случая произвольного значения калибровочного параметра ξ_0 при использовании инвариантной версии регуляризации высшими ковариантными производными (аналогичной той, которая используется в данной диссертации). Явная однопетлевая проверка подтвердила ультрафиолетовую конечность соответствующих суммарных вкладов в функции s , \mathcal{S}_μ , \mathcal{S} и $\tilde{\mathcal{S}}$, входящих в формулы (1.63) и (1.64). Далее в данной диссертации будет рассмотрена значительно более нетривиальная двухпетлевая проверка теоремы о неперенормировке тройных духово-калибровочных вершин в формулировке работы [18].

1.5. Стратегия двухпетлевой проверки конечности тройных духово-калибровочных вершин

Как мы уже обсуждали, все 4 типа тройных духово-калибровочных вершин имеют одну и ту же константу перенормировки, равную $Z_\alpha^{-1/2} Z_c Z_V$. Поэтому без ограничения общности можно провести проверку ультрафиолетовой конечности для любой из них: далее мы будем рассматривать вершину $\bar{c}^+ V c$. Тогда нашей непосредственной задачей становится вычисление в общей ξ -калибровке двухпетлевых вкладов в функции s , \mathcal{S}_μ и \mathcal{S} .

На самом деле, имеется ряд соображений, которые позволяют внести еще некоторые упрощения. Анализ размерностей показывает, что поверхностная степень расходимости петлевых интегралов, дающих функции s и \mathcal{S}_μ , равна в единицах массы (-2) и (-1) , соответственно. Следовательно, расходящиеся вклады в функции s и \mathcal{S}_μ могут идти только от расходящихся поддиаграмм. Однако в силу перенормируемости рассматриваемой теории, данные подрасходимости устраняются перенормировкой в предыдущих порядках теории возмущений. Принимая это во внимание, нам остается исследовать только вклады в функцию \mathcal{S} .

Для того, чтобы выделить именно ту часть эффективного действия, которая включает только функцию \mathcal{S} , совершим в выражении (1.63) формальную замену

$$V \rightarrow \bar{D}^2 H, \quad (1.68)$$

где суперполе H является эрмитовым. Тогда получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{\bar{c}^+ V c}^{(3)} \Big|_{V \rightarrow \bar{D}^2 H} &= \frac{ie_0}{4} f^{ABC} \int d^4 \theta \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \bar{c}^{+A}(p+q, \theta) \mathcal{S}(p, q) \\ &\quad \times \bar{D}^2 H^B(-p, \theta) c^C(-q, \theta). \end{aligned} \quad (1.69)$$

Разумеется, величина $\bar{D}^2 H$ не является эрмитовым суперполем, однако это не имеет значения, поскольку замена (1.68) требуется лишь для выделения опре-

деленной части эффективного действия (и поэтому была названа формальной).

Таким образом, для получения вкладов в функцию \mathcal{S} требуется вычислить супердиаграммы, в которых квантовое калибровочное суперполе V на внешней линии заменено на $\bar{D}^2 H$, а две другие внешние линии соответствуют духам Фаддеева–Попова \bar{c}^+ и c . Количество таких супердиаграмм в двухпетлевом приближении очень велико, к тому же применение регуляризации высшими ковариантными производными приводит к значительному усложнению правил Фейнмана для вершин, содержащих функции-регуляторы. Тем не менее, в данном случае вычисления можно еще упростить, если проводить их в пределе нулевых внешних импульсов: $p \rightarrow 0$, $q \rightarrow 0$. Это возможно, поскольку слагаемые в функции $\mathcal{S}(p, q)$, пропорциональные внешним импульсам, даются интегралами с отрицательной поверхностной степенью расходимости, и соответствующие им подрасходимости устраняются перенормировкой в предыдущих порядках.

Отметим, что вся совокупность двухпетлевых супердиаграмм, которые необходимо рассмотреть, естественным образом разделяется на две характерные части. Первая состоит из супердиаграмм, внутренние линии которых соответствуют суперполям, лежащим в присоединенном представлении калибровочной группы: квантовому калибровочному суперполю, духам Фаддеева–Попова и суперполям Паули–Вилларса $\varphi_{1,2,3}$. Вклады таких диаграмм пропорциональны фактору $(C_2)^2$. Вторая часть включает супердиаграммы с петлей суперполей материи ϕ_i и суперполей Паули–Вилларса Φ_i , а значит их вклады пропорциональны $C_2 T(R)$. Далее мы переходим к последовательному обсуждению вычислений вкладов супердиаграмм из обеих частей.

1.6. Двухпетлевая проверка конечности $\bar{c}^+ V c$ -вершины

Совокупность супердиаграмм, дающих вклады в функцию \mathcal{S} в двухпетлевом приближении, удобно разделить на 5 непересекающихся групп.

1. Первая группа включает супердиаграммы, которые графически получа-

ются с помощью прикрепления всеми возможными способами одной внешней линии квантового калибровочного суперполя к двухточечным супердиаграммам (a1) — (a11), изображенным на Рис. 1.1. Например, в результате этой процедуры из суперграфа (a1) получается 9 различных супердиаграмм с тремя внешними линиями, дающих двухпетлевые вклады в вершину $\bar{c}^+ V c$. Из них 4 супердиаграммы возникают после прикрепления внешней калибровочной линии к вершинам, а еще 5 супердиаграмм появляется, когда внешняя калибровочная линия прикрепляется к пропагаторам. Видно, что общее количество диаграмм, входящих в первую группу, достаточно велико, и по этой причине мы не изображаем их, ограничиваясь описанием способа их графического получения из двухточечных суперграфов на Рис. 1.1.

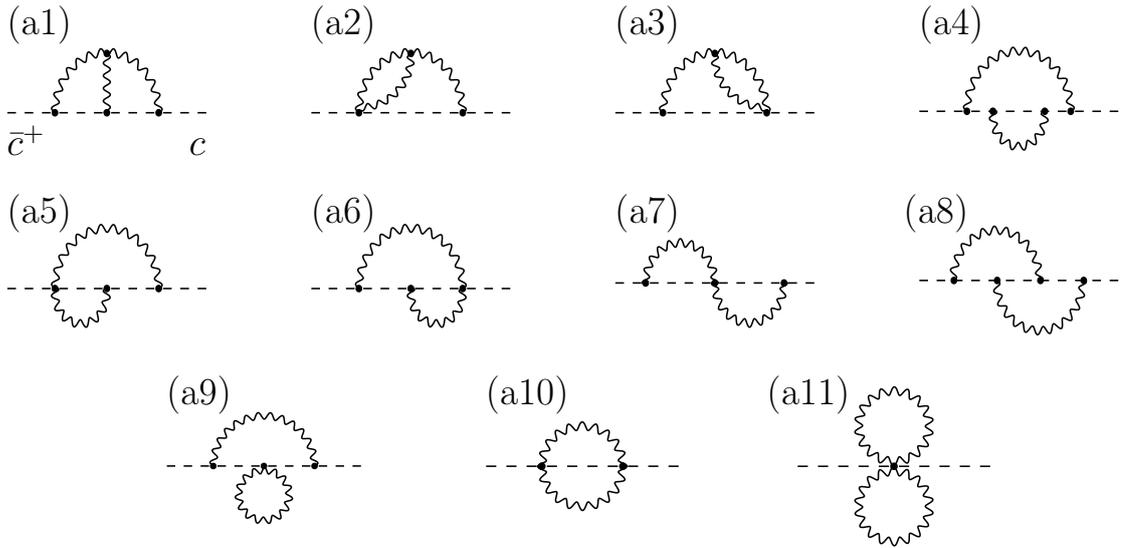


Рис. 1.1. Некоторые двухпетлевые суперграфы с двумя внешними линиями духов Фаддеева–Попова \bar{c}^+ и c . Волнистые линии обозначают линии квантового калибровочного суперполя, пунктирные линии соответствуют духам Фаддеева–Попова.

После замены (1.68) внешняя калибровочная линия в рассматриваемых трехточечных супердиаграммах соответствует суперполю $\bar{D}^2 H$, и в этом случае они дают вклады только в функцию \mathcal{S} . Для их вычисления используем правила Фейнмана в $\mathcal{N} = 1$ суперпространстве и известную алгебру суперсимметричных

ковариантных производных (см., например, [87, 88]).

Для пропагатора квантового калибровочного суперполя получаем выражение

$$\langle V_x^A V_y^B \rangle = 2i \left[\frac{1}{R\partial^2} - \frac{1}{16\partial^4} (D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2) \left(\frac{\xi_0}{K} - \frac{1}{R} \right) \right] \delta_{xy}^8 \delta^{AB}, \quad (1.70)$$

где $V_x^A \equiv V^A(x^\mu, \theta_x)$, $J_x^A \equiv J^A(x^\mu, \theta_x)$ и

$$\delta_{xy}^8 \equiv \delta^4(x^\mu - y^\mu) \delta^4(\theta_x - \theta_y). \quad (1.71)$$

Пропагаторы духов Фаддеева–Попова имеются двух видов

$$\langle c_x^A \bar{c}_y^{*B} \rangle = -i \frac{\bar{D}_x^2 D_y^2}{4\partial^2} \delta_{xy}^8 \delta^{AB}; \quad (1.72)$$

$$\langle c_x^{*A} \bar{c}_y^B \rangle = i \frac{D_x^2 \bar{D}_y^2}{4\partial^2} \delta_{xy}^8 \delta^{AB}. \quad (1.73)$$

В этих формулах использованы аналогичные обозначения, а при их выводе нужно помнить о грассмановой нечетности духовых суперполей.

Отметим, что нелинейные слагаемые, присутствующие в функции $\mathcal{F}(V)$, не существенны при вычислении двухпетлевых супердиаграмм, дающих вклады в функцию \mathcal{S} порядка $\mathcal{O}(e^4)$. (Однако они важны при рассмотрении вкладов данного порядка от однопетлевых супердиаграмм, которые будут исследованы позднее.) В связи с этим, духово-калибровочные вершины, необходимые для вычисления двухпетлевых диаграмм, могут быть получены в приближении $\mathcal{F}(V) = V$. Тогда, учитывая разложения

$$\frac{V}{1 - e^{2V}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}V - \frac{1}{6}V^2 + \frac{1}{90}V^4 + \mathcal{O}(V^6); \quad (1.74)$$

$$\frac{V}{1 - e^{-2V}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}V + \frac{1}{6}V^2 - \frac{1}{90}V^4 + \mathcal{O}(V^6), \quad (1.75)$$

получаем из действия Фаддеева–Попова (1.27) следующие слагаемые со взаимодействием до порядка $\mathcal{O}(e_0^4)$ включительно:

$$\begin{aligned} & \int d^4x d^4\theta \left(\frac{ie_0}{4} f^{ABC} (\bar{c}^A + \bar{c}^{+A}) V^B (c^C + c^{+C}) - \frac{e_0^2}{12} f^{ABC} f^{CDE} (\bar{c}^A + \bar{c}^{+A}) V^B V^D \right. \\ & \times (c^E - c^{+E}) - \frac{e_0^4}{180} f^{ABC} f^{CDE} f^{EFG} f^{GHI} (\bar{c}^A + \bar{c}^{+A}) V^B V^D V^F V^H \\ & \left. \times (c^I - c^{+I}) + \dots \right). \end{aligned} \quad (1.76)$$

Обратим внимание, что, за исключением первого слагаемого, в этом выражении присутствуют только члены с четными степенями квантового калибровочного суперполя. Однако, если учесть нелинейные слагаемые в функции $\mathcal{F}(V)$, то появятся и вершины с нечетным числом линий суперполя V , большим единицы. Также отметим, что духово-калибровочные вершины с внешней $\bar{D}^2 H$ -линией могут быть легко получены с помощью выполнения замены (1.68) в выражении (1.76).

Для вычисления рассматриваемых суперграфов также понадобятся вершины квантовых калибровочных суперполей. В частности, для тройной вершины находим выражение

$$\begin{aligned} \Delta S_{V^3} &= \frac{ie_0}{16} f^{ABC} \int d^4x d^4\theta V^A D^a V^B R(\partial^2/\Lambda^2) \bar{D}^2 D_a V^C + \frac{ie_0}{128\Lambda^2} f^{ABC} \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} r_n \sum_{\alpha=0}^{n-1} \int d^4x d^4\theta \left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2} \right)^\alpha D^2 \bar{D}^2 D^a V^A V^B \left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2} \right)^{n-1-\alpha} \bar{D}^2 D_a V^C, \end{aligned} \quad (1.77)$$

где коэффициенты r_n определяются формулой

$$R(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n x^n. \quad (1.78)$$

Кроме того, нам потребуется тройная вершина типа $V^2 \bar{D}^2 H$. Для того чтобы ее получить, сделаем в выражении (1.77) замену $V \rightarrow V + \bar{D}^2 H$ и оставим только

слагаемые, линейные по $\bar{D}^2 H$:

$$\begin{aligned} & \frac{ie_0}{16} f^{ABC} \int d^4x d^4\theta \left(\bar{D}^2 H^A D^a V^B R(\partial^2/\Lambda^2) \bar{D}^2 D_a V^C + V^A D^a \bar{D}^2 H^B \times \right. \\ & \times R(\partial^2/\Lambda^2) \bar{D}^2 D_a V^C \left. \right) + \frac{ie_0}{128\Lambda^2} f^{ABC} \sum_{n=1}^{\infty} r_n \sum_{\alpha=0}^{n-1} \int d^4x d^4\theta \left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2} \right)^\alpha D^2 \bar{D}^2 D^a V^A \\ & \times \bar{D}^2 H^B \left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2} \right)^{n-1-\alpha} \bar{D}^2 D_a V^C. \end{aligned} \quad (1.79)$$

При этом суперполе $\bar{D}^2 H$ может находиться только на внешней линии. Учтем, что в пределе нулевых внешних импульсов слагаемые, в которых суперсимметричные ковариантные производные действуют на суперполя на внешних линиях (за исключением, разумеется, \bar{D}^2 в выражении $\bar{D}^2 H$), дают заведомо нулевой вклад. В выражении (1.79) это относится к слагаемому, содержащему $D^a \bar{D}^2 H^B$. Тогда, после интегрирования по частям в последнем слагаемом формулы (1.79) и использования тождества $\bar{D}^2 D^2 \bar{D}^2 = -16\bar{D}^2 \partial^2$, приходим к выражению

$$\begin{aligned} & \frac{ie_0}{16} f^{ABC} \int d^4x d^4\theta \left(\bar{D}^2 H^A D^a V^B R(\partial^2/\Lambda^2) \bar{D}^2 D_a V^C \right. \\ & \left. - 2 \sum_{n=1}^{\infty} r_n \sum_{\alpha=0}^{n-1} \left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2} \right)^\alpha D^a V^A \bar{D}^2 H^B \left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2} \right)^{n-\alpha} \bar{D}^2 D_a V^C \right). \end{aligned} \quad (1.80)$$

На самом деле, оно равно 0 в пределе нулевого внешнего импульса суперполя $\bar{D}^2 H$. Действительно, в этом пределе величина, стоящая в (1.80), есть произведение симметричного по индексам B и C тензора и полностью антисимметричных структурных констант f^{ABC} . Таким образом, тройная вершина $V^2 \bar{D}^2 H$, в которой суперполе $\bar{D}^2 H$ соответствует внешней линии, равна 0 в пределе нулевых внешних импульсов. Этот факт приводит к значительному уменьшению количества суперграфов, которые дают ненулевые вклады в функцию \mathcal{S} в рассматриваемом случае.

Для вычисления трехточечных супердиаграмм, возникающих в результате прикрепления внешней $\bar{D}^2 H$ -линии к тройной вершине квантовых калибровочных суперполей в диаграммах (a1), (a2) и (a3), необходимо выражение для

четверной вершины вида $V^3 \bar{D}^2 H$. В пределе нулевого импульса суперполя $\bar{D}^2 H$ она описывается выражением

$$\frac{e_0^2}{6} f^{ABC} f^{ADE} \int d^4x d^4\theta \bar{D}^2 H^B V^C V^D R(\partial^2/\Lambda^2) \partial^2 \Pi_{1/2} V^E. \quad (1.81)$$

Пусть (Ai) обозначает набор супердиаграмм, построенных путем прикрепления внешней линии квантового калибровочного суперполя к супердиаграмме (ai) всеми возможными способами. Из первой группы супердиаграмм автор данной диссертации рассматривал наборы супердиаграмм $(A1)$, $(A9)$ и $(A11)$. Детали их вычисления обсуждаются в Приложении А. Вычислением остальных супердиаграмм из первой группы занимались его соавторы по статье [90]. Ниже выписаны все результаты, поскольку каждый из них необходим для проведения полной двухпетлевой проверки конечности тройных духово-калибровочных вершин, а суммированием всех вкладов и анализом окончательного выражения занимался автор данной диссертации.

Итак, были получены следующие результаты для суммарных вкладов всех наборов (Ai) супердиаграмм из первой группы в функцию \mathcal{S} в пределе нулевых внешних импульсов:

$$\Delta_{A1} \mathcal{S} = \frac{e_0^4}{24} C_2^2 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{d^4L}{(2\pi)^4} \frac{\xi_0^2}{K_K K^4 K_L L^2} \left(\frac{2}{(K+L)^2} - \frac{1}{L^2} \right); \quad (1.82)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{A2} \mathcal{S} = & \frac{e_0^4}{72} C_2^2 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{d^4L}{(2\pi)^4} \frac{\xi_0}{K_K K^2 L^2} \left(\left(\frac{\xi_0}{K_L} - \frac{1}{R_L} \right) \frac{1}{L^2} \left(\frac{1}{K^2} - \frac{1}{(K+L)^2} \right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{\xi_0}{K_L} + \frac{1}{R_L} \right) \frac{1}{K^2 (K+L)^2} \right); \end{aligned} \quad (1.83)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{A4} \mathcal{S} = & \frac{e_0^4}{8} C_2^2 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{d^4L}{(2\pi)^4} \frac{\xi_0}{K_K K^2 L^2} \left(\frac{\xi_0}{K_L} - \frac{1}{R_L} \right) \left(\frac{1}{L^2 K^2} + \frac{1}{(K+L)^2} \right. \\ & \left. \times \left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{K^2} \right) \right); \end{aligned} \quad (1.84)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{A5}\mathcal{S} = & -\frac{e_0^4}{9}C_2^2 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{d^4L}{(2\pi)^4} \frac{\xi_0}{K_K K^2 L^2} \left(\left(\frac{\xi_0}{4K_L} + \frac{1}{R_L} \right) \frac{1}{K^2(K+L)^2} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\xi_0}{K_L} - \frac{1}{R_L} \right) \frac{1}{L^2} \left(\frac{1}{(K+L)^2} + \frac{1}{K^2} \right) \right); \end{aligned} \quad (1.85)$$

$$\Delta_{A8}\mathcal{S} = \frac{e_0^4}{24}C_2^2 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{d^4L}{(2\pi)^4} \frac{\xi_0^2}{K_K K^4 K_L L^2} \left(\frac{2}{(K+L)^2} + \frac{1}{L^2} \right); \quad (1.86)$$

$$\Delta_{A9}\mathcal{S} = -\frac{e_0^4}{6}C_2^2 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{d^4L}{(2\pi)^4} \frac{\xi_0}{K_K K^4 L^4} \left(\frac{\xi_0}{K_L} - \frac{1}{R_L} \right); \quad (1.87)$$

$$\Delta_{A3}\mathcal{S} = \Delta_{A6}\mathcal{S} = \Delta_{A7}\mathcal{S} = \Delta_{A10}\mathcal{S} = \Delta_{A11}\mathcal{S} = 0. \quad (1.88)$$

Все петлевые интегралы здесь записаны после поворота Вика, а евклидовы импульсы обозначены заглавными буквами. Для функций-регуляторов в импульсном представлении использованы обозначения $K_K \equiv K(K^2/\Lambda^2)$, $R_K \equiv R(K^2/\Lambda^2)$ и т.п.

2. Вторая группа супердиаграмм включает 3 диаграммы, представленные на Рис. 1.2. Их вклады в функцию \mathcal{S} , посчитанные в работе [90], в пределе нулевых внешних импульсов равны

$$\Delta_{b2}\mathcal{S} = \frac{5e_0^4}{36}C_2^2 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{d^4L}{(2\pi)^4} \frac{\xi_0}{K_K K^4 L^4} \left(\frac{\xi_0}{K_L} - \frac{1}{R_L} \right); \quad (1.89)$$

$$\Delta_{b1}\mathcal{S} = \Delta_{b3}\mathcal{S} = 0. \quad (1.90)$$

Суммируя все вклады супердиаграмм из первой и второй группы (1.82) — (1.90), получаем

$$\sum_{i=1}^{11} \Delta_{A_i}\mathcal{S} + \sum_{i=1}^3 \Delta_{b_i}\mathcal{S} = 0. \quad (1.91)$$

3. Теперь рассмотрим вклады в функцию \mathcal{S} порядка $\mathcal{O}(e_0^4)$, идущие от однопетлевых супердиаграмм на Рис. 1.3, которые содержат вершины, пропорци-

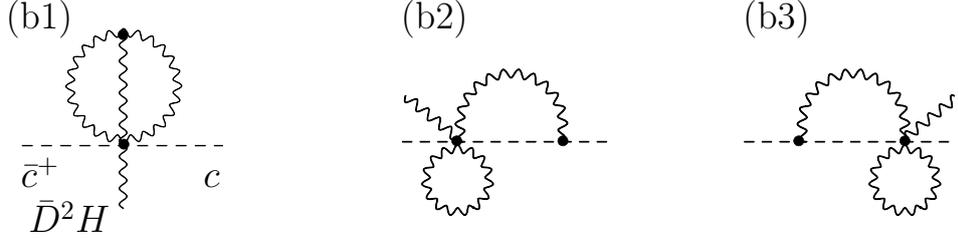


Рис. 1.2. Двухпетлевые суперграфы, дающие вклады в функцию \mathcal{S} , выделенные во вторую группу.

ональные параметрам нелинейной перенормировки квантового калибровочного суперполя.

Известно, что функция $\mathcal{F}(V)$ может содержать только слагаемые с нечетными степенями суперполя V [110]. Тогда единственным нелинейным слагаемым в функции $\mathcal{F}(V)$, которое существенно в рассматриваемом приближении, является

$$e_0^2 y_0 G^{ABCD} V^B V^C V^D. \quad (1.92)$$

Оно порождает следующие слагаемые со взаимодействием в действии Фаддева–Попова (1.27):

$$\int d^4x d^4\theta \left\{ -\frac{3}{4} e_0^2 y_0 G^{ABCD} (\bar{c}^A + \bar{c}^{+A}) V^C V^D (c^B - c^{+B}) - \frac{i}{4} e_0^3 y_0 [f^{ABK} G^{KCDE} + 3f^{EBK} G^{KACD}] (\bar{c}^A + \bar{c}^{+A}) V^C V^D V^E (c^B + c^{+B}) \right\}. \quad (1.93)$$

Совершая в выражении (1.93) замену $V \rightarrow V + \bar{D}^2 H$ и оставляя только линей-

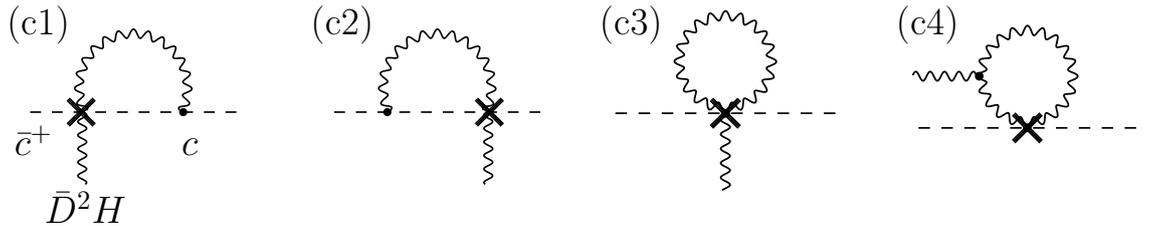


Рис. 1.3. Однопетлевые суперграфы, содержащие вершины (отмечены крестом), которые пропорциональны параметру y_0 нелинейной перенормировки суперполя V .

ные по $\bar{D}^2 H$ слагаемые, получаем

$$\int d^4 x d^4 \theta \left\{ -\frac{3}{2} e_0^2 y_0 G^{ABCD} (\bar{c}^A + \bar{c}^{+A}) \bar{D}^2 H^C V^D (c^B - c^{+B}) \right. \\ \left. - \frac{3i}{4} e_0^3 y_0 [f^{ABK} G^{KCDE} + 2f^{EBK} G^{KACD} + f^{CBK} G^{KAED}] \right. \\ \left. \times (\bar{c}^A + \bar{c}^{+A}) \bar{D}^2 H^C V^D V^E (c^B + c^{+B}) \right\}. \quad (1.94)$$

Теперь все готово для анализа вкладов супердиаграмм (с1) – (с4), изображенных на Рис. 1.3, в функцию \mathcal{S} . Во-первых, замечаем, что супердиаграммы (с1) и (с2) пропорциональны множителю

$$G^{ABDE} f^{CDE} = 0, \quad (1.95)$$

где индексы A , B и C соответствуют внешним линиям. Нулевой результат получается из-за свертки по индексам D и E полностью симметричного тензора G^{ABDE} и полностью антисимметричных структурных констант f^{CDE} .

Во-вторых, вклад диаграммы (с3) также равен 0. Действительно, он пропорционален величине

$$f^{ABK} G^{KCDD} + 2f^{DBK} G^{KACD} + f^{CBK} G^{KADD} \\ = \frac{5}{6} C_2^2 (f^{ABC} + f^{CBA}) = 0, \quad (1.96)$$

где мы учли, что $G^{KCDD} = 5C_2^2 \delta^{KC} / 6$.

Последняя супердиаграмма (с4) содержит тройную калибровочную вершину с суперполем $\bar{D}^2 H$ на внешней линии. Как было показано ранее, данная вершина равна 0 в пределе нулевого импульса суперполя $\bar{D}^2 H$. В итоге, все диаграммы третьей группы, изображенные на Рис. 1.3, дают нулевой вклад в функцию \mathcal{S} в пределе $p \rightarrow 0$, $q \rightarrow 0$.

