

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи



Майоров Петр Александрович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ
СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ В
НЕГИДРОСТАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ**

Специальность 1.2.2. —

«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
Соловьев Андрей Валерьевич

Москва — 2025

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Математическая модель динамики жидкости	17
1.1 Система уравнений динамики жидкости в океане	17
1.2 Баротропно-бароклинная декомпозиция системы	19
1.3 Свободная поверхность в приближении «мягкой крышки»	26
1.4 Приближение слабой сжимаемости	27
1.5 Система уравнений в смешанно эйлерово-лагранжевых координатах	29
Глава 2. Явная схема CABARET-NH	32
2.1 Двумерная модель динамики неоднородной жидкости	33
2.2 Приведение к характеристической форме	37
2.3 Разностная схема	39
2.4 Балансные фазы схемы КАБАРЕ	41
2.5 Характеристическая фаза 2 схемы КАБАРЕ	43
2.6 Подвижная сетка	46
2.7 Алгоритм решения разностной системы уравнений	48
2.8 Свойство сбалансированности схемы (well-balance)	50
2.9 Задача о малых колебаниях свободной поверхности	54
2.10 Валидация модели на лабораторных экспериментах	59
Глава 3. Явно-неявная схема CABARET-INH	80
3.1 Балансные фазы явно-неявной схемы КАБАРЕ	80
3.2 Характеристическая фаза явно-неявной схемы КАБАРЕ	81
3.3 Алгоритм решения неявной схемы	90
3.4 Алгоритм решения явно-неявной схемы CABARET-INH	93
3.5 Валидация схемы CABARET-INH на лабораторных экспериментах	94
Глава 4. Моделирование трехмерных течений	100

4.1	Трехмерная негидростатическая модель динамики слабосжимаемой жидкости	101
4.2	Явно-неявная численная схема CABARET-INH для системы трехмерных уравнений динамики неоднородной жидкости	103
4.3	Численное моделирование трехмерных течений неоднородной жидкости в лабораторных экспериментах	106
4.4	Неявная схема расчета вязкости, диффузии и сил Кориолиса	111
4.5	Моделирование динамики Черного и Азовского морей	117
Заключение		122
Список сокращений и условных обозначений		124
Список литературы		125
Публикации автора по теме диссертации		132
Список рисунков		134
Список таблиц		137

Введение

Математическое моделирование течений жидкости является одним из ключевых инструментов для понимания и прогнозирования динамических процессов в водных системах. В последние десятилетия важность моделирования течений жидкости значительно возросла, что обусловлено необходимостью управления водными ресурсами, предотвращения экологических катастроф, а также обеспечения безопасности морской навигации и устойчивого развития прибрежных зон. Расчеты течений в различных водоемах являются основой для планирования гидротехнических сооружений, прогнозирования паводков и засух, анализа загрязнения и распространения примесей, а также для изучения изменений климата и их воздействия на водные экосистемы.

Изучение течений жидкости со свободной поверхностью охватывает широкий диапазон задач — от потоков в небольших экспериментальных лотках до задач вычислительной океанологии, связанных с моделированием гидродинамических процессов в водных системах различного масштаба. Эти задачи варьируются от локальных исследований в малых водоемах, таких как реки и озера, до комплексных моделей, охватывающих обширные пространства морей и океанов. Каждая из этих задач требует своего подхода, учитывающего особенности динамики жидкости, масштабы временных и пространственных изменений, а также специфические физические процессы, характерные для конкретного типа водоема.

На уровне малых водоемов, таких как пруды и небольшие озера, вычислительное моделирование сосредоточено на изучении локальных гидродинамических процессов, включая циркуляцию воды, процессы осаждения и перемешивания, а также тепловой и биогеохимический обмен. В этих системах доминируют процессы, связанные с поверхностным стоком, ветровыми воздействиями и сезонными изменениями температуры.

Для рек и озер средних размеров важным аспектом является учет горизонтальных и вертикальных градиентов, обусловленных изменениями температуры, солености и скорости течения. Моделирование в таких системах требует детального описания процессов, связанных с речным стоком, эрозией берегов, транспортом осадков и примесей. В моделях этих водоемов также необходимо

учитывать временную изменчивость, обусловленную сезонными колебаниями уровня воды, а также взаимодействие с подземными водами.

При переходе к более крупным масштабам, таким как моря и внутренние водоемы (например, Черное или Каспийское море), становится необходимым учитывать сложную динамику стратифицированных течений, включая процессы апвеллинга, приливных и внутренне-волновых явлений, а также влияние атмосферы на поверхность воды.

На глобальном уровне океанов, моделирование становится еще более сложным и включает в себя моделирование крупномасштабных циркуляционных процессов, таких как океанические течения (например, Гольфстрим, Куроисио) и термохалинная циркуляция. В этих моделях необходимо учитывать не только гидродинамические процессы, но и взаимодействие с атмосферой, ледовыми покровами и суши, что делает эти модели многомасштабными и многофизическими. Разнообразие гидрологических условий и физических характеристик в разных частях океана порождает разнонаправленные течения, вихри и циркуляции, которые, в свою очередь, влияют на глобальные климатические системы. Климатические регуляции, осуществляемые океаном, простираются на разные масштабы времени и пространства. Они имеют глубокое воздействие на климат планеты. Океан взаимодействует с атмосферой, влияя на формирование погодных систем, регулируя температурные режимы, влажность и ветры. Эти взаимодействия имеют важное значение для микро- и макроклимата различных регионов планеты. Благодаря способности задерживать и перераспределять тепло, океан уравнивает климатические неравенства между тропиками и полярными регионами, что определяет характер глобальной циркуляции воздуха и воды.

Фундаментом для исследований и задач, описанных выше, является непосредственное моделирование морских и океанических течений. Основной фокус данной работы будет направлен на математические модели динамики жидкости в поле силы тяжести и со свободной верхней поверхностью и численные методы для их расчета.

Исследования процессов в океане и разработка математических моделей для их описания имеют богатую историю, начиная с первых попыток понимания и предсказания динамики океана. В XIX веке ученые начали систематически собирать данные о температуре, солености и движении водных масс. Эти

наблюдения позволили разработать первые эмпирические модели течений и ветровых систем [1], [2]. В историческом развитии океанологии и гидродинамики значительный прогресс был достигнут при переходе от эмпирических моделей, основанных на наблюдениях и обобщениях данных, к строгим математическим описаниям, выраженным через системы дифференциальных уравнений. Такие математические модели, как система уравнений Сен-Венана, система «примитивных» уравнений (законы сохранения с приближением гидростатики) и уравнения Навье-Стокса, позволили заложить теоретическую основу для моделирования течений жидкости в водных системах. Эти уравнения описывают фундаментальные физические законы, управляющие движением жидкости, учитывая влияние сил инерции, давления, вязкости, гравитации и других факторов. В результате они предоставили возможность количественно анализировать и прогнозировать динамические процессы, происходящие в океанах, на основе математических моделей. Поиск решений в некоторых частных постановках [3–6] и изучение свойств этих уравнений, позволили не только расширить понимание физических процессов, но и сыграли ключевую роль в создании верификационных тестов для современных численных моделей. Эти тесты используются для проверки и оценки точности численных методов, применяемых в вычислительной океанологии, что обеспечивает доверие к результатам моделирования и позволяет успешно применять их в практике.

В середине XX века, с появлением компьютерных технологий, началась эра разработки численных алгоритмов расчета течений жидкости. Применение численных методов позволило ученым впервые получить качественные представления о сложной динамике океанических течений и их взаимодействии с атмосферой.

Важным этапом стало развитие глобальных численных алгоритмов, способных учесть более широкий спектр параметров и факторов [7–10], влияющих на динамику океана. Современные модели океана интегрируют фундаментальные законы физики, такие как уравнения Навье-Стокса, уравнение состояния морской воды, уравнение теплообмена и другие, в численные алгоритмы, которые позволяют рассчитывать эволюцию параметров океана во времени и пространстве.

С дальнейшим развитием вычислительных мощностей и высокопроизводительных суперкомпьютеров стали появляться модели океана с увеличенным

разрешением и точностью, способные учесть множество влияющих факторов, таких как топография дна, взаимодействие течений и воздействие приливов. Эти современные модели позволяют ученым не только лучше понимать динамику океана, но и предсказывать климатические изменения, изучать влияние океана на экосистемы и биоразнообразие, а также анализировать воздействие человеческой деятельности на морские ресурсы.

Для широкого класса задач применимо гидростатическое приближение, в рамках которого вертикальные ускорения считаются пренебрежимо малыми в уравнении движения. Простейшей гидростатической моделью является система уравнений мелкой воды. Двухслойные и многослойные гидростатические модели течений со свободной поверхностью [11—13] позволяют воспроизводить динамику внутренних волн в стратифицированной жидкости. Ввиду своей высокой вычислительной эффективности, гидростатические модели используются в задачах глобальной циркуляции мирового океана и климатических исследованиях [14—16]. Однако стоит отметить, что данное приближение имеет границы применимости и, в частности, не позволяет моделировать течения с сильным вертикальным перемешиванием.

Негидростатические модели динамики жидкости со свободной поверхностью на основе системы уравнений Навье-Стокса [17; 18] позволяют моделировать полный спектр процессов динамики жидкости. Численное моделирование по этой системе уравнений без дополнительных приближений сводится к решению разностного аналога уравнения Пуассона на давление. Для регулярных или квазирегулярных вычислительных областей для решения уравнения Пуассона можно использовать вычислительно эффективные решатели на основе быстрого преобразования Фурье [19; 20]. Однако, при наличии сложных топографических особенностей, поле давления можно получить только путем решения большой системы линейных уравнений. В трехмерных задачах количество вычислительных ячеек почти всегда не позволяет использовать прямые методы, поэтому применяют различные итерационные решатели. Так, в статье [21] используется предобусловленный метод сопряженных градиентов. Количество итераций для сходимости итерационных решателей увеличивается с ростом количества вычислительных ячеек, поэтому данные методы слабо масштабируемы.

Использование гиперболических систем уравнений, приближающих уравнения Навье-Стокса, позволяет уйти от решения уравнения Пуассона и использовать явные, хорошо параллелизируемые разностные схемы. Так в работе [22] предлагается приближение, основанное на модифицированной системе уравнений, в которой ограничение дивергенции поля скорости связано с другими законами сохранения, следуя идеям так называемой «гиперболической очистки дивергенции» [23; 24].

При создании модели динамики жидкости для океанологических задач одним из вопросов является выбор механизма определения положения поверхности. В современных моделях преимущественно используются два подхода: «жесткая крышка» и свободная поверхность. В первом подходе положение поверхности считается фиксированным все время расчета [21; 25] и на каждом шаге по времени определяется давление на этой поверхности. Фиксированная расчетная область является большим преимуществом данного подхода. Однако моделирование гравитационных волн и приливных течений в приближении «жесткой крышки» не представляется возможным. Второй подход рассматривает поверхность как некоторую функцию от времени. Распространенным способом определения положения свободной поверхности является кинематическое условие – отсутствие потоков через поверхность. Существуют различные варианты реализации данного подхода: переход в постоянную систему координат [26–28] и прямое моделирование на подвижных сетках [17; 29].

В выборе системы координат – лагранжевой или эйлеровой – для моделирования потока жидкости, ключевую роль играет постановка задачи. Если требуется определить параметры потока в заранее определенной пространственной области, то предпочтение отдается эйлеровым координатам. В случае, когда необходимо более детально исследовать гидродинамические процессы в заданном объеме частиц, более подходящим выбором будут лагранжевы координаты.

С.К. Годунов представил метод [30], который позволяет сохранить детализацию расчетов в рамках фиксированного материального объема в эйлеровых координатах. Этот метод предполагает сделать эйлеровы координаты подвижными, что обеспечивает сохранение детализации в процессе расчетов.

При использовании подвижной эйлеровой сетки точки, связанные с границами, двигаются вместе с ними, в то время как точки внутри подвижной области перемещаются согласно определенному закону, при этом сохраняя минимум и

максимум точек. Тем не менее стоит отметить, что переход от лагранжевых координат к эйлеровым существенно изменяет способ аппроксимации уравнений.

При анализе различных методов моделирования течений жидкости со свободной поверхностью можно прийти к выводу об удобстве использования смешанных эйлерово-лагранжевых (СЭЛ) переменных [31–33]. Преимущество данного подхода заключается в способности обеспечивать численные расчеты решений в подвижной области, следя за изменениями величин, размещенных в узлах расчетной сетки, что находится в непосредственной связи с развитием вычислительной сетки. Данное свойство достигается путем введения производной по времени, которая учитывает скорость изменения величины в точке, двигающейся вместе с расчетной областью.

Многообразие задач вычислительной океанологии и подходов, описанных выше, привело к созданию большого количества океанологических моделей, различающихся математической постановкой, численными методами решения и областями применимости. Так, в институте Вычислительной Математики им. Г. И. Марчука разрабатывается модель общей циркуляции океана - INMOM [34]. Она основана на системе «примитивных» уравнений в гидростатическом и Буссинесковом приближениях, записанных в обобщенных ортогональных координатах по горизонтали и в σ -системе координат по вертикали. Именно эта модель используется в качестве океанической компоненты для сопряженной модели Земной системы INMCM (Institute of Numerical Mathematics Climate Model) [35], которая является единственным представителем от России в международном проекте сравнения климатических моделей Coupled Model Intercomparison Project (CMIP).

Разрабатываемая совместными усилиями ИВМ РАН и Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН, модель мирового океана INMIO [36] основывается на системе «примитивных» уравнений трехмерной динамики океана в приближениях Буссинеска и гидростатики аппроксимируется методом конечных объемов на сетке типа В в вертикальных z-координатах. Она разработана для исследования циркуляции морских вод в широком диапазоне пространственных и временных масштабов. В модели используется явный численный алгоритм с разделением на две подсистемы: трехмерная система для определения бароклинной составляющей и двумерные уравнения мелкой воды для определения наиболее быстрых баротропных процессов. Данное разделение позволяет при-

менять явные схемы с разными шагами по времени, выполняя условия устойчивости Куранта для каждой из подсистем независимо.

Во многих мировых математических центрах разрабатываются собственные модели. Большинство моделей общей циркуляции основаны на гидростатическом приближении: модель NEMO [37] разрабатывается консорциумом европейских научных организаций, включая Центр научных исследований Франции (CNRS) и Европейский центр среднесрочных прогнозов погоды (ECMWF), используемая в климатических и океанографических исследованиях; модель MOM [38], которая разрабатывается и поддерживается Принстонским университетом и Национальным центром атмосферных исследований (NCAR) в США, широко используется в климатических исследованиях и является частью многих климатических моделей; HYCOM [39] — гибридная координатная океаническая модель, разработанная консорциумом американских научных организаций, включая Университет Майами и ВМС США, применяется для глобальных и региональных моделей океана и используется как в научных исследованиях, так и в операционных прогнозах. Но так же есть примеры глобальных негидростатических моделей - MITgcm [40], разработанная Массачусетским технологическим институтом (MIT). Она используется для моделирования как океанических, так и атмосферных процессов, включая их взаимодействие. Данная модель основана на полных уравнениях Навье-Стокса для несжимаемой жидкости, включая уравнения сохранения массы, импульса, тепла и солёности. Это делает её пригодной для моделирования широкого спектра процессов в океане.

В сфере вычислительной океанологии, где исследуются сложные нелинейные процессы, предъявляются высокие требования к используемым численным схемам. Современные численные методы вычислительной гидродинамики нового поколения акцентируют внимание на двух ключевых характеристиках — консервативности и точности моделирования конвективных потоков. Консервативность достигается, например, за счет использования метода конечного объема [41; 42]. Актуальные схемы высокой разрешающей способности, схемы Годуновского типа [43; 44], определяют конвективные потоки через точное или приближенное решение задачи о распаде произвольного разрыва с различными методами их коррекции: TVD [45], TVB [46], ENO [47], MUSCL [48] и др. Также в последнее время развитие получили схемы класса КАБАРЕ [49], относящиеся к семейству балансно-характеристических схем. Эти схемы совмещают достоин-

ства консервативных и характеристических подходов. Их использование в задачах индустриальной математики подтвердило определенные преимущества по сравнению со схемами высокой разрешающей способности при моделировании вихревых и турбулентных течений с неполным разрешением спектра турбулентных пульсаций.

Существующие математические модели требуют постоянного обновления, чтобы удовлетворить современные требования к точности в моделировании океанических и прибрежных течений. В этом контексте, разработка алгоритмов нового поколения является крайне актуальной. Разработка негидростатической модели является важной задачей. Такая модель способна учесть не только горизонтальные, но и вертикальные градиенты плотности, что особенно важно при моделировании прибрежных областей и процессов вертикального перемешивания. Это представляет собой важный этап в обновлении вычислительных методов в океанологии и обеспечении более точных и прогнозов океанических явлений, имеющих большое значение для климатических и экологических исследований.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю к.ф.-м.н. А.В. Соловьеву и научному консультанту д.ф.-м.н. В.М. Головизнину, а также Майорову Павлу А., Майоровой К.И., к.ф.-м.н. Афанасьеву Н.А., д.ф.-м.н. С.И. Мухину, к.ф.-м.н. М.А. Рязанову и всему коллективу кафедры вычислительных методов факультета ВМК МГУ за плодотворное обсуждение представленных в диссертации результатов.

Целью данной работы является построение явных и явно-неявных балансно-характеристических численных алгоритмов расчета динамики стратифицированной жидкости со свободной поверхностью и учетом сил Кориолиса в негидростатическом приближении на подвижных сетках в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных и математическое моделирование течений стратифицированной жидкости с помощью построенных численных алгоритмов.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

- (1) Построение математической модели динамики слабосжимаемой жидкости со свободной поверхностью в приближении «мягкой крышки».

- (2) Построение явной балансно-характеристической схемы класса КАБАРЕ в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных для расчетов на сетках, адаптирующихся к уровню свободной поверхности.
- (3) Построение явно-неявной балансно-характеристической схемы класса КАБАРЕ в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных, явной по горизонтальным направлениям и неявной по вертикали.
- (4) Разработка эффективного алгоритма разрешения введенной неявности для явно-неявной схемы.
- (5) Верификация разработанной методики на модельных задачах и результатах физических экспериментов.

Основные положения, выносимые на защиту:

- (1) Математическая модель негидростатической динамики стратифицированной слабосжимаемой жидкости в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных со свободной границей в приближении «мягкой крышки» с учетом сил Кориолиса, вязкости и диффузии.
- (2) Явный балансно-характеристический метод в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных для решения системы уравнений динамики стратифицированной слабосжимаемой жидкости со свободной поверхностью над неровным дном и учетом сил Кориолиса, обладающий свойством сбалансированности.
- (3) Явно-неявный балансно-характеристический метод, явный - вдоль горизонтальных направлений и неявный - по вертикали, в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных для решения для решения системы уравнений динамики стратифицированной слабосжимаемой жидкости со свободной поверхностью. Алгоритм гиперболической прогонки для эффективного разрешения введенной неявности.
- (4) Комплекс программ для моделирования задач расчета течений жидкости в негидростатическом приближении со свободной поверхностью с учетом сил Кориолиса на сетках с переменным количеством ячеек по вертикали.
- (5) Результаты валидации построенных алгоритмов на лабораторных экспериментах по исследованию гравитационных течений стратифицированной жидкости, подтверждающие хорошую качественную и количественную согласованность с экспериментальными данными.

Результаты численного расчета течений в Черном море, подтверждающие возможность моделирования реальных морских акваторий.

Научная новизна:

- (1) Впервые построена явная балансно-характеристическая схема класса КАБАРЕ для уравнений в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных и применена для моделирования течений жидкости со свободной поверхностью.
- (2) Впервые построена явно-неявная балансно-характеристическая схема класса КАБАРЕ, явная - вдоль горизонтальных направлений и неявная - по вертикали для уравнений в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных и применена для моделирования течений жидкости со свободной поверхностью.
- (3) Впервые разработан алгоритм гиперболической прогонки для эффективного разрешения неявности в схемах класса КАБАРЕ.

Научная и практическая значимость данной диссертации заключается в разработанных новых численных моделях негидростатической динамики жидкости со свободной поверхностью. Основанный на гиперболизированной системе уравнений Навье-Стокса численный алгоритм имеет вычислительную эффективность сравнимую с гидростатическими моделями, обеспечивая баланс между численной эффективностью и точностью моделирования.

Разработанная модель обладает потенциалом для применения в реальных инженерных и научных задачах. Проведенные валидационные расчеты, подтверждают способность численного алгоритма предоставлять детальные и точные результаты, что позволяет говорить о перспективности использования модели в морской инженерии, прогнозировании погодных условий, изучении воздействия природных катастроф на окружающую среду и других областях. Модель также может служить инструментом для исследования как локальных течений, так и моделирования динамики жидкостей в больших акваториях на подробных вычислительных сетках.

