

**ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА НА  
ДИССЕРТАЦИЮ Г.С.ЧЕРНЫХ  
"ОПЕРАЦИИ И УМНОЖЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С SU- И  
S1-СФЕРИЧЕСКИМИ БОРДИЗМАМИ"  
ПРЕДСТАВЛЕННУЮ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ  
СТЕПЕНИ КАНДИДАТА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ  
НАУК ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ  
1.1.3 — ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ**

Настоящая диссертация безусловно является очень и очень сильной. Она является продолжением работ знаменитой школы С.П.Новикова, работ самого С.П.Новикова, В.М.Бухштабера, Т.Е. Панова и многих, многих других. Более детально, работа посвящена операциям и умножениям, связанным с SU- и s1-сферическими бордизмами. Бывают работы, заканчивающие определенную тематику. Эта же работа замечательна еще и тем, что она открывает новые горизонты. Горизонты исследований и постановок задач в такой области как стабильные мотивные кобордизмы. Таким образом тема диссертации *очень актуальна*.

Стратегия диссертанта состоит в систематическом изучении "комплексного" аналога спектра Уолла. Он с одной стороны является конусом умножения MSU в себя на класс Хопфа, а с другой стороны оказывается гомотопическим слоем некоторой явной операции в комплексных кобордизмах. Оба эти свойства оказываются стратегически решающими для получения основных результатов данной диссертации.

В диссертации получена целая серия интереснейших новых результатов: приведено подробное вычисление кольца SU-бордизмов, основанное на применении спектральной последовательности Адамса-Новикова, следуя подходу С.П.Новикова; описано множество всех SU-линейных когомологических операций в комплексных кобордизмах; описано SU-линейные проекторы из теории комплексных кобордизмов MU в теорию s1-сферических бордизмов W, вычислено кольцо коэффициентов теории W с произвольным SU-билинейным умножением; вычислены по модулю разложимых элементов коэффициенты формальной группы в теории W для произвольной комплексной ориентации и SU-билинейного умножения (следуя подходу В.М.Бухштабера)

---

Date: 01.12.2023.

2 ОТЗЫВ НА КАНДИДАТСКУЮ ДИССЕРТАЦИЮ Г.С.ЧЕРНЫХ  
доказана точность по Ландвеберу теории  $W$  с любым  $SU$ -билинейным умножением.

*Разберем более подробно содержание диссертации по главам.* Первая глава вводная. Во второй главе описывается  $MSU$ -модуль  $MU$  (предложение 2.3.1) и алгебра всех  $SU$ -линейных операций в комплексных бордизмах. В главе 3 детально изучается спектральная последовательность Адамса–Новикова для спектра  $MSU$ . Это позволяет описать свободную часть и кручение в кольце  $SU$ -бордизмов (теорема 3.2.11). В частности, кручение нет всюду, кроме размерностей вида  $n = 8k + 1$  и  $8k + 2$ .

В главе 4 определяется и изучается, отмеченная выше, теория  $S^1$ -сферических бордизмов  $W$  и её связь с  $SU$ -бордизмами. Сначала показывается, что теория  $W$  является прямым слагаемым в комплексных бордизмах, и выделяющий его проектор можно построить двумя различными способами (восходящими к Коннеру–Флойд и Стонгу) соответственно. Отметим, что  $W$  не является подкольцом в комплексных бордизмах. Однако, в теории  $W$  умножение имеет вид  $rg(ab)$  для проекторов  $rg$ , построенных Коннером и Флойдом или Стонгом. Теорема 4.1.9 показывает, что хотя проекторы Коннера–Флойда и Стонга различны определяемое ими умножение одинаково (и оно явно вычислено)!!!

Мультипликативная структура кольца  $SU$ -бордизмов описывается в разделе 4.2. Оказывается, что это факторкольцо по кручению это явно описываемое подкольцо в  $W$ , а последнее само явно вычислено выше. В частности, кольцо  $SU$ -бордизмов (после обращения двойки) вкладывается в  $W$  (с обращенной двойкой) в качестве подкольца многочленов.