4. В четвертую группу мы выделяем двухпетлевые супердиаграммы, представленные на Рис. 1.4. Они содержат (однопетлевую) вставку поляризационно-

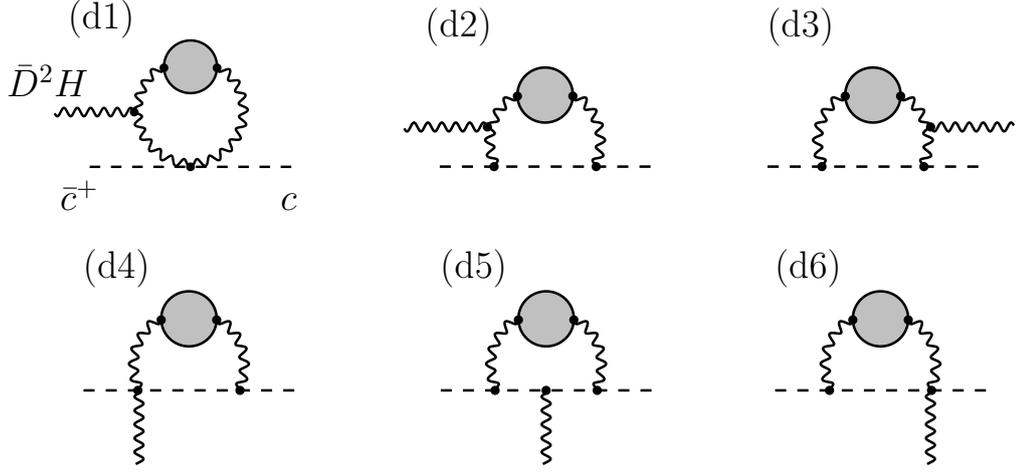


Рис. 1.4. Двухпетлевые супердиаграммы, содержащие однопетлевую вставку поляризационного оператора квантового калибровочного суперполя, которая обозначена серым кругом.

го оператора квантового калибровочного суперполя Π , который определяется равенством

$$\Pi(\alpha_0, \lambda_0, Y_0, K^2/\Lambda^2) = R(K^2/\Lambda^2) - G_V(\alpha_0, \lambda_0, Y_0, K^2/\Lambda^2). \quad (1.97)$$

В терминах поляризационного оператора Π выражение для эффективного пропагатора квантового калибровочного суперполя может быть записано как

$$2i \left[\frac{1}{(R - \Pi)\partial^2} - \frac{1}{16\partial^4} (D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2) \left(\frac{\xi_0}{K} - \frac{1}{R - \Pi} \right) \right] \delta_{xy}^8 \delta^{AB}. \quad (1.98)$$

Эту формулу удобно использовать для построения выражений для суперграфов, включающих вставки поляризационного оператора Π , в частности, для суперграфов (d1) — (d6), изображенных на Рис. 1.4.

В однопетлевом приближении поляризационный оператор квантового калибровочного суперполя может быть представлен в форме

$$\begin{aligned} \Delta\Pi^{(1)}(\alpha_0, K^2/\Lambda^2) = & -8\pi\alpha_0 \left(C_2 f(K/\Lambda) + C_2 g(\xi_0, K/\Lambda) \right. \\ & \left. + T(R) h(K/\Lambda) \right), \end{aligned} \quad (1.99)$$

где явные аналитические выражения для функций $f(K/\Lambda)$, $g(\xi_0, K/\Lambda)$ и

$h(K/\Lambda)$ были получены в работе [100]. Они приведены в Приложении Б. Первые два слагаемых в формуле (1.99), пропорциональные C_2 , описывают однопетлевые вклады квантового калибровочного суперполя, духов Фаддеева–Попова и суперполей Паули–Вилларса $\varphi_{1,2,3}$. Последнее слагаемое, пропорциональное $T(R)$, включает однопетлевые вклады суперполей материи ϕ_i и Паули–Вилларса Φ_i . Вид супердиаграмм, которые дают вклады в $\Delta\Pi^{(1)}$, показан на Рис. 1.5.

Оказывается, вклады супердиаграмм (d1) – (d6) в функцию \mathcal{S} равны 0 в пределе нулевых внешних импульсов. Действительно, суперграфы (d1) – (d3) содержат тройную вершину $V^2\bar{D}^2H$ (с суперполем \bar{D}^2H на внешней линии), которая равна 0 в пределе $p \rightarrow 0$, как было продемонстрировано ранее. Для того, чтобы понять причину, из-за которой суперграфы (d4) – (d6) дают нулевые вклады, проинтегрируем по частям суперсимметричные ковариантные производные \bar{D}^2 или D^2 , идущие от духовых пропагаторов (1.72) или (1.73). При этом учтем, что их действием на внешние суперполя в пределе $p \rightarrow 0$, $q \rightarrow 0$ можно пренебречь (соответствующие слагаемые будут пропорциональны внешним импульсам, которые равны нулю в рассматриваемом пределе). Иллюстрация этой процедуры на примере суперграфа (d6) показана на Рис. 1.6. После интегрирования по частям суперсимметричные ковариантные производные D^2 или \bar{D}^2 будут действовать на пропагатор квантового калибровочного

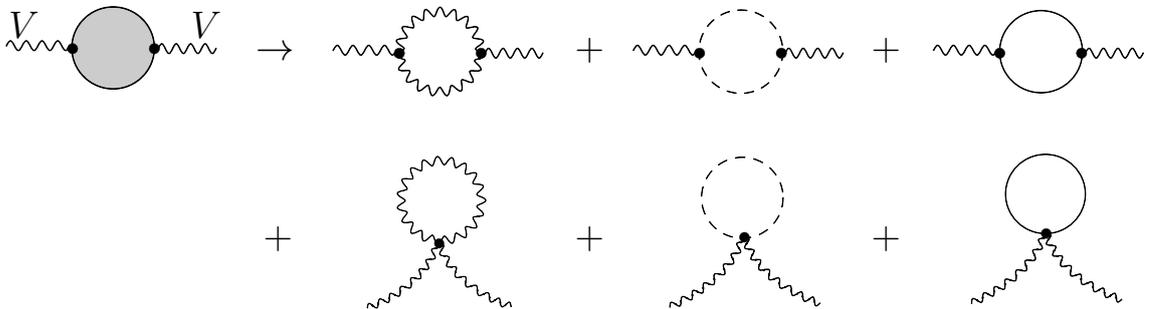


Рис. 1.5. Однопетлевые суперграфы, дающие вклады в поляризационный оператор квантового калибровочного суперполя. Сплошные линии обозначают пропагаторы суперполей материи ϕ_i , а также суперполей Паули–Вилларса.



Рис. 1.6. В суперграфе (d6) интегрируем по частям производные \bar{D}^2 и D^2 , идущие из духового пропагатора. После этого они будут действовать на пропагатор квантового калибровочного суперполя, так как вычисления проводятся в пределе нулевых внешних импульсов.

суперполя, что приводит к выражениям

$$D^2 \left(\frac{1}{R\partial^2} - \frac{1}{16\partial^4} (D^2\bar{D}^2 + \bar{D}^2D^2) \left(\frac{\xi_0}{K} - \frac{1}{R} \right) \right) = \frac{\xi_0 D^2}{\partial^2 K}; \quad (1.100)$$

$$\bar{D}^2 \left(\frac{1}{R\partial^2} - \frac{1}{16\partial^4} (D^2\bar{D}^2 + \bar{D}^2D^2) \left(\frac{\xi_0}{K} - \frac{1}{R} \right) \right) = \frac{\xi_0 \bar{D}^2}{\partial^2 K}. \quad (1.101)$$

В результате, оставшиеся производные D^2 или \bar{D}^2 будут действовать на поляризационный оператор квантового калибровочного суперполя, который имеет поперечную структуру, см. формулу (1.48). Принимая во внимание формулы

$$D^2\partial^2\Pi_{1/2} = 0; \quad \bar{D}^2\partial^2\Pi_{1/2} = 0, \quad (1.102)$$

заключаем, что вклады супердиаграмм (d4) — (d6) равны 0. Таким образом, четвертая группа супердиаграмм дает нулевой вклад в функцию \mathcal{S} в пределе нулевых внешних импульсов.

5. В последнюю, пятую группу входят двухпетлевые супердиаграммы (E1) и (E2), изображенные на Рис. 1.7. Они содержат однопетлевые поддиаграммы со всеми возможными вставками внешней линии суперполя $\bar{D}^2 H$ в однопетлевой поляризационный оператор квантового калибровочного суперполя. Вид таких однопетлевых (под)диаграмм показан на Рис. 1.8. Сначала мы рассмотрим суммарный вклад однопетлевых супердиаграмм (e1) — (e11) в эффективное действие (в пределе нулевого внешнего импульса суперполя $\bar{D}^2 H$), и далее на

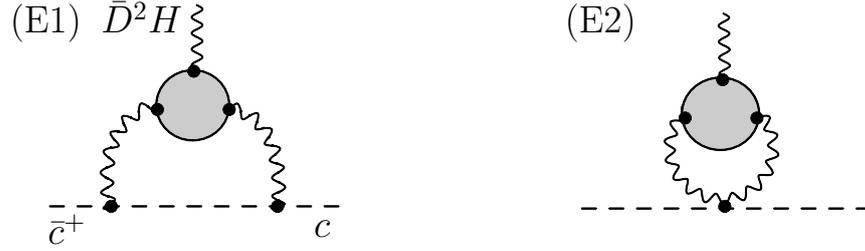


Рис. 1.7. Двухпетлевые суперграфы, содержащие все возможные вставки внешней $\bar{D}^2 H$ -линии в однопетлевой поляризационный оператор квантового калибровочного суперполя.

его основе получим вклады супердиаграмм (E1) и (E2) в функцию \mathcal{S} в пределе $p \rightarrow 0, q \rightarrow 0$.

Автор данной диссертации вычислял однопетлевые (под)диаграммы (e4) и (e8), содержащие пятерные вершины, а также проводил суммирование всех результатов для (под)диаграмм (e1) — (e11) и занимался анализом итоговых выражений для вкладов супердиаграмм (E1) и (E2).

Пятерная вершина калибровочных суперполей после замены $V \rightarrow \bar{D}^2 H$ в пределе $p \rightarrow 0$ имеет вид

$$\begin{aligned}
& -\frac{\text{tr}}{24e_0^2} \int d^4x d^4\theta \left(\bar{D}^2 D^a [V, [V, \bar{D}^2 H]] R [V, D_a V] \right. \\
& \left. + \bar{D}^2 D^a V R [[V, [V, \bar{D}^2 H]], D_a V] + \bar{D}^2 D^a V R [V, D_a [V, [V, \bar{D}^2 H]]] \right) \\
& -\frac{\text{tr}}{192e_0^2 \Lambda^2} \int d^4x d^4\theta \sum_{n=1}^{\infty} r_n \sum_{\alpha=0}^{n-1} \left(\left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2} \right)^\alpha D^2 \bar{D}^2 D^a [V, [V, \bar{D}^2 H]] \right. \\
& \times [V, \left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2} \right)^{n-1-\alpha} \bar{D}^2 D_a V] + \left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2} \right)^\alpha D^2 \bar{D}^2 D^a V \\
& \times [[V, [V, \bar{D}^2 H]], \left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2} \right)^{n-1-\alpha} \bar{D}^2 D_a V] + \left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2} \right)^\alpha D^2 \bar{D}^2 D^a V \\
& \left. \times [V, \left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2} \right)^{n-1-\alpha} \bar{D}^2 D_a [V, [V, \bar{D}^2 H]]] \right), \tag{1.103}
\end{aligned}$$

где $[V, \bar{D}^2 H] = V \bar{D}^2 H - \bar{D}^2 H V$ и т.п.

Выражение (1.103) было использовано для вычисления вклада

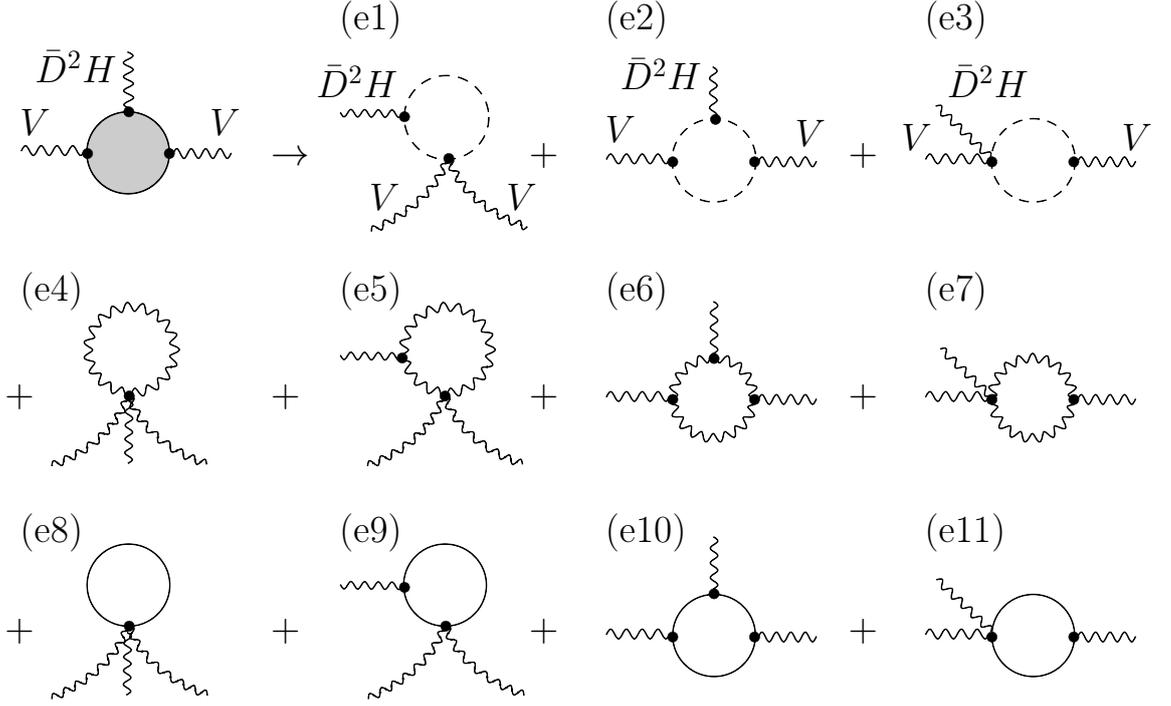


Рис. 1.8. Суперграфы, которые получаются в результате присоединения всеми возможными способами внешней $\bar{D}^2 H$ -линии к однопетлевым диаграммам, дающим вклады в поляризационный оператор квантового калибровочного суперполя.

(под)диаграммы (e4) в эффективное действие в пределе $p \rightarrow 0$. Он равен

$$\frac{e_0^3 C_2}{16} f^{ABC} \int d^4\theta \bar{D}^2 H^A(0, \theta) \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} [\bar{D}_{\dot{a}}, D_b] V^B(-l, \theta) V^C(l, \theta) (\gamma^\mu)^{\dot{a}b} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{k_\mu R_{k+l}}{k^4} \left(\frac{\xi_0}{K_k} - \frac{1}{R_k} \right) - \frac{(2k+l)_\mu}{k^2 R_k} \frac{(R_{k+l} - R_k)}{((k+l)^2 - k^2)} \right). \quad (1.104)$$

Необходимо отметить, что данное выражение не является хорошо определенным и поэтому записано формально. Однако это не представляет проблемы, поскольку его следует сложить с остальными вкладками диаграмм (ei).

Пятерную вершину, содержащую две линии суперполей материи и три линии квантовых калибровочных суперполей, одна из которых соответствует $\bar{D}^2 H$, достаточно найти в частном случае, отвечающем топологии диаграммы (e8). А именно, перейдем в импульсное представление и рассмотрим случай, когда импульс суперполя $\bar{D}^2 H$ равен 0, импульсы двух суперполей V равны $-l^\mu$

и l^μ , а импульсы киральных и антикиральных суперполей материи равны k^μ и $-k^\mu$, соответственно. Тогда получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3} \int d^4\theta \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \phi^+(-k, \theta) \left(\bar{D}^2 H(0, \theta) V(-l, \theta) V(l, \theta) + V(-l, \theta) \right. \\
& \times \bar{D}^2 H(0, \theta) V(l, \theta) + V(-l, \theta) V(l, \theta) \bar{D}^2 H(0, \theta) \left. \right) \phi(k, \theta) (F_k + k^2 F'_k) \\
& - \frac{1}{48} \int d^4\theta \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \bar{D}^2 \phi^+ \left(2\bar{D}^2 H V V - V \bar{D}^2 H V + 2V V \bar{D}^2 H \right) D^2 \phi F'_k \\
& + \frac{1}{16} \int d^4\theta \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \left(\bar{D}^2 (\phi^+ V) V \bar{D}^2 H D^2 \phi + \phi^+ \bar{D}^2 H V \bar{D}^2 (V D^2 \phi) \right. \\
& - \phi^+ V \bar{D}^2 D^2 (V \bar{D}^2 H \phi) + \bar{D}^2 \phi^+ V D^2 (V \bar{D}^2 H \phi) - \phi^+ \bar{D}^2 H V \bar{D}^2 D^2 (V \phi) \\
& \left. + \phi^+ \bar{D}^2 H V \bar{D}^2 (V D^2 \phi) \right) \left(\frac{F_k + k^2 F'_k}{k^2 - (k+l)^2} + \frac{(k+l)^2 F_{k+l} - k^2 F_k}{((k+l)^2 - k^2)^2} \right) \\
& + \frac{1}{256} \int d^4\theta \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \left(\bar{D}^2 \phi^+ V D^2 \bar{D}^2 (V \bar{D}^2 H D^2 \phi) + \bar{D}^2 \phi^+ \bar{D}^2 H V \right. \\
& \left. \times D^2 \bar{D}^2 (V D^2 \phi) \right) \left(\frac{F'_k}{k^2 - (k+l)^2} + \frac{F_{k+l} - F_k}{((k+l)^2 - k^2)^2} \right). \tag{1.105}
\end{aligned}$$

Здесь мы опустили индексы у суперполей в представлении R , и аргументы суперполей написали явно только в первом подынтегральном выражении: во всех других членах их можно однозначно восстановить по указанному образцу (в частности, суперполю V , стоящему левее, всегда соответствует импульс $-l^\mu$). Штрих у функции-регулятора $F_k \equiv F(-k^2/\Lambda^2)$ означает производную по полному аргументу. Внося очевидные изменения в выражение (1.105), можно легко получить аналогичную пятерную вершину для суперполей Паули–Вилларса.

Пропагаторы суперполей материи равны

$$\langle \phi^{*i}(x, \theta) \phi_j(y, \theta) \rangle = -\frac{iF}{4(\partial^2 F^2 + m_0^2)} D_x^2 \bar{D}_y^2 \delta_{xy}^8 \delta_j^i; \tag{1.106}$$

$$\langle \phi_i(x, \theta) \phi_j(y, \theta) \rangle = -\frac{i}{\partial^2 F^2 + m_0^2} (m_0^*)_{ij} \bar{D}_x^2 \delta_{xy}^8; \tag{1.107}$$

$$\langle \phi^{*i}(x, \theta) \phi^{*j}(y, \theta) \rangle = -\frac{i}{\partial^2 F^2 + m_0^2} m_0^{ij} D_x^2 \delta_{xy}^8. \quad (1.108)$$

Выражения для пропагаторов суперполей Паули–Вилларса имеют аналогичный вид.

С помощью выражений для вершины (1.105) и пропагатора (1.106) был вычислен вклад диаграммы (e8) в эффективное действие в пределе $p \rightarrow 0$. В данном случае мы не будем выписывать его, как и результаты для остальных однопетлевых (под)диаграмм (ei), изображенных на Рис. 1.8, поскольку выражения для них слишком громоздки. Вместо этого рассмотрим структуру итогового выражения, полученного после суммирования всех этих результатов:

$$e_0^3 f^{ABC} \int d^4\theta \bar{D}^2 H^A(0, \theta) \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} [\bar{D}_{\dot{a}}, D_b] V^B(-l, \theta) V^C(l, \theta) (\gamma^\mu)^{\dot{a}b} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(T(R) N_{1\mu}(k, l) + C_2 N_{2\mu}(k, l) \right), \quad (1.109)$$

где функции $N_{1\mu}(k, l)$ и $N_{2\mu}(k, l)$ включают в себя соответствующие вклады диаграмм (ei). Оказывается, что данные функции удовлетворяют соотношениям

$$N_{1\mu}(-k - l, l) = -N_{1\mu}(k, l); \quad (1.110)$$

$$N_{2\mu}(-k - l, l) = -N_{2\mu}(k, l). \quad (1.111)$$

В качестве примера приведем явный вид функции $N_{1\mu}(k, l)$ (вид $N_{2\mu}(k, l)$ значительно сложнее), опуская не существенный в данном случае общий множитель,

$$N_{1\mu}(k, l) \sim \frac{(2k + l)_\mu}{(k + l)^2 - k^2} F_{k+l} F_k \left(\frac{1}{k^2 F_k^2 - m_0^2} - \frac{1}{k^2 F_k^2 - M^2} - \frac{1}{(k + l)^2 F_{k+l}^2 - m_0^2} + \frac{1}{(k + l)^2 F_{k+l}^2 - M^2} \right). \quad (1.112)$$

Принимая во внимание, что $F_{-k} = F_k$ и $F_{-k-l} = F_{k+l}$, справедливость формулы (1.110) становится очевидной.

В таком случае, совершая в формуле (1.109) замену переменной интегрирования $k^\mu \rightarrow -k^\mu - l^\mu$ (которая является допустимой), видим, что выражение

меняет знак и, следовательно, равно 0. А значит, двухпетлевые супердиаграммы (E1) и (E2) дают нулевой вклад в функцию \mathcal{S} в пределе нулевых внешних импульсов.

В итоге, суммарный вклад в функцию \mathcal{S} всех пяти групп супердиаграмм равен 0 в пределе $p \rightarrow 0$, $q \rightarrow 0$. Тогда, опираясь на соображения, изложенные в параграфе 1.5, мы заключаем, что тройные духово-калибровочные вершины не перенормируются в рассматриваемом порядке теории возмущений при произвольном значении калибровочного параметра. Таким образом, результаты проведенной двухпетлевой проверки находятся в полном соответствии с общим утверждением, доказанным в работе [18].

Глава 2

Вычисление трехпетлевых вкладов духов Фаддеева–Попова в β -функцию с помощью модифицированных вакуумных суперграфов

2.1. NSVZ β -функция и ее новая форма

В данной главе рассматривается новый метод вычисления вкладов в β -функцию $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий Янга–Миллса, регуляризованных высшими ковариантными производными, основанный на использовании модифицированных вакуумных суперграфов. С помощью данного метода будут получены некоторые трехпетлевые вклады духов Фаддеева–Попова в β -функцию. Необходимо отметить, что здесь идет речь о β -функции, заданной в терминах голых параметров α_0 , λ_0 и Y_0 . Следует помнить о различиях в определении ренормгрупповых функций в терминах голых и перенормированных параметров. В первом случае они определяются формулами

$$\begin{aligned} \frac{\beta(\alpha_0, \lambda_0, Y_0)}{\alpha_0^2} &= -\frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\frac{1}{\alpha_0} \right) \Big|_{\alpha, \lambda, Y = \text{const}} \\ &= \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(d^{-1} - \alpha_0^{-1} \right) \Big|_{\alpha, \lambda, Y = \text{const}; p \rightarrow 0}; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$(\gamma_\phi)_i^j(\alpha_0, \lambda_0, Y_0) = -\frac{d(\ln Z_\phi)_i^j}{d \ln \Lambda} \Big|_{\alpha, \lambda, Y = \text{const}} = \frac{d(\ln G_\phi)_i^j}{d \ln \Lambda} \Big|_{\alpha, \lambda, Y = \text{const}; q \rightarrow 0}; \quad (2.2)$$

$$\gamma_V(\alpha_0, \lambda_0, Y_0) = -\frac{d \ln Z_V}{d \ln \Lambda} \Big|_{\alpha, \lambda, Y = \text{const}} = \frac{1}{2} \frac{d \ln G_V}{d \ln \Lambda} \Big|_{\alpha, \lambda, Y = \text{const}; q \rightarrow 0}; \quad (2.3)$$

$$\gamma_c(\alpha_0, \lambda_0, Y_0) = -\frac{d \ln Z_c}{d \ln \Lambda} \Big|_{\alpha, \lambda, Y = \text{const}} = \frac{d \ln G_c}{d \ln \Lambda} \Big|_{\alpha, \lambda, Y = \text{const}; q \rightarrow 0}, \quad (2.4)$$

где γ_ϕ , γ_V и γ_c обозначают аномальные размерности суперполей материи, квантового калибровочного суперполя и духов Фаддеева–Попова, соответственно. Определения входящих в эти формулы констант перенормировки и функций Грина даны в параграфе 1.3. Условия $p \rightarrow 0$ или $q \rightarrow 0$ накладываются для того, чтобы избавиться от конечных слагаемых, пропорциональных $(p/\Lambda)^n$ или $(q/\Lambda)^n$, $n \geq 1$. Как известно [59], таким образом определенные ренормгрупповые функции являются схемно-независимыми при некотором фиксированном выборе регуляризации. Зависимость от регуляризации для них имеет место, начиная с двухпетлевого приближения для аномальных размерностей и трехпетлевого — для β -функции.

С другой стороны, физический смысл могут иметь не голые, а перенормированные константы связи, и поэтому более стандартным является определение ренормгрупповых функций через перенормированные параметры

$$\tilde{\beta}(\alpha, \lambda, Y) = \left. \frac{d\alpha}{d \ln \mu} \right|_{\alpha_0, \lambda_0, Y_0 = \text{const}} ; \quad (2.5)$$

$$(\tilde{\gamma}_\phi)_i^j(\alpha, \lambda, Y) = \left. \frac{d(\ln Z_\phi)_i^j}{d \ln \mu} \right|_{\alpha_0, \lambda_0, Y_0 = \text{const}} ; \quad (2.6)$$

$$\tilde{\gamma}_V(\alpha, \lambda, Y) = \left. \frac{d \ln Z_V}{d \ln \mu} \right|_{\alpha_0, \lambda_0, Y_0 = \text{const}} ; \quad (2.7)$$

$$\tilde{\gamma}_c(\alpha, \lambda, Y) = \left. \frac{d \ln Z_c}{d \ln \mu} \right|_{\alpha_0, \lambda_0, Y_0 = \text{const}} . \quad (2.8)$$

В данном случае они зависят уже не только от регуляризации, но и от выбора схемы вычитаний [122]. Схемная зависимость у аномальных размерностей проявляется, начиная с двухпетлевого приближения, в то время как у β -функции — с трехпетлевого приближения.

В $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теориях известно соотношение между β -функцией и аномальной размерностью суперполей материи,

называемое NSVZ β -функцией [19–22]. В неабелевом случае оно имеет вид

$$\frac{\tilde{\beta}(\alpha, \lambda, Y)}{\alpha^2} = -\frac{3C_2 - T(R) + C(R)_i^j (\tilde{\gamma}_\phi)_j^i(\alpha, \lambda, Y)/r}{2\pi(1 - C_2\alpha/2\pi)}, \quad (2.9)$$

где константа r равна размерности калибровочной группы G , а другие теоретико-групповые множители определены в параграфе 1.1, см. формулы (1.4), (1.5) и (1.7). Отметим, что из-за присутствия константы связи в знаменателе правой части соотношения (2.9) вклад в $\tilde{\beta}$ в некотором порядке теории возмущений связывается со вкладами в $(\tilde{\gamma}_\phi)_j^i$ во всех предыдущих порядках.