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается достаточным количеством проведенных тестовых и модельных расчетов. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах.

- (1) Научная конференция «Ломоносовские чтения 2018» (Москва, 16-27 апреля 2018 г).
- (2) Научная конференция «Ломоносовские чтения 2020» (Москва, 21 октября - 2 ноября 2020 г).
- (3) Научная конференция "Тихоновские чтения 2020" (Москва, 26-31 октября 2020 г).
- (4) Научная конференция «Ломоносовские чтения 2021» (Москва, 20-29 апреля 2021 г).
- (5) Научная конференция "Моря России: Год науки и технологий в РФ - Десятилетие наук об океане ООН" (Севастополь, 20-24 сентября 2021 г).
- (6) Международная конференция «Марчуковские научные чтения 2021» (Новосибирск, Академгородок, 4-8 октября 2021 г).
- (7) V Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (Москва, 27-30 июня 2022 г).
- (8) Научно-исследовательский семинар кафедры вычислительных методов факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.

Личный вклад. Все результаты работы получены автором лично под научным руководством к.ф.-м.н. А. В. Соловьева при консультациях д.ф.-м.н., проф. В.М. Головизнина. В работах [A.1], [A.3], [A.4] вклад автора диссертации в полученные результаты в части аналитического исследования, математического моделирования, численных методов, разработки комплекса программ и проведении расчетов является определяющим. В работе [A.2] вклад автора диссертации заключается в определении математической модели и построении основной численной схемы, соавторами предложен алгоритм учета сил поверхностного натяжения.

Программный комплекс, предназначенный для моделирования двумерных и трехмерных течений стратифицированной жидкости, реализован автором диссертации на языке Fortran. В основу реализации программного комплекса положены алгоритмы, подробно описанные в разделах 2.7, 3.4, 4.4 и 4.5. Реализованы две версии программного комплекса - для явной и явно-неявной разностной схемы. Обе версии состоят из следующих модулей: построение сет-

ки, формирование начальных данных (в том числе, из внешних источников), расчет течения жидкости, подготовка данных с результатами расчета для выдачи в графическом формате. Все модули распараллелены с помощью технологии MPI на произвольное число процессоров для расчета на параллельных кластерах. Все результаты расчетов, приведенные в диссертации, получены с помощью этих программных комплексов.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 4 печатных изданиях, изданных в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности. Список опубликованных работ приведён в конце диссертационной работы.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 137 страниц с 33 рисунками и 6 таблицами. Список литературы содержит 73 наименования.

В **первой главе** диссертации представлены фундаментальные аспекты разработки математической модели, которая служит для описания движения жидкости в океане. Производится баротропно-бароклинная декомпозиция системы уравнений Навье-Стокса, выделяющей в отдельную подсистему самые быстрые процессы - гравитационные волны. Кроме того, дается описание модели свободной поверхности океана в приближении "мягкой крышки". Также представляется вариант гиперболизации полученной системы уравнений в приближение слабой сжимаемости. Полученная система уравнений формулируется в смешанно эйлерово-лагранжевых координатах.

Вторая глава диссертации посвящена построению явной разностной схемы решения полученных уравнений гидродинамики в негидростатическом приближении, CABARET-NH, на основе балансно-характеристической схемы КАБАРЕ [49]. Приводится алгоритм решения полученных разностных уравнений, а также доказывається свойство сбалансированности (well-balance) [50] данной схемы. Представлены результаты расчета верификационного теста о колебании свободной поверхности, демонстрирующего определенные характеристики алгоритма, и валидация построенной схемы на лабораторных экспериментах.

В **третьей главе** осуществляется построение явно-неявной схемы CABARET-INH (CABARET Implicit Non-Hydrostatic), которая является явной в горизонтальном направлении и неявной в вертикальном. Детально рассмат-

ривается алгоритм разрешения введенной неявности с использованием метода гиперболической прогонки. Введение данной неявности дает возможность увеличить шаг по времени для вычислений, обходя ограничения, связанные с критерием Куранта в вертикальном направлении. Представлены результаты валидации построенной схемы на лабораторных экспериментах и сравнение ее эффективности с явной схемой.

Четвертая глава диссертации посвящена моделированию трехмерных течений с использованием разработанных численных моделей. Основное внимание уделяется валидации построенных численных алгоритмов путем анализа ряда лабораторных экспериментов, в которых изучается динамика стратифицированной жидкости в существенно трехмерной постановке. Для моделирования задач в масштабах реальных морских акваторий схемы, описанные ранее, дополняются явно-неявными схемами расчета вязкости, диффузии и сил Кориолиса. Приводятся результаты моделирования динамических процессов в Черном море, учитывающего влияние ветрового нагона.

Глава 1. Математическая модель динамики жидкости

Данная глава посвящена дифференциальной системе уравнений, описывающей динамику жидкости со свободной поверхностью, ее различным модификациям и приближениям, позволяющим ускорять численные алгоритмы ее разрешения.

Раздел начинается с описания классической системы уравнений Навье-Стокса. Эта система уравнений служит ключевым инструментом для понимания сложных и нелинейных физических процессов, которые характеризуют динамику жидкости. Система позволяет описывать как ламинарные течения, так и сложные турбулентные потоки. Однако из-за эллиптичности системы численное решение этих уравнений требует значительных вычислительных ресурсов. Из этого вытекает необходимость введения приближений и упрощений, которые позволяют применять более эффективные численные алгоритмы решения.

Далее приводится разделение системы уравнений динамики жидкости на баротропную и бароклинную подсистемы, что позволяет выделить в отдельную систему уравнений, меньшей размерности, наиболее быстрые процессы - гравитационные волны. Кроме того, представлено приближение «мягкой крышки», в которой не требуется численное разрешение баротропной системы.

Затем описывается один из возможных вариантов гиперболизации системы уравнений динамики жидкости с помощью приближения слабой сжимаемости. Эта методика позволяет получить гиперболическую систему уравнений и использовать явные разностные схемы при её решении. Этот подход может быть полезным при численном решении задач динамики океанических течений на вычислительных сетках большой размерности.

1.1 Система уравнений динамики жидкости в океане

Состояние океана в любой момент времени характеризуется трехмерным распределением скорости $\vec{v} = (u, v, w)$, температуры T , солёности S , давления P и плотности ρ . Уравнения, управляющие эволюцией этих полей, полученные из

законов классической механики и термодинамики для несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска [21], в трехмерной декартовой системе координат $OXYZ$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} + \frac{\partial wu}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} &= D_u, \\
\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial wv}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} &= D_v, \\
\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} &= -\frac{\rho}{\rho_0} g + D_w, \\
\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Su}{\partial x} + \frac{\partial Sv}{\partial y} + \frac{\partial Sw}{\partial z} &= D_S, \\
\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial Tu}{\partial x} + \frac{\partial Tv}{\partial y} + \frac{\partial Tw}{\partial z} &= D_T, \\
\rho &= \rho(S, T)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где D_u, D_v, D_w, D_S, D_T содержат вязкость, диффузию, силу Кориолиса, силу ветрового нагона и другие внешние силы или источники:

$$\begin{aligned}
D_u &= lv - \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + F_u, \\
D_v &= -lv - \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_y \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + F_v, \\
D_w &= -\frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + F_w, \\
D_S &= - \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_z \frac{\partial Sw}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_x \frac{\partial Sv}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_y \frac{\partial Sv}{\partial y} \right) \right] + F_S, \\
D_T &= - \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_z \frac{\partial Tw}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_x \frac{\partial Tv}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_y \frac{\partial Tv}{\partial y} \right) \right] + F_T
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где l - параметр Кориолиса, $\vec{\nu} = (\nu_x, \nu_y, \nu_z)$ - кинематические коэффициенты вязкости, $\vec{\mu} = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$ - коэффициенты диффузии, F_u, F_v, F_w - внешние силы, F_T, F_S - источники тепла и солёности.

Первое уравнение системы (1.1) - уравнение неразрывности, уравнения со второго по четвертое - закон сохранения импульса, пятое и шестое уравнение - перенос тепла и солёности, последнее уравнение системы - уравнение состояния.

Через $H(x, y, t)$ обозначим уровень свободной поверхности жидкости и $B(x, y)$ - профиль дна. Тогда граничные условия на поверхности и дне можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} P|_H &= 0 \\ \left(\frac{\partial H}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial H}{\partial y} - w \right) \Big|_H &= 0 \\ \nu_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=H} &= -\tau_x, \quad \nu_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=H} = -\tau_y \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \left(u \cdot \frac{\partial B}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial B}{\partial y} - w \right) \Big|_B &= 0 \\ \nu_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=B} &= -\beta|u|, \quad \nu_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=B} = -\beta|v| \end{aligned} \quad (1.4)$$

где τ_x, τ_y - параметры ветрового нагона, β - коэффициент трения.

Система уравнений (1.1), (1.3), (1.4) содержит эллиптические операторы [51] и при её численном решении приходится решать разностный аналог уравнения Пуассона для определения поля давления P , что приводит к решению системы линейных уравнений с рангом, пропорциональным числу ячеек сетки. Далее будет описан подход, позволяющий гиперболизировать данную систему уравнений и, следовательно, избежать решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и использовать явные разностные схемы для её численного решения.

1.2 Баротропно-бароклинная декомпозиция системы

Введем новые переменные, зависящие только от горизонтальных координат x, y и времени t : $H_0(x, y, t)$, $U_0(x, y, t)$, $V_0(x, y, t)$, $W_0(x, y, t)$, $W_{0T}(x, y, t)$, $W_{0B}(x, y, t)$, такие что:

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) &= U_0(x, y, t) + \delta u(x, y, z, t) \\
v(x, y, z, t) &= V_0(x, y, t) + \delta v(x, y, z, t) \\
w(x, y, z, t) &= W_0(x, y, z, t) + \delta w(x, y, z, t) \\
\rho(x, y, z, t) &= \rho_0 + \delta \rho(x, y, z, t) \\
W_0(x, y, z, t) &= W_{0T}(x, y, t) \cdot \left(\frac{z - B}{H_0 - B} \right) - W_{0B}(x, y, t) \cdot \left(\frac{z - H_0}{H_0 - B} \right) \\
H(x, y, t) &= H_0(x, y, t) + \delta H(x, y, t)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Давление P представим в виде суммы:

$$P(x, y, z, t) = P_0(x, y, z, t) + \delta P(x, y, z, t) \tag{1.6}$$

где $P_0(x, y, z, t) = \rho_0 g (H_0(x, y, z, t) - z)$ — основная часть гидростатического давления.

Первое уравнение системы (1.1) в новых обозначениях преобразуется к виду:

$$\left\{ \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} + \frac{W_{0T} - W_{0B}}{h_0} \right\} + L_1(\delta u, \delta v, \delta w, x, y, z, t) = 0 \tag{1.7}$$

где

$$L_1(\delta u, \delta v, \delta w, x, y, z, t) = \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{\partial \delta w}{\partial z}$$

Второе уравнение, с учетом уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} = D_u$$

Учитывая свойство линейности производной и введенные обозначения (1.5):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U_0}{\partial t} + \frac{\partial \delta u}{\partial t}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = (U_0 + \delta u) \frac{\partial U_0}{\partial x} + u \frac{\partial \delta u}{\partial x}$$

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = (V_0 + \delta v) \frac{\partial U_0}{\partial y} + v \frac{\partial \delta u}{\partial y}$$

$$w \frac{\partial u}{\partial z} = w \frac{\partial \delta u}{\partial z}$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} = g \frac{\partial H_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial x}$$

$$D_u = D_{U_0} + D_{\delta u}$$

$$D_{U_0} = lV_0 - \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_x \frac{\partial U_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_y \frac{\partial U_0}{\partial y} \right) \right] + F_{U_0}$$

$$D_{\delta u} = l\delta v - \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_z \frac{\partial \delta u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_y \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right) \right] + F_{\delta u}$$

Тогда, второе уравнение системы (1.1) можно записать в следующем виде:

$$\left\{ \frac{\partial U_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} + g \frac{\partial H_0}{\partial x} - D_{U_0} \right\} + L_2(\delta u, \delta v, \delta w, x, y, z, t) = 0 \quad (1.8)$$

где

$$L_2(\delta u, \delta v, \delta w, x, y, z, t) = \frac{\partial \delta u}{\partial t} + u \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \delta u \frac{\partial U_0}{\partial x} + v \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \delta v \frac{\partial U_0}{\partial y} + w \frac{\partial \delta u}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial x} - D_{\delta u}$$

Аналогично, третье уравнение системы (1.1):

$$\left\{ \frac{\partial V_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial V_0}{\partial y} + g \frac{\partial H_0}{\partial y} - D_{V_0} \right\} + L_3(\delta u, \delta v, \delta w, x, y, z, t) = 0 \quad (1.9)$$

где

$$L_3(\delta u, \delta v, \delta w, x, y, z, t) = \frac{\partial \delta v}{\partial t} + u \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \delta u \frac{\partial V_0}{\partial x} + v \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \delta v \frac{\partial V_0}{\partial y} + w \frac{\partial \delta v}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial y} - D_{\delta v}$$

Четвертое уравнение запишется как:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial z} = -\frac{\delta \rho}{\rho_0} g + D_w \quad (1.10)$$

Оставшиеся уравнения системы (1.1) остаются без изменений.

Граничное условие на свободной поверхности (1.3) дает:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial (H_0 + \delta H)}{\partial t} + (U_0 + \delta u) \cdot \frac{\partial (H_0 + \delta H)}{\partial x} - (W_{0H} + \delta w) \right) \Big|_{H_0 + \delta h} = 0 \\ W_0(x, y, z, t) &= W_{0T}(x, y, t) \cdot \left(\frac{z - B}{H_0 - B} \right) - W_{0B}(x, y, t) \cdot \left(\frac{z - H_0}{H_0 - B} \right) \\ W_{0H} &= W_{0T}(x, y, t) \cdot \left(1 + \frac{\delta H}{H_0 - B} \right) - W_{0B}(x, y, t) \cdot \left(\frac{\delta H}{H_0 - B} \right) = \\ &= W_{0T}(x, y, t) + [W_{0T}(x, y, t) - W_{0B}(x, y, t)] \frac{\delta H}{h_0} \end{aligned}$$

где $h_0 = H_0 - B$ - высота столба жидкости.

Собирая члены зависящие только от x, y, t , получим:

$$\left\{ \frac{\partial H_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial H_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial H_0}{\partial y} - W_{0T} - [W_{0T} - W_{0B}] \frac{\delta H}{h_0} \right\} + L_H = 0 \quad (1.11)$$

где

$$L_H = \left[\frac{\partial (\delta H)}{\partial t} + (U_0 + \delta u) \frac{\partial (\delta H)}{\partial x} + \delta u \frac{\partial (H_0)}{\partial x} + (V_0 + \delta v) \frac{\partial (\delta H)}{\partial y} + \delta v \frac{\partial (H_0)}{\partial y} - \delta w \right] \Big|_{H_0 + \delta h}$$

Граничное условие на дне (1.4) приводит к соотношению:

$$\left\{ U_0 \frac{\partial B}{\partial x} + V_0 \frac{\partial B}{\partial y} - W_{0B} \right\} + \delta u \frac{\partial B}{\partial x} + \delta v \frac{\partial B}{\partial y} - \delta w = 0 \quad (1.12)$$

Система баротропных уравнений. Уравнения (1.7), (1.8), (1.9), (1.11), (1.12) содержат выражения в фигурных скобках, зависящие только от переменных x , y и t , в то время как остальные члены зависят также и от переменной z . Такое возможно, только если выражения в фигурных скобках в этих уравнения равны нулю. Это приводит к системе уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} + \frac{W_{0T} - W_{0B}}{h_0} &= 0 \\
\frac{\partial U_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} + g \frac{\partial H_0}{\partial x} &= D_{U_0} \\
\frac{\partial V_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial V_0}{\partial y} + g \frac{\partial H_0}{\partial y} &= D_{V_0} \\
\frac{\partial H_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial H_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial H_0}{\partial y} - W_{0T} - [W_{0T} - W_{0B}] \frac{\delta H}{h_0} &= 0 \\
U_0 \frac{\partial B}{\partial x} + V_0 \frac{\partial B}{\partial y} - W_{0B} &= 0
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Покажем, что эта система уравнений с точностью до члена, пропорционального δH , эквивалентна системе уравнений однослойной мелкой воды с учетом рельефа дна и вязких членов. Из первого и последнего уравнения системы (1.13) выразим соотношения для W_{0T} , W_{0B} :

$$\begin{aligned}
W_{0T} - W_{0B} &= -h_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} - h_0 \frac{\partial V_0}{\partial y} \\
W_{0B} &= U_0 \frac{\partial B}{\partial x} + V_0 \frac{\partial B}{\partial y}
\end{aligned}$$

Вычитая последнее уравнение системы (1.13) из четвертого, получим:

$$\frac{\partial H_0}{\partial t} + U_0 \cdot \frac{\partial h_0}{\partial x} + V_0 \cdot \frac{\partial h_0}{\partial y} - [W_{0T}(x, y, t) - W_{0B}(x, y, t)] \left(1 + \frac{\delta H}{h_0}\right)$$

С учетом выражения для разности W_{0T} и W_{0B} :

$$\frac{\partial H_0}{\partial t} + U_0 \cdot \frac{\partial h_0}{\partial x} + V_0 \cdot \frac{\partial h_0}{\partial y} + h_0 \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) \left(1 + \frac{\delta H}{h_0}\right)$$

Учитывая постоянство рельефа дна, приходим к первому уравнению системы мелкой воды с дополнительным членом, пропорциональным δH :

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial h_0 U_0}{\partial x} + \frac{\partial h_0 V_0}{\partial y} + \delta H \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.14)$$

Прибавляя уравнение (1.14), умноженное на V_0 , ко второму уравнению системы (1.13), умноженное на h_0 , получим модифицированный закон сохранения импульса по координате x :

$$\frac{\partial h_0 U_0}{\partial t} + \frac{\partial h_0 U_0^2}{\partial x} + \frac{\partial h_0 U_0 V_0}{\partial y} + g h_0 \frac{\partial H_0}{\partial x} + \delta H U_0 \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) = h_0 D_{U_0} \quad (1.15)$$

Аналогично преобразуем закон сохранения импульса по координате y :

$$\frac{\partial h_0 V_0}{\partial t} + \frac{\partial h_0 U_0 V_0}{\partial x} + \frac{\partial h_0 V_0^2}{\partial y} + g h_0 \frac{\partial H_0}{\partial x} + \delta H V_0 \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) = h_0 D_{V_0} \quad (1.16)$$

Таким образом, система (1.13) цепочкой эквивалентных переходов преобразована к системе уравнений (1.14)-(1.16), которая представляет собой систему уравнений мелкой воды с дополнительными членами, пропорциональными δH . Данная система трех уравнений содержит четыре переменные h_0 , U_0 , V_0 , δH . Величина δH определяется бароклиной системой, описание которой будет приведено ниже. Полная динамика жидкости определяется совместно баротропной и бароклиной системами. Эта система может быть записана в следующем неконсервативном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_0}{\partial t} + (h_0 + \delta H) \frac{\partial U_0}{\partial x} + U_0 \frac{\partial h_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial h_0}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial U_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} + g \frac{\partial h_0}{\partial x} &= -g \frac{\partial B}{\partial x} + D_{U_0} \\ \frac{\partial V_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial V_0}{\partial y} + g \frac{\partial h_0}{\partial y} &= -g \frac{\partial B}{\partial y} + D_{V_0} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Скорость распространения звуковых возмущений в этой системе равна

$$c = \sqrt{gh} = \sqrt{g(h_0 + \delta H)}$$

и существенно превосходит характерные скорости бароклиных течений.