В разделе 4.4 определяется спектр  $W$   $S^1$ -сферических бордизмов, как спектр, представляющий теорию бордизмов стабильно комплексных многообразий, у которых детерминантное расслоение индуцируется из  $CP^1$  ( $S^1$ -сферических стабильно комплексных многообразий). Получающийся спектр является  $MSU$ -модулем. Здесь доказывается, что изучавшиеся выше группы  $W$  служат группами коэффициентов теории  $W$  (теорема 4.4.6) и спектр  $W$  является слоем конкретной операции степени 4 из  $MU$  в себя (предложение 4.4.10). В части 4.5 приводятся несколько описаний проекторов  $MU$  в  $W$  и указываются условия, характеризующие  $SU$ -линейные проекторы. Теорема 4.5.9 описывает кольцо коэффициентов теории  $W$  относительно произвольного  $SU$ -билинейного умножения.

В 60-х годах С.П.Новиков открыл глубокую связь комплексных ориентаций с формальными групповыми законами. В соответствии с этим в главе 5 изучаются комплексные ориентации теории  $W$  и отвечающие им формальные групповые законы. Благодаря предложению 5.1.2 оказывается что спектр  $W$  является «минимальным комплексно ориентируемым расширением» спектра  $MSU$ . Комплексная ориентируемость  $W$  позволяет

ОТЗЫВ НА КАНДИДАТСКУЮ ДИССЕРТАЦИЮ Г.С. ЧЕРНЫХ 3  
описать все SU-линейные операции из MU в W (теорема 5.1.3). и описать те SU-линейные проекторы MU в W, которые коммутируют с операцией  $\partial$  (теорема 5.1.5), а также соответствующие им умножения. Оказывается, что такие умножения продолжаются до умножений на всём спектре MU.

Далее для произвольного SU-билинейного умножения и произвольной комплексной ориентации на W вычисляется соответствующая формальный групповой закон FW с точностью до разложимых элементов (раздел 5.2; здесь автор следует подходу В. М. Бухштабера [6]).

В разделе 5.3 доказана (теорема 5.3.1) о том, что не существует мультипликативных проекторов MU в W. Но если обратить двойку или простые числа Ферма, то, оказывается, что существует такая ориентация W, что коэффициенты формальной группы порождают локализованное кольцо коэффициентов (теоремы 5.3.3 и 5.3.7). Наконец в разделе 5.4 доказывается, что для любого SU-билинейного умножения спектр W точен по Ландвеберу (теорема 5.4.5).

Диссертация написана на очень высоком научном уровне. Отдельные опечатки на страницах 3, 14, 27, 53, 65, 71 и 84 не влияют на отмеченное высокое качество диссертации в целом.

Диссертация Г.С. Черных является серьезным вкладом в развитие алгебраической топологии в целом и в теории бордизмов в особенности. Ее результаты инспирируют новый контекст для теории стабильных мотивных гомотопий. Результаты диссертации опубликованы в ведущих российских математических журналах. Всего по теме диссертации Г.С. Черных опубликовано 3 статьи. Все результаты являются новыми, получены автором самостоятельно и снабжены подробными доказательствами.

Автореферат полностью отражает содержание диссертации. Основные теоремы докладывались на престижных российских математических конференциях и математических семинарах. Эти результаты могут быть использованы в исследованиях по алгебраической топологии, теории бордизмов и теории стабильных мотивных гомотопий в таких центрах, как ПОМИ, МГУ им. М.В. Ломоносова, МИАН, Институт им. Макса Планка (Германия), и многих других.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3 Геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

4 ОТЗЫВ НА КАНДИДАТСКУЮ ДИССЕРТАЦИЮ Г.С.ЧЕРНЫХ  
Автор диссертации Г.С.Черных безусловно заслуживает присуждения  
ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Главный научный сотрудник лаборатории алгебры и теории чисел  
ФГБУН Санкт-Петербургское отделение  
Математического института им. В.А. Стеклова  
Российской академии наук  
чл.-корр. РАН,  
доктор физико-математических наук Иван Александрович Панин  
специальность – 01.01.06

Адрес: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова Российской академии наук (ПОМИ), наб. Фонтанки 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия. Адрес электронной почты: panin@pdmi.ras.ru. Сайт: www.pdmi.ras.ru; тел. 8(812) 310-65-18

Подпись И.А. Панина заверяю Алла Александровна Зотова  
Помощник директора по кадрам  
Дата: 1 декабря 2023