Долго время оставалось непонятным, в какой схеме перенормировок формула (2.9) является справедливой во всех порядках, и каким образом она возникает при суммировании соответствующих членов ряда теории возмущений. Ответы на оба этих вопроса были даны в серии работ [18, 52–54]. При этом для того, чтобы ответить на второй вопрос, оказалось значительно удобнее рассматривать NSVZ соотношение для ренормгрупповых функций, определенных через голые параметры,

$$\frac{\beta(\alpha_0, \lambda_0, Y_0)}{\alpha_0^2} = -\frac{3C_2 - T(R) + C(R)_i^j (\gamma_\phi)_j^i(\alpha_0, \lambda_0, Y_0)/r}{2\pi(1 - C_2\alpha_0/2\pi)}. \quad (2.10)$$

Первый шаг всепетлевого доказательства NSVZ β -функции состоит в использовании теоремы о неперенормировке тройных духово-калибровочных вершин, см. формулу (1.66). С ее помощью NSVZ соотношение (2.10) можно представить в эквивалентной форме [18]

$$\frac{\beta(\alpha_0, \lambda_0, Y_0)}{\alpha_0^2} = -\frac{1}{2\pi} \left(3C_2 - T(R) - 2C_2\gamma_c(\alpha_0, \lambda_0, Y_0) - 2C_2\gamma_V(\alpha_0, \lambda_0, Y_0) + \frac{1}{r} C(R)_i^j (\gamma_\phi)_j^i(\alpha_0, \lambda_0, Y_0) \right), \quad (2.11)$$

которая связывает β -функцию не только с аномальной размерностью суперполей материи, но и с аномальными размерностями квантового калибровочно-

го суперполя и духов Фаддеева–Попова. Обратим внимание, что, в отличие от формулы (2.10), правая часть данного соотношения не содержит константы связи в знаменателе. Как следствие, новая форма NSVZ соотношения связывает β -функцию в L -петлевом приближении с аномальными размерностями квантовых суперполей в $(L - 1)$ -петлевом приближении.

В связи с этим имеет место следующая графическая интерпретация новой формы NSVZ соотношения (2.11). Если стартовать с рассмотрения некоторого L -петлевого вакуумного суперграфа, то, прикрепляя к нему две внешние линии фоновых калибровочных суперполей всеми возможными способами, получаем набор супердиаграмм, дающих суммарно некоторый L -петлевой вклад в β -функцию. В то же время, разрезая исходный вакуумный суперграф по внутренним линиям (каждый раз — только по одной), получаем набор $(L - 1)$ -петлевых суперграфов с двумя внешними линиями тех или иных квантовых суперполей. Если среди них есть диаграммы, которые не являются одночастично-неприводимыми (ОЧН), то следует продолжить разрезания линий с теми же самыми импульсами, что и у первоначально разрезанной линии, до получения ОЧН диаграмм. С помощью полученных двухточечных суперграфов можно найти $(L - 1)$ -петлевые вклады в аномальные размерности, входящие в правую часть новой формы NSVZ соотношения. Тем самым оказывается возможным исследовать NSVZ соотношение в виде (2.11) на уровне отдельных групп супердиаграмм, построенных описанным способом. Кроме того, именно такая форма NSVZ β -функции, как было показано, естественным образом возникает в результате суммирования соответствующих типов суперграфов во всех порядках теории возмущений.

Механизм пертурбативного возникновения новой формы NSVZ соотношения для ренормгрупповых функций, заданных через голые параметры, был исследован в работе [52]. В ней было доказано, что, если для регуляризации используется метод высших ковариантных производных, β -функция представляется в виде интегралов от двойных полных производных по петлевым им-

пульсам. При этом такие интегралы, вообще говоря, не равны 0, как может показаться на первый взгляд. Дело в том, что присутствие безмассовых пропагаторов, на которые действуют двойные полные производные, приводит к появлению δ -сингулярностей в подынтегральных выражениях. Данную ситуацию можно проиллюстрировать тождеством

$$\frac{\partial^2}{\partial P_\mu \partial P^\mu} \left(\frac{1}{P^2} \right) = -4\pi^2 \delta^4(P), \quad (2.12)$$

где импульс P^μ евклидов. Тогда, обращаясь к графической интерпретации новой формы NSVZ соотношения, можно сказать, что разрезание внутренних линий в вакуумных суперграфах происходит в соответствии с формулой (2.12).

Рассмотрим простейший пример вычисления интеграла от двойных полных производных вида

$$\begin{aligned} I &\equiv \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{\partial^2}{\partial P_\mu \partial P^\mu} \left(\frac{f(P^2)}{P^2} \right) \\ &= -2 \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial P^\mu} \left(\frac{P^\mu}{P^4} \left(f(P^2) - P^2 f'(P^2) \right) \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

который записан в евклидовом пространстве после поворота Вика, и функция $f(P^2)$ не имеет сингулярностей и убывает на бесконечности достаточно быстро. Подынтегральное выражение в (2.13) сингулярно в точке $P^\mu = 0$, и интегрирование ведется по всему объему четырехмерного импульсного пространства, из которого вырезана бесконечно малая окрестность особой точки $P^\mu = 0$. Поэтому такой интеграл сводится к сумме интегралов по поверхностям бесконечно большой трехмерной сферы S_∞^3 и бесконечно малой сферы S_ε^3 , окружающей точку $P^\mu = 0$ (с нормалью, направленной к началу координат):

$$\begin{aligned} I &= - \oint_{S_\infty^3} \frac{dS_\mu}{8\pi^4} \frac{P^\mu}{P^4} \left(f(P^2) - P^2 f'(P^2) \right) \\ &\quad - \oint_{S_\varepsilon^3} \frac{dS_\mu}{8\pi^4} \frac{P^\mu}{P^4} \left(f(P^2) - P^2 f'(P^2) \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Поскольку интеграл по S_∞^3 равен 0, то мы получаем

$$I = \oint_{S_\infty^3} \frac{dS}{8\pi^4} \frac{1}{P^3} \left(f(P^2) - P^2 f'(P^2) \right) = \frac{1}{4\pi^2} f(0). \quad (2.15)$$

Действительно, данный результат, вообще говоря, отличен от 0. Заметим, что, фактически, при вычислении интеграла I необходимо учесть сингулярные вклады, возникающие в соответствии с формулой (2.12), с обратным знаком

$$\int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{\partial^2}{\partial P_\mu \partial P^\mu} \left(\frac{f(P^2)}{P^2} \right) = \frac{1}{4\pi^2} f(0) = \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} f(P^2) 4\pi^2 \delta^4(P). \quad (2.16)$$

Аналогичные соображения остаются справедливыми и при вычислении петлевых интегралов от двойных полных производных, дающих β -функцию. Присутствие δ -сингулярностей позволяет без труда вычислить один из петлевых интегралов. Это объясняет, каким образом β -функция в некотором порядке теории возмущений может быть связана с соответствующими квантовыми поправками в предыдущем порядке. Однако, чтобы доказать соотношение (2.11), необходимо еще просуммировать во всех петлях сингулярные вклады, порождаемые действием двойных полных производных на безмассовые пропагаторы суперполей материи, квантового калибровочного суперполя и духов Фаддеева–Попова, и выразить результаты в терминах аномальных размерностей квантовых суперполей. Данная процедура была выполнена в работах [53, 54].

Что же касается задачи построения всепетлевых NSVZ схем, то при таком подходе она сводится к исследованию возможности получения таких граничных условий на константы перенормировки, которые обеспечивали бы формальное совпадение двух типов определений ренормгрупповых функций с точностью до переобозначения их аргументов, т.е.

$$\tilde{\beta}(\alpha, \lambda, Y) = \beta(\alpha_0 \rightarrow \alpha, \lambda_0 \rightarrow \lambda, Y_0 \rightarrow Y); \quad (2.17)$$

$$(\tilde{\gamma}_\phi)_i^j(\alpha, \lambda, Y) = (\gamma_\phi)_i^j(\alpha_0 \rightarrow \alpha, \lambda_0 \rightarrow \lambda, Y_0 \rightarrow Y); \quad (2.18)$$

$$\tilde{\gamma}_V(\alpha, \lambda, Y) = \gamma_V(\alpha_0 \rightarrow \alpha, \lambda_0 \rightarrow \lambda, Y_0 \rightarrow Y); \quad (2.19)$$

$$\tilde{\gamma}_c(\alpha, \lambda, Y) = \gamma_c(\alpha_0 \rightarrow \alpha, \lambda_0 \rightarrow \lambda, Y_0 \rightarrow Y). \quad (2.20)$$

В неабелевом случае подходящие граничные условия были найдены в работе [18] (для абелева случая см. [59]) в случае применения метода высших ковариантных производных для регуляризации теории. Их можно записать в виде

$$\alpha(\alpha_0, \lambda_0, Y_0, x_0) = \alpha_0; \quad (Z_\phi)_i^j(\alpha_0, \lambda_0, Y_0, x_0) = \delta_i^j; \quad (2.21)$$

$$Z_V(\alpha_0, \lambda_0, Y_0, x_0) = 1; \quad Z_c(\alpha_0, \lambda_0, Y_0, x_0) = 1; \quad (2.22)$$

$$Y(\alpha_0, \lambda_0, Y_0, x_0) = Y_0, \quad (2.23)$$

где x_0 обозначает некоторое фиксированное значение $\ln \Lambda/\mu$. Например, значение $x_0 = 0$ определяет т.н. HD+MSL схему вычитаний, в соответствии с которой в константы перенормировки включаются только члены, пропорциональные $(\ln \Lambda/\mu)^n$, $n \geq 1$. В известном смысле, данная схема минимальных вычитаний логарифмов при использовании регуляризации высшими ковариантными производными является аналогом схемы минимальных вычитаний полюсных членов в случае применения размерной техники. При других значениях x_0 условия (2.21) — (2.23) задают множество HD+MSL-подобных схем. Все они связаны между собой посредством переопределения параметра μ .

Таким образом, NSVZ соотношение для ренормгрупповых функций, определенных через перенормированные параметры, (как в стандартном виде (2.9), так и в новой форме, включающей также $\tilde{\gamma}_V$ и $\tilde{\gamma}_c$) справедливо в классе HD+MSL-подобных схем.

2.2. Метод вычисления вкладов в β -функцию на основе модифицированных вакуумных суперграфов

В работе [52] был предложен новый метод вычисления вкладов в β -функцию, заданную в терминах голых параметров, для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных неабелевых калибровочных теорий, регуляризованных высшими ковариантными производными. Он напрямую следует из тех идей, на которых основано общее доказательство факторизации β -функции в интегралы от двойных полных производных. Согласно данному методу, вклады в β -функцию, начиная с двухпетлевого приближения, можно построить при помощи модифицированных вакуумных суперграфов. При этом результат получается непосредственно в виде петлевых интегралов от двойных полных производных.

Применение метода модифицированных вакуумных суперграфов заключается в реализации следующего алгоритма:

1. Выберем некоторый ($L \geq 2$)-петлевой вакуумный суперграф. Для начала необходимо записать выражение для его вклада в эффективное действие с помощью правил Фейнмана в $\mathcal{N} = 1$ суперпространстве. Разумеется, вклады всех вакуумных суперграфов равны 0 вследствие интегрирования по антикоммутирующим переменным θ , и поэтому выражение для рассматриваемого вакуумного суперграфа записывается формально: его следует воспринимать как заготовку для дальнейшей модификации.
2. В произвольную вершину суперграфа, содержащую интегрирование по $d^4\theta$, вставим выражение

$$\theta^4 (v^A)^2, \quad (2.24)$$

где $\theta^4 \equiv \theta^a \theta_a \bar{\theta}^{\dot{b}} \bar{\theta}_{\dot{b}}$ и $v^A(x)$ — медленно меняющиеся функции, взятые на некотором масштабе l , причем в пределе $l \rightarrow \infty$ они стремятся к 0. Например, можно выбрать $v^A(X) = v_0^A \exp(-X^\mu X_\mu / (2l^2))$, где $X^\mu = (x^i, ix^0)$

— евклидовы координаты и $v_0^A = \text{const}$. Величина

$$\mathcal{V}_4 \equiv \int d^4x (v^A(x))^2 \quad (2.25)$$

при конечных l дает регуляризованный объем пространства-времени; при этом $\mathcal{V}_4 \rightarrow \infty$ в пределе $l \rightarrow \infty$.

3. Последовательно освобождая δ_{xy}^8 -функции от действия суперсимметричных ковариантных производных (для этого используем известную алгебру D -производных [87] и метод интегрирования по частям в $\mathcal{N} = 1$ суперпространстве), проводим по ним интегрирование. Далее, переходя в импульсное представление и совершая поворот Вика, получаем выражение для вакуумного суперграфа, модифицированного вставкой (2.24), в виде евклидовых петлевых интегралов. Обратим внимание, что координатная часть, в конечном счете, сводится к \mathcal{V}_4 . Кроме того, отметим, что можно пренебречь слагаемыми, пропорциональными $(l\Lambda)^{-n}$, $n \geq 1$.

4. Выберем L пропагаторов с независимыми евклидовыми импульсами, которые обозначим Q_i^μ , $i = 1, \dots, L$. Пусть индексы a_i и b_i соответствуют их началам и концам. Тогда произведение всех выбранных пропагаторов содержит множитель $\prod_{i=1}^L \delta_{a_i}^{b_i}$. Совершим формальную замену этого множителя на дифференциальный оператор, содержащий двойные полные производные,

$$\prod_{i=1}^L \delta_{a_i}^{b_i} \longrightarrow \sum_{k,l=1}^L \prod_{i \neq k,l} \delta_{a_i}^{b_i} (T^A)_{a_k}^{b_k} (T^A)_{a_l}^{b_l} \frac{\partial^2}{\partial Q_k^\mu \partial Q_l^\mu}, \quad (2.26)$$

где $(T^A)_{a_k}^{b_k}$ обозначает генераторы в соответствующем представлении.

5. На последнем шаге подействуем на полученное выражение оператором

$$-\frac{2\pi}{r\mathcal{V}_4} \frac{d}{d \ln \Lambda}. \quad (2.27)$$

Производную по $\ln \Lambda$ следует вычислять при фиксированных значениях перенормированных параметров перед взятием петлевых интегралов.

В результате, получаем L -петлевой вклад в величину

$$\frac{1}{\alpha_0^2}(\beta - \beta_{1\text{-loop}}) \quad (2.28)$$

непосредственно в виде интегралов от двойных полных производных по петлевым импульсам. Выражение для $\beta_{1\text{-loop}}$ имеет вид (см., например, [115])

$$\beta_{1\text{-loop}} = -\frac{\alpha_0^2}{2\pi}(3C_2 - T(R)). \quad (2.29)$$

С другой стороны, стандартный способ вычисления вкладов в β -функцию требует рассмотрения супердиаграмм с двумя внешними линиями фонового калибровочного суперполя, см. формулу (2.1). Вклад в β -функцию, найденный с помощью некоторого вакуумного суперграфа, соответствует суммарному вкладу супердиаграмм, получающихся в результате присоединения двух внешних линий суперполя V к исходному вакуумному суперграфу всеми возможными способами. Как следствие, метод модифицированных вакуумных суперграфов предполагает значительно меньший объем вычислений по сравнению со стандартным способом вычисления вкладов в β -функцию.

2.3. Применение метода модифицированных вакуумных суперграфов для вычисления вкладов духов Фаддеева–Попова в β -функцию в трехпетлевом приближении

Применим алгоритм, подробно изложенный в параграфе 2.2, для вычисления некоторых трехпетлевых вкладов в β -функцию, идущих от суперграфов с петлей духов Фаддеева–Попова. Полный набор вакуумных суперграфов, который нужно рассмотреть для вычисления вклада духов Фаддеева–Попова в β -функцию вплоть до трехпетлевого приближения включительно, показан на Рис. 2.1. Автор диссертации занимался вычислением вкладов в β -функцию на основе суперграфов (f8) и (f13).

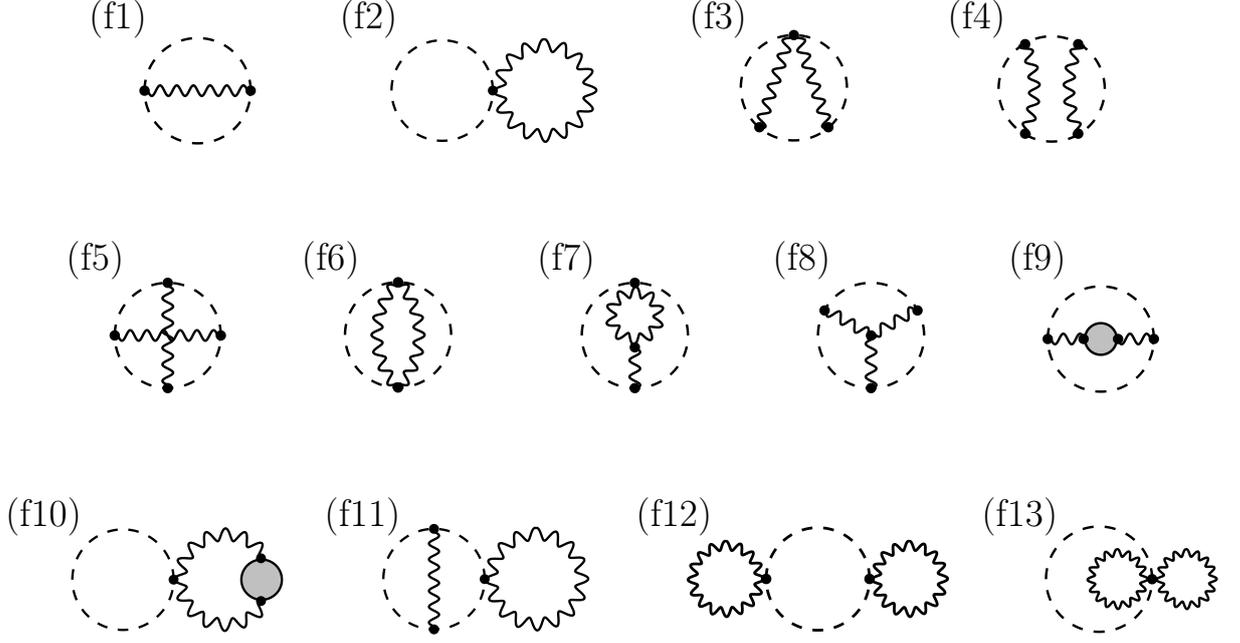


Рис. 2.1. Вакуумные суперграфы, с помощью которых можно вычислить вклады духов Фаддеева–Попова в β -функцию в трехпетлевом приближении.

Продemonстрируем основные шаги метода модифицированных вакуумных суперграфов на примере супердиаграммы (f13). Первым делом запишем формальное выражение для ее вклада в эффективное действие:

$$\begin{aligned}
& \frac{ie_0^4}{45} f^{ABC} f^{CDE} f^{EFG} f^{GHI} \delta^{AI} \left(\delta^{BD} \delta^{FH} + \delta^{BF} \delta^{DH} \right. \\
& \left. + \delta^{BH} \delta^{DF} \right) \int d^4x d^4\theta \left(\frac{\bar{D}^2 D^2}{4\partial^2} + \frac{D^2 \bar{D}^2}{4\partial^2} \right) \delta_{xy}^8 \Big|_{y=x} \\
& \times \left[\frac{1}{R\partial^2} - \frac{1}{16\partial^4} (D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2) \left(\frac{\xi_0}{K} - \frac{1}{R} \right) \right] \delta_{xz}^8 \Big|_{z=x} \\
& \times \left[\frac{1}{R\partial^2} - \frac{1}{16\partial^4} (D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2) \left(\frac{\xi_0}{K} - \frac{1}{R} \right) \right] \delta_{xw}^8 \Big|_{w=x}. \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Для этого были использованы формулы для пропагаторов духов Фаддеева–Попова (1.72) и (1.73), пропагатора квантового калибровочного суперполя (1.70), а также выражение для шестерной духово-калибровочной вершины, см. (1.76). Также было принято во внимание, что возможны три варианта со-

единения четырех линий квантового калибровочного суперполя в две петли. Вертикальная черта после δ^8 -функции означает, что после учета действия производных следует отождествить указанные точки суперпространства.

На втором этапе необходимо вставить множитель $\theta^4 (v^A(x))^2$ в подынтегральное выражение (2.30). Дальнейшие вычисления проводятся с использованием известных формул

$$D^2 \bar{D}^2 \delta_{xy}^8 \Big|_{y=x} = 4\delta^4(x-y) \Big|_{y=x}, \quad (2.31)$$

$$\bar{D}^2 D^2 \delta_{xy}^8 \Big|_{y=x} = 4\delta^4(x-y) \Big|_{y=x}, \quad (2.32)$$

а также очевидного тождества $\delta_{xx}^8 = 0$. Теоретико-групповой множитель, включающий произведение структурных констант на δ -символы, равен

$$f^{ABC} f^{CDE} f^{EFG} f^{GHA} \left(\delta^{BD} \delta^{FH} + \delta^{BF} \delta^{DH} + \delta^{BH} \delta^{DF} \right) = \frac{5}{2} C_2^2 r. \quad (2.33)$$

Чтобы убедиться в справедливости данной формулы, нужно воспользоваться определением (1.7) и $\delta^{AA} = r$, а также тождеством

$$f^{ABC} f^{CDE} f^{EFA} = -\frac{1}{2} C_2 f^{BDF}. \quad (2.34)$$

На следующем шаге выполняем переход в импульсное представление. Координатный интеграл по полному суперпространству, в конечном счете, оказывается равен

$$\int d^4x d^4\theta \theta^4 (v^A(x))^2 = 4\mathcal{V}_4. \quad (2.35)$$

Учитывая это и совершая поворот Вика, получаем вклад модифицированного вакуумного суперграфа (f13) в виде

$$\frac{1}{9} r \mathcal{V}_4 e_0^4 C_2^2 \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{d^4L}{(2\pi)^4} \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\xi_0}{K_K} - \frac{1}{R_K} \right) \frac{1}{K^4} \left(\frac{\xi_0}{K_L} - \frac{1}{R_L} \right) \frac{1}{L^4}, \quad (2.36)$$

где евклидов импульс Q^μ соответствует духовой петле, в то время как евклидовы импульсы K^μ и L^μ — петлям калибровочных суперполей.

Далее необходимо заменить произведения δ -символов, идущих от трех имеющихся пропагаторов, на дифференциальный оператор согласно формуле (2.26). Для удобства мы проведем данную формальную замену сразу на уровне формулы (2.33), с учетом произведений δ -символов на соответствующую комбинацию структурных констант,

$$\frac{5}{2}C_2^2 r \rightarrow \frac{5}{2}C_2^3 r \left(\frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial Q_\mu} + \frac{\partial^2}{\partial K^\mu \partial K_\mu} + \frac{\partial^2}{\partial L^\mu \partial L_\mu} \right). \quad (2.37)$$

Наконец, действуя оператором (2.27), получаем вклад в величину (2.28), построенный на основе модифицированного вакуумного суперграфа (f13), в виде интегралов от двойных полных производных по петлевым импульсам,

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{f13}}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) &= -\frac{2\pi}{9}C_2^3 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} e_0^4 \left(\frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial Q_\mu} + 2 \frac{\partial^2}{\partial K^\mu \partial K_\mu} \right) \\ &\times \frac{1}{\mathbf{Q}^2} \left(\frac{\xi_0}{K_K} - \frac{1}{R_K} \right) \frac{1}{K^4} \left(\frac{\xi_0}{K_L} - \frac{1}{R_L} \right) \frac{1}{L^4}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

В данном случае нас интересует только часть петлевого интеграла, содержащая двойную полную производную $\partial^2/\partial Q_\mu^2$, которая действует на множитель \mathbf{Q}^{-2} (для наглядности он был выделен жирным шрифтом), идущий от духового пропагатора. Из новой формы NSVZ соотношения (2.11) следует, что эта часть вклада в β -функцию связана со вкладом в аномальную размерность γ_c от двухпетлевого суперграфа с двумя внешними линиями духов Фаддеева–Попова, который получается посредством разрезания духовой петли в (f13). Ниже мы проверим это утверждение явным образом. В частности, для этого нам потребуется использовать результат интегрирования данной части вклада (2.38) по $d^4 Q$. Применяя формулу (2.16), получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{f13}}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) &= -\frac{C_2^3}{18\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} e_0^4 \left(\frac{\xi_0}{K_K} - \frac{1}{R_K} \right) \frac{1}{K^4} \\ &\times \left(\frac{\xi_0}{K_L} - \frac{1}{R_L} \right) \frac{1}{L^4} + \dots, \end{aligned} \quad (2.39)$$

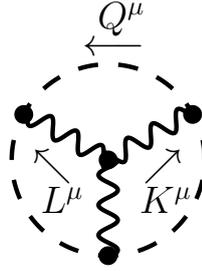


Рис. 2.2. Расстановка независимых петлевых импульсов Q^μ , K^μ и L^μ в суперграфе (f8). Стрелки указывают их направление. Импульсы, соответствующие всем остальным внутренним линиям, могут быть легко восстановлены на основе закона сохранения импульса в вершинах.

где под многоточием подразумевается петлевой интеграл от двойной полной производной $\partial^2/\partial K_\mu^2$ (см. (2.38)), который мы не будем рассматривать. Необходимо отметить, что интегралы, в которых двойная полная производная действует на пропагатор, содержащий множитель вида K^{-4} , дают плохо определенные выражения. Тем не менее, суммарно все подобные «плохие» слагаемые должны взаимоуничтожиться в полном выражении для функции (2.28) в рассматриваемом порядке теории возмущений [54].

Использование описанного выше алгоритма для получения вклада в β -функцию на основе модифицированного суперграфа (f8) значительно более трудоемко. Наличие 6 пропагаторов и 4 вершин, среди которых имеется сложная по структуре тройная калибровочная вершина (1.77), делает вычисление данного модифицированного суперграфа крайне нетривиальной задачей. Поэтому мы опустим детали вычислений, соответствующих пунктам 1 — 3 алгоритма, и перейдем сразу к построению дифференциального оператора, содержащего двойные полные производные.