Система бароклинных уравнений. Выше было показано, что выражения в фигурных скобках в уравнениях (1.7), (1.8), (1.9), (1.11), (1.12) равны нулю, что позволяет записать их в следующем виде:

$$\begin{aligned} L_1(\delta u, \delta v, \delta w, x, y, z, t) &= 0 \\ L_2(\delta u, \delta v, \delta w, x, y, z, t) &= 0 \\ L_3(\delta u, \delta v, \delta w, x, y, z, t) &= 0 \\ L_H(\delta u, \delta v, \delta w, x, y, z, t) &= 0 \\ \delta u \frac{\partial B}{\partial x} + \delta v \frac{\partial B}{\partial y} - \delta w &= 0 \end{aligned}$$

Добавляя к ним уравнения для солености и температуры из системы (1.1), получим систему бароклинных уравнений. Однако для дальнейшего построения балансно-характеристической схемы лучше записать их не относительно бароклинных переменных $\delta u, \delta v, \delta w$, а использовать «полные» переменные u, v, w . Для этого достаточно подставить в исходную систему уравнений (1.1) формулу для давления (1.6). В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} + \frac{\partial wu}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial x} &= -g \frac{\partial H_0}{\partial x} + D_u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial wv}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial y} &= -g \frac{\partial H_0}{\partial y} + D_v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial z} &= -\frac{\delta \rho}{\rho_0} g + D_w, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Su}{\partial x} + \frac{\partial Sv}{\partial y} + \frac{\partial Sw}{\partial z} &= D_S, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial Tu}{\partial x} + \frac{\partial Tv}{\partial y} + \frac{\partial Tw}{\partial z} &= D_T, \\ \rho &= \rho(S, T) \end{aligned} \tag{1.18}$$

с граничными условиями на свободной поверхности:

$$\begin{aligned}
\delta P|_H &= \rho_0 g \delta H \\
\left(\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} - w \right) \Big|_H &= 0 \\
\nu_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=H} &= -\tau_x, \quad \nu_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=H} = -\tau_y
\end{aligned} \tag{1.19}$$

и на дне:

$$\begin{aligned}
\left(u \frac{\partial B}{\partial x} + v \frac{\partial B}{\partial y} - w \right) \Big|_B &= 0 \\
\nu_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=B} &= -\beta |u|, \quad \nu_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=B} = -\beta |v|
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Значение $H_0(x, y, t)$ определяется баротропной системой и в системе (1.18) считается известной. Таким образом, бароклинная система уравнений не содержит описания быстрых процессов - гравитационных волн. Приращение давления δP определяется уравнением эллиптического типа и при численной реализации приходится разрешать дискретный аналог уравнения Пуассона. Далее будет описан метод, позволяющий гиперболизировать полученную систему уравнений, что позволит уйти от решения уравнения Пуассона.

1.3 Свободная поверхность в приближении «мягкой крышки»

В построенной выше модели существует два уровня поверхности. Один из них, $H_0(x, y, t)$, определяется из решения баротропной системы уравнений (1.14)-(1.16). Другой, $H(x, y, t)$ - уровень свободной поверхности, колеблется относительно $H_0(x, y, t)$ и определяется бароклинной системой уравнений (1.18)-(1.20). Если априорно известно, что амплитуда колебаний свободной поверхности является малой величиной, то уровень $H_0(x, y, t)$ можно считать постоянным ($H_0 = const$) и отказаться от решения баротропной системы. Опишем один из возможных вариантов определения данной величины как среднюю высоту в начальный момент времени по всей площади расчетной области Ω :

$$H_0 = const = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} H(x, y, t = 0) d\Omega$$

Так как в таком приближении свободная поверхность горизонтальна, то, аналогично предыдущему пункту, представим давление P в виде суммы $P(x, y, z, t) = P_0(z, t) + \delta P(x, y, z, t)$, где $P_0(z) = \rho_0 g (H_0 - z)$. После подстановки давления в систему (1.1), получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} + \frac{\partial wu}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial x} &= D_u, \\
\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial wv}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial y} &= D_v, \\
\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial z} &= -g \frac{\delta \rho}{\rho_0} + D_w, \\
\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Su}{\partial x} + \frac{\partial Sv}{\partial y} + \frac{\partial Sw}{\partial z} &= D_S, \\
\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial Tu}{\partial x} + \frac{\partial Tv}{\partial y} + \frac{\partial Tw}{\partial z} &= D_T, \\
\rho &= \rho(S, T)
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Систему уравнений (1.21) с граничными условиями (1.19), (1.20) будем называть моделью динамики жидкости со свободной поверхностью в приближении "мягкой крышки". Данное приближение позволяет отказаться решения баротропной системы уравнений в задачах с малой амплитудой колебаний свободной поверхности.

1.4 Приближение слабой сжимаемости

В описанных ранее системах уравнений давление определяется уравнением эллиптического типа, что при численном решении приводит к решению СЛАУ на каждой итерации по времени. В данном разделе рассмотрим один из вариантов гиперболизации системы уравнений динамики жидкости (1.21), (1.19), (1.20).

Рассмотрим приближение слабой сжимаемости. Введем дополнительную безразмерную переменную $\theta(x, y, z, t)$ определяющую степень сжатия объема бесконечно малой лагранжевой частицы относительно первоначального $\theta_0 = 1$ и

уравнение состояния, определяющее негидростатическую добавку давления δP (см. формулу для давления (1.6)):

$$\delta P(x, y, z, t) = c^2 (\theta(x, y, z, t) - \theta_0), \quad (1.22)$$

где $c = \text{const}$ - искусственная скорость звука. Искусственная скорость звука подбирается, исходя из компромисса между малым отклонением θ от $\theta_0 = 1$ и приемлемым шагом по времени.

С учётом данного приближения, система уравнений (1.21) может быть преобразована к следующей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \theta u}{\partial x} + \frac{\partial \theta v}{\partial y} + \frac{\partial \theta w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \theta u}{\partial t} + \frac{\partial \theta u^2}{\partial x} + \frac{\partial \theta v u}{\partial y} + \frac{\partial \theta w u}{\partial z} + \frac{c^2}{\rho_0} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= D_u, \\ \frac{\partial \theta v}{\partial t} + \frac{\partial \theta u v}{\partial x} + \frac{\partial \theta v^2}{\partial y} + \frac{\partial \theta w v}{\partial z} + \frac{c^2}{\rho_0} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= D_v, \\ \frac{\partial \theta w}{\partial t} + \frac{\partial \theta u w}{\partial x} + \frac{\partial \theta v w}{\partial y} + \frac{\partial \theta w^2}{\partial z} + \frac{c^2}{\rho_0} \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{\delta \rho}{\rho_0} g + D_w, \\ \frac{\partial \theta S}{\partial t} + \frac{\partial \theta S u}{\partial x} + \frac{\partial \theta S v}{\partial y} + \frac{\partial \theta S w}{\partial z} &= D_S, \\ \frac{\partial \theta T}{\partial t} + \frac{\partial \theta T u}{\partial x} + \frac{\partial \theta T v}{\partial y} + \frac{\partial \theta T w}{\partial z} &= D_T, \\ \rho &= \rho(S, T) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Следует отметить, что первое уравнение системы (1.21) (уравнение несжимаемости) заменяется на уравнение сохранения лагранжевого объёма. Что, как будет показано далее, позволяет гиперболизировать систему уравнений. Граничные условия (1.19) и (1.20) остаются без изменений.

Утверждение. При условии отсутствия вязкости и диффузии, т.е. $D_u = D_v = D_w = D_S = D_T = 0$, система уравнений (1.23), (1.19), (1.20) является гиперболической.

Доказательство. Для доказательства данного утверждения достаточно показать, что все собственные числа матрицы характеристической формы системы (1.23) вещественны [52]. Процедура приведения системы к характери-

стической форме и определение собственных чисел матрицы этой системы будет изложена в Разделе 2.2 при построении явной схемы САВАРЕТ-НН. Найденные собственные числа вещественны. ■

Гиперболичность системы дает возможность использовать явные схемы для численного решения, сложность численного решения по которым линейно зависит от количества вычислительных ячеек.

Рассмотрим вопрос выбора искусственной скорости звука c , при этом определим несколько эмпирических критериев, которые помогут оценить применимость приближения слабой сжимаемости в контексте рассматриваемых математических моделей и численных алгоритмов решения по ним. Эти критерии будут служить инструментами для определения, в каких условиях данное приближение может быть использовано для получения результатов моделирования близких к реальным течениям жидкости.

Из опыта применения приближения слабой сжимаемости в задачах газовой динамики [53]:

$$\max \left(\frac{|\delta\theta|}{\theta_0} \right) \approx M^2 \quad (1.24)$$

где $M = \max(u, v, w)/c$ - число Маха.

Как критерий применимости приближения слабой сжимаемости будем использовать следующее соотношение на отклонение лагранжевого объема:

$$\frac{|\delta\theta|}{\theta_0} < 0.01 \quad (1.25)$$

Что соответствует числам Маха $M < 0.1$. Выполнение условий приближения слабой сжимаемости критично. Данное условие не влияет на устойчивость получаемых по этой системе численных алгоритмов, но влияет на точность воспроизведения моделью реальной динамики течений.

1.5 Система уравнений в смешанно эйлерово-лагранжевых координатах

В численных методах, которые применяют лагранжев подход, узлы вычислительной сетки сопровождают движение жидкости, и скорость узлов опре-

деляется скоростью жидкостного потока. Данный подход позволяет построить полностью консервативные разностные схемы. Однако лагранжевые методы часто приводят к перехлестыванию сетки, что делает невозможным дальнейший расчет.

С другой стороны, численные методы, основанные на эйлеровом подходе, используют фиксированные узлы в вычислительной сетке, которые не изменяются во времени. Данные методы позволяют моделировать более общий класс течений, но требуются дополнительные усилия адаптации данных методов в задачах с изменяемыми границами расчетной области.

С целью объединения преимуществ обоих подходов были разработаны смешанные эйлерово-лагранжевые методы [31; 32; 54], сочетающие в себе элементы как лагранжева, так и эйлерова подходов. В данном подходе система дифференциальных уравнений записывается в опорных (смешанных эйлерово-лагранжевых) координатах и оставляет свободу выбора скорости перемещения основной системы координат. Это предоставляет возможность выбора способа перемещения узлов сетки при построении численных схем. Подробное описание принципов построения систем в СЭЛ переменных содержится в работах [55] и [56].

Рассмотрим систему трехмерных уравнений гидродинамики в приближении Буссинеска с учетом приближения слабой сжимаемости жидкости (1.23) в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{J} \frac{\partial J \theta}{\partial t} + \frac{\partial \theta u}{\partial x} + \frac{\partial \theta v}{\partial y} + \frac{\partial \theta (w - \dot{z})}{\partial z} &= 0, \\
\frac{1}{J} \frac{\partial J \theta u}{\partial t} + \frac{\partial \theta u^2}{\partial x} + \frac{\partial \theta uv}{\partial y} + \frac{\partial \theta (w - \dot{z}) u}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial x} &= D_u, \\
\frac{1}{J} \frac{\partial J \theta v}{\partial t} + \frac{\partial \theta uv}{\partial x} + \frac{\partial \theta v^2}{\partial y} + \frac{\partial \theta (w - \dot{z}) v}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial y} &= D_v, \\
\frac{1}{J} \frac{\partial J \theta w}{\partial t} + \frac{\partial \theta uw}{\partial x} + \frac{\partial \theta vw}{\partial y} + \frac{\partial \theta w (w - \dot{z})}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial z} &= -g \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} + D_w, \\
\frac{\partial \theta S}{\partial t} + \frac{\partial \theta S u}{\partial x} + \frac{\partial \theta S v}{\partial y} + \frac{\partial \theta S (w - \dot{z})}{\partial z} &= D_S, \\
\frac{\partial \theta T}{\partial t} + \frac{\partial \theta T u}{\partial x} + \frac{\partial \theta T v}{\partial y} + \frac{\partial \theta T (w - \dot{z})}{\partial z} &= D_T, \\
\rho &= \rho(S, T), \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \dot{z} \\
\delta P &= c^2 (\theta - \theta_0), \quad \theta_0 = 1,
\end{aligned} \tag{1.26}$$

где (x, y, z) — эйлерова декартова система координат, которая связана с лагранжевой системой координат (x', y', z') якобианом перехода $J = \partial(x, y, z) / \partial(x', y', z')$, (u, v, w) — компоненты вектора скорости в системе координат (x, y, z) , \dot{z} — скорость перемещения координаты z : $\dot{z} = 0$ соответствует Эйлеровым координатам, при $\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial t}$ — Лагранжевым, остальные параметры совпадают с параметрами системы (1.23). Координаты по горизонтальным направлениям OX и OY — считаем Эйлеровыми и неподвижными, что дает $J = \partial z / \partial z'$.

Система уравнений (1.26) описывает динамику жидкости в области $(x, y, z) \in \Omega$, $\Omega = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \times [B(x, y), z_{\max}(x, y, t)]$, ограниченной жесткими стенками при $x = x_{\min}$, $x = x_{\max}$, $y = y_{\min}$, $y = y_{\max}$, некоторым неровным дном при $z = B(x, y)$, а при $z = z_{\max}(x, y, t)$ — свободной поверхностью. Система (1.26) дополняется следующими граничными условиями

на горизонтальных границах области:

$$\begin{aligned} u(x_{\min}, y, z, t) = 0, \quad u(x_{\max}, y, z, t) = 0, \\ v(x, y_{\min}, z, t) = 0, \quad v(x, y_{\max}, z, t) = 0, \end{aligned}$$

и вертикальных:

$$\frac{\partial B(x, y)}{\partial x} u(x, y, B(x, y), t) + \frac{\partial B(x, y)}{\partial y} v(x, y, B(x, y), t) - w(x, y, B(x, y), t) = 0, \quad (1.27)$$

$$\delta P(x, y, z_{\max}(x, y, t), t) = -\rho_0 g (H_0 - z_{\max}(x, y, t)), \quad (1.28)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial y} - w \right) \Big|_{z=z_{\max}(x, y, t)} = 0. \quad (1.29)$$

$$\nu_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=H} = -\tau_x, \quad \nu_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=H} = -\tau_y \quad (1.30)$$

$$\nu_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=B} = -\beta |u|, \quad \nu_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=B} = -\beta |v| \quad (1.31)$$

Далее систему уравнений (1.26) с граничными условиями (1.27)–(1.31) будем называть ALE-HNS (Arbitrary Lagrangian-Eulerian Hyperbolic Navie-Stocks).

Глава 2. Явная схема CABARET-NH

Схемы класса КАБАРЕ [49] предназначены для численного решения гиперболических систем уравнений. Основной идеей данной схемы является использование конечно-объёмного подхода, при этом используется удвоенный набор сеточных переменных – один набор относится к ячейкам, другой к граням между ячейками. Для вычисления эволюции переменных в ячейках используются балансные соотношения, в которые входят переменные на гранях. Для вычисления эволюции переменных на гранях используется характеристический принцип, аппроксимирующий перенос локальных инвариантов Римана в пределах пространственно-временной ячейки. Переменные, относящиеся к ячейкам, называются консервативными, переменные, относящиеся к граням, — потоковыми.

В силу процедуры построения схемы класса КАБАРЕ являются консервативными, имеют второй порядок точности и имеют минимальный вычислительный шаблон. Явные схемы устойчивы при числе Куранта $CFL \leq 1$. Схема КАБАРЕ для уравнения переноса без процедуры монотонизации бездиссипативна. Процедура монотонизации, отражающая принцип максимума для локальных инвариантов Римана, вносит необходимую вязкость в зонах разрывов.

Построение системы балансных разностных уравнений, описывающих эволюцию консервативных значений, выполняется традиционным для конечно-объёмных схем способом и не вызывает сложности. Методика КАБАРЕ предусматривает перевычисление консервативных переменных, выполняя два полушага по времени. На первом полушаге вычисляются консервативные переменные на промежуточном слое $t_{n+1/2}$, на втором – на слое t_{n+1} . Потоки на первом полушаге вычисляются по потоковым переменным со слоя времени t_n , на втором – со слоя t_{n+1} . Вычисление потоковых переменных на слое времени t_{n+1} производится в соответствии с характеристическим подходом.

В первой главе диссертации была детально представлена система уравнений, описывающих динамику трехмерной жидкости. Однако перед тем как начать описывать численные схемы для этой полной системы уравнений, проведем исследование свойств модели и численной схемы на упрощенной системе двумерной динамики неоднородной жидкости.

2.1 Двумерная модель динамики неоднородной жидкости

Рассмотрим систему консервативных дифференциальных уравнений динамики несжимаемой стратифицированной жидкости в смешанных эйлеро-лагранжевых переменных в плоскости (x, z) :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(w - \dot{z})}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{1}{J} \frac{\partial J \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho(w - \dot{z})}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{1}{J} \frac{\partial J \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho(w - \dot{z})u}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{1}{J} \frac{\partial J \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho u w}{\partial x} + \frac{\partial \rho w(w - \dot{z})}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} &= -\rho g
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где ρ - плотность жидкости, (u, w) - компоненты вектора скорости по направлениям x и z , P - давление, (x, z) - эйлерова система координат, связанная с лагранжевой системой (x', z') якобианом перехода $J = \frac{\partial(x, z)}{\partial(x', z')} = \frac{\partial z}{\partial z'}$. Несмотря на несжимаемость жидкости в данной системе присутствует уравнение переноса плотности, которая, в более общем случае, зависит от других переносимых параметров (обычно, от температуры и солёности воды).

Обозначим через $H(x, t)$ уровень свободной поверхности жидкости, $B(x)$ - профиль дна. Тогда граничные условия на поверхности и дне можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 P|_H &= 0 \\
 \left(\frac{\partial H}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial H}{\partial x} - w \right) \Big|_H &= 0
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\left(\frac{\partial B}{\partial x} \cdot u - w \right) \Big|_B = 0 \tag{2.3}$$

Давление P в системе уравнений (2.1) представим в виде суммы $P(x, z, t) = P_0(z, t) + \delta P(x, z, t)$, где $P_0 = \rho_0 g (H_0 - z)$ - основная часть гидростатического давления, а $\delta P(x, z, t)$ - некоторая добавка, вид которой будет определён ниже. Здесь $H_0 = const = \frac{1}{x_{\max} - x_{\min}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} H(x, t = 0) dx$ - средняя высота в начальный момент времени, $\rho_0 = const$ - средняя начальная плотность. С учётом такого

представления давления и, используя приближение Буссинеска, уравнения (2.1) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(w - \dot{z})}{\partial z} &= 0; \\
\frac{1}{J} \frac{\partial J \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho(w - \dot{z})}{\partial z} &= 0 \\
\frac{1}{J} \frac{\partial J u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(w - \dot{z})u}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial x} &= 0; \\
\frac{1}{J} \frac{\partial J w}{\partial t} + \frac{\partial u w}{\partial x} + \frac{\partial w(w - \dot{z})}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial z} &= - \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) g
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Аналогично, для граничных условий (2.2) получим:

$$\begin{aligned}
\delta P|_H &= -\rho_0 g (H_0 - H) \\
\left(\frac{\partial H}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial H}{\partial x} - w \right) \Big|_H &= 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Система уравнений (2.4), (2.5), (2.3) является эллиптической и при её численном решении приходится решать разностный аналог уравнения Пуассона, что приводит к решению системы линейных уравнений с рангом, пропорциональным числу ячеек сетки. Далее описывается подход, позволяющий гиперболизировать систему уравнений и, следовательно, применять для её численного решения хорошо параллелизуемые явные разностные схемы.

Приближение слабой сжимаемости. Проведем гиперболизацию системы уравнений (2.4), (2.5), (2.3) с помощью приближения слабой сжимаемости, аналогично подходу, описанному в Главе 1:

$$\delta P(x, z, t) = c^2 (\theta(x, z, t) - \theta_0), \tag{2.6}$$

где $c = const$ - искусственная скорость звука, безразмерный параметр $\theta(x, z, t) = V/V_0 \approx 1$ показывает отклонение объёма лагранжевой частицы от первоначального, $\theta_0 = 1$. Искусственная скорость звука выбирается из условия задачи для обеспечения малого отклонения θ от $\theta_0 = 1$,

С учётом данного приближения система уравнений (2.4) может быть преобразована к следующей:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{J} \frac{\partial J\theta}{\partial t} + \frac{\partial\theta u}{\partial x} + \frac{\partial\theta(w-\dot{z})}{\partial z} &= 0 \\
\frac{1}{J} \frac{\partial J\theta u}{\partial t} + \frac{\partial\theta u^2}{\partial x} + \frac{\partial\theta(w-\dot{z})u}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial\delta P}{\partial x} &= 0 \\
\frac{1}{J} \frac{\partial J\theta w}{\partial t} + \frac{\partial\theta uw}{\partial x} + \frac{\partial\theta w(w-\dot{z})}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial\delta P}{\partial z} &= -\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)g \\
\frac{1}{J} \frac{\partial J\rho\theta}{\partial t} + \frac{\partial\rho\theta u}{\partial x} + \frac{\partial\rho\theta(w-\dot{z})}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial z}{\partial t} &= \dot{z} \\
\delta P &= c^2(\theta - \theta_0)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Первое уравнение системы (2.4) (уравнение несжимаемости) заменяется на уравнение сохранения лагранжевого объёма. Граничные условия (2.5) и (2.3) остаются без изменений. Эта система является гиперболической и для её численного решения, можно использовать схему класса КАБАРЕ.

