

ОТЗЫВ

научного руководителя на диссертационную работу
Ворушилова Константина Сергеевича

“Инварианты Жордана-Кронекера конечномерных алгебр Ли”,
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.3 (01.01.04) — геометрия и топология

Диссертация К.С. Ворушилова посвящена исследованию так называемых инвариантов Жордана-Кронекера конечномерных алгебр Ли. Эти инварианты возникли при изучении бигамильтоновых систем и согласованных скобок Пуассона на двойственных пространствах алгебр Ли и являются развитием конструкции сдвига аргумента, предложенной А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко. Они представляют собой набор дискретных инвариантов (натуральных чисел), описывающих алгебраическую структуру наиболее естественного пучка согласованных скобок Пуассона, ассоциированного с конечномерной алгеброй Ли. В контексте пуассоновой геометрии такие пучки служат первыми нетривиальными моделями пуассоновых пучков. Они естественным образом возникают во многих геометрических и алгебраических конструкциях и именно поэтому заслуживают подробного изучения. В наиболее важном для приложений случае полупростых алгебр Ли инварианты Жордана-Кронекера совпадают с показателями (exponents) алгебры Ли, т.е. степенями базисных полиномиальных инвариантов. Этот нетривиальный факт является одной из интерпретаций классической теоремы Мищенко-Фоменко о полноте сдвигов инвариантов в случае полупростых алгебр Ли.

Для других типов алгебр Ли (с немногими исключениями) вычисление инвариантов Жордана-Кронекера является нетривиальной задачей, включенной в список наиболее важных открытых проблем в теории конечномерных интегрируемых систем¹.

В диссертации К.С.Ворушилова инварианты Жордана-Кронекера вычислены для двух важных классов алгебр Ли:

- полупрямых сумм вида $\mathfrak{g} + \rho^n \underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_k$, где \mathfrak{g} — простая классическая алгебра Ли и $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ — ее естественное представление;
- борелевских подалгебр классических простых алгебр Ли.

Обе задачи потребовали от автора развития новых методов и преодоления значительных вычислительных трудностей. Результат, касающийся борелевских подалгебр, в этом контексте наиболее показателен. Возможность решения этой задачи теми средствами, которые имелись в нашем распоряжении в самом начале работы над диссертацией, представлялась мне весьма неочевидной.

¹Bolsinov, A., Matveev, V., Miranda, E., Tabachnikov, S., *Open Problems, Questions, and Challenges in Finite-Dimensional Integrable Systems*, Philosophical Transactions of the Royal Society A 376 (2018), 20170430.

В работе были также получены продвижения в так называемой “обобщенной гипотезе о сдвиге аргумента” (generalised argument shift conjecture), которая утверждает, что на любой конечномерной алгебре Ли существует полный набор коммутирующих полиномов в бинволюции относительно пучка согласованных скобок Пуассона, связанного с методом сдвига аргумента. Проверено, что такие наборы существуют для всех нильпотентных алгебр Ли размерности $n \leq 7$, а также для некоторых алгебр Ли из указанных выше двух серий (борелевские и полупрямые суммы).

Таким образом, в диссертации К.С. Ворушилова решено несколько интересных задач, связанных с инвариантами Жордана-Кронекера, согласованными скобками Пуассона и интегрируемыми системами на алгебрах Ли. Основные результаты диссертации К.С. Ворушилова изложены в четырех статьях в рецензируемых научных изданиях, определенных п. 2.3 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова; публикации дают полное представление о результатах выполненных исследований. На протяжении обучения в аспирантуре К.С. Ворушилов неоднократно принимал участие в международных математических конференциях и выступал на научных семинарах с докладами о результатах диссертации.

Считаю, что диссертация Ворушилова Константина Сергеевича “Инварианты Жордана-Кронекера конечномерных алгебр Ли” соответствует критериям, установленным в “Положении о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова”, и рекомендую ее к защите в диссертационном совете МГУ.011.4(МГУ.01.17) ФГБОУ ВО МГУ по специальности 1.1.3 (01.01.04) - геометрия и топология (физико-математические науки).

Доктор физ.-мат. наук, профессор

А. В. Болсинов

23.05.2022 г.