Выберем независимые петлевые (евклидовы) импульсы Q^μ , K^μ и L^μ так, как показано на Рис. 2.2. Нетрудно видеть, что данный суперграф пропорционален теоретико-групповому множителю

$$f^{ABC} f^{CEF} f^{FHA} f^{EBH} = \frac{1}{2} C_2^2 r, \quad (2.40)$$

причем индексы \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{H} в наших обозначениях соответствуют началам пропагаторов с импульсами Q^μ , K^μ и L^μ . Применяя формулу (2.26) сразу на уровне выражения (2.40), находим, что дифференциальный оператор, содержащий двойные полные производные, для суперграфа (f8) вводится заменой

$$\frac{1}{2}C_2^2 r \rightarrow \frac{1}{2}C_2^3 r \left(\frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial Q_\mu} + \frac{\partial^2}{\partial K^\mu \partial K_\mu} + \frac{\partial^2}{\partial L^\mu \partial L_\mu} + \frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial K_\mu} - \frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial L_\mu} - \frac{\partial^2}{\partial K^\mu \partial L_\mu} \right). \quad (2.41)$$

В итоге, трехпетлевой вклад в β -функцию, построенный на основе модифицированного вакуумного суперграфа (f8), получается равным

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{f8}}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) &= \frac{\pi}{2}C_2^3 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial Q_\mu} + \frac{\partial^2}{\partial K^\mu \partial K_\mu} + \frac{\partial^2}{\partial L^\mu \partial L_\mu} + \frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial K_\mu} - \frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial L_\mu} - \frac{\partial^2}{\partial K^\mu \partial L_\mu} \right) \frac{e_0^4}{K^2 L^2 (K+L)^2} \\ &\times \left\{ \left(\frac{1}{R_K R_L} - \frac{\xi_0^2}{K_K K_L} \right) \left(\frac{2}{Q^2 (Q+L)^2} - \frac{(K+L)^2}{Q^2 (Q-K)^2 (Q+L)^2} \right) \right. \\ &+ \left(\frac{\xi_0}{K_K} - \frac{1}{R_K} \right) \frac{2}{R_L K^2} \left(\frac{(Q-K)^2 + L^2 - (K+L)^2}{Q^2 (Q+L)^2} - \frac{1}{Q^2} \right) \\ &+ \left(\frac{\xi_0}{K_K} - \frac{1}{R_K} \right) \left(\frac{\xi_0}{K_L} - \frac{1}{R_L} \right) \frac{(K+L)^2}{K^2 L^2} \left(\frac{Q^2}{(Q+L)^2 (Q-K)^2} - \frac{1}{Q^2} \right) \\ &+ \frac{2(R_L - R_K)}{(L^2 - K^2) R_{K+L} R_K R_L} \left[\frac{L^2}{Q^2 (Q+L)^2} \left(1 - \frac{K^2}{(Q-K)^2} \right) + \frac{1}{Q^2} \right. \\ &\left. \left. - \frac{Q^2 + (K+L)^2 - 2L^2}{(Q-K)^2 (Q+L)^2} - \left(\frac{\xi_0}{K_{K+L}} - \frac{1}{R_{K+L}} \right) \frac{R_{K+L} (L^2 - K^2) K^2}{(K+L)^2 Q^2 (Q-K)^2} \right] \right\}. \quad (2.42) \end{aligned}$$

В этом выражении мы для наглядности выделили жирным шрифтом множители Q^{-2} , $(Q+L)^{-2}$ и $(Q-K)^{-2}$, которые идут от пропагаторов духов Фаддеева–Попова.

Как и ранее, мы вычисляем сумму сингулярных вкладов, возникающих только от духовых пропагаторов. В данном случае она оказывается равной нулю:

$$\Delta_{\text{f8}}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = 0 + \dots \quad (2.43)$$

В дальнейшем мы сопоставим этот результат на основе новой формы NSVZ β -функции с соответствующим двухпетлевым вкладом в γ_c от супердиаграмм с двумя внешними линиями духов Фаддеева–Попова, получающихся разрезанием духовых пропагаторов в вакуумном суперграфе (f8).

Отметим, что в выражении (2.42) присутствуют также и сингулярности, обусловленные действием двойных полных производных на множители K^{-2} , L^{-2} и $(K + L)^{-2}$, которые происходят из пропагаторов квантового калибровочного суперполя (в формуле (2.43) их вклады обозначены многоточием). Они продуцируют разрезание внутренних линий суперполя V , и идущий от них суммарный вклад в функцию (2.28) было бы интересно сравнить на основе новой формы NSVZ β -функции с соответствующим вкладом в аномальную размерность γ_V (от двухпетлевых суперграфов с двумя внешними линиями суперполя V , графически получающихся разрезанием пропагаторов квантового калибровочного суперполя в диаграмме (f8)). Однако здесь имеется тонкость, связанная с тем, что вклады отдельных суперграфов в квадратичную по суперполю V часть эффективного действия, вообще говоря, не являются поперечными,

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma_V^{(2)} = & -\frac{1}{2e_0^2} \text{tr} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} d^4\theta \left(V(-q, \theta) \partial^2 \Pi_{1/2} V(q, \theta) \Delta G_V(\alpha_0, \lambda_0, Y_0, \Lambda/q) \right. \\ & \left. + V(-q, \theta) V(q, \theta) \Delta \tilde{G}_V(\alpha_0, \lambda_0, Y_0, \Lambda/q) \right). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Для того, чтобы получить выражение, поперечное по своей структуре, т.е. согласующееся с формулой (1.48), необходимо просуммировать все соответствующие суперграфы в данном порядке теории возмущений. Тогда произойдет взаимное уничтожение всех продольных вкладов $\Delta \tilde{G}_V$, а сумма поперечных частей будет

связана с аномальной размерностью γ_V формулой (2.3). Разрезание внутренних линий квантового калибровочного суперполя в некотором модифицированном вакуумном суперграфе будет соответствовать, вообще говоря, не только поперечным ΔG_V , но и продольным $\Delta \tilde{G}_V$ вкладам двухточечных супердиаграмм. Тогда для корректного сравнения результатов с соответствующими вкладами в γ_V , наряду с суперграфами, которые содержат духовые петли, потребовалось бы рассматривать и чисто калибровочные суперграфы. Однако данное рассмотрение выходит за рамки настоящей диссертации.

Двухпетлевая перенормировка духов Фаддеева–Попова и проверка духовой части новой формы NSVZ соотношения

3.1. Двухпетлевые вклады в аномальную размерность духов Фаддеева–Попова

В предыдущей главе с помощью метода модифицированных вакуумных суперграфов были вычислены трехпетлевые вклады в β -функцию, соответствующие суперграфам (f8) и (f13), на уровне петлевых интегралов. На основе новой формы NSVZ соотношения (2.11) данные вклады можно сопоставить с соответствующими вкладками в двухпетлевую аномальную размерность духов Фаддеева–Попова γ_c от двухточечных супердиаграмм, которые образуются в результате разрезания духовых пропагаторов в вакуумных суперграфах (f8) и (f13), см. Рис. 3.1. Разрезание внутренних линий в (f8) и (f13) приводит к следующим диаграммам:

$$(f8) \rightarrow (a1) + \dots; \quad (3.1)$$

$$(f13) \rightarrow (a11) + \dots, \quad (3.2)$$

где многоточием обозначены супердиаграммы, дающие вклады в величину (2.44), которые не рассматриваются в данной работе.

В соответствии с формулой (2.4), аномальная размерность γ_c может быть вычислена с помощью дифференцирования логарифма функции G_c , см. ее определение (1.60), по $\ln \Lambda$ при фиксированных значениях перенормированных параметров в пределе нулевого внешнего импульса $q \rightarrow 0$. Будем считать, что внешние духовые линии в двухточечных супердиаграммах (a1) и (a11) соот-

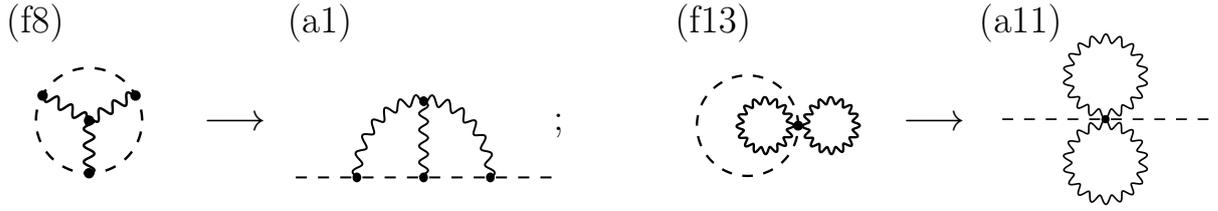


Рис. 3.1. Разрезание внутренних линий духов Фаддеева–Попова в вакуумных суперграфах (f8) и (f13) дает супердиаграммы с двумя внешними духовыми линиями (a1) и (a11), соответственно. Сохранена нумерация диаграмм, как на Рис. 2.1 и Рис. 1.1.

ветствуют духовым суперполям \bar{c}^{*A} и c^A . Кроме того, все вычисления будем проводить при произвольном значении калибровочного параметра ξ_0 .

Условие нулевого внешнего импульса позволяет при вычислении суперграфов не рассматривать слагаемые, в которых суперсимметричные ковариантные производные действуют на внешние суперполя, поскольку они, в конечном счете, порождают члены, пропорциональные внешнему импульсу и поэтому дают заведомо тривиальный вклад. В частности, в пределе нулевого внешнего импульса для вычисления вклада суперграфа (a1) в функцию G_c требуется рассмотреть всего два конкретных варианта спариваний суперполей на внутренних линиях, — см. диаграммы (a1') и (a1''), изображенные на Рис. 3.2. Отметим, что общее количество таких вариантов для суперграфа (a1) равно $48 = 4 \times 12$, где

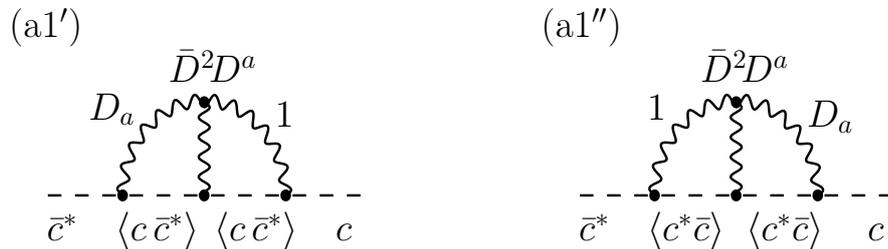


Рис. 3.2. В пределе нулевого внешнего импульса нетривиальные вклады супердиаграммы (a1) соответствуют двум вариантам спариваний суперполей на внутренних линиях. Также явно показана расстановка суперсимметричных ковариантных производных, идущих из тройной калибровочной вершины (1.77), на калибровочных пропагаторах (1.70). Выражения для духовых пропагаторов даются формулами (1.72), (1.73).

число возможных комбинаций духовых пропагаторов в (a1) равно 4, а количество всех расстановок D -производных, идущих из тройной калибровочной вершины (1.77), на трех калибровочных пропагаторах равно 12.

Вклады диаграмм (a1') и (a1'') в функцию G_c в пределе нулевого внешнего импульса равны

$$\begin{aligned} \Delta_{a1'} G_c \Big|_{Q=0} &= -\Delta_{a1''} G_c \Big|_{Q=0} = \\ &= \frac{e_0^4 C_2^2}{8} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{\xi_0^2 (2L^2 - (K+L)^2)}{K_K K^4 K_L L^4 (K+L)^2}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где импульсы евклидовы. Необходимо отметить, что данные выражения записаны формально, поскольку петлевые интегралы расходятся. Однако после взятия производной $d/d \ln \Lambda$ выражения для вкладов в γ_c становятся хорошо определенными. Видно, что вклады диаграмм (a1') и (a1'') взаимоуничтожаются, а значит

$$\Delta_{a1} G_c \Big|_{Q=0} = \left(\Delta_{a1'} G_c + \Delta_{a1''} G_c \right) \Big|_{Q=0} = 0. \quad (3.4)$$

Кроме того, для вклада суперграфа (a11) в пределе $Q \rightarrow 0$ было получено выражение

$$\Delta_{a11} G_c \Big|_{Q=0} = -\frac{e_0^4 C_2^2}{18} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \left(\frac{\xi_0}{K_K} - \frac{1}{R_K} \right) \frac{1}{K^4} \left(\frac{\xi_0}{K_L} - \frac{1}{R_L} \right) \frac{1}{L^4}. \quad (3.5)$$

3.2. Проверка новой формы NSVZ соотношения для суперграфов, содержащих пропагаторы духов Фаддеева–Попова

Теперь все готово для проведения проверки новой формы NSVZ соотношения для рассмотренных суперграфов на уровне петлевых интегралов. Сравнивая выражения (2.43) и (3.4), а также (2.39) и (3.5), убеждаемся в справедливо-

сти формул

$$\Delta_{\text{f8}}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = \frac{C_2}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \Delta_{\text{a1}} G_c \Big|_{Q=0} + \dots; \quad (3.6)$$

$$\Delta_{\text{f13}}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = \frac{C_2}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \Delta_{\text{a11}} G_c \Big|_{Q=0} + \dots \quad (3.7)$$

Таким образом, вычисленные вклады в ренормгрупповые функции, заданные в терминах голых параметров, действительно связаны между собой так, как предписывает духовая часть новой формы NSVZ соотношения.

Отметим, что проверенные в диссертации соотношения (3.6) и (3.7), в совокупности с другими необходимыми результатами, полученными в статьях [91, 92], позволили явным образом продемонстрировать справедливость духовой части новой формы NSVZ β -функции

$$\Delta\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = \frac{C_2}{\pi} \Delta \gamma_c + \dots \quad (3.8)$$

в трехпетлевом приближении. Обсудим этот важный общий результат.

Разрезание духовых пропагаторов в вакуумных суперграфах (fi), представленных на Рис. 2.1, дает совокупность диаграмм с двумя внешними линиями духов Фаддеева–Попова, изображенных на Рис. 1.1 и Рис. 3.3. Аналогично формулам (3.1) и (3.2), можем тогда записать

$$(f1) \rightarrow (a12) + \dots; \quad (f2) \rightarrow (a13) + \dots; \quad (3.9)$$

$$(f3) \rightarrow (a5) + (a6) + (a7) \dots; \quad (f4) \rightarrow (a12) \times (a12) + (a4) + \dots; \quad (3.10)$$

$$(f5) \rightarrow (a8) + \dots; \quad (f6) \rightarrow (a10) + \dots; \quad (3.11)$$

$$(f7) \rightarrow (a2) + (a3) + \dots; \quad (f9) \rightarrow (a14) + \dots; \quad (3.12)$$

$$(f10) \rightarrow (a15) + \dots; \quad (f11) \rightarrow (a12) \times (a13) + (a9) + \dots; \quad (3.13)$$

$$(f12) \rightarrow (a13) \times (a13) + \dots, \quad (3.14)$$

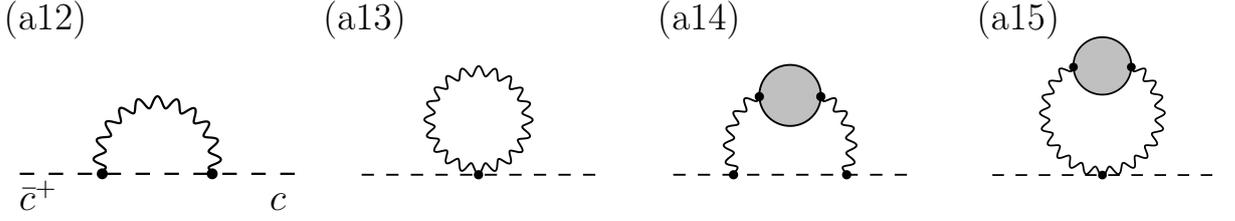


Рис. 3.3. Однопетлевые суперграфы и двухпетлевые суперграфы с (однопетлевой) вставкой поляризационного оператора квантового калибровочного суперполя (см. Рис. 1.5), дающие вклады в функцию G_c . Остальные диаграммы, существенные для вычисления функции G_c в рассматриваемом приближении, изображены на Рис. 1.1.

где многоточие обозначает двухточечные диаграммы, дающие вклады в G_V (а также в \tilde{G}_V , см. формулу (2.44)) и в некоторых случаях в G_ϕ . Обратим внимание, что при разрезании духовых пропагаторов в вакуумных суперграфах (f4), (f11) и (f12) получаются в том числе и диаграммы, которые не являются одночастично-неприводимыми. Это характерная ситуация, и, как говорилось ранее, в таком случае следует продолжить разрезание внутренних линий. Полученные в результате $k \geq 2$ ОЧН диаграмм будут соответствовать слагаемым с $k \geq 2$ в разложении функции

$$\ln G = \ln(1 + \Delta G) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (\Delta G)^k, \quad (3.15)$$

где в данном случае $G = G_c$, но, вообще говоря, это относится и к случаям $G = G_\phi$ и $G = G_V$.

Вычисленные в работе [92] выражения для вкладов в β -функцию на основе модифицированных вакуумных суперграфов (fi), а также полученные в работе [91] выражения для вкладов в функцию G_c (в пределе $Q \rightarrow 0$) от двухточечных супердиаграмм (ai) для удобства и полноты изложения собраны в Приложении В. В работе [92] также было показано, что NSVZ соотношение в форме (2.11) действительно выполняется для данных вкладов на уровне петлевых интегралов. Этот результат выражают формулы

$$\Delta_{f1} \left(\frac{\beta}{\alpha_0^2} \right) = \frac{C_2}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\Delta_{a12} G_c + \dots \right) \Big|_{Q=0}; \quad (3.16)$$

$$\Delta_{f2}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = \frac{C_2}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\Delta_{a13} G_c + \dots \right) \Big|_{Q=0}; \quad (3.17)$$

$$\Delta_{f3}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = \frac{C_2}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\Delta_{a5} G_c + \Delta_{a6} G_c + \Delta_{a7} G_c + \dots \right) \Big|_{Q=0}; \quad (3.18)$$

$$\Delta_{f4}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = \frac{C_2}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(-\frac{1}{2} (\Delta_{a12} G_c)^2 + \Delta_{a4} G_c + \dots \right) \Big|_{Q=0}; \quad (3.19)$$

$$\Delta_{f5}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = \frac{C_2}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\Delta_{a8} G_c + \dots \right) \Big|_{Q=0}; \quad (3.20)$$

$$\Delta_{f6}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = \frac{C_2}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\Delta_{a10} G_c + \dots \right) \Big|_{Q=0}; \quad (3.21)$$

$$\Delta_{f7}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = \frac{C_2}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\Delta_{a2} G_c + \Delta_{a3} G_c + \dots \right) \Big|_{Q=0}; \quad (3.22)$$

$$\Delta_{f9}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) + \Delta_{f10}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = \frac{C_2}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\Delta_{a14} G_c + \Delta_{a15} G_c \dots \right) \Big|_{Q=0}; \quad (3.23)$$

$$\Delta_{f11}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = \frac{C_2}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(-(\Delta_{a12} G_c) (\Delta_{a13} G_c) + \Delta_{a9} G_c + \dots \right) \Big|_{Q=0}; \quad (3.24)$$

$$\Delta_{f12}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = \frac{C_2}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(-\frac{1}{2} (\Delta_{a13} G_c)^2 + \dots \right) \Big|_{Q=0}. \quad (3.25)$$

Отметим, что зависимость от параметров нелинейной перенормировки для вкладов в β -функцию учитывалась только в двухпетлевом приближении, а для вкладов в функцию G_c — только в однопетлевом приближении. В этом случае ее выражает параметр y_0 , и, как мы увидим в дальнейшем, однопетлевая перенормировка параметра y_0 очень важна при вычислении двухпетлевой аномальной размерности духов Фаддеева–Попова.

Суммируя результаты (3.6), (3.7) и (3.16) — (3.25), получаем в рассматриваемом приближении соотношение

$$\Delta\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = \frac{C_2}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \Delta \ln G_c \Big|_{Q=0} + \dots, \quad (3.26)$$

эквивалентное формуле (3.8).

3.3. Двухпетлевая аномальная размерность духов

Фаддеева–Попова

Обсудим еще одно важное применение полученных в диссертации результатов (3.4) и (3.5). В сумме со вкладами (B.11) — (B.15) они позволили найти полное выражение для аномальной размерности духов Фаддеева–Попова в рассматриваемом приближении [91]. Данное вычисление было выполнено при произвольном значении калибровочного параметра ξ_0 для случая, когда функции-регуляторы выбраны в виде

$$R(x) = K(x) = 1 + x^n, \quad (3.27)$$

где $n \geq 1$ — произвольное натуральное число.

Для начала рассмотрим вычисление двухпетлевой аномальной размерности γ_c , заданной в терминах голых параметров. Учитывая, что большинство вкладов в функцию G_c в пределе $Q \rightarrow 0$ равны 0, получаем

$$\begin{aligned} \gamma_c(\alpha_0, \lambda_0, Y_0) &= \left. \frac{d \ln G_c}{d \ln \Lambda} \right|_{\alpha, \lambda, Y = \text{const}; Q=0} = \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\Delta_{a13} G_c - \frac{1}{2} (\Delta_{a13} G_c)^2 \right. \\ &\quad \left. + \Delta_{a6} G_c + \Delta_{a10} G_c + \Delta_{a11} G_c + \Delta_{a15} G_c \right) \Big|_{\alpha, \xi, y = \text{const}; Q=0} + \dots \\ &= \frac{d}{d \ln \Lambda} \left\{ 4\pi C_2 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{\alpha_0}{K^4 R_K} \left[(\xi_0 - 1) \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} y_0 C_2 \right) + \frac{8\pi \alpha_0}{3R_K} \left(C_2 f(K/\Lambda) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + T(R) h(K/\Lambda) \right) \right] + 4\pi^2 C_2^2 \alpha_0^2 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{1}{R_K R_L} \left(\frac{(\xi_0 - 1)(5\xi_0 + 8)}{9K^4 L^4} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4(\xi_0^2 - 1)}{3K^4 L^2 (K + L)^2} \right) \right\} \Big|_{\alpha, \xi, y = \text{const}} + \dots, \quad (3.28) \end{aligned}$$

где многоточие обозначает двухпетлевые слагаемые, которые содержат параметры нелинейной перенормировки суперполя V , а также члены более высоких порядков. В выражении (3.28) мы сохранили зависимость от параметра y_0 в однопетлевом приближении, поскольку на промежуточных этапах вычисления

необходимо учесть однопетлевую перенормировку параметра y_0 , а иначе ренорм-групповые уравнения будут нарушены [91]. В то же время в окончательном выражении для γ_c в рассматриваемом случае следует положить $y_0 = 0$. Отметим, что параметры нелинейной перенормировки можно считать калибровочными параметрами, так как изменение функции $\mathcal{F}(V)$ эквивалентно специальной модификации условия, фиксирующего калибровку [105].

Производная по $\ln \Lambda$ в выражении (3.28) вычисляется при фиксированных значениях перенормированных параметров α , ξ и y . Это означает, что сперва необходимо выразить голые параметры в терминах перенормированных с помощью формул

$$\alpha_0 = \alpha - \frac{\alpha^2}{2\pi} \left[3C_2 \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{11} \right) - T(R) \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{12} \right) \right] + \dots; \quad (3.29)$$

$$\alpha_0 \xi_0 = \alpha \xi + \frac{\alpha^2 C_2}{3\pi} \left(\xi(\xi - 1) \ln \frac{\Lambda}{\mu} + x_1 \right) + \dots; \quad (3.30)$$

$$y_0 = y + \frac{\alpha}{90\pi} \left((2 + 3\xi) \ln \frac{\Lambda}{\mu} + k_1 \right) + \dots, \quad (3.31)$$

где b_{11} , b_{12} , x_1 , и k_1 — конечные постоянные, присутствие которых обязано произволу в выборе схемы вычитаний. Формулы (3.29) и (3.30) были записаны на основе результатов статьи [115], а однопетлевая перенормировка параметра y_0 была исследована в работах [108, 109]. После подстановки выражений (3.29) — (3.31) в формулу (3.28) получаем

$$\begin{aligned} \gamma_c(\alpha_0, \lambda_0, Y_0) = & \frac{d}{d \ln \Lambda} \left\{ 4\pi C_2 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{\alpha}{K^4 R_K} \left[(\xi - 1) \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} y C_2 \right) + \frac{8\pi\alpha}{3R_K} \right. \right. \\ & \times \left(C_2 \left\{ f(K/\Lambda) + \frac{3R_K}{16\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{11} \right) \right\} + T(R) \left\{ h(K/\Lambda) - \frac{R_K}{16\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + b_{12} \right) \right\} \right] + 4\pi^2 C_2^2 \alpha^2 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{(\xi - 1)}{R_K R_L} \left(\frac{(5\xi + 8)}{9K^4 L^4} - \frac{4(\xi + 1)}{3K^4 L^2 (K + L)^2} \right) \\ & \left. \left. + \frac{\alpha^2 C_2^2}{9} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^4 R_K} \left(4x_1 - (\xi - 1)k_1 + (\xi - 1)(\xi - 2) \ln \frac{\Lambda}{\mu} \right) + \dots \right\}. \quad (3.32) \end{aligned}$$

Теперь можно приступить к вычислению петлевых интегралов в выражении (3.32). Будем использовать результаты работ [123–125] для случая выбора функций-регуляторов в форме (3.27). А именно, для вычисления интегралов, содержащих функции f и h , применяем формулы (Б.10) — (Б.13), приведенные в Приложении Б. Кроме того, нам понадобятся интегралы

$$\frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^4 R_K} = \frac{1}{8\pi^2}; \quad (3.33)$$

$$\frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{1}{R_K R_L} \left(\frac{1}{K^4 L^2 (K+L)^2} - \frac{1}{2K^4 L^4} \right) = \frac{1}{128\pi^4}. \quad (3.34)$$

Применяя указанные формулы, получаем

$$\begin{aligned} \gamma_c(\alpha_0, \lambda_0, Y_0) &= \frac{\alpha C_2(\xi - 1)}{6\pi} - \frac{5\alpha y C_2^2(\xi - 1)}{4\pi} - \frac{\alpha^2}{24\pi^2} C_2^2(\xi^2 - 1) \\ &+ \frac{\alpha^2 C_2^2}{4\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{11} - \ln a_\varphi - 1 \right) - \frac{\alpha^2 C_2 T(R)}{12\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{12} - \ln a - 1 \right) \\ &+ \frac{\alpha^2 C_2^2}{72\pi^2} \left((\xi - 1)(\xi - 2) \ln \frac{\Lambda}{\mu} + 4x_1 - (\xi - 1)k_1 \right) + \dots, \end{aligned} \quad (3.35)$$

где, напомним, величины a и a_φ определяются соотношениями (1.36). Снова используем выражения (3.29) — (3.31), но уже для того, чтобы выразить перенормированные параметры через голые, и находим

$$\begin{aligned} \gamma_c(\alpha_0, \lambda_0, Y_0) &= \frac{\alpha_0 C_2(\xi_0 - 1)}{6\pi} - \frac{5\alpha_0 y_0 C_2^2(\xi_0 - 1)}{4\pi} - \frac{\alpha_0^2}{24\pi^2} C_2^2(\xi_0^2 - 1) \\ &- \frac{\alpha_0^2 C_2^2}{4\pi^2} \left(\ln a_\varphi + 1 \right) + \frac{\alpha_0^2 C_2 T(R)}{12\pi^2} \left(\ln a + 1 \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.36)$$

Заметим, что зависимость от $\ln \Lambda/\mu$ в этом выражении ушла, как и должно быть. Однако этого бы не случилось, если бы мы проигнорировали тот факт, что суперполе V требует нелинейной перенормировки, и не учли однопетлевую перенормировку параметра y_0 . Как обсуждалось выше, в окончательном выражении для γ_c в рассматриваемом приближении необходимо положить $y_0 = 0$,

т.е.