Для реализации характеристического подхода требуется выполнить некоторые преобразования исходной системы дифференциальных уравнений (2.7). Во-первых, следует преобразовать эту систему к, так называемому, простому виду

$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t} + A_x \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x} + A_z \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial z} = \vec{F}, \tag{2.8}$$

где $\vec{\varphi}$ - набор переменных. Далее система уравнений (2.8) последовательно рассматривается как система для каждого из пространственных направлений. Например, для направления OX :

$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t} + A_x \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x} = \vec{F} - A_z \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial z}. \tag{2.9}$$

Затем вычисляется матрица Ω_x , составленная из левых собственных векторов матрицы A_x , на которую умножается слева система (2.9).

$$\Omega_x \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t} + \Omega_x A_x \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x} = \vec{q}_x, \quad \vec{q}_x = \Omega_x \left(\vec{F} - A_z \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial z} \right) \tag{2.10}$$

В силу свойств левых собственных векторов справедливо тождество

$$\Omega_x A_x = (\vec{\lambda}E)\Omega_x,$$

где $\vec{\lambda}$ - вектор собственных значений матрицы A_x . Поэтому, полагая матрицу Ω_x постоянной в пределах одной пространственно-временной ячейки $\langle \Omega_x \rangle = \Omega_x|_{cell}^{n+1/2}$, систему уравнений (2.10) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\langle \Omega_x \rangle \vec{\varphi}) + (\vec{\lambda} E) \frac{\partial}{\partial x} (\langle \Omega_x \rangle \vec{\varphi}) = \vec{q}_x$$

что приводит к так называемой **характеристической** форме системы уравнений

$$\frac{\partial \vec{I}}{\partial t} + (\vec{\lambda} E) \frac{\partial \vec{I}}{\partial x} = \vec{q}_x, \quad (2.11)$$

где E - единичная диагональная матрица. Уравнения переноса вида (2.11) позволяют со вторым порядком аппроксимации вычислить на новом слое времени набор относящихся к граням величин \vec{I} , которые представляют собой локальные инварианты Римана.

Учитывая изложенное выше, вычисление потокового набора переменных на новом слое времени сводится к следующим шагам:

- (1) На основе имеющихся потоковых переменных вычисляются локальные инварианты Римана, относящиеся к граням и слою времени t_n ,
- (2) Выполняется первый полушаг балансных соотношений для вычисления консервативных переменных на слое времени $t_{n+1/2}$,
- (3) На основе вычисленных консервативных переменных вычисляются локальные инварианты Римана, относящиеся к центрам ячеек и слою времени $t_{n+1/2}$,
- (4) Экстраполяция $I_S^{n+1} = 2I_C^{n+1/2} - I_{op}^n$ применяется для вычисления новых локальных инвариантов Римана на гранях (здесь I_{op} - локальный инвариант Римана на противоположной грани ячейки, а I_C - инвариант в центре ячейки), при этом для определения ячейки, через которую производится экстраполяция, учитывается знак соответствующего собственного значения λ .
- (5) Для экстраполированных значений учитывается принцип максимума,
- (6) На основе набора новых локальных инвариантов на грани вычисляется набор новых потоковых переменных $\vec{\varphi}$.

Ниже кратко описывается этот процесс в применении к системе уравнений (2.7).

2.2 Приведение к характеристической форме

В соответствии с описанным выше подходом приведём систему (2.7) к простой форме:

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + \theta \frac{\partial u}{\partial x} + (w - \dot{z}) \frac{\partial \delta \theta}{\partial z} + \theta \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + (w - \dot{z}) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0 \theta} \frac{\partial \delta P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + (w - \dot{z}) \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0 \theta} \frac{\partial \delta P}{\partial z} = -\frac{\delta \rho}{\rho_0 \theta} g \\ \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} + (w - \dot{z}) \frac{\partial \delta \rho}{\partial z} = 0 \\ \delta \rho = (\rho - \rho_0); \quad \delta P = c^2 \delta \theta; \quad \delta \theta = \theta - \theta_0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Набором переменных в этой системе является вектор $\vec{\varphi} = (\delta \theta, u, w, \delta \rho)^T$. Запишем систему (2.12) в матричной форме:

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + A_x \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x} + A_z \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial z} = \vec{F}; \quad \vec{\varphi} = (\delta \theta, u, w, \delta \rho)^T \quad (2.13)$$

где

$$A_x = \begin{pmatrix} u & \theta & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{\rho_0 \theta} & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad A_z = \begin{pmatrix} w - \dot{z} & 0 & \theta & 0 \\ 0 & w - \dot{z} & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{\rho_0 \theta} & 0 & w - \dot{z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w - \dot{z} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\delta \rho g}{\rho_0 \theta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Без вывода приведём собственные числа матрицы A_x и её левые собственные векторы:

$$\lambda_{1,2}^x = u \pm c/\sqrt{\rho_0}, \quad \lambda_{3,4}^x = u \\ \vec{l}_1^x = \left(\frac{c}{\sqrt{\rho_0 \theta}}, 1, 0, 0 \right), \quad \vec{l}_2^x = \left(-\frac{c}{\sqrt{\rho_0 \theta}}, 1, 0, 0 \right), \quad \vec{l}_3^x = (0, 0, 1, 0), \quad \vec{l}_4^x = (0, 0, 0, 1) \quad (2.15)$$

Матрица Ω_x , составленная из левых собственных векторов, имеет следующий вид:

$$\Omega_x = \begin{pmatrix} \frac{c}{\sqrt{\rho_0\theta}} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{c}{\sqrt{\rho_0\theta}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Как уже отмечалось выше, матрица Ω_x не является постоянной, поэтому в рамках одной пространственно-временной ячейки её коэффициенты будут взяты из центра этой ячейки и заморожены:

$$\langle \Omega_x \rangle = \Omega_x|_{cell}^{n+1/2} \quad (2.17)$$

Теперь, после умножения (2.13) слева на матрицу (2.17), будет получена характеристическая система уравнений (2.11) по направлению OX ,

$$\frac{\partial \vec{I}^x}{\partial t} + \vec{\lambda}^x \frac{\partial \vec{I}^x}{\partial x} = \vec{q}_x \quad (2.18)$$

где локальные инварианты Римана имеют следующий вид:

$$I_1^x = u + \left\langle \frac{c}{\sqrt{\rho_0\theta}} \right\rangle \delta\theta, \quad I_2^x = u - \left\langle \frac{c}{\sqrt{\rho_0\theta}} \right\rangle \delta\theta, \quad I_3^x = w, \quad I_4^x = \delta\rho \quad (2.19)$$

Угловые скобки здесь означают, что данные значения берутся из центра ячейки.

После проведения аналогичных вычислений для направления OZ получим систему характеристических уравнений вида

$$\frac{\partial \vec{I}^z}{\partial t} + \vec{\lambda}^z \frac{\partial \vec{I}^z}{\partial z} = \vec{q}_z, \quad (2.20)$$

где

$$\begin{aligned}
\vec{l}_1^z &= \left(\frac{c}{\sqrt{\rho_0\theta}}, 0, 1, 0 \right), & \vec{l}_2^z &= \left(-\frac{c}{\sqrt{\rho_0\theta}}, 0, 1, 0 \right), & \vec{l}_3^z &= (0, 1, 0, 0), & \vec{l}_4^z &= (0, 0, 0, 1) \\
\lambda_{1,2}^z &= (w - \dot{z}) \pm c/\sqrt{\rho_0}, & \lambda_{3,4}^z &= (w - \dot{z}) \\
I_1^z &= w + \left\langle \frac{c}{\sqrt{\rho_0\theta}} \right\rangle \delta\theta, & I_2^z &= w - \left\langle \frac{c}{\sqrt{\rho_0\theta}} \right\rangle \delta\theta, & I_3^z &= u, & I_4 &= \delta\rho
\end{aligned} \tag{2.21}$$

2.3 Разностная схема

Введём в пространстве (x, z) фиксированную по x и подвижную по z пространственную сетку $\omega_h = \{(x_i, z_{i,k}) \mid i = 0..N_x, k = 0..N_z\}$ и неравномерную сетку по времени

$$\omega_\tau = \left\{ t_n = \sum_{i=0}^{n-1} \tau_i, n \in \{0..K\} \right\}.$$

Кроме моментов времени, характеризующихся целыми индексами t_n будем рассматривать, также, промежуточные слои по времени $t_{n+1/2} = t_n + \tau_n/2$.

В центрах ячеек пространственной сетки зададим полный набор консервативных переменных $\vec{\varphi} = \{\theta, u, w, \rho\}$. Центры ячеек ниже будем нумеровать полуцелыми нижними индексами. Дополнительно, в центрах граней сетки зададим второй полный набор переменных (потокowych) $\psi = \{\theta, u, w, \rho\}$. Потокowe переменные, в зависимости от того, на какой грани – вертикальной или горизонтальной – они определены, имеют один целый и один полуцелый индекс. В том случае, если какая-либо величина (в основном, геометрические параметры) относится к узлу сетки, она будет снабжена двумя целыми индексами (см. Рис.2.1).

Консервативные переменные будем рассматривать как на целых, так и на промежуточных слоях по времени t_n , $t_{n+1/2}$ и t_{n+1} , а потокowe – только на целых слоях t_n и t_{n+1} .

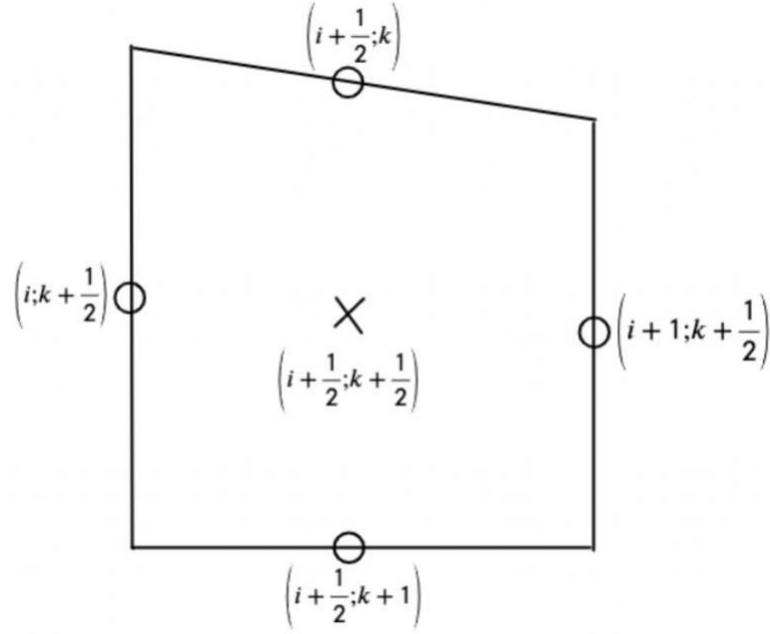


Рисунок 2.1 — Обозначения переменных.

Введём, также, следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \Delta z_c &= z_{i+1/2,k} - z_{i+1/2,k+1} \\
 \Delta z_R &= z_{i+1,k} - z_{i+1,k+1} \\
 \Delta z_L &= z_{i,k} - z_{i,k+1} \\
 \Delta z_T &= z_{i+1,k} - z_{i,k} \\
 \Delta z_B &= z_{i+1,k+1} - z_{i,k+1} \\
 \Delta V &= \Delta z_c \Delta x, \Delta x = x_{i+1} - x_i
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Предположим, что на некоторый момент времени t_n , $n \in \{0, M-1\}$ на сетке ω_h известны значения всех сеточных переменных – и консервативных и потоковых. Целью вычислений в пределах одного шага по времени является вычисление всех этих переменных на следующий момент времени $t_{n+1} = t_n + \tau_n$. Согласно методике КАБАРЕ шаг по времени состоит из выполнения 3 фаз. Две из них (называемые балансными) предназначены для вычисления консервативных значений на моменты времени $t_{n+1/2}$ и t_{n+1} . Фаза, называемая характеристической, предназначена для вычисления потоковых переменных на момент времени t_{n+1} . Порядок выполнения фаз, следующий:

- (1) Фаза 1 – балансная, предназначена для вычисления консервативных переменных в ячейках на момент времени $t_{n+1/2}$.

- (2) Фаза 2 – характеристическая, предназначена для вычисления потоковых переменных на гранях на момент времени t_{n+1} .
- (3) Фаза 3 – балансная, предназначена для вычисления консервативных переменных в ячейках на момент времени t_{n+1} .

В следующих разделах кратко описываются основные моменты вычислений.

2.4 Балансные фазы схемы КАБАРЕ

Схема КАБАРЕ использует конечно-объёмный подход для получения численных формул аппроксимации пространственных производных. Для этого достаточно проинтегрировать по ячейке уравнения (2.7) и, затем, воспользовавшись формулой Остроградского-Гаусса, перейти от интегралов по площади к контурным интегралам по границе ячейки. Каждый контурный интеграл по границе ячейки заменяется на сумму интегралов по граням ячейки, которые, в свою очередь, аппроксимируются по формуле прямоугольников. Разница между фазами 1 и 3, на которых используются балансные уравнения, заключается только в дискретизации по времени. На фазе 1 применяется следующая дискретизация по времени:

$$\frac{\bar{\zeta}_C^{n+1/2} - \bar{\zeta}_C^n}{\tau/2} + \sum_k F(\vec{\psi}_k^n) = 0. \quad (2.23)$$

где $\bar{\zeta}_C = \{\theta_C \Delta V, \theta_{Cu} \Delta V, \theta_{Cw} \Delta V, \rho_C \theta_C \Delta V\}$ - величины на основе консервативных переменных, для которых выполняются законы сохранения, а $\vec{\psi}$ - набор потоковых переменных.

Третья фаза может быть записана либо в виде полушага

$$\frac{\bar{\zeta}_C^{n+1} - \bar{\zeta}_C^{n+1/2}}{\tau/2} + \sum_k F(\vec{\psi}_k^{n+1}) = 0, \quad (2.24)$$

или, сложив (2.23) и (2.24), в виде полного шага

$$\frac{\bar{\zeta}_C^{n+1} - \bar{\zeta}_C^n}{\tau} + \frac{1}{2} \sum_k \left(F(\vec{\psi}_k^n) + F(\vec{\psi}_k^{n+1}) \right) = 0 \quad (2.25)$$

Подробно выпишем только разностные уравнения, полученные для 1 фазы. Разностное уравнение сохранения объёма имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{(\theta\Delta V)_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - (\theta\Delta V)_{i+1/2,k+1/2}^n}{\tau/2} + \\
& + \left[(\theta u)_{i+1,k+1/2}^n \Delta z_R^n - (\theta u)_{i,k+1/2}^n \Delta z_L^n \right] - \left[(\theta u)_{i+1/2,k}^n \Delta z_T^n - (\theta u)_{i+1/2,k+1}^n \Delta z_B^n \right] + \\
& + \left[(\theta(w - \dot{z}))_{i+1/2,k}^n - (\theta(w - \dot{z}))_{i+1/2,k+1}^n \right] \Delta x = 0
\end{aligned} \tag{2.26}$$

В первой строке записан разностный аналог производной по времени, во второй часть контурного интеграла по границе ячейки, соответствующая вертикальным граням, в третьей строке – соответствующая горизонтальным граням. Остальные разностные уравнения записываются аналогично:

$$\begin{aligned}
& \frac{(\theta u \Delta V)_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - (\theta u \Delta V)_{i+1/2,k+1/2}^n}{\tau/2} \\
& + \left[(\theta u^2)_{i+1,k+1/2}^n + \frac{c^2}{\rho_0} (\theta_{i+1,k+1/2}^n - \theta_0) \right] \Delta z_R^n \\
& - \left[(\theta u^2)_{i,k+1/2}^n + \frac{c^2}{\rho_0} (\theta_{i,k+1/2}^n - \theta_0) \right] \Delta z_L^n \\
& - \left[(\theta u^2)_{i+1/2,k}^n + \frac{c^2}{\rho_0} (\theta_{i+1/2,k}^n - \theta_0) \right] \Delta z_T^n \\
& + \left[(\theta u^2)_{i+1/2,k+1}^n + \frac{c^2}{\rho_0} (\theta_{i+1/2,k+1}^n - \theta_0) \right] \Delta z_B^n \\
& + \left[(\theta u(w - \dot{z}))_{i+1/2,k}^n - (\theta u(w - \dot{z}))_{i+1/2,k+1}^n \right] \Delta x = 0
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\theta w \Delta V)_{i+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - (\theta w \Delta V)_{i+1/2, k+1/2}^n}{\tau/2} \\
& + \left[(\theta u w)_{i+1, k+1/2}^n \Delta z_R^n - (\theta u w)_{i, k+1/2}^n \Delta z_L^n \right] \\
& - \left[(\theta u w)_{i+1/2, k}^n \Delta z_T^n - (\theta u w)_{i+1/2, k+1}^n \Delta z_B^n \right] \\
& + \left[(\theta w (w - \dot{z}))_{i+1/2, k}^n + \frac{c^2}{\rho_0} \left(\theta_{i+1/2, k}^n - \theta_0 \right) \right] \Delta x \\
& - \left[(\theta w (w - \dot{z}))_{i+1/2, k+1}^n + \frac{c^2}{\rho_0} \left(\theta_{i+1/2, k+1}^n - \theta_0 \right) \right] \Delta x = - \left[g \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \Delta V \right]_{i+1/2, k+1/2}^n
\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\rho \theta \Delta V)_{i+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - (\rho \theta \Delta V)_{i+1/2, k+1/2}^n}{\tau/2} \\
& + \left[(\rho \theta u)_{i+1, k+1/2}^n \Delta z_R^n - (\rho \theta u)_{i, k+1/2}^n \Delta z_L^n \right] \\
& - \left[(\rho \theta u)_{i+1/2, k}^n \Delta z_T^n - (\rho \theta u)_{i+1/2, k+1}^n \Delta z_B^n \right] \\
& + \left[(\rho \theta (w - \dot{z}))_{i+1/2, k}^n - (\rho \theta (w - \dot{z}))_{i+1/2, k+1}^n \right] \Delta x = 0
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Отметим, что в уравнения (2.26) - (2.29) входят консервативных величины $z_{i+1/2, *}^{n+1/2}$ и $\dot{z}_{i+1/2, *}^n$ (первая используется при вычислении $\Delta V_{i+1/2, *}^{n+1/2}$). Аналогично, разностные уравнения для третьей фазы требуют нахождения координат узлов сетки $z_{i, *}^{n+1}$, координат центров горизонтальных граней $z_{i+1/2, *}^{n+1}$ и скоростей их перемещения $\dot{z}_{i+1/2, *}^{n+1}$.

Алгоритм нахождения этих величин не является очевидным и будет описан ниже (см. раздел 2.6).

2.5 Характеристическая фаза 2 схемы КАБАРЕ

Как отмечалось выше (см. раздел 2), характеристическая фаза схемы КАБАРЕ содержит, в том числе, процедуру экстраполяции локальных инвариантов Римана. Эти инварианты вычисляются и на основе консервативных, и на основе потоковых переменных. В фазе 1 разностной схемы были вычислены

консервативные переменные на промежуточном слое времени $t_{n+1/2}$, поэтому вычисление инварианта на грани для слоя времени t_{n+1} производится экстраполяцией как по пространству, так и по времени. Формулы вычисления инвариантов зависят от направления экстраполяции - (2.19) или (2.21). И в том, и в другом случае производится аналогичная процедура экстраполяции имеющая, например, для направления OX следующий вид:

$$(I_p^x)^{n+1}_{i,k+1/2} = \begin{cases} 2 (I_p^x)^{n+1/2}_{i+1/2,k+1/2} - (I_p^x)^n_{i+1,k+1/2}, & \text{if } (\lambda_p^x)^{n+1/2}_{i,k+1/2} < 0 \\ 2 (I_p^x)^{n+1/2}_{i-1/2,k+1/2} - (I_p^x)^n_{i-1,k+1/2}, & \text{if } (\lambda_p^x)^{n+1/2}_{i,k+1/2} > 0 \\ 0.5 \left((I_p^x)^{n+1/2}_{i+1/2,k+1/2} + (I_p^x)^{n+1/2}_{i-1/2,k+1/2} \right), & \text{if } (\lambda_p^x)^{n+1/2}_{i,k+1/2} = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

где $(\lambda_p^x)^{n+1/2}_{i,k+1/2} = 0.5 \left((\lambda_p^x)^{n+1/2}_{i+1/2,k+1/2} + (\lambda_p^x)^{n+1/2}_{i-1/2,k+1/2} \right)$, $p = 1..4$.