$$\begin{aligned} \gamma_c(\alpha_0, \lambda_0, Y_0) \Big|_{y_0=0} &= \frac{\alpha_0 C_2 (\xi_0 - 1)}{6\pi} - \frac{\alpha_0^2}{24\pi^2} C_2^2 (\xi_0^2 - 1) - \frac{\alpha_0^2 C_2^2}{4\pi^2} (\ln a_\varphi + 1) \\ &+ \frac{\alpha_0^2 C_2 T(R)}{12\pi^2} (\ln a + 1) + \dots \end{aligned} \quad (3.37)$$

Найдем также в рассматриваемом приближении выражение для аномальной размерности $\tilde{\gamma}_c$, определенной в терминах перенормированных параметров. Согласно ее определению (2.8), $\ln Z_c$ необходимо продифференцировать по $\ln \mu$ при фиксированных значениях голых параметров. Для того, чтобы вычислить $\ln Z_c$, интегрируем ренормгрупповое уравнение (2.4) при фиксированных значениях перенормированных параметров, используя выражение (3.35) для $\gamma_c(\alpha_0, \lambda_0, Y_0)$, и получаем

$$\begin{aligned} \ln Z_c &= -\frac{\alpha C_2 (\xi - 1)}{6\pi} \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{5\alpha y C_2^2 (\xi - 1)}{4\pi} \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{\alpha^2 C_2^2}{24\pi^2} (\xi^2 - 1) \ln \frac{\Lambda}{\mu} \\ &+ \frac{\alpha C_2}{\pi} t_1 - \frac{\alpha^2 C_2^2}{4\pi^2} \left[\frac{1}{2} \ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + (b_{11} - \ln a_\varphi - 1) \ln \frac{\Lambda}{\mu} \right] + \frac{\alpha^2 C_2 T(R)}{12\pi^2} \\ &\times \left[\frac{1}{2} \ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + (b_{12} - \ln a - 1) \ln \frac{\Lambda}{\mu} \right] - \frac{\alpha^2 C_2^2}{72\pi^2} \left[\frac{1}{2} (\xi - 1)(\xi - 2) \ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} \right. \\ &\left. + (4x_1 - (\xi - 1)k_1) \ln \frac{\Lambda}{\mu} \right] + \frac{\alpha^2 C_2^2}{\pi^2} t_{21} + \frac{\alpha^2 C_2 T(R)}{\pi^2} t_{22} + \dots, \end{aligned} \quad (3.38)$$

где t_1 , t_{21} и t_{22} — конечные константы (интегрирования), отражающие произвол в выборе схемы вычитаний. Далее, выражаем перенормированные параметры в формуле (3.38) через голые на основе соотношений (3.29) — (3.31) и проводим дифференцирование по $\ln \mu$, считая $\alpha_0, \lambda_0, Y_0 = \text{const}$. Затем прибегаем к помощи формул (3.29) — (3.31) вновь, чтобы сделать обратную замену голых параметров на перенормированные, и получаем

$$\tilde{\gamma}_c(\alpha, \lambda, Y) = \frac{\alpha C_2 (\xi - 1)}{6\pi} - \frac{5\alpha y C_2^2 (\xi - 1)}{4\pi} - \frac{\alpha^2 C_2^2}{4\pi^2} (\ln a_\varphi + 1 + 6t_1 - b_{11})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha^2 C_2 T(R)}{12\pi^2} \left(\ln a + 1 + 6t_1 - b_{12} \right) - \frac{\alpha^2 C_2^2}{24\pi^2} \left(\xi^2 - 1 \right) \\
& + \frac{\alpha^2 C_2^2}{72\pi^2} \left(4x_1 - (\xi - 1)k_1 \right) + \dots
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Полагая $y = 0$, приходим к окончательному ответу для аномальной размерности духов Фаддеева–Попова, определенной в терминах перенормированных параметров, в рассматриваемом приближении

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_c(\alpha, \lambda, Y) \Big|_{y=0} &= \frac{\alpha C_2 (\xi - 1)}{6\pi} - \frac{\alpha^2 C_2^2}{4\pi^2} \left(\ln a_\varphi + 1 + 6t_1 - b_{11} \right) \\
& + \frac{\alpha^2 C_2 T(R)}{12\pi^2} \left(\ln a + 1 + 6t_1 - b_{12} \right) - \frac{\alpha^2 C_2^2}{24\pi^2} \left(\xi^2 - 1 \right) \\
& + \frac{\alpha^2 C_2^2}{72\pi^2} \left(4x_1 - (\xi - 1)k_1 \right) + \dots
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Отметим, что выражение (3.40) зависит от выбора схемы вычитаний. Например, в HD+MSL схеме, которая обсуждалась в параграфе 2.1, $b_{11} = b_{12} = t_1 = k_1 = x_1 = 0$, и вид функции $\tilde{\gamma}_c$ совпадает с видом γ_c при соответствующем переобозначении аргументов ($\alpha \rightarrow \alpha_0$, $\xi \rightarrow \xi_0$, ...).

Глава 4

**Применение метода модифицированных
вакуумных суперграфов для вычисления
трехпетлевого вклада в β -функцию $\mathcal{N} = 1$
суперсимметричной квантовой электродинамики
с N_f ароматами и проверка NSVZ соотношения**

4.1. Суперполевая формулировка $\mathcal{N} = 1$

**суперсимметричной квантовой электродинамики с N_f
ароматами, регуляризованной высшими
производными**

В данной главе рассматривается применение метода модифицированных вакуумных суперграфов для вычисления вкладов в β -функцию в случае $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики с N_f ароматами, регуляризованной высшими производными. Данным методом вычисляется некоторый трехпетлевой вклад в β -функцию в общей ξ -калибровке, и затем он сопоставляется с соответствующим двухпетлевым вкладом в аномальную размерность суперполей материи на основе абелевой формы NSVZ соотношения. В совокупности с другими необходимыми результатами, полученными в статье [93], это позволяет провести проверку NSVZ соотношения в рассматриваемом приближении, а также сравнить выражения для трехпетлевой β -функции, найденные новым методом и стандартным способом вычислений.

Как известно, в формализме $\mathcal{N} = 1$ суперпространства лагранжиан $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной электродинамики содержит вещественное калибровочное суперполе V , взаимодействующее с двумя киральными суперполями материи ϕ

и $\tilde{\phi}$, которые имеют противоположные заряды по отношению к калибровочной группе $U(1)$. Мы будем рассматривать обобщение этой теории на случай N_f типов киральных суперполей ϕ_α и $\tilde{\phi}_\alpha$, где $\alpha = 1, \dots, N_f$, называемое $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной электродинамикой с N_f ароматами. Ее действие в безмассовом случае имеет вид

$$S = \frac{1}{4e_0^2} \text{Re} \int d^4x d^2\theta W^a W_a + \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^{N_f} \int d^4x d^4\theta \left(\phi_\alpha^* e^{2V} \phi_\alpha + \tilde{\phi}_\alpha^* e^{-2V} \tilde{\phi}_\alpha \right), \quad (4.1)$$

где суперсимметричная напряженность калибровочного суперполя определяется формулой

$$W_a = \frac{1}{4} \bar{D}^2 D_a V. \quad (4.2)$$

Нетрудно видеть, что действие (4.1) инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$V \rightarrow V + \frac{i}{2} (\mathcal{A}^* - \mathcal{A}); \quad \phi_\alpha \rightarrow e^{i\mathcal{A}} \phi_\alpha; \quad \tilde{\phi}_\alpha \rightarrow e^{-i\mathcal{A}} \tilde{\phi}_\alpha, \quad (4.3)$$

параметризуемых киральным суперполем \mathcal{A} . Отметим, что в абелевом случае суперполе W_a не меняется при калибровочных преобразованиях.

Для рассматриваемой теории можно ввести инвариантную регуляризацию высшими производными, добавляя к действию (4.1) слагаемое S_Λ с функцией-регулятором $R(\partial^2/\Lambda^2)$, зависящей от обычных производных. Тогда регуляризованное действие равно

$$S_{\text{reg}} = S + S_\Lambda, \quad (4.4)$$

где

$$S_\Lambda = \frac{1}{4e_0^2} \text{Re} \int d^4x d^2\theta W^a \left(R(\partial^2/\Lambda^2) - 1 \right) W_a. \quad (4.5)$$

При этом $R(0) = 1$ и $R(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Еще одну функцию-регулятор $K(\partial^2/\Lambda^2)$, удовлетворяющую аналогичным условиям, следует включить в дей-

ствие, фиксирующее калибровку, которое мы выбираем в форме

$$S_{\text{gf}} = -\frac{1}{32e_0^2\xi_0} \int d^4x d^4\theta D^2V K(\partial^2/\Lambda^2) \bar{D}^2V. \quad (4.6)$$

Тем не менее, даже после добавления в теорию слагаемых с высшими производными, которые содержатся в функциях R и K , однопетлевые расходимости остаются нерегуляризованными. Исправить этот недостаток можно с помощью введения в производящий функционал инвариантных детерминантов Паули–Вилларса. В данном случае достаточно использовать один такой детерминант вида

$$\left[\text{Det}(PV, M) \right]^{-1} = \int D\Phi D\tilde{\Phi} \exp(iS_\Phi), \quad (4.7)$$

где функциональное интегрирование ведется по грасманово четным киральным суперполям Паули–Вилларса Φ и $\tilde{\Phi}$, входящим в действие

$$S_\Phi = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \left(\Phi^* e^{2V} \Phi + \tilde{\Phi}^* e^{-2V} \tilde{\Phi} \right) + \left(\frac{M}{2} \int d^4x d^2\theta \tilde{\Phi} \Phi + \text{к.с.} \right). \quad (4.8)$$

Как и прежде, будем считать, что массовый параметр M пропорционален параметру Λ регуляризации высшими производными, причем коэффициент пропорциональности не зависит от константы связи,

$$M = a\Lambda. \quad (4.9)$$

В результате, производящий функционал равен

$$Z = \int DV \prod_{\alpha=1}^{N_f} D\phi_\alpha D\tilde{\phi}_\alpha \left(\text{Det}(PV, M) \right)^{N_f} \exp \left(iS_{\text{reg}} + iS_{\text{gf}} + iS_{\text{source}} \right), \quad (4.10)$$

где действие для источников имеет вид

$$S_{\text{source}} = \int d^4x d^4\theta VJ + \left(\sum_{\alpha=1}^{N_f} \int d^4x d^2\theta (\phi_\alpha j_\alpha + \tilde{\phi}_\alpha \tilde{j}_\alpha) + \text{к.с.} \right). \quad (4.11)$$

Совершая преобразование Лежандра от производящего функционала связанных функций Грина $W = -i \ln Z$, получаем эффективное действие

$$\Gamma[V, \phi_\alpha, \tilde{\phi}_\alpha] = W - S_{\text{sources}} \Big|_{J, j, \tilde{j} \rightarrow V, \phi, \tilde{\phi}} \quad (4.12)$$

где источники следует выразить через поля из уравнений

$$V = \frac{\delta W}{\delta J}; \quad \phi_\alpha = \frac{\delta W}{\delta j_\alpha}; \quad \tilde{\phi}_\alpha = \frac{\delta W}{\delta \tilde{j}_\alpha}. \quad (4.13)$$

В силу (суперсимметричного аналога) тождества Уорда часть эффективного действия, квадратичная по калибровочному суперполю, имеет поперечную структуру

$$\Gamma_V^{(2)} - S_{\text{gf}} = -\frac{1}{16\pi} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^4 \theta V(-p, \theta) \partial^2 \Pi_{1/2} V(p, \theta) d^{-1}(\alpha_0, \Lambda/p), \quad (4.14)$$

где в древесном приближении $d^{-1}|_{\text{tree}} = \alpha_0^{-1}$, а суперсимметричный поперечный проектор определяется формулой (1.44). В свою очередь, квадратичная по суперполям материи часть эффективного действия может быть записана как

$$\Gamma_\phi^{(2)} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^{N_f} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} d^4 \theta \left(\phi_\alpha^*(-q, \theta) \phi_\alpha(q, \theta) + \tilde{\phi}_\alpha^*(-q, \theta) \tilde{\phi}_\alpha(q, \theta) \right) G(\alpha_0, \Lambda/q), \quad (4.15)$$

где $G|_{\text{tree}} = 1$.

Как известно, расходимости в рассматриваемой теории могут быть устранены с помощью введения констант перенормировки заряда и киральных суперполей материи

$$Z_\alpha = \frac{\alpha}{\alpha_0}; \quad \phi_\alpha = \sqrt{Z} \phi_{\alpha R}; \quad \tilde{\phi}_\alpha = \sqrt{Z} \tilde{\phi}_{\alpha R}. \quad (4.16)$$

Данные константы перенормировки могут быть найдены из требования конечности функций

$$d^{-1}(\alpha_0(\alpha, \Lambda/\mu), \Lambda/p); \quad Z(\alpha, \Lambda/\mu) G(\alpha_0(\alpha, \Lambda/q), \Lambda/q), \quad (4.17)$$

в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$, в той или иной схеме вычитаний. Отметим также, что перенормировка калибровочного параметра определяется равенством $\xi_0 = \xi Z_\alpha$, так как в силу формулы (4.14) слагаемое, фиксирующее калибровку, не получает квантовых поправок.

4.2. NSVZ соотношение и метод модифицированных вакуумных суперграфов для вычисления вкладов в β -функцию $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики с N_f ароматами

NSVZ β -функция в абелевом случае была получена в работах [55, 56]. Для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики с N_f ароматами она имеет вид

$$\tilde{\beta}(\alpha) = \frac{\alpha^2 N_f}{\pi} \left(1 - \tilde{\gamma}(\alpha) \right), \quad (4.18)$$

где ренормгрупповые функции, заданные в терминах перенормированной константы связи, определяются формулами

$$\tilde{\beta}(\alpha) = \left. \frac{d\alpha}{d \ln \mu} \right|_{\alpha_0 = \text{const}}; \quad (4.19)$$

$$\tilde{\gamma}(\alpha) = \left. \frac{d \ln Z}{d \ln \mu} \right|_{\alpha_0 = \text{const}}. \quad (4.20)$$

Как и прежде, будем обозначать их тильдой, для того чтобы отличать их от ренормгрупповых функций, определенных через голую константу связи,

$$\beta(\alpha_0) = \left. \frac{d\alpha_0}{d \ln \Lambda} \right|_{\alpha = \text{const}}; \quad (4.21)$$

$$\gamma(\alpha_0) = - \left. \frac{d \ln Z}{d \ln \Lambda} \right|_{\alpha = \text{const}}. \quad (4.22)$$

Вследствие схемной зависимости $\tilde{\beta}$ - и $\tilde{\gamma}$ -функций, NSVZ соотношение в форме (4.18) выполняется только в определенных схемах вычитаний, называ-

емых NSVZ схемами. Бесконечный класс NSVZ схем в абелевом случае [69] включает, в частности, HD+MSL схему [59], а также схему вычитаний на массовой поверхности [68]. Но, к примеру, весьма удобная для вычислений $\overline{\text{DR}}$ схема в него не входит, хотя в работах [39–42] было показано, как восстановить NSVZ соотношение в третьем и четвертом порядках теории возмущений с помощью конечной перенормировки константы связи.

Напротив, для ренормгрупповых функций, определенных через голые константы связи, произвол в процедуре перенормировки отражается в их зависимости от выбора регуляризации, но не схемы вычитаний. В этом отношении в некоторых случаях удобнее иметь дело с NSVZ β -функцией, записанной в форме

$$\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} = \frac{N_f}{\pi} \left(1 - \gamma(\alpha_0)\right). \quad (4.23)$$

При использовании регуляризации высшими производными данное соотношение было доказано во всех порядках теории возмущений в работах [57, 58]. Ключевая идея, на которой основано доказательство, состоит в том, что при выборе инвариантной регуляризации высшими производными $\beta(\alpha_0)$ -функция выражается в виде интегралов от двойных полных производных по петлевым импульсам. В известном смысле это частный случай более общего утверждения (см. параграф 2.1), справедливого в неабелевых $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теориях, регуляризованных высшими ковариантными производными. В связи с этим новый метод вычисления вкладов в β -функцию с помощью модифицированных вакуумных суперграфов, обсуждавшийся в параграфе 2.2, может быть адаптирован и для случая $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики, регуляризованной высшими производными. Отметим, что при использовании регуляризации размерной редукцией петлевые интегралы, дающие $\beta(\alpha_0)$ -функцию, не являются интегралами от двойных полных производных [63], и NSVZ соотношение в форме (4.23) нарушается уже в трехпетлевом приближении [64].

В абелевом случае, рассматриваемом в данной главе, алгоритм для вычисления $(L \geq 2)$ -петлевых вкладов в β -функцию с помощью вакуумных суперграфов, изложенный в разделе 2.2, модифицируется следующим образом. Принимая во внимание, что калибровочной группой является $U(1)$, генераторы присоединенного представления равны 0, а значит пропагаторы калибровочного суперполя не дают вклад в оператор, стоящий в правой части формулы (2.26). В то же время, генератор представления, в котором лежат суперполя материи, может быть записан в виде

$$T^A \rightarrow \delta_\alpha^\beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

где значения 1 и (-1) соответствуют супер полям ϕ_α и $\tilde{\phi}_\alpha$, а индексы α и β нумеруют их ароматы. Вследствие этого формальная замена (2.26) в данном случае сводится к предписанию: подействовать на подынтегральное выражение в импульсном представлении оператором

$$\sum_m \frac{\partial^2}{\partial Q_m^\mu \partial Q_m^\mu}, \quad (4.25)$$

где суммирование ведется по числу петель материи в вакуумном суперграфе, и Q_m^μ — соответствующие им евклидовы импульсы. Остальные шаги алгоритма, описанного в параграфе 2.2, остаются без изменений. В результате, получается $(L \geq 2)$ -петлевой вклад в величину $(\beta - \beta_{1\text{-loop}})/\alpha_0^2$ в виде интегралов от двойных полных производных по импульсам петель материи. Отметим, что для однопетлевого вклада в β -функцию известен результат

$$\beta_{1\text{-loop}}(\alpha_0) = \frac{N_f}{\pi} \alpha_0^2. \quad (4.26)$$

Напомним, что стандартный способ вычисления вкладов в β -функцию в абелевом случае основан на использовании формулы

$$\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} = \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(d^{-1} - \alpha_0^{-1} \right) \Big|_{\alpha=\text{const}; p \rightarrow 0}, \quad (4.27)$$

т.е. он требует вычисления супердиаграмм с двумя внешними линиями калибровочных суперполей в пределе нулевого внешнего импульса. Отметим, что для получения формулы (4.27) необходимо принять во внимание конечность функции d^{-1} , выраженной в терминах перенормированных параметров, а предел $p \rightarrow 0$ необходим для того, чтобы избавиться от слагаемых, пропорциональных $(p/\Lambda)^n$.

При этом $(L \geq 2)$ -петлевой вклад в β -функцию, построенный с помощью некоторого модифицированного вакуумного суперграфа, соответствует суммарному вкладу двухточечных супердиаграмм, графически получающихся посредством прикрепления двух внешних линий калибровочного суперполя к исходному вакуумному суперграфу всеми возможными способами. В этом отношении метод модифицированных вакуумных суперграфов более удобен, поскольку он предполагает меньший объем вычислений.

Аномальная размерность суперполей материи $\gamma(\alpha_0)$ может быть выражена через функцию G , определяемую соотношением (4.15), согласно формуле

$$\gamma(\alpha_0) = \left. \frac{d \ln G}{d \ln \Lambda} \right|_{\alpha=\text{const}; q \rightarrow 0}, \quad (4.28)$$

которая получается с учетом конечности функции ZG , выраженной в терминах перенормированной константы связи. Таким образом, для вычисления вкладов в аномальную размерность $\gamma(\alpha_0)$ необходимо рассматривать супердиаграммы с двумя внешними линиями суперполей материи (ϕ^* и ϕ или $\tilde{\phi}^*$ и $\tilde{\phi}$) в пределе нулевого внешнего импульса.

4.3. Трехпетлевой вклад в β -функцию, вычисленный методом модифицированных вакуумных суперграфов

В рассматриваемой теории для вычисления β -функции в трехпетлевом приближении методом модифицированных вакуумных суперграфов необходимо рассмотреть диаграммы, изображенные на Рис. 4.1. Автор данной диссер-

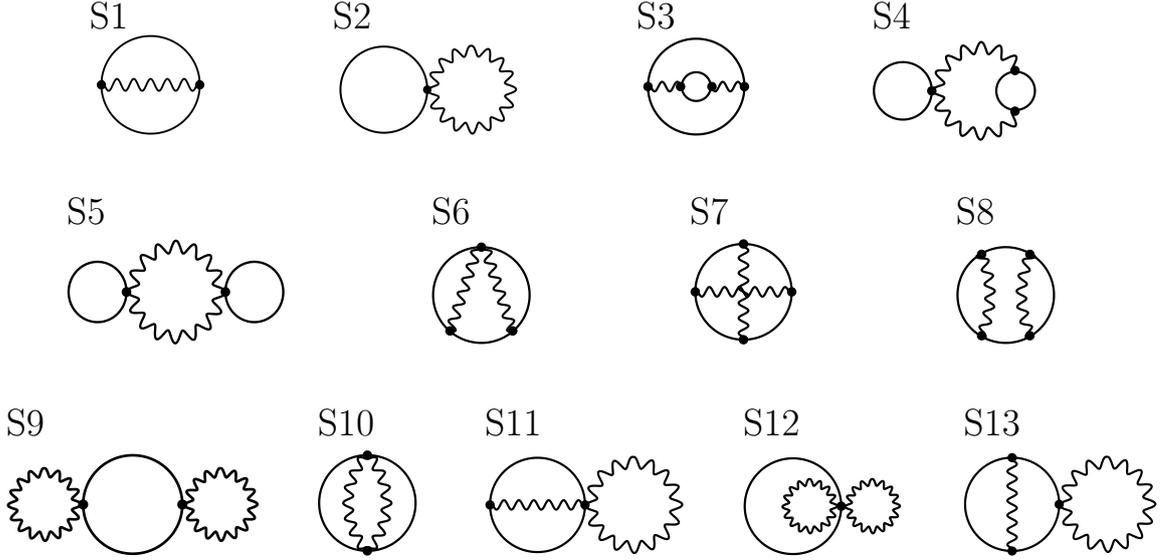


Рис. 4.1. Вакуумные суперграфы, с помощью которых можно вычислить трехпетлевую β -функцию $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики. Сплошные линии соответствуют пропагаторам суперполей материи и Паули–Вилларса, волнистые линии — пропагаторам калибровочного суперполя.

тации занимался вычислением вклада модифицированного вакуумного суперграфа S10, а остальные вклады были получены его соавторами по статье [93]. Все вычисления проводились при произвольном значении калибровочного параметра ξ_0 , для того чтобы явным образом продемонстрировать взаимоуничтожение калибровочно-зависимых слагаемых по сумме всех полученных вкладов в β -функцию. Отметим, что даже при использовании метода модифицированных вакуумных суперграфов, полное вычисление трехпетлевой β -функции в общей ξ -калибровке представляет собой весьма нетривиальную задачу.

Прежде всего запишем выражения для пропагаторов и вершин. Для пропагаторов калибровочного суперполя и суперполей материи находим

$$\langle V_x V_y \rangle = 2ie_0^2 \left[\frac{1}{R\partial^2} - \frac{1}{16\partial^4} (D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2) \left(\frac{\xi_0}{K} - \frac{1}{R} \right) \right] \delta_{xy}^8, \quad (4.29)$$

$$\langle \phi_{\alpha,x} \phi_{\beta,y}^* \rangle = \langle \tilde{\phi}_{\alpha,x} \tilde{\phi}_{\beta,y}^* \rangle = -i \delta_{\alpha\beta} \frac{\bar{D}_x^2 D_y^2}{4\partial^2} \delta_{xy}^8, \quad (4.30)$$

где для краткости использованы обозначения $V_x \equiv V(x^\mu, \theta_x)$, $\phi_{\alpha,x} \equiv \phi_\alpha(x^\mu, \theta_x)$

и т.п. В свою очередь, пропагаторы суперполей Паули–Вилларса имеют вид

$$\langle \Phi_x \Phi_y^* \rangle = \langle \tilde{\Phi}_x \tilde{\Phi}_y^* \rangle = -i \frac{\bar{D}_x^2 D_y^2}{4(\partial^2 + M^2)} \delta_{xy}^8; \quad (4.31)$$

$$\langle \Phi_x \tilde{\Phi}_y \rangle = -i \frac{M \bar{D}^2}{\partial^2 + M^2} \delta_{xy}^8; \quad (4.32)$$

$$\langle \Phi_x^* \tilde{\Phi}_y^* \rangle = -i \frac{M D^2}{\partial^2 + M^2} \delta_{xy}^8. \quad (4.33)$$

Выделяя из полного действия слагаемые со взаимодействием суперполей материи с калибровочным суперполем, получаем выражение

$$\frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^{N_f} \int d^4x d^4\theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\phi_\alpha^* (2V)^n \phi_\alpha + \tilde{\phi}_\alpha^* (-2V)^n \tilde{\phi}_\alpha \right). \quad (4.34)$$

Аналогичным образом выглядит и взаимодействие суперполей Паули–Вилларса с калибровочным суперполем (см. формулу (4.8)). При этом нужно еще учитывать, что мы ввели только по одному аромату суперполей Φ и $\tilde{\Phi}$, а детерминант Паули–Вилларса (4.7) входит в производящий функционал (4.10) в степени N_f .

Применяя описанный выше алгоритм вычисления вкладов в β -функцию на основе модифицированных вакуумных суперграфов для случая суперграфа S10, получаем ответ в виде

$$\begin{aligned} \Delta_{S10} \left(\frac{\beta}{\alpha_0^2} \right) &= 16\pi N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{d^4L}{(2\pi)^4} e_0^4 \frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial Q_\mu} \left(\frac{\xi_0}{K_L} - \frac{1}{R_L} \right) \frac{1}{L^4} \\ &\times \left\{ \frac{1}{R_K K^2} \left(\frac{1}{Q^2(Q+K+L)^2} - \frac{1}{(Q^2+M^2)((Q+K+L)^2+M^2)} \right) \right. \\ &+ \left(\frac{\xi_0}{K_K} - \frac{1}{R_K} \right) \frac{1}{2K^4} \left(\frac{1}{Q^2} + \frac{(Q+L)^2}{Q^2(Q+K+L)^2} - \frac{1}{Q^2+M^2} \right. \\ &\left. \left. - \frac{(Q+L)^2 - 3M^2}{(Q^2+M^2)((Q+K+L)^2+M^2)} \right) \right\}, \quad (4.35) \end{aligned}$$

где евклидовы петлевые импульсы Q^μ , K^μ и L^μ приписываются пропагатору суперполей материи (или Паули–Вилларса) и двум пропагаторам квантового

калибровочного суперполя, соответственно. Обратим внимание, что в приведенном выражении уже учтен вклад суперполей Паули–Вилларса, соответствующий топологии диаграммы S10. При этом петля суперполей Паули–Вилларса в данном случае может быть образована как пропагаторами вида (4.31), так и пропагаторами (4.32) и (4.33). Отметим также, что полученный вклад (4.35) является калибровочно-зависимым, и равен 0 в случае выбора калибровки Фейнмана $\xi_0 = 1$, если функции-регуляторы R и K совпадают.

4.4. Проверка NSVZ соотношения для рассматриваемых вкладов в случае $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики с N_f ароматами

Как обсуждалось выше, петлевые интегралы, дающие $\beta(\alpha_0)$ -функцию в рассматриваемой теории, являются интегралами от двойных полных производных, и метод модифицированных вакуумных суперграфов дает ответ для вкладов в β -функцию именно в таком виде. Указанная структура петлевых интегралов позволяет без труда провести интегрирование по соответствующему петлевому импульсу на основе соображений, изложенных в параграфе 2.1. Используя формулу (2.16), для вклада модифицированного суперграфа S10 получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{S10}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) &= \frac{4}{\pi} N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} e_0^4 \left(\frac{\xi_0}{K_L} - \frac{1}{R_L} \right) \frac{1}{L^4} \left\{ \frac{2}{K^2 R_K (K+L)^2} \right. \\ &\left. + \left(\frac{\xi_0}{K_K} - \frac{1}{R_K} \right) \frac{1}{2K^4} \left(1 + \frac{2K^2}{(K+L)^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Как и в неабелевом случае, NSVZ соотношение в форме (4.23) допускает графическую интерпретацию на уровне отдельных групп супердиаграмм. А именно, оно связывает вклад $\Delta(\beta/\alpha_0^2)$, построенный с помощью некоторого модифицированного вакуумного суперграфа, с суммарным вкладом в аномальную размерность суперполей материи $\Delta\gamma$ от двухточечных супердиаграмм, которые

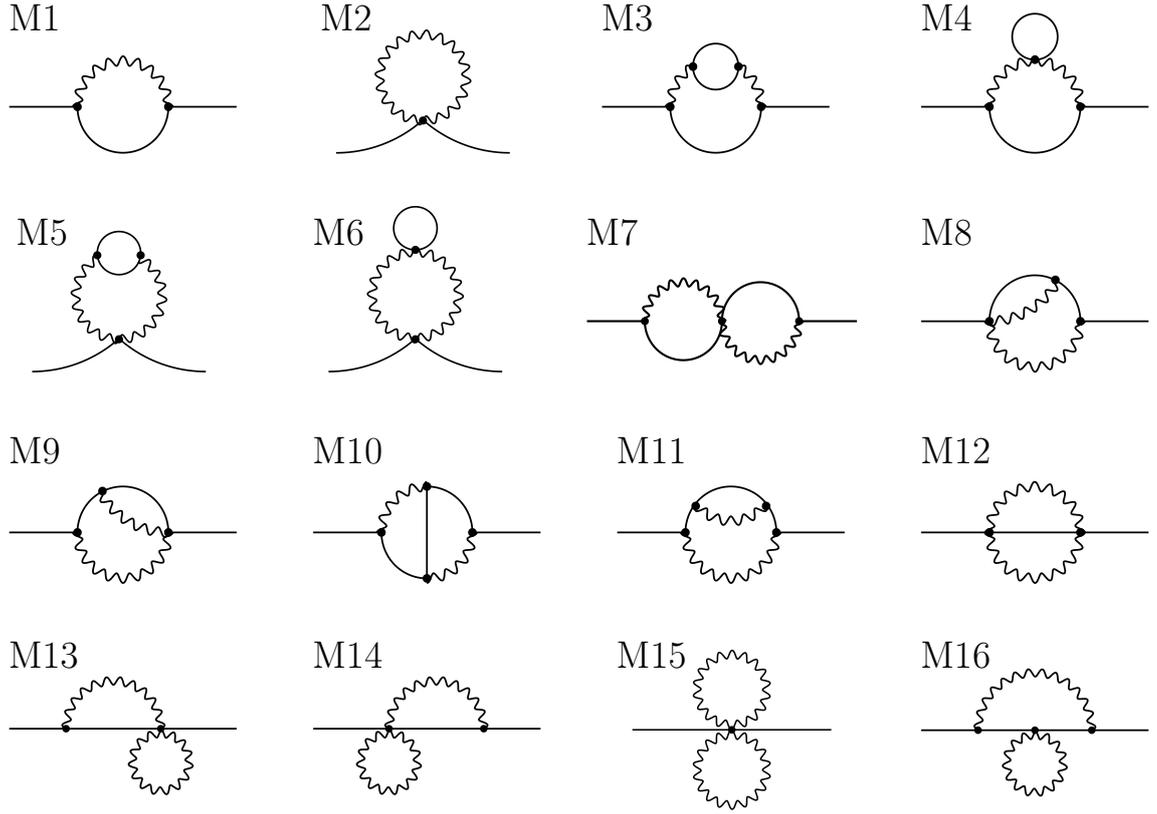


Рис. 4.2. Одно- и двухпетлевые супердиаграммы, дающие вклады в функцию G , определяемую формулой (4.15).

получаются в результате разрезания внутренних линий материи в исходном вакуумном суперграфе. При этом коэффициент пропорциональности, согласно формуле (4.23), равен $(-N_f/\pi)$.

На Рис. 4.2 представлен набор одночастично-неприводимых (ОЧН) супердиаграмм с двумя внешними линиями суперполей материи (ϕ^* и ϕ или $\tilde{\phi}^*$ и $\tilde{\phi}$), получающихся в результате разрезания пропагаторов материи в суперграфах S1 – S13, изображенных на Рис. 4.1. Они дают вклады в функцию G , введенную соотношением (4.15),

$$G \equiv 1 + \Delta G = 1 + \sum_{i=1}^{16} \Delta_{M_i} G + O(\alpha_0^3). \quad (4.37)$$

Необходимо отметить, что при разрезании одной внутренней линии суперполей материи в суперграфах S8, S9 и S13 получают также и диаграммы, не являющиеся ОЧН. Поэтому в указанных случаях необходимо совершить еще одно раз-

резание, в результате которого образуются два ОЧН суперграфа. Они соответствуют второму слагаемому в разложении функции $\ln G = \Delta G - (\Delta G)^2/2 + \dots$

Разрезание петли материи в суперграфе S10 дает двухпетлевую диаграмму M12. В данной диссертации вычислен ее вклад в функцию G в пределе нулевого внешнего импульса в случае произвольного значения калибровочного параметра. Он равен

$$\begin{aligned} \Delta_{M12}G \Big|_{Q=0} = & -4e_0^4 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{d^4L}{(2\pi)^4} \left(\frac{\xi_0}{K_L} - \frac{1}{R_L} \right) \frac{1}{L^4} \left\{ \frac{2}{K^2 R_K (K+L)^2} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\xi_0}{K_K} - \frac{1}{R_K} \right) \frac{1}{2K^4} \left(1 + \frac{2K^2}{(K+L)^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Сравнивая этот результат с формулой (4.36), убеждаемся в справедливости соотношения

$$\Delta_{S10} \left(\frac{\beta}{\alpha_0^2} \right) = -\frac{N_f}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \Delta_{M12}G \Big|_{Q=0}. \quad (4.39)$$

Таким образом, вклады супердиаграмм S10 и M12 в соответствующие ренорм-групповые функции связаны так, как предписывает NSVZ соотношение.

В работе [93] были установлены соотношения между вкладками остальных суперграфов, которые представлены на Рис. 4.1 и Рис. 4.2,

$$\Delta_{S1} \left(\frac{\beta}{\alpha_0^2} \right) = -\frac{N_f}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \Delta_{M1}G \Big|_{Q=0}; \quad (4.40)$$

$$\Delta_{S2} \left(\frac{\beta}{\alpha_0^2} \right) = -\frac{N_f}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \Delta_{M2}G \Big|_{Q=0}; \quad (4.41)$$

$$\Delta_{S3} \left(\frac{\beta}{\alpha_0^2} \right) = -\frac{N_f}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \Delta_{M3}G \Big|_{Q=0}; \quad (4.42)$$

$$\Delta_{S4} \left(\frac{\beta}{\alpha_0^2} \right) = -\frac{N_f}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\Delta_{M4}G + \Delta_{M5}G \right) \Big|_{Q=0}; \quad (4.43)$$

$$\Delta_{S5} \left(\frac{\beta}{\alpha_0^2} \right) = -\frac{N_f}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \Delta_{M6}G \Big|_{Q=0}; \quad (4.44)$$

$$\Delta_{S6} \left(\frac{\beta}{\alpha_0^2} \right) = -\frac{N_f}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\Delta_{M7}G + \Delta_{M8}G + \Delta_{M9}G \right) \Big|_{Q=0}; \quad (4.45)$$

$$\Delta_{S7}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = -\frac{N_f}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \Delta_{M10} G \Big|_{Q=0}; \quad (4.46)$$

$$\Delta_{S8}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = -\frac{N_f}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\Delta_{M11} G - \frac{1}{2} (\Delta_{M1} G)^2 \right) \Big|_{Q=0}; \quad (4.47)$$

$$\Delta_{S9}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = -\frac{N_f}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(-\frac{1}{2} (\Delta_{M2} G)^2 \right) \Big|_{Q=0}; \quad (4.48)$$

$$\Delta_{S11}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = -\frac{N_f}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\Delta_{M13} G + \Delta_{M14} G \right) \Big|_{Q=0}; \quad (4.49)$$

$$\Delta_{S12}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = -\frac{N_f}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \Delta_{M15} G \Big|_{Q=0}; \quad (4.50)$$

$$\Delta_{S13}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = -\frac{N_f}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\Delta_{M16} G - (\Delta_{M1} G)(\Delta_{M2} G) \right) \Big|_{Q=0}. \quad (4.51)$$

Явные выражения для вкладов, входящих в эти формулы, записаны в Приложении Г.

Соотношения (4.40) — (4.51) в совокупности с результатом (4.39), полученным в данной диссертации, позволяют сделать вывод о справедливости NSVZ β -функции в рассматриваемом порядке. Действительно, суммируя указанные вклады, получаем соотношение

$$\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} - \frac{\beta_{1\text{-loop}}(\alpha_0)}{\alpha_0^2} = -\frac{N_f}{\pi} \frac{d \ln G}{d \ln \Lambda} \Big|_{Q=0} + O(\alpha_0^3) = -\frac{N_f}{\pi} \gamma(\alpha_0) + O(\alpha_0^3). \quad (4.52)$$

Тогда, с учетом однопетлевого результата (4.26), находим выражение для NSVZ β -функции в трехпетлевом приближении

$$\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} = \frac{N_f}{\pi} \left(1 - \gamma(\alpha_0) \right) + O(\alpha_0^3). \quad (4.53)$$

Обе части этого соотношения являются калибровочно независимыми. Во-первых, суммируя вклады (4.35) и (Г.2) — (Г.13), убеждаемся, что все калибровочно-зависимые слагаемые в левой части формулы (4.53) взаимоуничтожаются, и полное выражение для трехпетлевой β -функции в форме петлевых инте-

гралов имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} &= 2\pi N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial Q_\mu} \frac{\ln(Q^2 + M^2)}{Q^2} + 4\pi N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \\
&\int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{e_0^2}{K^2 R_K^2} \frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial Q_\mu} \left(\frac{1}{Q^2(Q+K)^2} - \frac{1}{(Q^2+M^2)((Q+K)^2+M^2)} \right) \\
&\times \left[R_K - 2N_f e_0^2 \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{L^2(L+K)^2} - \frac{1}{(L^2+M^2)((L+K)^2+M^2)} \right) \right] \\
&+ 8\pi N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4}{K^2 R_K L^2 R_L} \frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial Q_\mu} \left\{ \frac{1}{Q^2(Q+K)^2} \right. \\
&\times \frac{1}{(Q+L)^2} - \frac{K^2}{Q^2(Q+K)^2(Q+L)^2(Q+K+L)^2} + \frac{K^2+M^2}{((Q+K)^2+M^2)} \\
&\times \frac{1}{((Q+L)^2+M^2)(Q^2+M^2)((Q+K+L)^2+M^2)} - \frac{1}{((Q+K)^2+M^2)} \\
&\times \frac{1}{((Q+L)^2+M^2)(Q^2+M^2)} + \frac{2M^2}{((Q+K)^2+M^2)((Q+L)^2+M^2)} \\
&\left. \times \frac{1}{(Q^2+M^2)^2} \right\} + O(e_0^6), \tag{4.54}
\end{aligned}$$

где производные по $\ln \Lambda$ следует вычислять при фиксированном значении перенормированной константы связи. Данное выражение совпадает с результатом для трехпетлевой β -функции, полученным ранее, см. работу [94] и ссылки в ней, посредством суммирования вкладов супердиаграмм с двумя внешними линиями калибровочного суперполя в частном случае $N_f = 1$ в калибровке Фейнмана $\xi_0 = 1$. (В указанной статье вводится n детерминантов Паули–Вилларса, поэтому для сравнения результатов следует формально положить $c_I \rightarrow 1$ и $M_I \rightarrow M$.) Это подтверждает корректность метода модифицированных вакуумных суперграфов для вычисления вкладов в β -функцию в рассмотренном случае.

Во-вторых, с помощью вкладов (4.38) и (Г.14) – (Г.22) в функцию G в

пределе нулевого внешнего импульса получаем выражение для двухпетлевой аномальной размерности суперполей материи на уровне петлевых интегралов

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha_0) = & -\frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{2e_0^2}{K^4 R_K^2} \left\{ R_K - 2e_0^2 N_f \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{L^2(L+K)^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{(L^2+M^2)((L+K)^2+M^2)} \right) \right\} + \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4}{R_K R_L} \\ & \times \left(\frac{4}{K^2 L^4 (K+L)^2} - \frac{2}{K^4 L^4} \right) + O(e_0^6), \end{aligned} \quad (4.55)$$

где производные по $\ln \Lambda$ также вычисляются при фиксированном значении α перед взятием петлевых интегралов. Видим, что выражение (4.55) не зависит от калибровочного параметра ξ_0 и согласуется с результатом работы [126], полученным в калибровке Фейнмана при выборе функции-регулятора в форме

$$R\left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right) = 1 + \frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}}, \quad (4.56)$$

где n — произвольное натуральное число. Для данного выбора функции R петлевые интегралы в формуле (4.55) были вычислены в работе [126]. Учитывая эти результаты, получаем следующее выражение для двухпетлевой аномальной размерности суперполей материи, определенной через голую константу связи:

$$\gamma(\alpha_0) = -\frac{\alpha_0}{\pi} + \frac{\alpha_0^2}{\pi^2} \left(N_f \ln a + N_f + \frac{1}{2} \right) + O(\alpha_0^3). \quad (4.57)$$

Соответственно, трехпетлевая β -функция в этом случае равна

$$\beta(\alpha_0) = \frac{\alpha_0^2 N_f}{\pi} \left[1 + \frac{\alpha_0}{\pi} + \frac{\alpha_0^2}{\pi^2} \left(-N_f \ln a - N_f - \frac{1}{2} \right) + O(\alpha_0^3) \right]. \quad (4.58)$$

Обобщение результатов (4.57) и (4.58) для случая функции-регулятора произвольного вида можно найти в работе [127].

Выражения в различных схемах вычитаний для двухпетлевой аномальной размерности $\tilde{\gamma}(\alpha)$ и трехпетлевой $\tilde{\beta}(\alpha)$ -функции в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной

квантовой электродинамике с N_f ароматами можно посмотреть, например, в работах [43, 44, 68, 127]. Отметим, что в HD+MSL схеме вычитаний [59] определения ренормгрупповых функций через голую и через перенормированную константу связи совпадают при соответствующем переобозначении аргументов, т.е.

$$\tilde{\beta}(\alpha) \Big|_{\text{HD+MSL}} = \beta(\alpha_0 \rightarrow \alpha); \quad (4.59)$$

$$\tilde{\gamma}(\alpha) \Big|_{\text{HD+MSL}} = \gamma(\alpha_0 \rightarrow \alpha), \quad (4.60)$$

и в этом случае их явные выражения могут быть легко записаны на основе формул (4.57) и (4.58).

Заключение

Исследования, проведенные в данной диссертации, посвящены изучению и явной проверке в рамках теории возмущений ряда соотношений, выражающих нетривиальную взаимосвязь между расходимостями в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теориях: теоремы о неперенормировке тройных духово-калибровочных вершин и NSVZ β -функции. На протяжении всей диссертации применяется формализм $\mathcal{N} = 1$ суперполей как для формулировки рассматриваемых теорий, так и для выполнения петлевых вычислений, которые проводятся с использованием регуляризации высшими (ковариантными) производными в случае произвольного значения калибровочного параметра. Подведем итоги проделанной работы и перечислим основные полученные результаты.

1. Непосредственным вычислением показано, что в наиболее общих перенормируемых $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теориях Янга–Миллса с простой калибровочной группой теорема о неперенормировке тройных духово-калибровочных вершин справедлива в двухпетлевом приближении в общей ξ -калибровке. Для этого был вычислен большой набор супердиаграмм с двумя внешними линиями духов Фаддеева–Попова и одной внешней линией квантового калибровочного суперполя. Выполнено суммирование всех необходимых вкладов [89, 90] в одну из тройных духово-калибровочных вершин в рассматриваемом приближении и явным образом продемонстрирована ультрафиолетовая конечность итогового результата.
2. С помощью метода модифицированных вакуумных суперграфов [52] вычислен ряд трехпетлевых вкладов духов Фаддеева–Попова в β -функцию, определенную в терминах голых параметров.
3. Вычислены двухпетлевые вклады в аномальную размерность духов Фаддеева–Попова, заданную через голые параметры, от двухточечных суперграфов, графически получающихся с помощью разрезания внутренних

духовых линий в трехпетлевых вакуумных супердиаграммах, рассмотренных в предыдущем пункте.

4. Показано, что полученные вклады в трехпетлевую β -функцию и двухпетлевую аномальную размерность духов Фаддеева–Попова связаны так, как предписывает NSVZ β -функция, записанная в терминах аномальных размерностей всех квантовых суперполей.
5. В $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамике с N_f ароматами с помощью метода модифицированных вакуумных суперграфов вычислен определенный трехпетлевой вклад в β -функцию, а также найден двухпетлевой вклад в аномальную размерность суперполей материи от двухточечной супердиаграммы, образующейся в результате разрезания петли суперполей материи в рассмотренном вакуумном суперграфе.
6. Показано, что вычисленные в предыдущем пункте вклады в трехпетлевую β -функцию и двухпетлевую аномальную размерность суперполей материи связаны абелевым NSVZ соотношением.

Необходимо отметить, что вычисления вкладов в ренормгрупповые функции были выполнены в тех порядках теории возмущений, в которых существенна зависимость от схемы перенормировки. Уточним, что для ренормгрупповых функций, определенных в терминах голых параметров, она сводится к зависимости от выбора регуляризации. По итогам проведенных вычислений новый метод получения вкладов в β -функцию [52], требующий рассмотрения модифицированных вакуумных суперграфов, подтвердил свою корректность и эффективность.

В диссертации также рассматриваются примеры применения полученных результатов в контексте общих вычислений, для которых требуется принять во внимание и другие необходимые результаты, полученные соавторами работ [91–93], а именно: вычисление двухпетлевой аномальной размерности духов

Фаддеева–Попова; полная трехпетлевая проверка дуговой части новой формы NSVZ β -функции; проверка метода модифицированных вакуумных суперграфов на примере вычисления в общей ξ -калибровке трехпетлевой β -функции в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамике, а также вычисление двухпетлевой аномальной размерности суперполей материи в общей ξ -калибровке и проверка абелевой формы NSVZ соотношения в рассматриваемом приближении.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доценту Степаньянцу Константину Викторовичу за многочисленные полезные обсуждения, внимательное прочтение рукописи и критические замечания; доценту Пронину Петру Ивановичу за внимание к диссертационной работе и ценные советы; соавторам совместных работ за результативное сотрудничество; и конечно, своей семье за неоценимую поддержку.

Приложение А

Детали вычислений двухпетлевых квантовых поправок к тройной духово-калибровочной вершине

В данном приложении рассматриваются некоторые подробности вычисления вкладов в функцию \mathcal{S} , идущих от супердиаграмм, которые входят в наборы (A1), (A9) и (A11). Напомним, что такие наборы диаграмм конструируются с помощью прикрепления внешней калибровочной $\bar{D}^2 H$ -линии к суперграфам (a1), (a9) и (a11), представленным на Рис. 1.1, всеми возможными способами. Количество диаграмм различных топологий, входящих в наборы (A1), (A9) и (A11), равно 9, 7 и 1, соответственно. Их вклады в функцию \mathcal{S} вычисляются в пределе нулевых внешних импульсов. В этом случае тройная калибровочная вершина с внешней $\bar{D}^2 H$ -линией равна 0, см. параграф 1.6, и поэтому диаграммы, которые содержат данную вершину, например (A11), заведомо дают нулевой вклад. Отметим, что в рассматриваемом приближении не существенна духово-калибровочная вершина с 5 линиями квантового калибровочного суперполя, поэтому вставка $\bar{D}^2 H$ -линии в вершину суперграфа (a11) не учитывается (см. формулы (1.74) и (1.75)).

Как правило, рассмотрение конкретных вариантов расстановок суперполей на внутренних линиях, реализующих одну и ту же топологию диаграммы, не эквивалентно с точки зрения использования D -алгебры, необходимой для ее вычисления. Во-первых, это связано с наличием двух различных видов пропагаторов духов Фаддеева–Попова (1.72) и (1.73). Во-вторых, тройная калибровочная вершина (1.77), в диаграммах из набора (A1), предполагает рассмотрение 12 неэквивалентных расстановок идущих из нее D -производных на трех пропагаторах квантового калибровочного суперполя. Поэтому, в целом, рассматриваемые

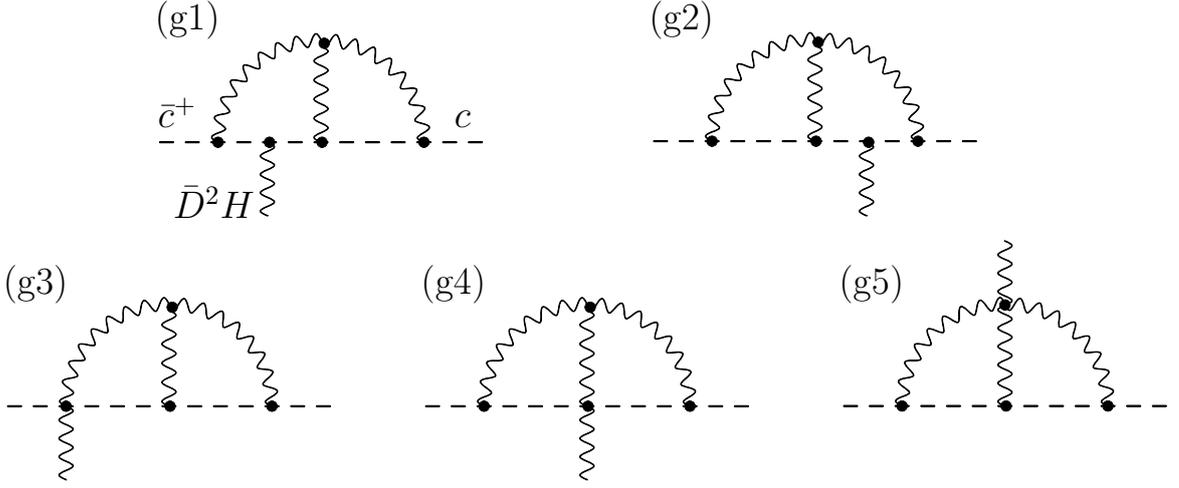


Рис. А.1. Суперграфы, которые входят в набор диаграмм (A1), см. раздел 1.6, и дают ненулевые вклады в функцию \mathcal{S} в пределе нулевых внешних импульсов.

диаграммы требуют достаточно объемных вычислений.

Супердиаграммы из набора (A1), которые дают ненулевые вклады в функцию \mathcal{S} в пределе $p \rightarrow 0, q \rightarrow 0$, изображены на Рис. А.1. Для них были получены следующие результаты

$$\begin{aligned} \Delta_{g1}\mathcal{S} &= \Delta_{g2}\mathcal{S} = -\Delta_{g3}\mathcal{S} = -\frac{3}{2}\Delta_{g4}\mathcal{S} = -\frac{3}{2}\Delta_{g5}\mathcal{S} \\ &= -\frac{e_0^4 C_2^2}{8} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{\xi_0^2}{K_K K^4 K_L L^2} \left(\frac{2}{(K+L)^2} - \frac{1}{L^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Легко убедиться в том, что их суммарный вклад дает выражение (1.82)

$$\Delta_{A1}\mathcal{S} = \sum_{n=1}^5 \Delta_{gn}\mathcal{S}. \quad (\text{A.2})$$

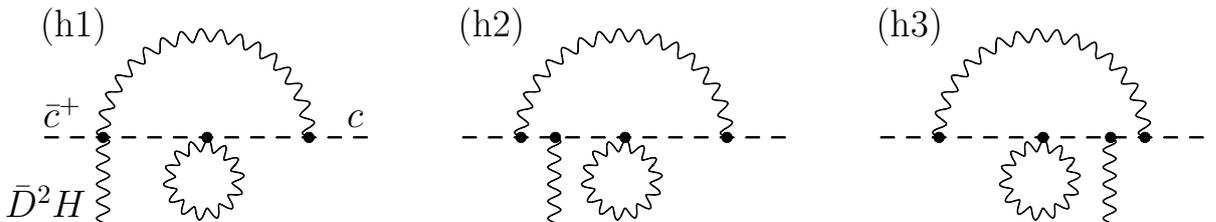


Рис. А.2. Суперграфы, которые входят в набор диаграмм (A9) и дают ненулевые вклады в функцию \mathcal{S} в пределе нулевых внешних импульсов.

Супердиаграммы из набора (A9), дающие ненулевые вклады в функцию \mathcal{S} в пределе нулевых внешних импульсов, показаны на Рис. A.2. Их вклады равны

$$\Delta_{h1}\mathcal{S} = -\Delta_{h2}\mathcal{S} = -\Delta_{h3}\mathcal{S} = \frac{e_0^4 C_2^2}{6} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{\xi_0}{K_K K^4 L^4} \left(\frac{\xi_0}{K_L} - \frac{1}{R_L} \right). \quad (\text{A.3})$$

Суммарно они дают выражение (1.87)

$$\Delta_{A9}\mathcal{S} = \sum_{n=1}^3 \Delta_{hn}\mathcal{S}. \quad (\text{A.4})$$

Приложение Б

Выражения для функций f , g и h , входящих в однопетлевой поляризационный оператор квантового калибровочного суперполя

В данном приложении приводятся явные выражения [100] для функций (евклидова импульса) $f(K/\Lambda)$, $g(\xi_0, K/\Lambda)$ и $h(K/\Lambda)$, которые определяют поляризационный оператор суперполя V в однопетлевом приближении, см. (1.99).