Для сохранения монотонности к вычисленным значениям инвариантов на новом слое по времени применяется стандартная для схемы КАБАРЕ процедура монотонизации на основе принципа максимума [57]. После получения всех инвариантов на слое времени t_{n+1} формулы (2.19) или (2.21), в зависимости от ориентации грани, используются для восстановления набора физических потоковых переменных $\{\delta\theta, u, w, \delta\rho\}$ для t_{n+1} . Подробности этой процедуры можно найти в [49; 58].

Отдельно рассмотрим нахождение потоковых переменных на свободной поверхности и дне. В условиях дозвукового течения инварианты I_1^z и I_2^z приходят на грань с разных сторон, так как знаки собственных значений $\lambda_{1,2}^z = (w - \dot{z}) \pm c/\sqrt{\rho_0}$ различны. У свободной поверхности смежная ячейка есть только с одной стороны, поэтому значение одного из этих инвариантов неизвестно. Чтобы замкнуть систему уравнений, примем во внимание граничные условия

(2.5). С учётом граничных условий получим систему из пяти уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} (I_1^z)_{i+1/2,0}^{n+1} = w_{i+1/2,0}^{n+1} + \left(\frac{c_0}{\sqrt{\rho_0 \theta}} \right)_{i+1/2,1/2}^{n+1/2} \delta \theta_{i+1/2,0}^{n+1} \\ c^2 \delta \theta_{i+1/2,0}^{n+1} = -\rho_0 g \left(H_0 - z_{i+1/2,0}^{n+1} \right) \\ \frac{z_{i+1/2,0}^{n+1} - z_{i+1/2,0}^{n+1/2}}{\tau/2} + u_{i+1/2,0}^{n+1} \cdot \frac{(z_{i+1,0}^{n+1} - z_{i,0}^{n+1})}{\Delta x} = w_{i+1/2,0}^{n+1} \\ (I_3^z)_{i+1/2,0}^{n+1} = u_{i+1/2,0}^{n+1} \\ (I_4^z)_{i+1/2,0}^{n+1} = \delta \rho_{i+1/2,0}^{n+1} \end{array} \right. \quad (2.31)$$

с набором неизвестных $\left\{ \delta \theta_{i+1/2,0}^{n+1}, u_{i+1/2,0}^{n+1}, w_{i+1/2,0}^{n+1}, \delta \rho_{i+1/2,0}^{n+1}, z_{i+1/2,0}^{n+1}, z_{i,0}^{n+1}, z_{i+1,0}^{n+1} \right\}$. К набору из четырёх потоковых переменных $\left\{ \delta \theta_{i+1/2,0}^{n+1}, u_{i+1/2,0}^{n+1}, w_{i+1/2,0}^{n+1}, \delta \rho_{i+1/2,0}^{n+1} \right\}$ добавились переменные $\left\{ z_{i+1/2,0}^{n+1}, z_{i,0}^{n+1}, z_{i+1,0}^{n+1} \right\}$, означающие вертикальные координаты узлов и грани сетки. Практика показала, что вычисление этих переменных только из системы уравнений (2.31) является нетривиальной задачей. Корректный метод вычисления положений узлов $\left\{ z_{i,0}^{n+1}, i = 0..N_x \right\}$, основываясь на интерпретации граничного условия (2.2) как уравнения переноса, будет описан ниже (см. (2.36)). Предполагая, что координаты узлов $\left\{ z_{i,0}^{n+1}, i = 0..N_x \right\}$ известны, система (2.31) сводится к системе из пяти линейных уравнений относительно пяти неизвестных $\left\{ \delta \theta_{i+1/2,0}^{n+1}, u_{i+1/2,0}^{n+1}, w_{i+1/2,0}^{n+1}, \delta \rho_{i+1/2,0}^{n+1}, z_{i+1/2,0}^{n+1} \right\}$. Разрешая данную систему можно найти потоковые значения переменных на свободной поверхности. Подробности об особенностях характеристической фазы для вычисления значений на границе можно найти в [49].

На нижней границе также неизвестен один из инвариантов, а именно инвариант $(I_1^z)_{i+1/2,N_z}^{n+1}$. Поэтому система уравнений на нижней поверхности допол-

няется условием (2.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} (I_2^z)_{i+1/2, N_z}^{n+1} = w_{i+1/2, N_z}^{n+1} - \left(\frac{c_0}{\sqrt{\rho_0 \theta}} \right)_{i+1/2, N_z-1/2}^{n+1/2} \delta \theta_{i+1/2, N_z}^{n+1} \\ \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)_{i+1/2} \cdot u_{i+1/2, N_z}^{n+1} - w_{i+1/2, N_z}^{n+1} = 0 \\ (I_3^z)_{i+1/2, N_z}^{n+1} = u_{i+1/2, N_z}^{n+1} \\ (I_i^z)_{i+1}^{n+1, N_z} = \delta_{i+1/2, N_z}^{n+1} \end{array} \right. \quad (2.32)$$

Так как положение дна фиксировано, сложностей здесь не возникает. Полученная система является линейной, её решение приводит к нахождению потоковых переменных $\{ \delta \theta_{i+1/2, N_z}^{n+1}, u_{i+1/2, N_z}^{n+1}, w_{i+1/2, N_z}^{n+1}, \delta \rho_{i+1/2, N_z}^{n+1} \}$.

2.6 Подвижная сетка

Отдельного описания заслуживает алгоритм учёта подвижной сетки. Здесь следует, во-первых, рассмотреть алгоритм вычисления положения свободной поверхности, которая, в данном случае, является подвижной. Во-вторых, вместе со свободной поверхностью может перемещаться сетка внутри расчётной области – вся или только её часть. Как частный случай, можно рассмотреть неподвижную внутреннюю сетку. В любом случае ниже будет описан алгоритм учёта движения свободной поверхности, а для нижележащих граней будем предполагать, что их координаты и скорости перемещения по вертикали \dot{z} являются заданными функциями от координат и скоростей перемещения свободной границы.

Рассмотрим граничное условие для свободной поверхности (2.5)

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial H}{\partial x} - w \right) \Big|_H = 0$$

как неоднородное уравнение переноса величины H . Это уравнение также может быть решено с помощью схемы КАБАРЕ. Алгоритм решения этого уравнения состоит из 3 фаз. Предположим, что на слое времени t_n для величины H из-

вестны как консервативные, так и потоковые переменные. В разностном случае они совпадают с координатами нулевого слоя сетки $\{z_{i+1/2,0}^n\}$ и $\{z_{i,0}^n\}$ соответственно. В терминах координат граничное условие записывается следующим образом:

$$\frac{\partial z_0}{\partial t} + u_0 \cdot \frac{\partial z_0}{\partial x} - w_0 = 0 \quad (2.33)$$

Балансные дифференциально-разностные уравнения первой и третьей фаз для уравнения (2.33) будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial z_0}{\partial t} + u_{i+1/2,0} \frac{(z_{i+1,0} - z_{i,0})}{\Delta x} - w_{i+1/2,0} = 0. \quad (2.34)$$

Инвариантом является сама переменная z . Поэтому, согласно методике КАБАРЕ, алгоритм вычисления уровня поверхности следующий. Первая фаза будет иметь следующий вид:

$$(\dot{z})_{i+1/2,0}^n = \frac{z_{i+1/2,0}^{n+1/2} - z_{i+1/2,0}^n}{\tau/2} = w_{i+1/2,0}^n - u_{i+1/2,0}^n \frac{(z_{i+1,0}^n - z_{i,0}^n)}{\Delta x} \quad (2.35)$$

На второй фазе найдём новые положения $z_{i,0}^{n+1}, i = 0..N_x$ с помощью экстраполяции:

$$z_{i,0}^{n+1} = \begin{cases} 2z_{i+1/2,0}^{n+1/2} - z_{i+1,0}^n & \text{if } u_{i,0}^{n+1/2} < 0 \\ 2z_{i-1/2,0}^{n+1/2} - z_{i-1,0}^n & \text{if } u_{i,0}^{n+1/2} > 0 \\ 0.5 \left(z_{i+1/2,0}^{n+1/2} + z_{i-1/2,0}^{n+1/2} \right) & \text{if } u_{i,0}^{n+1/2} = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

где $u_{i,0}^{n+1/2} = 0.5 \left(u_{i+1/2,0}^{n+1/2} + u_{i-1/2,0}^{n+1/2} \right)$. Уравнение (2.35) будем использовать для вычисления скорости перемещения свободной поверхности и её положения на полуцелом слое по времени $z_{i+1/2,0}^{n+1/2} = z_{i+1/2,0}^n + \frac{\tau}{2} \dot{z}_{i+1/2,0}^n$. Третья фаза учтена в системе уравнений (2.31).

$$z_{i+1/2,k} = \text{const}_k, k = 1..N_z$$

Перемещение внутренних горизонтальных граней зависит от выбранного типа сетки. Для эйлеровой сетки внутренние высоты граней неподвижны и изменяется только положение свободной поверхности. Для так называемой сигма-сетки пропорции высот ячеек остаются постоянными во времени, а положения

граней зависят от положения свободной поверхности:

$$z_{*,k}^n - z_{*,N_z}^n = \alpha_k (z_{*,0}^n - z_{*,N_z}^n), k = 0..N_z \quad (2.37)$$

где $0 = \alpha_{N_z} < \alpha_{N_z-1} < \dots < \alpha_1 < \alpha_0 = 1$. Возможно применение и других моделей движения сетки.

Скорости перемещения в каждом случае определяются через величину сдвига грани:

$$\dot{z}_{i+1/2,k}^{n+1} = \frac{z_{i+1/2,k}^{n+1} - z_{i+1/2,k}^n}{\tau_n}, \quad i = 1..N_x - 1, \quad k = 1..N_z - 1 \quad (2.38)$$

2.7 Алгоритм решения разностной системы уравнений

В данном разделе будет кратко описан общий алгоритм вычислений по схеме КАБАРЕ, отдельные фрагменты которого были описаны выше.

Будем считать, что в начальный момент времени $t = t_0$ заданы значения консервативных и потоковых переменных на всей сетке. Дополнительно, в начальный момент времени необходимо вычислить скорость перемещения свободной границы и вертикальную компоненту скорости на границе:

$$\begin{aligned} (\dot{z})_{i+1/2,0}^0 &= w_{i+1/2,0}^0 - u_{i+1/2,0}^0 \frac{(z_{i+1,0}^0 - z_{i,0}^0)}{\Delta x} \\ w_{i+1/2,N_z}^0 &= u_{i+1/2,N_z}^0 \frac{(z_{i+1,N_z}^0 - z_{i,N_z}^0)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Также, необходимо вычислить положения и скорости перемещения внутренних горизонтальных граней сетки. Так как модель перемещения внутренних граней сетки предусматривает, что положение внутренних граней есть функция от положения свободной границы и z-индекса грани

$$z_{i+1/2,j}^* = \Phi(j, z_{i+1/2,0}^*), \quad i \in \{0, N_x\}, \quad j \in \{1, N_z - 1\},$$

то начальную скорость перемещения можно определить следующим образом:

$$\dot{z}_{i+1/2,j}^* = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(j, z_{i+1/2,0}^*) \dot{z}_{i+1/2,0}^*, \quad i \in \{0, N_x\}, \quad j \in \{1, N_z - 1\}. \quad (2.40)$$

Далее, начиная с $n = 0$, производится расчёт необходимого числа шагов по времени, на каждом из которых вычисляются консервативные и потоковые переменные на момент времени t_{n+1} . Для этого проводятся следующие вычисления.

- (1) Находим положение сетки на полуцелом шаге по времени:

$$z_{i+1/2,k}^{n+1/2} = z_{i+1/2,k}^n + \frac{\tau}{2} \dot{z}_{i+1/2,k}^n \quad (2.41)$$

- (2) Выполняем фазу 1 схемы согласно уравнениям (2.26) - (2.29), находим консервативные величины $\{\theta, u, w, \rho\}^{n+1/2}$ на полуцелом шаге по времени.
- (3) Выполняем фазу 2 схемы для направления OX согласно уравнениям (2.30), вычисляем потоковые величины на вертикальных гранях $\{\delta\theta, u, w, \delta\rho\}^{n+1}$ и, согласно формулам (2.12), находим величины $\{\theta, \rho\}^{n+1}$.
- (4) Выполняем фазу 2 схемы для направления OZ вычисляем инварианты на новом временном слое на горизонтальных гранях $(I_p^z)_{i+1/2,k}^{n+1}, p = 1 \dots 4$. Из третьего и четвёртого инвариантов находим потоковые величины $\{u, \delta\rho\}^{n+1}$ на горизонтальных гранях. Находим координаты z узлов сетки на новом временном слое согласно уравнениям (2.36). Возвращаясь к системе инвариантов (2.31) - (2.32), находим потоковые величины $\delta\theta^{n+1}, w^{n+1}$ и положение свободной поверхности $z_{*,0}^{n+1}$.
- (5) Выполняем фазу 3 схемы, находим консервативные величины $\{\theta, u, w, \rho\}^{n+1}$ на новом шаге по времени.

Величина шага по времени должна быть выбрана из условия Куранта:

$$\tau^n = CFL \cdot \min_{i,k,p} \left(\min \left(\frac{\Delta x}{|(\lambda_p^x)_{i+1/2,k+1/2}^n|}, \frac{z_{i+1/2,k}^n - z_{i+1/2,k+1}^n}{|(\lambda_p^z)_{i+1/2,k+1/2}^n|} \right) \right), \quad CFL < 1 \quad (2.42)$$

Далее для обозначения этого алгоритма будем применять название «схема CABARET-NH».

2.8 Свойство сбалансированности схемы (well-balance)

Рассмотрим в области над неровным дном и горизонтальной свободной поверхностью $x \in [0, L]$, $z \in [B(x), H(x)]$, $H(x) = H_0 = \text{const}$ покоящуюся жидкость с постоянной плотностью

$$\begin{cases} u(x, z) = 0 \\ w(x, z) = 0 \\ \rho(x, z) = \rho_0 = \text{const} \end{cases} \quad (2.43)$$

Легко видеть, что исходная система уравнений (2.7) с начальными условиями (2.43) имеет стационарное решение, сохраняющее во времени условия (2.43). Будем говорить, что разностная схема, этапы которой описаны в разделе 2.7, является сбалансированной (well-balanced), если она обладает таким же свойством. Проверку этого утверждения будем проводить, последовательно рассматривая выполнение каждого шага схемы, с тем чтобы проверить отсутствие скоростей и возмущения плотности по мере вычисления консервативных и потоковых параметров на последующих слоях времени.

Пусть в начальный момент времени в расчётной области $x \in [0, L]$, $z \in [B(x), H(x)]$, $H(x) = \text{const}$ задана сетка, в которой все высоты ячеек в каждом ряду, за исключением нижнего, остаются постоянными (см. Рис. 2.2).

$$z_{i,0}^0 = H_0 = \text{const}, \quad i \in \{0, N_x\}$$

$$z_{i,j}^0 = Z^j, \quad i \in \{1, N_x\}, j \in \{1, N_z - 1\}$$

$$z_{i,N_z}^0 = B(x_i), \quad i \in \{1, N_x\}$$

Сеточные переменные на начальном слое по времени определим следующим образом:

$$\begin{cases} u_{i,j}^0 = 0, & \forall i, \forall j \\ w_{i,j}^0 = 0, & \forall i, \forall j \\ \rho_{i,j}^0 = \rho_0 = \text{const} \\ \theta_{i,j}^0 = 1 \end{cases} \quad (2.44)$$

Начальные данные (2.44), в соответствии с (2.39), дополним следующими:

$$\begin{aligned} (\dot{z})_{i+1/2,0}^0 &= w_{i+1/2,0}^0 - u_{i+1/2,0}^0 \frac{(z_{i+1,0}^0 - z_{i,0}^0)}{\Delta x} = 0 \\ w_{i+1/2,N_z}^0 &= u_{i+1/2,N_z}^0 \frac{(z_{i+1,N_z}^0 - z_{i,N_z}^0)}{\Delta x} = 0 \end{aligned} ,$$

что означает, что свободная граница остаётся неподвижной. Далее, в соответствии с (2.40)

$$\dot{z}_{i+1/2,j}^0 = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(j, z_{i+1/2,0}^0) \dot{z}_{i+1/2,0}^0 = 0, \quad i \in \{0, N_x\}, j \in \{1, N_z - 1\}, \quad (2.45)$$

что означает, что и внутренние грани остаются неподвижными.

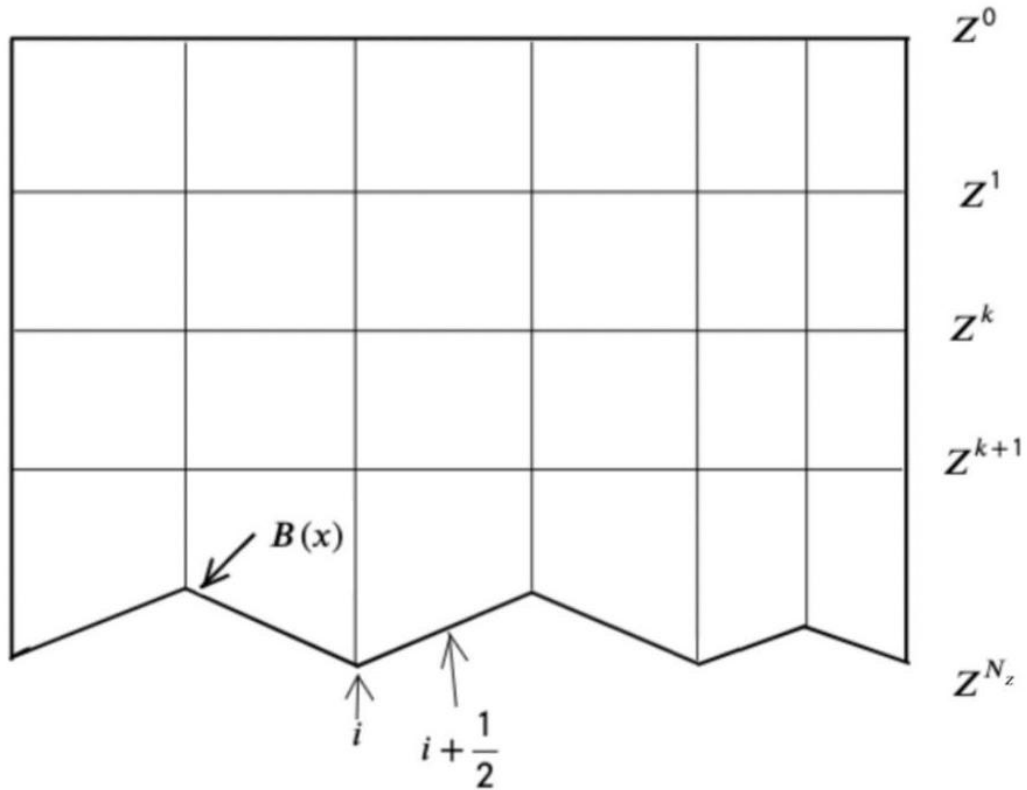


Рисунок 2.2 — Начальное положение узлов расчетной сетки

Рассмотрим последовательно все этапы, описанные в разделе 2.7.

Этап 1. В соответствии с (2.41) определяем положение сетки на полцелом шаге по времени, учитывая (2.45):

$$z_{i+1/2,k}^{n+1/2} = z_{i+1/2,k}^n + \frac{\tau}{2} \dot{z}_{i+1/2,k}^n = z_{i+1/2,k}^n.$$

Этап 2. На втором этапе выполняется балансная фаза-1. Подставим начальные данные в систему (2.26) - (2.29). Нетрудно видеть, что все аналоги производных по пространству равны нулю. Таким образом, все консервативные переменные на полуцелом слое будут равны соответствующим переменным на предыдущем целом слое времени:

$$(\theta)_{i+1/2,k+1/2}^{1/2} = (\theta)_{i+1/2,k+1/2}^0 = 1, u_{i+1/2,k+1/2}^{1/2} = u_{i+1/2,k+1/2}^0 = 0$$

$$w_{i+1/2,k+1/2}^{1/2} = w_{i+1/2,k+1/2}^0 = 0, \rho_{i+1/2,k+1/2}^{1/2} = \rho_{i+1/2,k+1/2}^0$$

Этап 3. Третий этап алгоритма, описанного в разделе 2.7, посвящён выполнению характеристической фазы схемы по направлению OX согласно уравнениям (2.30). Напомним, что на фазе 2 на основе известных физических переменных производится вычисление локальных инвариантов Римана. На гранях инварианты определяются на слое времени t_n , а в ячейках – на слое времени $t_{n+1/2}$. Затем производится линейная экстраполяция – одновременно через ячейку на противоположную грань и по времени на следующий слой времени. Так как выше отмечалось, что значения в ячейке в первой половине шага не изменились, что и результат экстраполяции не изменит инварианты на гранях и, следовательно, значения потоковых переменных.