Калибровочно зависящая часть поляризационного оператора определяется функцией

$$g(\xi_0, K/\Lambda) = \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} g(\xi_0, K, L), \quad (\text{Б.1})$$

где, в случае равенства функций-регуляторов $R(x)$ и $K(x)$,

$$\begin{aligned} g(\xi_0, K, L) &= \frac{(\xi_0 - 1)}{2L^4 R_L} \left(R_{K+L} - \frac{2}{3} R_K \right) - \frac{(\xi_0 - 1)}{2L^2 R_L (K + L)^4 R_{K+L}} \\ &\times (K_\mu R_K + L_\mu R_L)^2 - \frac{(\xi_0 - 1)^2 K^2 R_K^2}{4L^4 R_L (K + L)^4 R_{K+L}} L^\mu (K + L)_\mu. \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

Функции f и h удобно представить в виде

$$\begin{aligned} f(K/\Lambda) &= \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} f(K, L) = \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} (f_1(K, L) + f_2(K, L)) \\ &= f_1(K/\Lambda) + f_2(K/\Lambda); \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

$$\begin{aligned} h(K/\Lambda) &= \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} h(K, L) = \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} (h_1(K, L) + h_2(K, L)) \\ &= h_1(K/\Lambda) + h_2(K/\Lambda). \end{aligned} \quad (\text{Б.4})$$

где

$$f_1(K, L) = -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{L^2 (L + K)^2} - \frac{1}{(L^2 + M_\varphi^2)((L + K)^2 + M_\varphi^2)} \right); \quad (\text{Б.5})$$

$$\begin{aligned}
f_2(K, L) &= \frac{R_L - R_K}{R_L L^2} \left(\frac{1}{(L+K)^2} - \frac{1}{L^2 - K^2} \right) + \frac{2}{R_L((L+K)^2 - L^2)} \\
&\times \left(\frac{R_{L+K} - R_L}{(L+K)^2 - L^2} - \frac{R'_L}{\Lambda^2} \right) - \frac{1}{R_L R_{L+K}} \left(\frac{R_{L+K} - R_L}{(L+K)^2 - L^2} \right)^2 \\
&- \frac{2R_K K^2}{L^2(L+K)^2 R_L R_{L+K}} \left(\frac{R_{L+K} - R_K}{(L+K)^2 - K^2} \right) - \frac{L_\mu K^\mu R_K}{L^2 R_L (L+K)^2 R_{L+K}} \\
&\times \left(\frac{R_{L+K} - R_L}{(L+K)^2 - L^2} \right) + \frac{2L_\mu K^\mu}{L^2 R_L R_{L+K}} \left(\frac{R_{L+K} - R_K}{(L+K)^2 - K^2} \right) \left(\frac{R_{L+K} - R_L}{(L+K)^2 - L^2} \right) \\
&- \frac{2K^2}{(L+K)^2 R_L R_{L+K}} \left(\frac{R_L - R_K}{L^2 - K^2} \right)^2 - \frac{K^2 L_\mu (L+K)^\mu}{L^2 (L+K)^2 R_L R_{L+K}} \left(\frac{R_L - R_K}{L^2 - K^2} \right) \\
&\times \left(\frac{R_{L+K} - R_K}{(L+K)^2 - K^2} \right) + \frac{2K^2}{((L+K)^2 - K^2) L^2 R_L} \left(\frac{R_{L+K} - R_K}{(L+K)^2 - K^2} - \frac{R'_K}{\Lambda^2} \right) \\
&- \frac{2L_\mu K^\mu}{L^2 R_L} \left(\frac{R_L}{(L^2 - (L+K)^2)(L^2 - K^2)} + \frac{R_K}{(K^2 - L^2)(K^2 - (L+K)^2)} \right. \\
&\left. + \frac{R_{L+K}}{((L+K)^2 - L^2)((L+K)^2 - K^2)} \right) - \frac{1}{2((L+K)^2 - L^2)} \\
&\times \left(\frac{2R_{L+K} R'_{L+K} (L+K)^2}{\Lambda^2 ((L+K)^2 R_{L+K}^2 + M_\varphi^2)} - \frac{2R_L R'_L L^2}{\Lambda^2 (L^2 R_L^2 + M_\varphi^2)} - \frac{1}{(L+K)^2 + M_\varphi^2} \right. \\
&\left. + \frac{1}{L^2 + M_\varphi^2} + \frac{R_{L+K}^2}{(L+K)^2 R_{L+K}^2 + M_\varphi^2} - \frac{R_L^2}{L^2 R_L^2 + M_\varphi^2} \right); \tag{B.6}
\end{aligned}$$

$$h_1(K, L) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L^2(L+K)^2} - \frac{1}{(L^2 + M^2)((L+K)^2 + M^2)} \right); \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
h_2(K, L) &= \frac{1}{((K+L)^2 - L^2)} \left(- \frac{M^2 F'_{K+L}}{\Lambda^2 F_{K+L} ((K+L)^2 F_{K+L}^2 + M^2)} \right. \\
&+ \frac{M^2 F'_L}{\Lambda^2 F_L (L^2 F_L^2 + M^2)} + \frac{F_{K+L}^2}{2((K+L)^2 F_{K+L}^2 + M^2)} - \frac{F_L^2}{2(L^2 F_L^2 + M^2)} \\
&\left. - \frac{1}{2((K+L)^2 + M^2)} + \frac{1}{2(L^2 + M^2)} \right). \tag{B.8}
\end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения

$$R'_L \equiv \frac{\partial R(L^2/\Lambda^2)}{\partial(L^2/\Lambda^2)}; \quad F'_L \equiv \frac{\partial F(L^2/\Lambda^2)}{\partial(L^2/\Lambda^2)}. \quad (\text{Б.9})$$

На основе результатов работ [123, 124], в статье [125] были вычислены следующие интегралы, содержащие функции $f_1(K/\Lambda)$ и $f_2(K/\Lambda)$, для функции-регулятора вида (3.27)

$$\int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left[\frac{f_1(K/\Lambda)}{R_K^2} + \frac{3}{16\pi^2 R_K} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{11} \right) \right] = \frac{3}{128\pi^4} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{11} - \ln a_\varphi - 1 \right); \quad (\text{Б.10})$$

$$\int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{f_2(K/\Lambda)}{K^4 R_K^2} = \frac{1}{8\pi^2} f_2(0) = 0. \quad (\text{Б.11})$$

Аналогичным образом вычисляются интегралы

$$\int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left[\frac{h_1(K/\Lambda)}{R_K^2} - \frac{1}{16\pi^2 R_K} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{12} \right) \right] = -\frac{1}{128\pi^4} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{12} - \ln a - 1 \right); \quad (\text{Б.12})$$

$$\int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{h_2(K/\Lambda)}{K^4 R_K^2} = \frac{1}{8\pi^2} h_2(0) = 0. \quad (\text{Б.13})$$

Формулы (Б.10) — (Б.13) оказываются полезны при вычислении двухпетлевой аномальной размерности духов Фаддеева–Попова.

Приложение В

Некоторые вклады в β -функцию и функцию G_c в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса

В данном приложении собраны результаты вычислений двухпетлевых и трехпетлевых вкладов в β -функцию, а также однопетлевых и двухпетлевых вкладов в функцию G_c (1.60), на основе которых были установлены соотношения (3.16) – (3.25).

Перечисленные ниже выражения для вкладов в β -функцию были построены в работе [92] с помощью модифицированных вакуумных суперграфов (*fi*), изображенных на Рис. 2.1, при условии $R(x) = K(x)$ для функций-регуляторов. Петлевые интегралы записаны в евклидовом пространстве после поворота Вика, а жирным шрифтом, для наглядности, выделены обратные квадраты импульсов, которые соответствуют духовым пропагаторам.

$$\begin{aligned} \Delta_{f1}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) &= \pi C_2^2 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial K_\mu^2} - \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu \partial K^\mu} \right) \frac{e_0^2 (\xi_0 - 1)}{K^4 R_K} \\ &\times \left\{ \frac{K^2}{(\mathbf{K} + \mathbf{Q})^2 \mathbf{Q}^2} - \frac{1}{\mathbf{Q}^2} - \frac{1}{(\mathbf{K} + \mathbf{Q})^2} \right\}; \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \Delta_{f2}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) &= \frac{4\pi}{3} C_2^2 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial K_\mu^2} \right) \frac{e_0^2 (\xi_0 - 1)}{K^4 R_K \mathbf{Q}^2} \\ &\times \left(1 - \frac{15}{2} y_0 C_2 \right); \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} \Delta_{f3}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) &= \frac{\pi}{2} C_2^3 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial K_\mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial L_\mu^2} - \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu \partial K^\mu} \right. \\ &\left. - \frac{2}{3} \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu \partial L^\mu} - \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial K_\mu \partial L^\mu} \right) \frac{e_0^4 (\xi_0 - 1)}{R_K R_L K^2 L^2} \left\{ - \frac{\xi_0 + 1}{\mathbf{Q}^2 (\mathbf{K} + \mathbf{Q} + \mathbf{L})^2 (\mathbf{K} + \mathbf{Q})^2} \right. \\ &\left. + \frac{\xi_0 - 1}{K^2 L^2} \left(\frac{1}{\mathbf{Q}^2} + \frac{1}{(\mathbf{Q} + \mathbf{K})^2} + \frac{1}{(\mathbf{Q} + \mathbf{K} + \mathbf{L})^2} + \frac{(Q + K)^2}{\mathbf{Q}^2 (\mathbf{Q} + \mathbf{K} + \mathbf{L})^2} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{L^2 Q^2} \left(\frac{1}{(Q+K+L)^2} + \frac{1}{(Q+K)^2} \right) + \frac{1}{K^2(Q+K+L)^2} \\
& \times \left(\frac{1}{Q^2} + \frac{1}{(Q+K)^2} \right) \}; \tag{B.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{f4} \left(\frac{\beta}{\alpha_0^2} \right) &= -\frac{\pi}{2} C_2^3 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial K_\mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial L_\mu^2} - \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu \partial L^\mu} \right. \\
& - \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu \partial K^\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial K_\mu \partial L^\mu} \left. \right) \frac{e_0^4 (\xi_0 - 1)^2}{R_K R_L K^2 L^2} \left\{ \frac{1}{Q^2 (Q+K)^2 (Q+L)^2} \right. \\
& - \frac{1}{K^2 (Q+L)^2} \left(\frac{1}{Q^2} + \frac{1}{(Q+K)^2} \right) - \frac{1}{L^2 (Q+K)^2} \left(\frac{1}{Q^2} + \frac{1}{(Q+L)^2} \right) \\
& \left. + \frac{1}{K^2 L^2} \left(\frac{1}{(K+Q)^2} + \frac{1}{(Q+L)^2} + \frac{Q^2}{(K+Q)^2 (Q+L)^2} + \frac{1}{Q^2} \right) \right\}; \tag{B.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{f5} \left(\frac{\beta}{\alpha_0^2} \right) &= -\frac{\pi}{8} C_2^3 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial K_\mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial L_\mu^2} - \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu \partial K^\mu} \right. \\
& - \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu \partial L^\mu} \left. \right) \frac{e_0^4 (\xi_0 - 1)}{R_K R_L K^2 L^2} \left\{ \frac{1}{K^2} \left(\frac{1}{Q^2 (Q+L)^2} + \frac{1}{(Q+K)^2 (Q+K+L)^2} \right) \right. \\
& + \frac{1}{L^2} \left(\frac{1}{Q^2 (Q+K)^2} + \frac{1}{(Q+L)^2 (Q+K+L)^2} \right) + \frac{\xi_0 (K^2 + L^2)}{K^2 L^2} \\
& \times \left(\frac{1}{Q^2 (Q+K+L)^2} + \frac{1}{(Q+K)^2 (Q+L)^2} \right) + \frac{(\xi_0 - 1)}{K^2 L^2} \\
& \times \left(\frac{1}{Q^2} + \frac{1}{(Q+K)^2} + \frac{1}{(Q+L)^2} + \frac{1}{(Q+K+L)^2} \right) \\
& \left. - \frac{(\xi_0 + 1)(2Q+K+L)^2 + \xi_0(L^2 + K^2)}{Q^2 (Q+K)^2 (Q+L)^2 (K+Q+L)^2} \right\}; \tag{B.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{f6} \left(\frac{\beta}{\alpha_0^2} \right) &= -\frac{\pi}{6} C_2^3 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial K_\mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial L_\mu^2} - \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu \partial K^\mu} \right. \\
& - \frac{2}{3} \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu \partial L^\mu} - \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial K_\mu \partial L^\mu} \left. \right) \frac{e_0^4 (\xi_0 - 1)}{R_K R_L K^4 L^4} \left\{ \frac{2K^2 + 2L^2}{Q^2 (Q+K+L)^2} + \frac{1}{2} (\xi_0 - 1) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\times \left(\frac{1}{\mathbf{Q}^2} + \frac{(K+L)^2 + K^2 + L^2 + (Q+K)^2 + (Q+L)^2}{\mathbf{Q}^2(\mathbf{Q} + \mathbf{K} + \mathbf{L})^2} + \frac{1}{(\mathbf{Q} + \mathbf{K} + \mathbf{L})^2} \right) \}; \quad (\text{B.6})$$

$$\Delta_{\text{f7}}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = 0; \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{f9}}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) + \Delta_{\text{f10}}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) &= 2\pi C_2 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \left\{ C_2^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu \partial K^\mu} \right] \frac{e_0^4}{R_K^2 K^4} \left(\frac{K^2}{(\mathbf{K} + \mathbf{Q})^2 \mathbf{Q}^2} + \frac{1}{3\mathbf{Q}^2} - \frac{1}{(\mathbf{Q} + \mathbf{K})^2} \right) \right. \\ &\quad \times \left(f(K, L) + g(\xi_0, K, L) \right) + \left[C_2 T(R) \left(\frac{\partial^2}{\partial K_\mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2} - \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu \partial K^\mu} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial^2}{\partial L_\mu \partial K^\mu} \right) + \frac{1}{r} \text{tr} [C(R)^2] \frac{\partial^2}{\partial L_\mu^2} \right] \frac{e_0^4}{R_K^2 K^4} \left(\frac{K^2}{(\mathbf{K} + \mathbf{Q})^2 \mathbf{Q}^2} + \frac{1}{3\mathbf{Q}^2} \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{(\mathbf{Q} + \mathbf{K})^2} \right) h(K, L) \right\} + \dots; \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{f11}}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) &= -\frac{2\pi}{3} C_2^3 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial K_\mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial L_\mu^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu \partial K^\mu} \right) \frac{e_0^4 (\xi_0 - 1)^2}{R_K R_L K^4 L^4} \left\{ \frac{K^2}{\mathbf{Q}^2 (\mathbf{K} + \mathbf{Q})^2} - \frac{1}{\mathbf{Q}^2} - \frac{1}{(\mathbf{K} + \mathbf{Q})^2} \right\}; \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{f12}}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) &= -\frac{2\pi}{9} C_2^3 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial K_\mu^2} \right) \\ &\quad \times \frac{e_0^4 (\xi_0 - 1)^2}{R_K R_L K^4 L^4 \mathbf{Q}^2}. \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

Многоточие в формуле (B.8) обозначает слагаемые, соответствующие разрезаниям внутренних линий квантового калибровочного суперполя. Отдельные выражения для вкладов $\Delta_{\text{f9}}(\beta/\alpha_0^2)$ и $\Delta_{\text{f10}}(\beta/\alpha_0^2)$ можно посмотреть в статье [92]. Явный вид функций f , g и h приведен в Приложении Б.

Напомним, что вклады в β -функцию, идущие от модифицированных вакуумных суперграфов (f8) и (f13) были вычислены в данной диссертации, они даются формулами (2.42) и (2.38), соответственно.

Вклады супердиаграмм (ai), изображенных на Рис. 1.1 и на Рис. 3.3, в функцию G_c в пределе нулевого внешнего импульса были получены в работе [91]. В случае $R(x) = K(x)$ они даются выражениями

$$\Delta_{a13}G_c \Big|_{Q=0} = e_0^2 C_2 (\xi_0 - 1) \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} y_0 C_2 \right) \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^4 R_K}; \quad (\text{B.11})$$

$$\Delta_{a6}G_c \Big|_{Q=0} = \frac{e_0^4 C_2^2}{4} \xi_0 (\xi_0 - 1) \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^4 R_K L^4 R_L}; \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} \Delta_{a10}G_c \Big|_{Q=0} &= -\frac{e_0^4 C_2^2}{6} (\xi_0 - 1) \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{1}{R_K R_L} \left(\frac{\xi_0 + 1}{K^2 L^4 (K + L)^2} \right. \\ &\left. + \frac{\xi_0 - 1}{2K^4 L^4} \right); \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \Delta_{a15}G_c \Big|_{Q=0} &= \frac{2e_0^4 C_2}{3} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^4 R_K^2} \left(C_2 f(K/\Lambda) + C_2 g(\xi_0, K/\Lambda) \right. \\ &\left. + T(R) h(K/\Lambda) \right); \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\Delta_{ai}G_c \Big|_{Q=0} = 0, \quad i = 2 - 5; 7 - 9; 12; 14, \quad (\text{B.15})$$

где петлевые интегралы записаны в евклидовом пространстве. Они расходятся, и поэтому данные выражения записаны формально. Вклады диаграмм (a1) и (a11), полученные в данной диссертации, выражают формулы (3.4) и (3.5), соответственно.

Приложение Г

Некоторые вклады в β -функцию и функцию G в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамике с N_f ароматами

В этом приложении собраны выражения для вкладов, входящих в соотношения (4.40) – (4.51), от супердиаграмм S_i и M_i , которые изображены на Рис. 4.1 и Рис. 4.2. Они были вычислены в случае произвольного значения калибровочного параметра на уровне петлевых интегралов в работе [93]. Введем обозначение

$$\Delta_K \equiv \frac{\xi_0}{K_K} - \frac{1}{R_K}. \quad (\text{Г.1})$$

Вклады в β -функцию, построенные методом модифицированных вакуумных суперграфов, равны

$$\begin{aligned} \Delta_{S1}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) &= 4\pi N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} e_0^2 \frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial Q_\mu} \left\{ \frac{1}{K^2 R_K} \left(\frac{1}{Q^2(Q+K)^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{((Q^2+M^2)(Q+K)^2+M^2)} \right) + \frac{2\Delta_K}{K^4} \left(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{Q^2+M^2} \right) \right\}; \end{aligned} \quad (\text{Г.2})$$

$$\Delta_{S2}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = -8\pi N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} e_0^2 \frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial Q_\mu} \frac{\Delta_K}{K^4} \left(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{Q^2+M^2} \right); \quad (\text{Г.3})$$

$$\begin{aligned} \Delta_{S3}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) &= 4\pi N_f^2 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} e_0^4 \left(\frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial Q_\mu} + \frac{\partial^2}{\partial L^\mu \partial L_\mu} \right) \\ &\quad \times \left\{ -\frac{1}{R_K^2 K^2} \left(\frac{1}{Q^2(Q+K)^2} - \frac{1}{(Q^2+M^2)((Q+K)^2+M^2)} \right) \left(\frac{1}{L^2(L+K)^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{(L^2+M^2)((L+K)^2+M^2)} \right) + \frac{4}{R_K^2 K^4} \left(\frac{1}{Q^2(Q+K)^2} - \frac{1}{(Q^2+M^2)} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{((Q+K)^2+M^2)} \right) \left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{L^2+M^2} \right) + \frac{4}{K^6} \left(\frac{\xi_0^2}{K_K^2} - \frac{1}{R_K^2} \right) \left(\frac{1}{Q^2} - \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{Q^2 + M^2} \left) \left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{L^2 + M^2} \right) \right\}; \quad (\Gamma.4)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{S4} \left(\frac{\beta}{\alpha_0^2} \right) &= -16\pi N_f^2 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} e_0^4 \left(\frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial Q_\mu} + \frac{\partial^2}{\partial L^\mu \partial L_\mu} \right) \\ &\times \left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{L^2 + M^2} \right) \left\{ \frac{1}{R_K^2 K^4} \left(\frac{1}{Q^2 (Q + K)^2} - \frac{1}{(Q^2 + M^2)((Q + K)^2 + M^2)} \right) \right. \\ &\left. + \frac{2}{K^6} \left(\frac{\xi_0^2}{K_K^2} - \frac{1}{R_K^2} \right) \left(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{Q^2 + M^2} \right) \right\}; \quad (\Gamma.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{S5} \left(\frac{\beta}{\alpha_0^2} \right) &= 32\pi N_f^2 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} e_0^4 \frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial Q_\mu} \frac{1}{K^6} \left(\frac{\xi_0^2}{K_K^2} - \frac{1}{R_K^2} \right) \\ &\times \left(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{Q^2 + M^2} \right) \left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{L^2 + M^2} \right); \quad (\Gamma.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{S6} \left(\frac{\beta}{\alpha_0^2} \right) &= -16\pi N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} e_0^4 \frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial Q_\mu} \left\{ \frac{1}{K^2 R_K L^2 R_L} \right. \\ &\times \left(\frac{1}{Q^2 (Q + K)^2 (Q + K + L)^2} - \frac{1}{(Q^2 + M^2)((Q + K + L)^2 + M^2)} \right. \\ &\times \left. \left. \frac{1}{((Q + K)^2 + M^2)} \right) + \frac{2\Delta_L}{L^4 K^2 R_K} \left(\frac{1}{Q^2 (Q + K + L)^2} + \frac{1}{Q^2 (Q + K)^2} \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{1}{(Q^2 + M^2)((Q + K + L)^2 + M^2)} - \frac{1}{(Q^2 + M^2)((Q + K)^2 + M^2)} \right) \right. \\ &\left. + \frac{\Delta_K \Delta_L}{K^4 L^4} \left(\frac{3}{Q^2} + \frac{(Q + K)^2}{Q^2 (Q + K + L)^2} - \frac{(Q + K)^2 - 3M^2}{(Q^2 + M^2)((Q + K + L)^2 + M^2)} \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{3}{Q^2 + M^2} \right) \right\}; \quad (\Gamma.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{S7} \left(\frac{\beta}{\alpha_0^2} \right) &= 4\pi N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} e_0^4 \frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial Q_\mu} \left\{ \frac{1}{K^2 R_K L^2 R_L} \right. \\ &\times \left(\frac{(2Q + K + L)^2}{Q^2 (Q + K)^2 (Q + K + L)^2 (Q + L)^2} - \frac{(2Q + K + L)^2 + 2M^2}{(Q^2 + M^2)((Q + K + L)^2 + M^2)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{((Q+K)^2+M^2)((Q+L)^2+M^2)} \Bigg) + \frac{4\Delta_L}{L^4 K^2 R_K} \left(\frac{1}{Q^2(Q+K)^2} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{(Q^2+M^2)((Q+K)^2+M^2)} \right) + \frac{4\Delta_K \Delta_L}{K^4 L^4} \left(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{Q^2+M^2} \right. \\
& \left. + \frac{M^2}{(Q^2+M^2)((Q+K+L)^2+M^2)} \right) \Bigg\}; \tag{G.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{S8} \left(\frac{\beta}{\alpha_0^2} \right) &= 8\pi N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} e_0^4 \frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial Q_\mu} \left\{ \frac{1}{K^2 R_K L^2 R_L} \right. \\
& \times \left(\frac{1}{Q^2(Q+K)^2(Q+L)^2} - \frac{Q^2-M^2}{(Q^2+M^2)^2((Q+K)^2+M^2)((Q+L)^2+M^2)} \right) \\
& + \frac{2\Delta_L}{L^4 K^2 R_K} \left(\frac{1}{(Q+K)^2(Q+L)^2} + \frac{1}{Q^2(Q+K)^2} - \frac{1}{((Q+K)^2+M^2)} \right. \\
& \times \left. \frac{1}{((Q+L)^2+M^2)} - \frac{Q^2-M^2}{(Q^2+M^2)^2((Q+K)^2+M^2)} \right) + \frac{\Delta_K \Delta_L}{K^4 L^4} \left(\frac{3}{Q^2} \right. \\
& + \frac{Q^2}{(Q+K)^2(Q+L)^2} - \frac{3}{Q^2+M^2} - \frac{Q^2-M^2}{((Q+K)^2+M^2)((Q+L)^2+M^2)} \\
& \left. + \frac{2M^2}{(Q^2+M^2)^2} \right) \Bigg\}; \tag{G.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{S9} \left(\frac{\beta}{\alpha_0^2} \right) &= 8\pi N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} e_0^4 \frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial Q_\mu} \frac{\Delta_K \Delta_L}{K^4 L^4} \left(\frac{1}{Q^2} \right. \\
& \left. - \frac{Q^2-M^2}{(Q^2+M^2)^2} \right); \tag{G.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{S11} \left(\frac{\beta}{\alpha_0^2} \right) &= 16\pi N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} e_0^4 \frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial Q_\mu} \frac{\Delta_L}{L^4} \left\{ \frac{1}{R_K K^2} \right. \\
& \times \left(\frac{1}{Q^2(Q+K)^2} - \frac{1}{(Q^2+M^2)((Q+K)^2+M^2)} \right) + \frac{2\Delta_K}{K^4} \left(\frac{1}{Q^2} \right. \\
& \left. - \frac{1}{Q^2+M^2} \right) \Bigg\}; \tag{G.11}
\end{aligned}$$

$$\Delta_{S12}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = -8\pi N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} e_0^4 \frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial Q_\mu} \frac{\Delta_K \Delta_L}{K^4 L^4} \left(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{Q^2 + M^2} \right); \quad (\Gamma.12)$$

$$\Delta_{S13}\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = -16\pi N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} e_0^4 \frac{\partial^2}{\partial Q^\mu \partial Q_\mu} \frac{\Delta_L}{L^4} \left\{ \frac{1}{R_K K^2} \times \left(\frac{1}{Q^2 (Q+K)^2} - \frac{Q^2 - M^2}{(Q^2 + M^2)^2 ((Q+K)^2 + M^2)} \right) + \frac{2\Delta_K}{K^4} \left(\frac{1}{Q^2} - \frac{Q^2}{(Q^2 + M^2)^2} \right) \right\}. \quad (\Gamma.13)$$

Вклады в функцию G (4.15), идущие от суперграфов Mi , в пределе нулевого внешнего импульса даются следующими петлевыми интегралами

$$\Delta_{M1}G \Big|_{Q=0} = -2e_0^2 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{\xi_0}{K^4 K_K}; \quad (\Gamma.14)$$

$$\Delta_{M2}G \Big|_{Q=0} = 2e_0^2 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{\Delta_K}{K^4}; \quad (\Gamma.15)$$

$$\Delta_{M3}G \Big|_{Q=0} = -\Delta_{M4}G \Big|_{Q=0} = -8N_f e_0^4 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{\xi_0^2}{K^6 K_K^2} \left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{L^2 + M^2} \right); \quad (\Gamma.16)$$

$$\Delta_{M5}G \Big|_{Q=0} = 4N_f e_0^4 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{R_K^2 K^4} \left(\frac{1}{L^2 (K+L)^2} - \frac{1}{(L^2 + M^2)} \right) \times \frac{1}{((K+L)^2 + M^2)} \right\} + 2 \left(\frac{\xi_0^2}{K_K^2} - \frac{1}{R_K^2} \right) \left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{L^2 + M^2} \right); \quad (\Gamma.17)$$

$$\Delta_{M6}G \Big|_{Q=0} = -8N_f e_0^4 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^6} \left(\frac{\xi_0^2}{K_K^2} - \frac{1}{R_K^2} \right) \left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{L^2 + M^2} \right); \quad (\Gamma.18)$$

$$\Delta_{M7}G \Big|_{Q=0} = -\Delta_{M10}G \Big|_{Q=0} = 4e_0^4 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{\xi_0^2}{K^4 K_K L^4 K_L}; \quad (\Gamma.19)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{M8}G\Big|_{Q=0} &= \Delta_{M9}G\Big|_{Q=0} = -\Delta_{M11}G\Big|_{Q=0} = 4e_0^4 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{d^4L}{(2\pi)^4} \frac{\xi_0}{K^4 K_K} \\ &\times \left\{ \frac{1}{L^2 R_L (K+L)^2} + \frac{\Delta_L}{L^4} \left(1 + \frac{K^2}{(K+L)^2} \right) \right\}; \end{aligned} \quad (\text{Г.20})$$

$$\Delta_{M13}G\Big|_{Q=0} = \Delta_{M14}G\Big|_{Q=0} = -\Delta_{M16}G\Big|_{Q=0} = -4e_0^4 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{d^4L}{(2\pi)^4} \frac{\xi_0 \Delta_L}{K^4 K_K L^4}; \quad (\text{Г.21})$$

$$\Delta_{M15}G\Big|_{Q=0} = 2e_0^4 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{d^4L}{(2\pi)^4} \frac{\Delta_K \Delta_L}{K^4 L^4}. \quad (\text{Г.22})$$

Данные выражения записаны формально, поскольку входящие в них интегралы расходятся. Тем не менее, полное выражение для двухпетлевой аномальной размерности суперполей материи (4.55) является хорошо определенным.