Этап 4. Этот этап посвящён выполнению характеристической фазы схемы по направлению OZ согласно уравнениям. В полной аналогии со сказанным выше относительно шага 3, потоковые значения на горизонтальных гранях не изменятся. Отдельного рассмотрения требуют горизонтальные грани, составляющие свободную границу. Переменные на них вычисляются по особому алгоритму, состоящему из двух фаз (2.35) и (2.36), а также решения систем уравнений (2.31) и (2.32). Заметим, что из-за нулевых начальных скоростей из (2.35) следует $z_{i+1/2,0}^{1/2} = z_{i+1/2,0}^n = 0$, $i \in \{0, N_x - 1\}$, и процедура экстраполяции (2.36) не изменит значения в узлах из-за этой неизменности. Таким образом, будут выполнены соотношения

$$z_{i,0}^1 = z_{i,0}^0, \quad i \in \{0, N_x\}.$$

Для завершения вычисления параметров на свободной границе осталось решить систему уравнений (2.31). Подставим в эту систему доказанные выше соотношения:

$$\begin{aligned}
z_{i,0}^1 &= z_{i,0}^0 = H_0, \quad i \in \{0, N_x\} \\
w_{i+1/2,0}^1 &= w_{i+1/2,0}^0 = 0, \quad i \in \{0, N_x - 1\} \\
(I_1^z)_{i+1/2,0}^1 &= (I_1^z)_{i+1/2,0}^0 = w_{i+1/2,0}^0 + \left(\frac{c_0}{\sqrt{\rho_0 \theta}} \right)_{i+1/2,1/2}^{1/2} \delta\theta_{i+1/2,0}^0 = 0, \quad i \in \{0, N_x\} \\
(I_3^z)_{i+1/2,0}^1 &= (I_3^z)_{i+1/2,0}^0 = u_{i+1/2,0}^0 = 0, \quad i \in \{0, N_x - 1\} \\
(I_4^z)_{i+1/2,0}^1 &= (I_4^z)_{i+1/2,0}^0 = \delta\rho_{i+1/2,0}^0, \quad i \in \{0, N_x - 1\}
\end{aligned}$$

Получим:

$$\left\{ \begin{array}{l}
0 = 0 + \left(\frac{c_0}{\sqrt{\rho_0 \theta}} \right)_{i+1/2,1/2}^{n+1/2} \delta\theta_{i+1/2,0}^1 \\
c^2 \delta\theta_{i+1/2,0}^1 = -\rho_0 g \left(H_0 - z_{i+1/2,0}^1 \right) \\
\frac{z_{i+1/2,0}^1 - H_0}{\tau/2} + u_{i+1/2,0}^1 \cdot \frac{(z_{i+1,0}^1 - z_{i,0}^1)}{\Delta x} = w_{i+1/2,0}^1 \\
0 = u_{i+1/2,0}^1 \\
\delta\rho_{i+1/2,0}^0 = \delta\rho_{i+1/2,0}^1
\end{array} \right. \quad (2.46)$$

Из первого уравнения получим

$$\delta\theta_{i+1/2,0}^1 = 0, \quad i \in \{0, N_x - 1\}. \quad (2.47)$$

Подставляя (2.47) во второе уравнение получим

$$z_{i+1/2,0}^1 = H_0, \quad i \in \{0, N_x - 1\} \quad (2.48)$$

Затем, из (2.48) и третьего уравнения (2.46) получим

$$w_{i+1/2,0}^1 = 0, \quad i \in \{0, N_x - 1\}$$

Таким образом, доказано, что все потоковые переменные на свободной границе остаются неизменными.

Аналогичные выкладки приводят к тому, что и потоковые переменные, относящиеся к донным граням, также остаются неизменными.

Этап 5. Завершающий этап алгоритма схемы КАБАРЕ посвящён вычислению консервативных переменных в ячейках (фаза 3) по балансным соотношениям, которые полностью аналогичны соотношениям фазы 1. Отличие в них состоит в том, что в фазе 1 потоковые переменные берутся со слоя времени t_0 , а в третьей фазе – со слоя t_1 . Однако так как выше было показано, что все потоковые переменные на слое t_1 совпадают с соответствующими переменными со слоя t_0 , то и для консервативных переменных остаётся справедлив вывод, сделанный для фазы 1, — консервативные переменные на слое времени t_1 останутся равными соответствующим консервативным переменным на предыдущем слое.

Вывод. Таким образом, показано, что при сделанных предположениях относительно начальной сетки и значений переменных на ней, первый шаг алгоритма от t_0 до t_1 не изменит значения этих переменных. Очевидно, что это справедливо и для последующих шагов по времени. Свойство сбалансированности (well-balance) для схемы CABARET-NH доказано.

2.9 Задача о малых колебаниях свободной поверхности

Для тестирования точности определения положения свободной поверхности в динамических задачах была выбрана задача о колебаниях малой амплитуды в прямоугольном бассейне. Параметры задачи и начальные условия определены следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} H(x,0) = 0.1 \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad x \in [0,L], \quad L = 10 \\ B(x) = -10 \\ \rho(x,z,0) = \rho_0 = 1.0 \\ \theta(x,z,0) = \theta_0 = 1.0 \\ u(x,z,0) = 0, \quad w(x,z,0) = 0 \end{array} \right. \quad (2.49)$$

где $H(x,0)$ - начальное положение поверхности, L - размер бассейна, $B(x)$ - уровень дна.

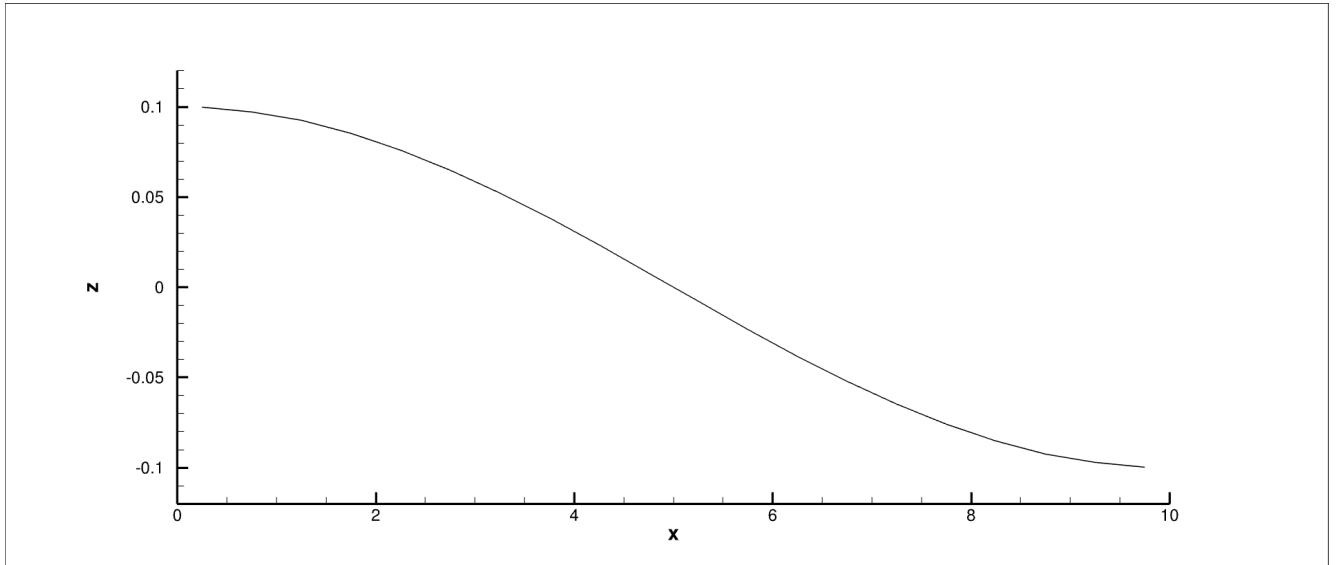


Рисунок 2.3 — Начальное положение поверхности

Для задачи о малых колебаниях поверхности (2.4), (2.49) существует аналитическое решение линеаризованной системы уравнений [4]:

$$H(x,t) = 0.1 \cos \left(\sqrt{\frac{g\pi}{L} \tanh \left(h \frac{\pi}{L} \right)} \cdot t \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi x}{L} \right), \quad x \in [0,L], \quad (2.50)$$

где $h = 10$ - средняя глубина жидкости. Ниже приведены результаты расчётов колебания свободной поверхности, проведённые по описанной выше разностной схеме CABARET-NH и их сравнение с аналитическим решением (2.50). Расчёты проводились для различных значений искусственной скорости звука (1.22):

$$c = \begin{cases} \sqrt{gh} \\ 5\sqrt{gh} \\ 10\sqrt{gh} \end{cases} \quad (2.51)$$

Остальные параметры выбраны следующим образом: $g = 1$, $CFL = 0.3$. Расчётная сетка содержит по 20 ячеек по обеим осям. Сетка является σ -сеткой. Она является равномерной и стационарной по направлению x и равномерно распределённой в каждый момент по z от вычисляемого положения свободной границы до неподвижного дна. Период колебания свободной поверхности согласно аналитическому решению (2.50) составляет:

$$T_a = 2\pi / \sqrt{\frac{g\pi}{L} \tanh\left(h\frac{\pi}{L}\right)} \approx 11.24$$

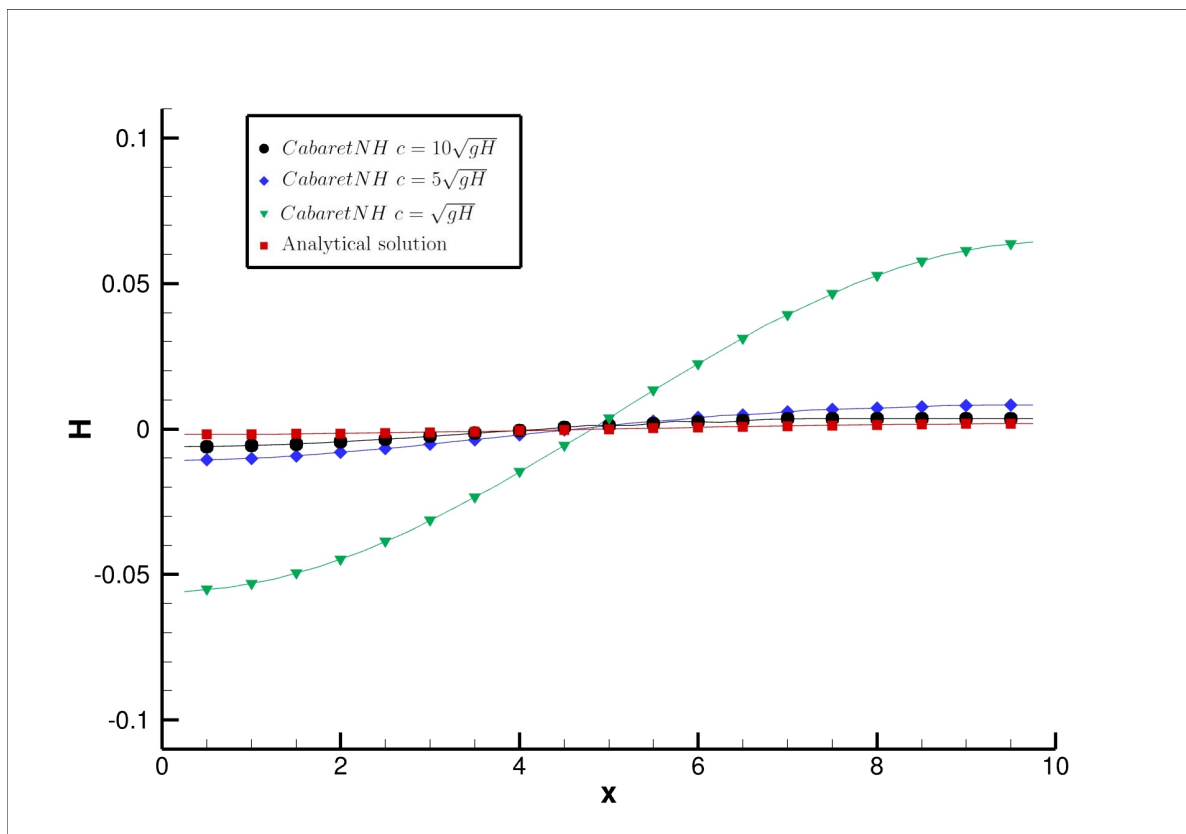
На Рис. 2.4 приведены уровни свободной поверхности для всех трёх расчётов и аналитического решения. Рис. 2.4б соответствует моменту времени $t = 3T_a$, то есть трёх периодов колебания поверхности. В этот момент времени только решение для $c = \sqrt{gh}$ отстаёт от аналитического. Решения для бóльших значений искусственной скорости звука визуально совпадают с аналитическим.

Рис. 2.4а иллюстрирует промежуточный момент времени, соответствующий моменту времени $t = 2.75T_a$. В этот момент времени аналитическая поверхность горизонтальна, а все численные решения отстают от неё в своём движении. Это отставание убывает с ростом параметра c . В целом каждый полупериод колебаний характеризуется меньшей скоростью движения поверхности численного решения по отношению к аналитическому решению в первой половине полупериода и большей скоростью во второй. При этом, в двух расчётах эта большая скорость компенсирует отставание в первой половине и численные решения на конец полупериода хорошо совпадают с аналитическим. Такое поведение численного решения характеризует особенность модели со слабосжимаемой жидкостью, при котором реакция жидкости на внешние воздействия слегка запаздывает. Это запаздывание уменьшается с ростом искусственной скорости звука.

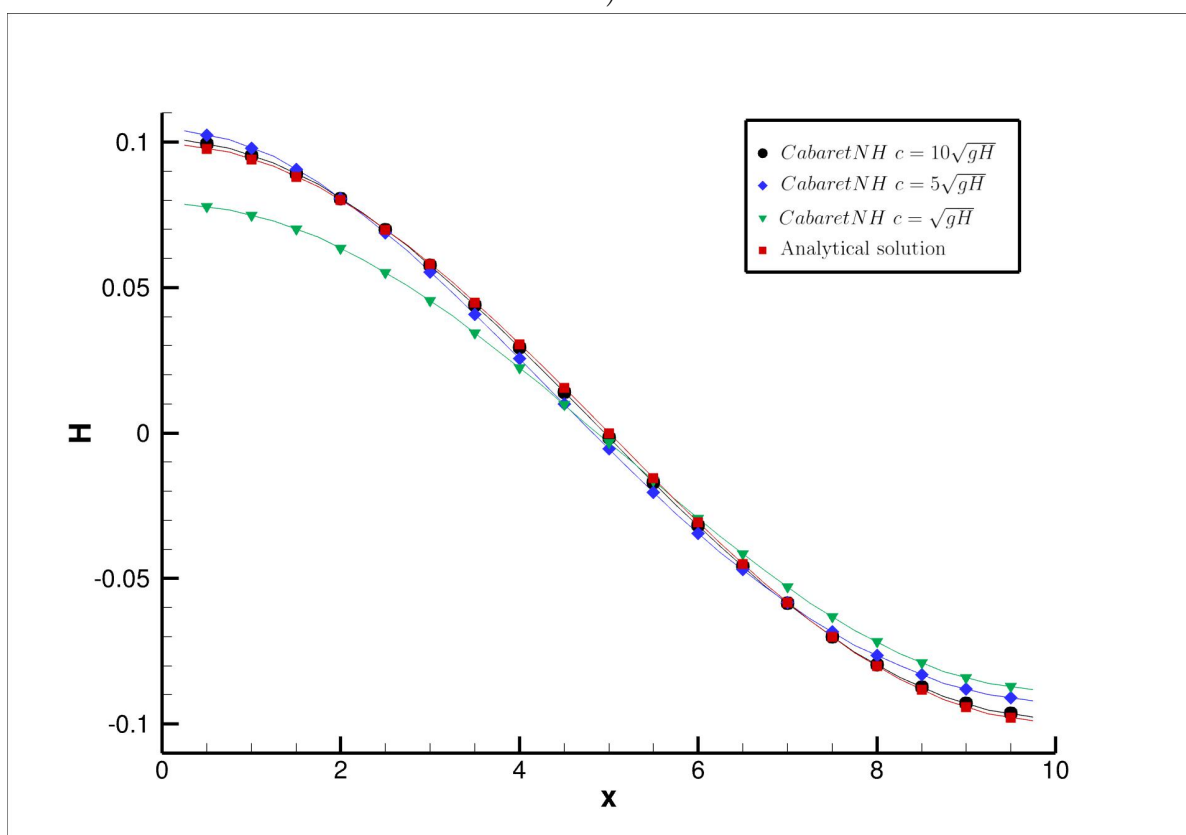
Динамика отклонения численного решения от аналитического для всех трёх вариантов приведена на Рис. 2.5. Рис. 2.5а иллюстрирует отклонение в норме C_0 , на Рис. 2.5б приведено отклонение крайней правой грани на свободной поверхности от аналитического решения.

Периоды колебаний численных решений (периоды определены по временам максимального поднятия крайней левой грани) и их погрешность в зависимости от искусственной скорости звука приведены в Таб. 1. Во всех расчетах выполнялся критерий применимости приближения слабой сжимаемости (1.25), в последнем столбце Таб. 1 представлены данные о максимальном отклонении лагранжевого объема по всем ячейкам за все время расчета.

Здесь T_h - период колебания свободной поверхности численного решения, $\delta = 100\% \frac{|T_h - T_a|}{T_a}$ - относительная погрешность, $T_a = 2\pi / \sqrt{\frac{g\pi}{L} \tanh\left(H\frac{\pi}{L}\right)} \approx 11.24$ - значение периода колебания аналитического решения.

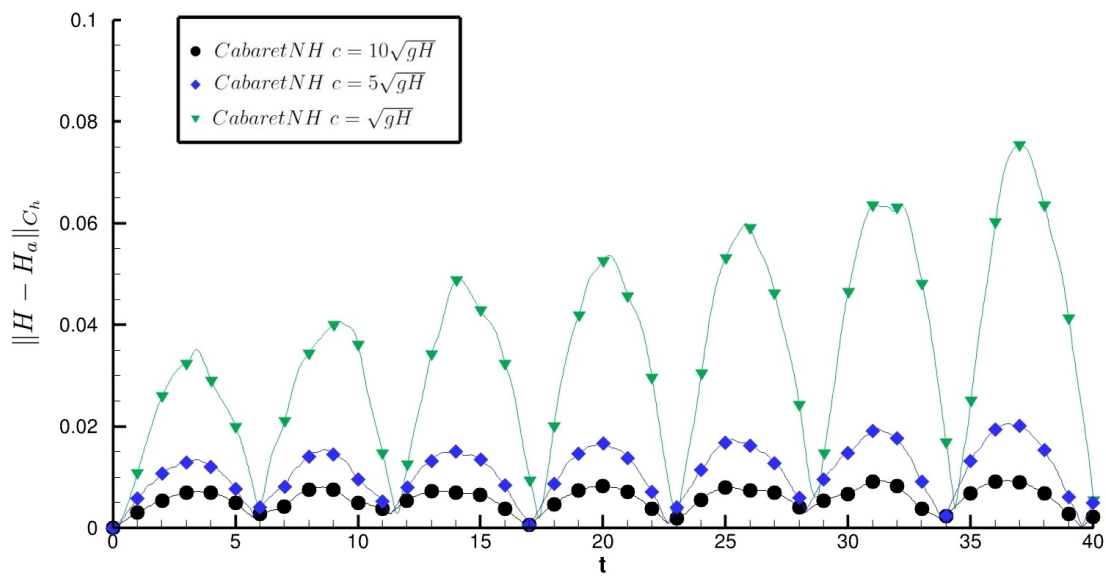


a)

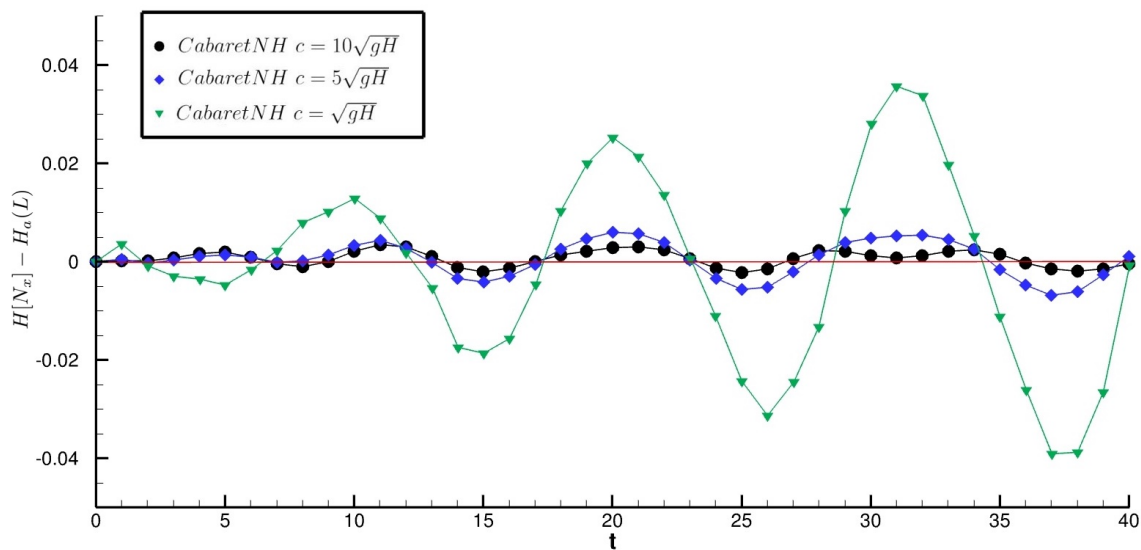


б)

Рисунок 2.4 — Положение свободной поверхности а) $t = 2.75T_a$ б) $t = 3T_a$



a)



б)

Рисунок 2.5 — Отклонение численного решения от аналитического а) $t = 2.75T_a$ б) $t = 3T_a$

Таблица 1 — Периоды колебаний и погрешность численных решений

c	T_h	δ	$\max \delta\theta /\theta_0$
$\sqrt{g(H_0 - B)}$	11.6	3.2%	$2.3 \cdot 10^{-3}$
$5\sqrt{g(H_0 - B)}$	11.3	0.5%	$3.1 \cdot 10^{-4}$
$10\sqrt{g(H_0 - B)}$	11.25	0.1%	$1.1 \cdot 10^{-4}$

$$\delta = 100\% \frac{|T_h - T_a|}{T_a}$$

Приведённые результаты расчётов показывают хорошее соответствие численного решения по модели CABARET-NH и аналитического решения (2.50) при различных значениях искусственной скорости звука. С увеличением искусственной скорости звука качество решения растёт.

2.10 Валидация модели на лабораторных экспериментах

В природе наблюдаются многие виды гравитационных течений, возникающих из-за разницы плотностей различных жидкостей. Океаны и атмосфера часто характеризуются областями с резкими градиентами плотности в вертикальном направлении (термоклин). Разница в плотности обычно возникает из-за колебаний температуры, солёности. В таких областях океанические течения промежуточной плотности распространяются в неоднородной окружающей среде. Исследование гравитационных течений в природе затруднено из-за их сложной и слабо прогнозируемой особенности возникновения. С другой стороны, масштабные лабораторные эксперименты широко используются для выяснения динамики гравитационных течений. Экспериментальные исследования динамики плотностных течений в основном включает в себя лабораторный анализ. Важным достижением в области плотностных течений по праву считается эксперимент «отпирание перегородки» Martin и др. [59]. На протяжении всего времени исследований гравитационных потоков экспериментальная установка, описанная в этом эксперименте, широко использовалась и в стандартном виде [60–62] и с некоторыми изменениями [63–65].

Валидация построенного численного алгоритма CABARET-NH проводилась на лабораторных экспериментах по изучению динамики стратифицированных гравитационных течений. В работе [66] описан набор двух- и трехслойных гравитационных течений, стратифицированных по плотности, а также представлены фотографии в разные моменты времени. В экспериментах глубина и плотность каждого слоя варьируются с помощью солевых растворов различной концентрации, и измеряется положение носа тока с визуализацией потока с помощью красителей, позволяющих оценить взаимодействие между слоями.

Лабораторная установка (Рис. 2.6) представляет собой покрытый акрилом бак длиной 3 м, шириной 0.15 м. Резервуар разделен перегородкой на расстоянии 0.1 м от одной из граней перпендикулярно длинной направляющей. В меньшей из частей бака формировали слои жидкости различной плотности с помощью добавления NaCl, предварительно окрашивая растворы в разными цветами для возможности отслеживания процессов перемешивания.

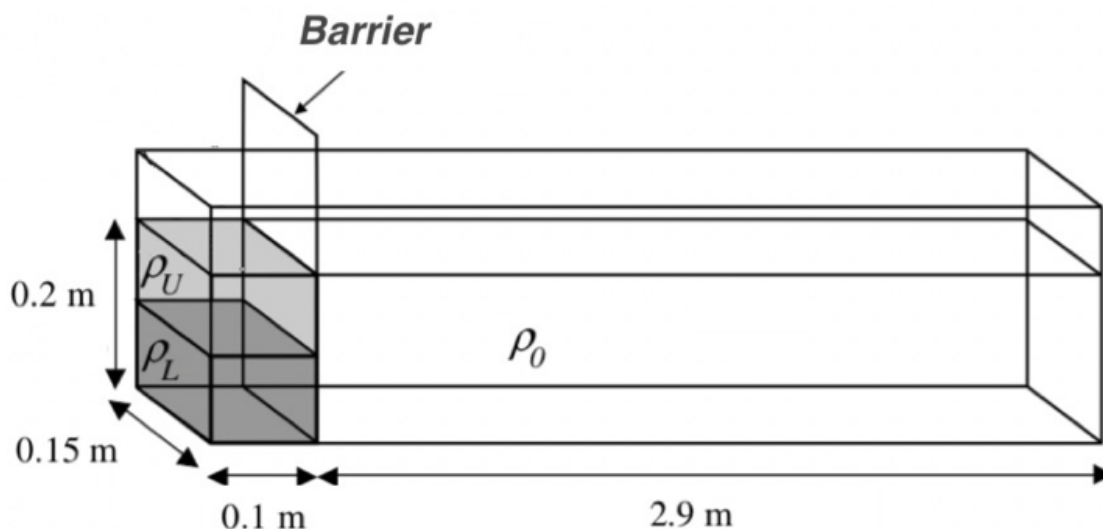


Рисунок 2.6 — Лабораторная установка

Все эксперименты были разделены на 4 группы, по типу изучаемых особенностей динамики жидкости. Качественная схема экспериментов приведена на Рис. 2.7. Далее будут описаны постановки испытаний и исследуемые в каждой группе экспериментов процессы, названия экспериментов соответствуют статье [66]. Во всех экспериментах, после извлечения перегородки, более плотная жидкость в отделенной части бака формирует придонный слой, распространяющийся к противоположной стороне резервуара.

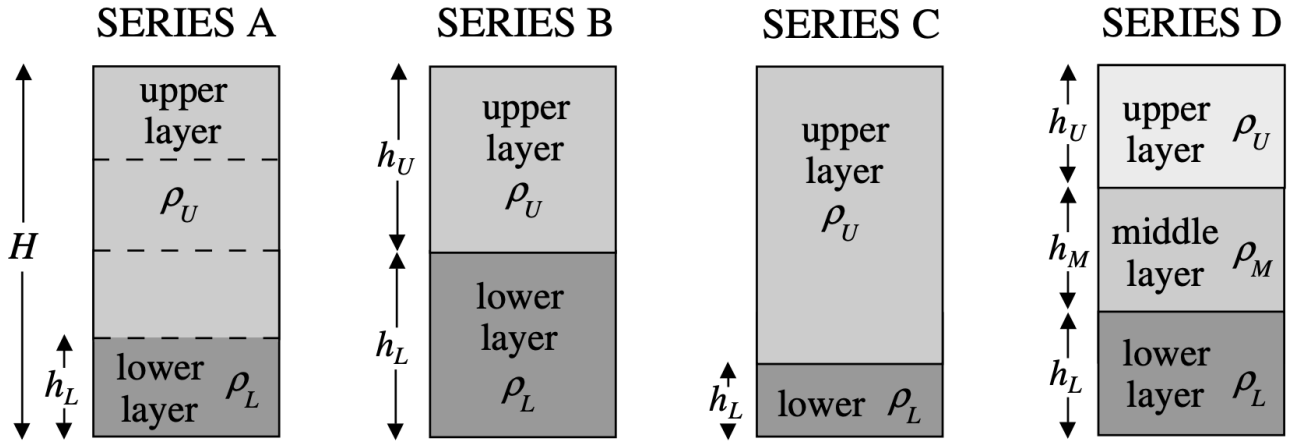


Рисунок 2.7 — Схема экспериментов

Аналитическая оценка положения фронта придонного слоя. В работах [67], [68] была получена аналитическая зависимость положения фронта придонного от времени для упрощенной задачи распространения более плотной однородной жидкости в вертикальной плоскости:

$$L^{*3/2} = 1 + t^* \quad (2.52)$$

где $L^* = L/L_0$ - безразмерная длина придонного слоя, L_0 - начальная длина более плотной жидкости; $t^* = 1.5Fr \frac{B_0^{1/2}}{L_0^{3/2}} t$ - безразмерное время, Fr - число Фруда $B_0 = A_0 g(\rho_c - \rho_0)/\rho_0$ - плавучесть, $A_0 = L_0 H$ - начальная площадь заполненная более плотной жидкостью (плотность ρ_c), ρ_0 - плотность жидкости во второй части резервуара. Приведенная величина используются далее в качестве оценки положения фронта придонного потока. Однако стоит отметить, что результаты экспериментов и моделирования не совпадают в точности данной зависимостью, т.к. L^* - решение приближенной задачи.

Безразмерные характеристики начальной стратификации в экспериментах. Для классификации моделируемых экспериментов, опишем две безразмерных величины, определяющих отношение параметров слоев жидкости в отделенной части:

$$\rho^* = \frac{\rho_U - \rho_0}{\rho_L - \rho_0} \quad (2.53)$$

$$B^* = \frac{B_U}{B_U + B_L} \quad (2.54)$$

Отношение ρ^* (2.53) количественно характеризует степень начальной стратификации: малое значение ρ^* указывает на сильную стратификацию; при $\rho^* \rightarrow 1$ стратификация ослабевает, а при $\rho^* = 1$ стратификация отсутствует и течение однородно. При $\rho^* = 0$ вся плотность тока содержится в нижнем слое и, таким образом, верхний слой и окружающая жидкость имеют равные плотности.

Величина B^* (2.54) характеризует отношение плавучести слоев жидкости. При $B^* = 0$ вся соль находится в нижнем слое и плотность верхнего слоя $\rho_U = \rho_0$. Значения $0 < B^* < 0.5$ указывают на то, что в нижнем слое содержится больше соли, чем в верхнем. При $B^* = 0.5$ соль распределяется между слоями равномерно, поэтому вклад плавучести каждого слоя в гравитационное течение одинаков. Значения $0.5 < B^* < 1$ указывают на то, что в верхнем слое содержится больше соли. В лабораторных экспериментах значение $B^* > 0.5$ достигалось за счет увеличения относительной высоты верхнего слоя h_U .

Расширение и расчетные параметры модели САВАРЕТ-НН.

Для качественного анализа процессов перемешивания жидкостей и сравнения с экспериментальными данными, система уравнений (2.7) расширяется уравнениями переноса маркеров цвета ϕ_i :

$$\frac{1}{J} \frac{\partial J \phi_i \rho \theta}{\partial t} + \frac{\partial \phi_i \rho \theta u}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i \rho \theta (w - \dot{z})}{\partial z} = 0, i = 1..N_{layer} \quad (2.55)$$

где ϕ_i - безразмерная величина, количество маркеров (цветов) N_{layer} соответствует количеству слоев жидкости в меньшей части резервуара в начале экспериментов. Данная величина не влияет на динамику моделируемых течений и используется только для визуализации перемешивания слоев. Для численного решения добавленных уравнений использовалась схема КАБАРЕ [49].

Во всех расчетах использовалась одинаковая σ -сетка: 300 ячеек по горизонтали и 50 - по вертикали. Искусственная скорость звука выбиралась по формуле $c = \sqrt{\rho_0 g H}$, $g = 9.81$ м/с². На боковых стенках и дне резервуара задавались условия непротекания: тангенсальная к границе компонента скорости равна нулю. Отдельно стоит отметить, что данный выбор искусственной скорости звука для всех моделируемых экспериментов приводил к выполнению критерия применимости приближения слабой сжимаемости (1.25), проверка критерия выполнялась на протяжении всех расчетов. Для сравнения с теоретической оцен-

кой (2.52) число Фруда выбиралось равным 1.3, в соответствии со значением в статье [66].

Серия А. Первая серия экспериментов проводилась для исследования влияния на однослойное течение путем изменения высоты нижнего слоя соленой жидкости высоты h_L (Рис. 2.7), при неизменной по экспериментам средневзвешенной плотности в отгороженной части резервуара $\rho_c = 1013.9 \text{ кг/м}^3$. В данной серии проводилось 4 эксперимента, отличающиеся высотой и плотностью нижнего слоя согласно Таб. 2.

Таблица 2 — Параметры экспериментов серии А

Эксперимент	ρ_C [кг/м ³]	ρ_U [кг/м ³]	ρ_L [кг/м ³]	h_l/H
A1	1013.9	998.9	1061.8	0.25
A2	1013.9	998.9	1029.7	0.5
A3	1013.9	998.9	1018.9	0.75
A4	1013.9	998.9	1013.9	1

Эксперимент А1. В данном эксперименте жидкость большой солёности ($\rho_L = 1061.8 \text{ кг/м}^3$) изначально находится в небольшом слое ($h = 0.25H = 0.05 \text{ м}$) за перегородкой. В лабораторном эксперименте поток соленой жидкости слабо перемешивается с окружающей жидкостью и быстро утончается, распределяясь по дну бака.

Результаты расчета представлены на Рис. 2.8, красными пунктирными линиями отмечено положение фронта потока в эксперименте. Для сравнения результатов моделирования с экспериментом, данные представлены на части бака и с соотношением высот на разные моменты времени, как на фотографиях эксперимента. Качественное сравнение результатов моделирования по схеме САВАРЕТ-НН показывает хорошее соответствие с экспериментом на все моменты времени: форма передней части потока соленой жидкости соответствует наблюдениям в эксперименте. Небольшое отставание фронта потока на момент времени $t = 4\text{с}$ может быть объяснено отсутствием учета механизма поднимания перегородки и точностью оцифровки положения фронта потока в эксперименте. Несмотря на незначительные различия на начальной фазе, модель достоверно отражает экспериментальные результаты, что подтверждает её

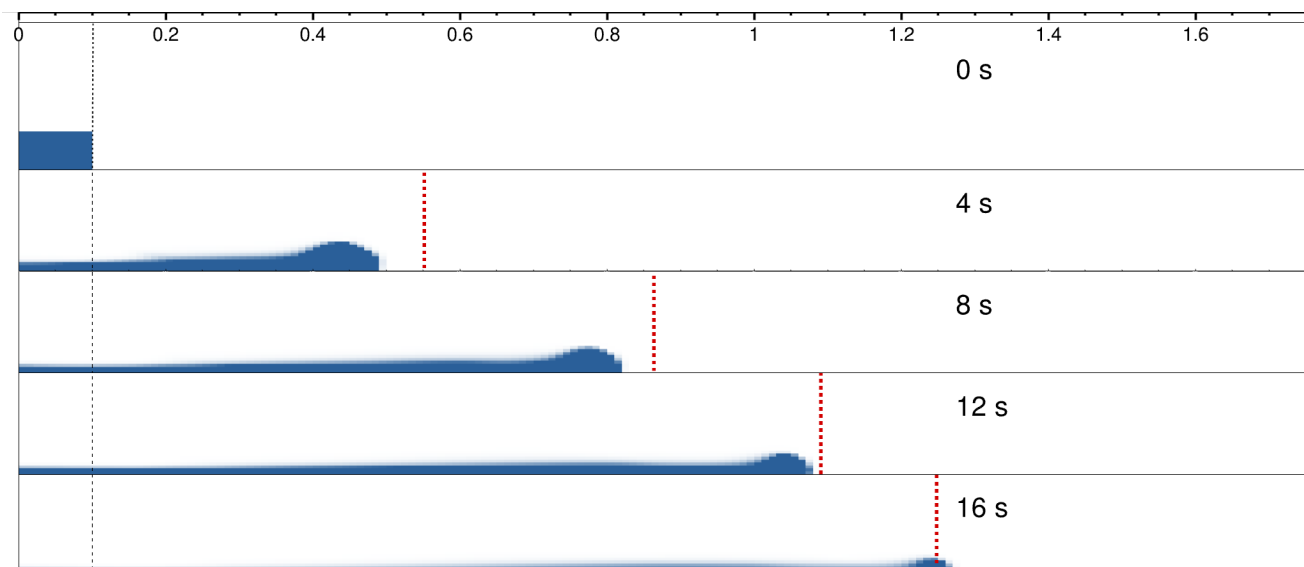


Рисунок 2.8 — Результаты моделирования по модели CABARET-NH и положение фронта в эксперименте A1 на моменты времени 0 с, 4 с, 8 с, 12 с, 16 с. Синим цветом обозначена концентрация маркеров соленой жидкости.

эффективность как средства для прогнозирования и симуляции аналогичных процессов.

Эксперимент A2. В начальный момент в нижней половине отделенной области ($h = 0.5H = 0.1$ м) находится соленая жидкость с плотностью $\rho_L = 1029.7$ кг/м³.

В отличие от эксперимента A1, заметны эффекты перемешивания соленой жидкости с жидкостью в основной части бака - вихревые структуры за передней частью потока. Этот процесс воспроизводится и в результатах моделирования (Рис. 2.9). К моменту времени $t = 16$ с поток становится тоньше и замедляется, относительно теоретической оценки (2.52), что соответствует наблюдениям в эксперименте. Отдельно стоит отметить, хорошее совпадение положения фронта с результатами эксперимента.

Эксперимент A3. В начальный момент нижний слой в отделенной перегородкой области ($h = 0.75H = 0.15$ м) содержит соленую жидкость плотности $\rho_L = 1018.9$ кг/м³. После поднятия перегородки формируется глубокое течение, скорость которого остается практически неизменной на протяжении всего эксперимента (до достижения противоположного конца бака).

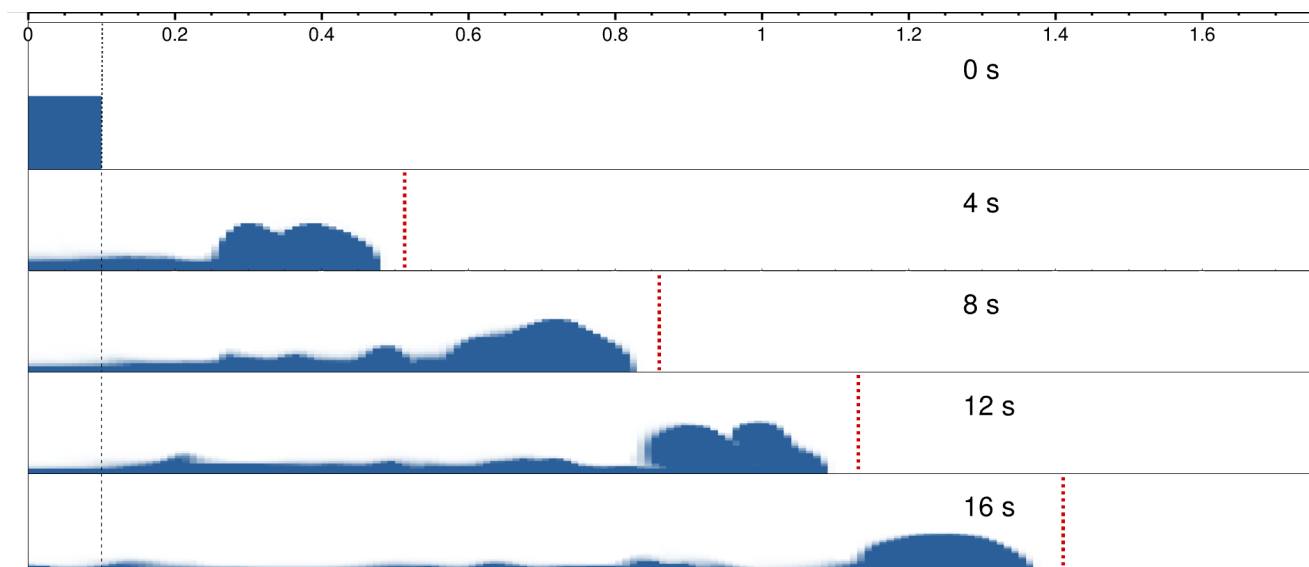


Рисунок 2.9 — Результаты моделирования по модели CABARET-NH и положение фронта в эксперименте A2 на моменты времени 0 с, 4 с, 8 с, 12 с, 16 с. Синим цветом обозначена концентрация маркеров соленой жидкости.