Напомним, что выражения для вкладов, идущих от супердиаграмм S10 и M12, даются формулами (4.35) и (4.38), соответственно.

Список литературы

1. Zyla P. A. et al. [Particle Data Group]. Review of Particle Physics // РТЕР. — 2020. — Vol. 2020, no. 8. — P. 083C01.
2. Langacker P. The Standard Model and Beyond. Series in High Energy Physics, Cosmology and Gravitation. — CRC Press. — 2nd edition, 2017. — 650 p.
3. Kane G. Modern Elementary Particle Physics: Explaining and Extending the Standard Model. — Cambridge: Cambridge University Press. — 2nd edition, 2017. — 240 p.
4. Nagashima Y. Beyond the standard model of elementary particle physics. — Wiley-VCH, 2014. — 656 p.
5. Емельянов В. М. Стандартная модель и ее расширения. — М.: Физматлит, 2007. — 584 с.
6. Mohapatra R. N. Unification and Supersymmetry: The Frontiers of Quark-Lepton Physics. — New York: Springer. — 3rd edition, 2003. — 421 p.
7. Гольфанд Ю. А. и Лихтман Е. П. Расширение алгебры генераторов группы Пуанкаре и нарушение Р-инвариантности // Письма ЖЭТФ. — 1971. — Т. 13. — С. 452–455.
8. Волков Д. В. и Акулов В. П. О возможном фундаментальном взаимодействии нейтрино // Письма ЖЭТФ. — 1972. — Т. 16. — С. 621–624.
9. Wess J., Zumino B. A Lagrangian Model Invariant Under Supergauge Transformations // Phys. Lett. B. — 1974. — Vol. 49. — P. 52–54.
10. Wess J., Zumino B. Supergauge Transformations in Four-Dimensions // Nucl. Phys. B. — 1974. — Vol. 70. — P. 39–50.
11. Sohnius M. F., West P. C. Conformal Invariance in $N = 4$ Supersymmetric Yang-Mills Theory // Phys. Lett. B. — 1981. — Vol. 100. — P. 245–250.
12. Grisaru M. T., Siegel W. Supergraphity. 2. Manifestly Covariant Rules and Higher Loop Finiteness // Nucl. Phys. B. — 1982. — Vol. 201. — P. 292–314. [Erratum: Nucl. Phys. B. — 1982. — Vol. 206. — P. 496–497].

13. Mandelstam S. Light Cone Superspace and the Ultraviolet Finiteness of the N=4 Model // Nucl. Phys. B. — 1983. — Vol. 213. — P. 149–168.
14. Brink L., Lindgren O., Nilsson B. E. W. N = 4 Yang-Mills Theory on the Light Cone // Nucl. Phys. B. — 1983. — Vol. 212. — P. 401–412.
15. Howe P. S., Stelle K. S., Townsend P. K. Miraculous Ultraviolet Cancellations in Supersymmetry Made Manifest // Nucl. Phys. B. — 1984. — Vol. 236. — P. 125–166.
16. Buchbinder I. L., Kuzenko S. M., Ovrut B. A. On the D = 4, N = 2 nonrenormalization theorem // Phys. Lett. B. — 1998. — Vol. 433. — P. 335–345.
17. Grisaru M. T., Siegel W., Rocek M. Improved Methods for Supergraphs // Nucl. Phys. B. — 1979. — Vol. 159. — P. 429.
18. Stepanyantz K. V. Non-renormalization of the $V\bar{c}c$ -vertices in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric theories // Nucl. Phys. B. — 2016. — Vol. 909. — P. 316–335.
19. Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I. Exact Gell-Mann-Low Function of Supersymmetric Yang-Mills Theories from Instanton Calculus // Nucl. Phys. B. — 1983. — Vol. 229. — P. 381–393.
20. Jones D. R. T. More on the Axial Anomaly in Supersymmetric Yang-Mills Theory // Phys. Lett. B. — 1983. — Vol. 123. — P. 45–46.
21. Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I. The beta function in supersymmetric gauge theories. Instantons versus traditional approach // Phys. Lett. B. — 1986. — Vol. 166. — P. 329–333. [Ядерная Физика. — 1986. — Т. 43. — С. 459].
22. Shifman M. A., Vainshtein A. I. Solution of the Anomaly Puzzle in SUSY Gauge Theories and the Wilson Operator Expansion // Nucl. Phys. B. — 1986. — Vol. 277. — P. 456–486. [Solution of the problem of anomalies in supersymmetric gauge theories, and the operator expansion // ЖЭТФ. — 1986. — Т. 91. — С. 723–744; J. Exp. Theor. Phys. — 1986. — Vol. 64, no. 3. — P. 428].
23. Capri M. A. L., Granado D. R., Guimaraes M. S. et al. Renormalization aspects

- of N=1 Super Yang-Mills theory in the Wess-Zumino gauge // Eur. Phys. J. C. — 2014. — Vol. 74, no. 4. — P. 2844.
24. Taylor J. C. Ward Identities and Charge Renormalization of the Yang-Mills Field // Nucl. Phys. B. — 1971. — Vol. 33. — P. 436–444.
 25. Blasi A., Piguet O., Sorella S. P. Landau gauge and finiteness // Nucl. Phys. B. — 1991. — Vol. 356. — P. 154–162.
 26. Dudal D., Verschelde H., Sorella S. P. The Anomalous dimension of the composite operator A^2 in the Landau gauge // Phys. Lett. B. — 2003. — Vol. 555. — P. 126–131.
 27. Chetyrkin K. G. Four-loop renormalization of QCD: Full set of renormalization constants and anomalous dimensions // Nucl. Phys. B. — 2005. — Vol. 710. — P. 499–510.
 28. Jack I., Jones D. R. T. Regularization of supersymmetric theories // Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. — 2010. — Vol. 21. — P. 494–513.
 29. 't Hooft G., Veltman M. J. G. Regularization and Renormalization of Gauge Fields // Nucl. Phys. B. — 1972. — Vol. 44. — P. 189–213.
 30. Bollini C. G., Giambiagi J. J. Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter // Nuovo Cim. — 1972. — Vol. B12. — P. 20–26.
 31. Cicuta G. M., Montaldi E. Analytic renormalization via continuous space dimension // Lett. Nuovo Cim. — 1972. — Vol. 4. — P. 329–332.
 32. Ashmore J. F. A Method of Gauge Invariant Regularization // Lett. Nuovo Cim. — 1972. — Vol. 4. — P. 289–290.
 33. Delbourgo R., Prasad V. B. Supersymmetry in the Four-Dimensional Limit // J. Phys. G. — 1975. — Vol. 1. — P. 377.
 34. Siegel W. Supersymmetric Dimensional Regularization via Dimensional Reduction // Phys. Lett. B. — 1979. — Vol. 84. — P. 193–196.
 35. Mihaila L. Precision Calculations in Supersymmetric Theories // Adv. High Energy Phys. — 2013. — Vol. 2013. — P. 607807.

36. Avdeev L. V., Chochia G. A., Vladimirov A. A. On the Scope of Supersymmetric Dimensional Regularization // *Phys. Lett. B.* — 1981. — Vol. 105. — P. 272–274.
37. Avdeev L. V. Noninvariance of Regularization by Dimensional Reduction: An Explicit Example of Supersymmetry Breaking // *Phys. Lett. B.* — 1982. — Vol. 117. — P. 317–320.
38. Avdeev L. V., Vladimirov A. A. Dimensional Regularization and Supersymmetry // *Nucl. Phys. B.* — 1983. — Vol. 219. — P. 262–276.
39. Jack I., Jones D. R. T., North C. G. $N=1$ supersymmetry and the three loop gauge Beta function // *Phys. Lett. B.* — 1996. — Vol. 386. — P. 138–140.
40. Jack I., Jones D. R. T., North C. G. Scheme dependence and the NSVZ Beta function // *Nucl. Phys. B.* — 1997. — Vol. 486. — P. 479–499.
41. Jack I., Jones D. R. T., Pickering A. The Connection between DRED and NSVZ // *Phys. Lett. B.* — 1998. — Vol. 435. — P. 61–66.
42. Harlander R. V., Jones D. R. T., Kant P. et al. Four-loop beta function and mass anomalous dimension in dimensional reduction // *JHEP.* — 2006. — Vol. 12. — P. 024.
43. Kataev A. L., Stepanyantz K. V. Scheme independent consequence of the NSVZ relation for $\mathcal{N} = 1$ SQED with N_f flavors // *Phys. Lett. B.* — 2014. — Vol. 730. — P. 184–189.
44. Катаев А. Л., Степаньянц К. В. β -Функция Новикова–Шифмана–Вайнштейна–Захарова в суперсимметричных теориях при различных регуляризациях и перенормировочных предписаниях // *ТМФ.* — 2014. — Т. 181. — С. 475–486.
45. Slavnov A. A. Invariant regularization of nonlinear chiral theories // *Nucl. Phys. B.* — 1971. — Vol. 31. — P. 301–315.
46. Славнов А. А. Инвариантная регуляризация калибровочных теорий // *ТМФ.* — 1972. — Т. 13. — С. 174–177.
47. Славнов А. А. Регуляризация Паули–Вилларса для неабелевых калибро-

- вочных групп // ТМФ. — 1977. — Т. 33. — С. 210–217.
48. Кривошеков В. К. Инвариантная регуляризация для суперсимметричных калибровочных теорий // ТМФ. — 1978. — Т. 36. — С. 291–302.
 49. West P. C. Higher Derivative Regulation of Supersymmetric Theories // Nucl. Phys. B. — 1986. — Vol. 268. — P. 113–124.
 50. Galperin A. S., Ivanov E. A., Ogievetsky V. I., Sokatchev E. S. Harmonic superspace. — Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2001. — 306 p.
 51. Buchbinder I. L., Pletnev N. G., Stepanyantz K. V. Manifestly N=2 supersymmetric regularization for N=2 supersymmetric field theories // Phys. Lett. B. — 2015. — Vol. 751. — P. 434–441.
 52. Stepanyantz K. V. The β -function of $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories regularized by higher covariant derivatives as an integral of double total derivatives // JHEP. — 2019. — Vol. 10. — P. 011.
 53. Stepanyantz K. V. The NSVZ β -function for theories regularized by higher covariant derivatives: the all-loop sum of matter and ghost singularities // JHEP. — 2020. — Vol. 01. — P. 192.
 54. Stepanyantz K. The all-loop perturbative derivation of the NSVZ β -function and the NSVZ scheme in the non-Abelian case by summing singular contributions // Eur. Phys. J. C. — 2020. — Vol. 80, no. 10. — P. 911.
 55. Вайнштейн А. И., Захаров В. И., Шифман М. А. Точная функция Гелл-Мана–Лоу в суперсимметричной электродинамике // Письма в ЖЭТФ. — 1985. — Т. 42. — С. 182–184.
 56. Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I. Exact Gell-Mann–Low Function In Supersymmetric Electrodynamics // Phys. Lett. B. — 1986. — Vol. 166. — P. 334.
 57. Stepanyantz K. V. Derivation of the exact NSVZ β -function in N=1 SQED, regularized by higher derivatives, by direct summation of Feynman diagrams // Nucl. Phys. B. — 2011. — Vol. 852. — P. 71–107.
 58. Stepanyantz K. V. The NSVZ β -function and the Schwinger-Dyson equations

- for $\mathcal{N} = 1$ SQED with N_f flavors, regularized by higher derivatives // JHEP. — 2014. — Vol. 08. — P. 096.
59. Kataev A. L., Stepanyantz K. V. NSVZ scheme with the higher derivative regularization for $\mathcal{N} = 1$ SQED // Nucl. Phys. B. — 2013. — Vol. 875. — P. 459–482.
 60. Pimenov A. B., Shevtsova E. S., Stepanyantz K. V. Calculation of two-loop beta-function for general N=1 supersymmetric Yang–Mills theory with the higher covariant derivative regularization // Phys. Lett. B. — 2010. — Vol. 686. — P. 293–297.
 61. Shakhmanov V. Y., Stepanyantz K. V. Three-loop NSVZ relation for terms quartic in the Yukawa couplings with the higher covariant derivative regularization // Nucl. Phys. B. — 2017. — Vol. 920. — P. 345–367.
 62. Kazantsev A. E., Shakhmanov V. Y., Stepanyantz K. V. New form of the exact NSVZ β -function: the three-loop verification for terms containing Yukawa couplings // JHEP. — 2018. — Vol. 04. — P. 130.
 63. Aleshin S. S., Kataev A. L., Stepanyantz K. V. Structure of three-loop contributions to the β -function of $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric QED with N_f flavors regularized by the dimensional reduction // JETP Lett. — 2016. — Vol. 103, no. 2. — P. 77–81.
 64. Aleshin S. S., Goriachuk I. O., Kataev A. L., Stepanyantz K. V. The NSVZ scheme for $\mathcal{N} = 1$ SQED with N_f flavors, regularized by the dimensional reduction, in the three-loop approximation // Phys. Lett. B. — 2017. — Vol. 764. — P. 222–227.
 65. Алешин С. С. Квантовые поправки в суперсимметричных теориях при использовании различных регуляризований: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.02 / Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова. — М., 2017. — 116 с.
 66. Shakhmanov V. Y., Stepanyantz K. V. New form of the NSVZ relation at the two-loop level // Phys. Lett. B. — 2018. — Vol. 776. — P. 417–423.

67. Stepanyantz K. V. Structure of Quantum Corrections in $\mathcal{N} = 1$ Supersymmetric Gauge Theories // Bled Workshops Phys. — 2017. — Vol. 18, no. 2. — P. 197–213.
68. Kataev A. L., Kazantsev A. E., Stepanyantz K. V. On-shell renormalization scheme for $\mathcal{N} = 1$ SQED and the NSVZ relation // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Vol. 79, no. 6. — P. 477.
69. Goriachuk I. O., Kataev A. L., Stepanyantz K. V. A class of the NSVZ renormalization schemes for $\mathcal{N} = 1$ SQED // Phys. Lett. B. — 2018. — Vol. 785. — P. 561–566.
70. Горячук И. О. и Катаев А. Л. Точная β -функция в абелевых и неабелевых $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных моделях и ее аналогия с β -функцией КХД в C -схеме // Письма в ЖЭТФ. — 2020. — Т. 111, № 12. — С. 789–793.
71. Korneev D., Plotnikov D., Stepanyantz K., Tereshina N. The NSVZ relations for $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric theories with multiple gauge couplings // JHEP. — 2021. — Vol. 10. — P. 046.
72. Shifman M. A., Vainshtein A. I. Instantons versus supersymmetry: Fifteen years later // In Shifman, M.A.: ITEP lectures on particle physics and field theory. — Singapore: World Scientific. — 1999. — Vol. 2. — P. 485–647.
73. Buchbinder I. L., Stepanyantz K. V. The higher derivative regularization and quantum corrections in $N=2$ supersymmetric theories // Nucl. Phys. B. — 2014. — Vol. 883. — P. 20–44.
74. Heinemeyer S., Mondragón M., Tracas N., Zoupanos G. Reduction of Couplings and its application in Particle Physics // Phys. Rept. — 2019. — Vol. 814. — P. 1–43.
75. Stepanyantz K. Exact β -functions for $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric theories finite in the lowest loops // Eur. Phys. J. C. — 2021. — Vol. 81. — P. 571.
76. Kazakov D. I., Kalmykov M. Y., Kondrashuk I. N., Gladyshev A. V. Softly broken finite supersymmetric grand unified theory // Nucl. Phys. B. — 1996. —

- Vol. 471. — P. 389–408.
77. Kazakov D. I. Finiteness of soft terms in finite N=1 SUSY gauge theories // Phys. Lett. B. — 1998. — Vol. 421. — P. 211–216.
78. Adler S. L. Some Simple Vacuum Polarization Phenomenology: $e^+e^- \rightarrow$ Hadrons: The μ - Mesic Atom x-Ray Discrepancy and $g_\mu - 2$ // Phys. Rev. D. — 1974. — Vol. 10. — P. 3714.
79. Shifman M., Stepanyantz K. Exact Adler Function in Supersymmetric QCD // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Vol. 114, no. 5. — P. 051601.
80. Shifman M., Stepanyantz K. V. Derivation of the exact expression for the D function in N=1 SQCD // Phys. Rev. D. — 2015. — Vol. 91. — P. 105008.
81. Hisano J., Shifman M. A. Exact results for soft supersymmetry breaking parameters in supersymmetric gauge theories // Phys. Rev. D. — 1997. — Vol. 56. — P. 5475–5482.
82. Jack I., Jones D. R. T. The Gaugino Beta function // Phys. Lett. B. — 1997. — Vol. 415. — P. 383–389.
83. Avdeev L. V., Kazakov D. I., Kondrashuk I. N. Renormalizations in softly broken SUSY gauge theories // Nucl. Phys. B. — 1998. — Vol. 510. — P. 289–312.
84. Степаньянц К. В. Регуляризация высшими ковариантными производными как средство для выявления структуры квантовых поправок в суперсимметричных калибровочных теориях // Труды МИАН. — 2020. — Т. 309. — С. 304–319.
85. Шахманов В. Ю. Структура петлевых интегралов в суперсимметричных калибровочных теориях: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.02 / Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова. — М., 2018. — 101 с.
86. Aleshin S., Goriachuk I., Kolupaev D., Stepanyantz K. The β -function of supersymmetric theories from vacuum supergraphs: A three-loop example // Mod. Phys. Lett. A. — 2022. — Vol. 37, no. 07. — P. 2250042.
87. Уэст П. Введение в суперсимметрию и супергравитацию. — М.: Мир, 1989. — 328 с.

88. Gates S. J., Grisaru M. T., Rocek M., Siegel W. Superspace Or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry // *Front. Phys.* — 1983. — Vol. 58. — P. 1–548.
89. Kuzmichev M., Meshcheriakov N., Novgorodtsev S. et al. Finiteness of the two-loop matter contribution to the triple gauge-ghost vertices in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories regularized by higher derivatives // *Phys. Rev. D.* — 2021. — Vol. 104, no. 2. — P. 025008.
90. Kuzmichev M., Meshcheriakov N., Novgorodtsev S. et al. Finiteness of the triple gauge-ghost vertices in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories: the two-loop verification // *Eur. Phys. J. C.* — 2022. — Vol. 82, no. 1. — P. 69.
91. Kazantsev A. E., Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P. et al. Two-loop renormalization of the Faddeev-Popov ghosts in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories regularized by higher derivatives // *JHEP.* — 2018. — Vol. 06. — P. 020.
92. Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V. et al. Three-loop contribution of the Faddeev–Popov ghosts to the β -function of $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories and the NSVZ relation // *Eur. Phys. J. C.* — 2019. — Vol. 79, no. 9. — P. 809.
93. Aleshin S. S., Durandina I. S., Kolupaev D. S. et al. Three-loop verification of a new algorithm for the calculation of a β -function in supersymmetric theories regularized by higher derivatives for the case of $\mathcal{N} = 1$ SQED // *Nucl. Phys. B.* — 2020. — Vol. 956. — P. 115020.
94. Stepanyantz K. V. Derivation of the exact NSVZ beta-function in $\mathcal{N}=1$ SQED regularized by higher derivatives by summation of Feynman diagrams // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2012. — Vol. 343. — P. 012115.
95. Шаталова В. В. Особенности перенормировки теорий, регуляризованных высшими производными: научно-квалификационная работа / Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова. — М., 2021.
96. Кузьмичев М. Д. Ренормгрупповые функции в калибровочных теориях с $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрией и с мягко нарушенной суперсимметрией:

- научно-квалификационная работа / Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова. — М., 2022.
97. Широков И. Е. Автоматизация вычислений квантовых поправок в суперсимметричных теориях: научно-квалификационная работа / Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова. — М., 2022.
 98. Казанцев А. Е. Многопетлевые вычисления и точные результаты в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теориях: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.02 / Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова. — М., 2018. — 113 с.
 99. Степаньянц К. В. Точная β -функция $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий и регуляризация высшими ковариантными производными: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.04.02 / Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова. — М., 2021. — 317 с.
 100. Kazantsev A. E., Skoptsov M. B., Stepanyantz K. V. One-loop polarization operator of the quantum gauge superfield for $\mathcal{N} = 1$ SYM regularized by higher derivatives // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2017. — Vol. 32, no. 36. — P. 1750194.
 101. Bertlmann R. A. Anomalies in quantum field theory. International series of monographs on physics: 91. — Oxford, UK: Clarendon, 1996. — 566 p.
 102. Abbott L. F. The Background Field Method Beyond One Loop // *Nucl. Phys. B.* — 1981. — Vol. 185. — P. 189–203.
 103. Abbott L. F. Introduction to the Background Field Method // *Acta Phys. Polon. B.* — 1982. — Vol. 13. — P. 33.
 104. ДеВитт Б. С. Динамическая теория групп и полей. — М.: Наука, 1987. — 287 с.
 105. Piguet O., Sibold K. Renormalization of $N = 1$ Supersymmetrical Yang-Mills Theories. 1. The Classical Theory // *Nucl. Phys. B.* — 1982. — Vol. 197. — P. 257–271.
 106. Piguet O., Sibold K. Renormalization of $N = 1$ Supersymmetrical Yang-Mills Theories. 2. The Radiative Corrections // *Nucl. Phys. B.* — 1982. — Vol.

197. — P. 272–289.
107. Тютин И. В. Перенормировка суперкалибровочных теорий с нерасширенной суперсимметрией // ЯФ. — 1983. — Т. 37. — С. 761–771.
108. Juer J. W., Storey D. Nonlinear Renormalization in Superfield Gauge Theories // Phys. Lett. B. — 1982. — Vol. 119. — P. 125–127.
109. Juer J. W., Storey D. One Loop Renormalization of Superfield Yang-Mills Theories // Nucl. Phys. B. — 1983. — Vol. 216. — P. 185–208.
110. Piguet O., Sibold K. Gauge Independence in $N = 1$ Supersymmetric Yang-Mills Theories // Nucl. Phys. B. — 1984. — Vol. 248. — P. 301.
111. Faddeev L. D., Popov V. N. Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field // Phys. Lett. B. — 1967. — Vol. 25. — P. 29–30.
112. Nielsen N. K. Ghost Counting in Supergravity // Nucl. Phys. B. — 1978. — Vol. 140. — P. 499–509.
113. Kallosh R. E. Modified Feynman Rules in Supergravity // Nucl. Phys. B. — 1978. — Vol. 141. — P. 141–152.
114. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1988. — 272 с.
115. Aleshin S. S., Kazantsev A. E., Skoptsov M. B., Stepanyantz K. V. One-loop divergences in non-Abelian supersymmetric theories regularized by BRST-invariant version of the higher derivative regularization // JHEP. — 2016. — Vol. 05. — P. 014.
116. Becchi C., Rouet A., Stora R. Renormalization of the Abelian Higgs-Kibble Model // Commun. Math. Phys. — 1975. — Vol. 42. — P. 127–162.
117. Тютин И. В. Калибровочная инвариантность в теории поля и статистической физике в операторной формулировке // Препринт ФИАН. — №39. — 1975. — arXiv: hep-th/0812.0580.
118. Slavnov A. A. Renormalization of Supersymmetric Gauge Theories. 2. Non-abelian Case // Nucl. Phys. B. — 1975. — Vol. 97. — P. 155–164.

119. Ferrara S., Piguet O. Perturbation Theory and Renormalization of Supersymmetric Yang-Mills Theories // Nucl. Phys. B. — 1975. — Vol. 93. — P. 261–302.
120. Piguet O., Rouet A. Supersymmetric BPHZ Renormalization. 2. Supersymmetric Extension of Pure Yang-Mills Model // Nucl. Phys. B. — 1976. — Vol. 108. — P. 265–274.
121. Славнов А. А. Тождества Уорда в калибровочных теориях // ТМФ. — 1972. — Т. 10. — С. 153–161.
122. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. — 4-е изд., испр. — М.: Наука, 1984. — 600 с.
123. Soloshenko A., Stepanyantz K. Two loop renormalization of $N=1$ supersymmetric electrodynamics, regularized by higher derivatives. — 2002. — hep-th/0203118.
124. Солошенко А. А., Степаньянц К. В. Трехпетлевая β -функция $N=1$ суперсимметричной электродинамики, регуляризованной высшими производными // ТМФ. — 2004. — Т. 140. — С. 437–459.
125. Kataev A. L., Kazantsev A. E., Stepanyantz K. V. The Adler D -function for $\mathcal{N} = 1$ SQCD regularized by higher covariant derivatives in the three-loop approximation // Nucl. Phys. B. — 2018. — Vol. 926. — P. 295–320.
126. Солошенко А. А., Степаньянц К. В. Двухпетлевая аномальная размерность $N=1$ суперсимметричной квантовой электродинамики, регуляризованной при помощи высших ковариантных производных // ТМФ. — 2003. — Т. 134. — С. 377–391.
127. Kazantsev A., Stepanyantz K. Two-loop renormalization of the matter superfields and finiteness of $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories regularized by higher derivatives // JHEP. — 2020. — Vol. 06. — P. 108.