На Рис. 2.10 представлены результаты моделирования. Сравнение положения фронта потока соленой жидкости в численной модели CABARET-NH и эксперименте (красные вертикальные линии на Рис.2.10), показывает хорошую степень согласованности результатов расчета и эксперимента. В расчете, как и в эксперименте, образуются характерные вихревые структуры за фронтом потока. Крупные вихри в начальной фазе эксперимента ($t = 4\text{с}$, 8с) затухают и уменьшаются к моменту времени $t = 16\text{с}$, что соответствует наблюдениям в эксперименте.

Эксперимент A4. В начальный момент в отделенной перегородкой области содержит только соленую жидкость ($h = H = 0.2\text{ м}$) с плотностью $\rho_L = 1013.9\text{ кг/м}^3$. После поднятия перегородки формируется глубокое течение, скорость которого незначительно уменьшается со временем.

На Рис. 2.11 представлены результаты расчетов по модели CABARET-NH. На первых трех временных отсечках ($t = 4\text{с}$, 8с , 12с) положение фронта потока практически совпадает с данными эксперимента. На момент времени $t = 16\text{с}$ положение фронта существенно отличается от эксперимента. Эксперимент A4 наиболее близок к постановке задачи, описанной в работах [67], [68] - распространение более плотной однородной жидкости. Ниже будет приведено сравнение положения фронта в расчетах и аналитического решения (2.52).

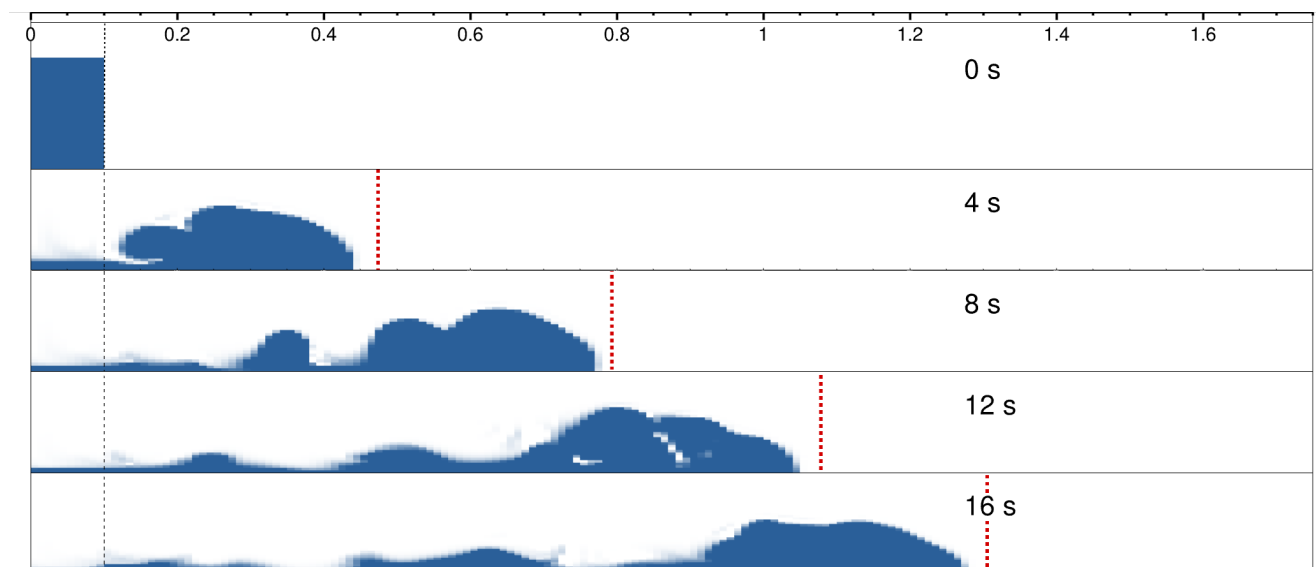


Рисунок 2.10 — Результаты моделирования по модели CABARET-NH и положение фронта в эксперименте А3 на моменты времени 0 с, 4 с, 8 с, 12 с, 16 с. Синим цветом обозначена концентрация маркеров соленой жидкости.

Хорошее соответствие положения фронта в расчете эксперимента А4 теоретической оценке (2.52) дает возможность предположить, что в результатах эксперимента А4 в статье [66] была допущена неточность и вместо фотографии на момент времени $t = 16$ с была добавлена фотография на более поздний момент времени. Качественное сравнение формы потока, так же показывает хорошую согласованность результатов расчета с экспериментом.

Серия А. Сравнение с аналитическим решением. Во всех экспериментах серии А в отделенной перегородкой области средняя плотность была одинаковой и составляла $\rho_C = 1013.9$ кг/м³. Одной из задач экспериментов данной серии была оценка влияния толщины соленой жидкости на динамику течения. Для этого в статье [66] приводят график обезразмеренного положения фронта потока соленой жидкости - $L^{*3/2}$ (см. (2.52)). Положение фронта потока L измеряли каждые 3 секунды после отпирания перегородки, отмечая положение передней части потока во время экспериментов. Процесс измерений продолжался до тех пор, пока потоки сохраняли достаточную интенсивность, чтобы быть различимыми от окружающей жидкости, или пока не возникало отражение от конца резервуара.

Аналогичные графики обезразмеренного положения фронта потока соленой жидкости в расчетах по модели CABARET-NH для каждого эксперимента

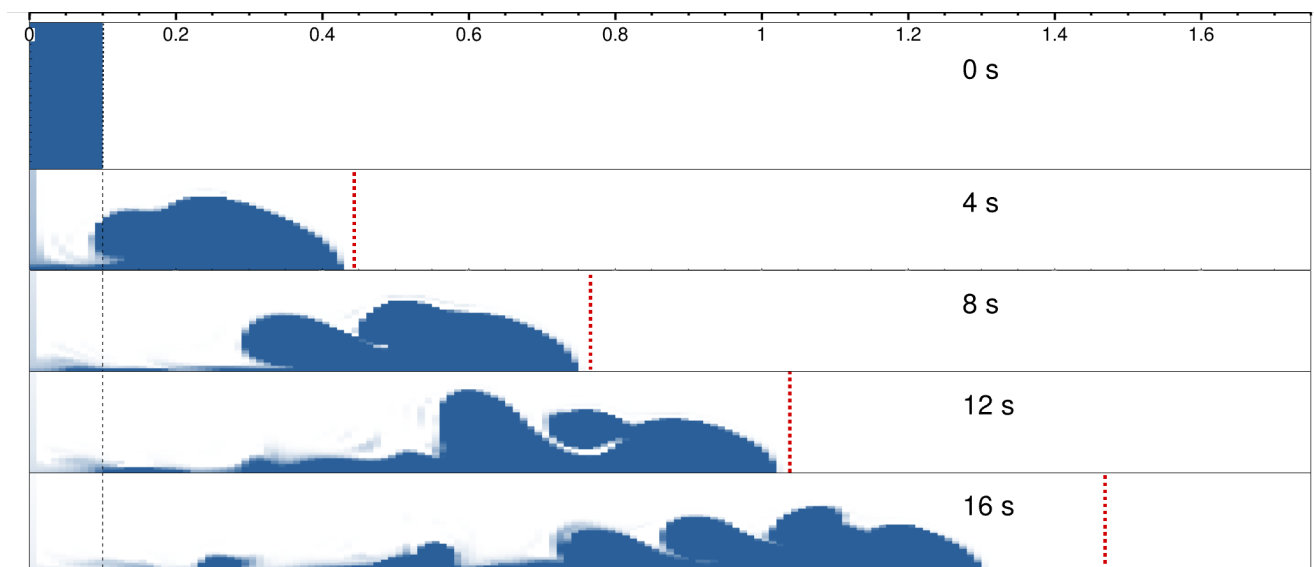


Рисунок 2.11 — Результаты моделирования по модели CABARET-NH и положение фронта в эксперименте А4 на моменты времени 0 с, 4 с, 8 с, 12 с, 16 с. Синим цветом обозначена концентрация маркеров соленой жидкости.

серии А представлены на Рис. 2.12. В расчетную программу был добавлен механизм определения положения фронта потока, данные выдавались каждые 3 секунды внутреннего времени расчета. Положение фронта определялось, как максимальная по оси OX координата центра расчетной ячейки, где концентрация маркера цвета $\phi_i > 10^{-4}$. В начале расчета $\phi_i = 1$ для ячеек с соленой жидкостью.

В начальной стадии экспериментов наблюдается более высокая скорость движения потока в постановках с меньшей высотой и большей плотностью соленой жидкости (см. Таб. 2), что объясняется бóльшим градиентом давления между соленой жидкостью и пресной водой в остальной части резервуара. Данная динамика наблюдается и в расчетах Рис. 2.12: в одинаковые моменты времени до $t^* = 40$ в экспериментах А1 и А2 поток распространяется дальше, чем в экспериментах А3 и А4.

С течением времени наблюдается изменение в динамике экспериментов А1 и А2, проявляющееся в истощении потоков, что, в свою очередь, влияет на их движение с замедляющим эффектом на более продолжительных временных интервалах. На графике расчетов Рис. 2.12 это отражается, как отклонение экспериментов А1, А2 от красной теоретической линии. В экспериментах А3 и А4 потоки сохраняют значительную толщину и менее подвержены взаимодействию с дном резервуара. Начальная просадка положения фронта относительно $L^{*3/2}$

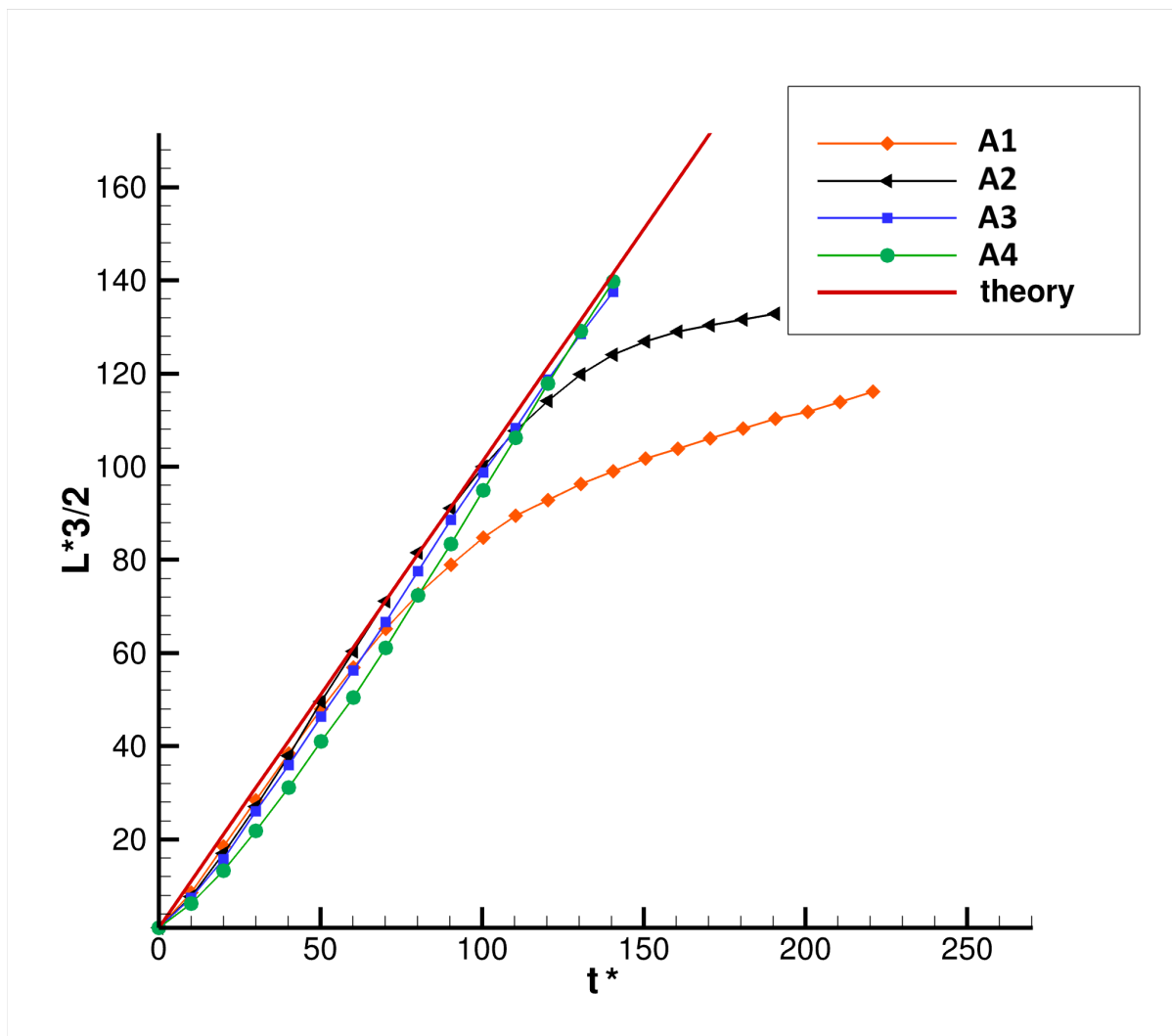


Рисунок 2.12 — Безразмерное положение фронта потока $L^{*3/2}$ в расчетах по модели SABARET-NH для экспериментов A1-A4 и график аналитического решения приближенной задачи

(2.52) может быть объяснена эффектами перемешивания соленой жидкости с пресной водой в резервуаре. Данные эффекты не учитываются в приближенной задаче, на основе которой получена теоретическая оценка.

Результаты, полученные в ходе численного моделирования, демонстрируют хорошее совпадение с наблюдениями в экспериментах серии А, что подтверждает адекватность математической модели и численной схемы в воспроизведении реальных физических процессов. Также отметим, что эти результаты согласуются с теоретической оценкой динамики однородных потоков. Это подчеркивает надежность и применимость разработанной модели для анализа и прогнозирования динамических явлений в рассматриваемой системе.

Серия В. Данная серия экспериментов проводилась для исследования эффектов стратификации в течениях, в которых нижний слой в отгороженной части содержал большую массу соли, чем верхний слой, т.е. при относительной плавучести между слоями $B^* < 0.5$. В представленных экспериментах начальная глубина каждого слоя была одинаковой, $h_L = h_U = 0.5H$ (Рис. 2.7), но перепад плотности между двумя слоями, ρ^* , варьировался.

Для численного моделирования были выбраны два эксперимента В25 и В26, параметры которых представлены в Таб. 3. Данные эксперименты в начальный имеют близкую среднюю плотность в области до перегородки ρ_C и отличаются отношением плотностей слоев.

Таблица 3 — Параметры экспериментов серии В

Эксперимент	ρ_C [кг/м ³]	ρ_U [кг/м ³]	ρ_L [кг/м ³]	h_l/H	ρ^*	B^*
В25	1014	1001.8	1026.1	0.5	0.11	0.1
В26	1013.9	1009.6	1018.2	0.5	0.55	0.36

Для визуализации потоков жидкости в систему уравнений были включены два уравнения переноса маркеров (2.55). В начальный момент $\phi_1 = 1$ для всех ячеек ассоциированных с верхним слоем и при визуализации данному маркеру соответствует желтый цвет. Аналогично, для нижнего слоя $\phi_2 = 1$ и маркер обозначается синим цветом при отображении.

Эксперимент В25. В начальный момент в отделенной перегородкой области находятся два слоя, плотность верхнего слоя $\rho_U = 1001.8$ кг/м³ и нижнего - $\rho_L = 1026.1$ кг/м³.

Результаты расчета представлены на Рис. 2.13, как и в графиках серии А вертикальными красными линиями обозначено положение фронта потока в лабораторном эксперименте. Модель предоставляет достаточно точное воспроизведение основных особенностей движения в условиях существенного различия в плотностях слоев жидкости. В таких условиях нижний слой с ярко выраженным движением преобладает, при этом происходит лишь минимальное перемешивание между слоями. Однако стоит отметить, что качественная согласованность не всегда сопровождается полным соответствием количественных результатов моделирования и эксперимента.

При анализе расхождений следует учитывать, что вероятной причиной различий между расчетами и экспериментом может быть механизм открытия

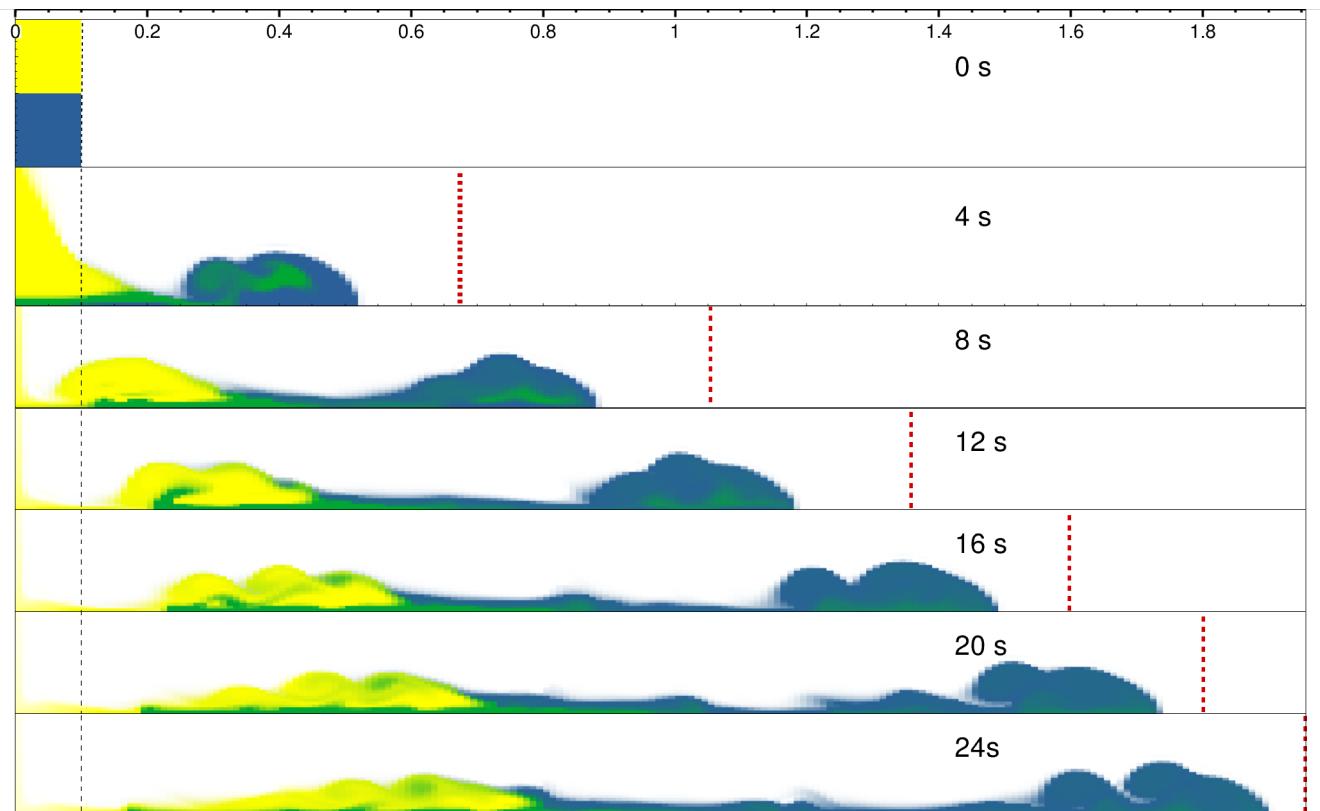


Рисунок 2.13 — Результаты моделирования по модели CABARET-NH и положение фронта в эксперименте B25 на моменты времени 0с, 4с, 8с, 12с, 16с, 20с, 24с. Синим и желтым цветами обозначена концентрация маркеров соленых жидкостей.

перегородки. В эксперименте физическое удаление перегородки приводит к образованию вертикальных скоростей, способствующих разделению нижнего слоя и формированию фронта. В расчетах, напротив, небольшая часть верхнего слоя успевает примешаться к нижнему, более соленому слою. Этот аспект подтверждается наблюдениями зеленого красителя около фронта распространения на графиках модельных расчетов.

Таким образом, хотя качественно модель подтверждает основные аспекты движения в данной системе, расхождения между количественными результатами моделирования и эксперимента могут быть связаны с упрощениями в модели и различиями в физических условиях открытия перегородки, что требует дополнительного изучения и анализа для более полного понимания этих процессов.

Эксперимент В26. В начальный момент в отделенной перегородкой области находятся два слоя, плотность верхнего слоя $\rho_U = 1009.6 \text{ кг/м}^3$ и нижнего - $\rho_L = 1018.2 \text{ кг/м}^3$.

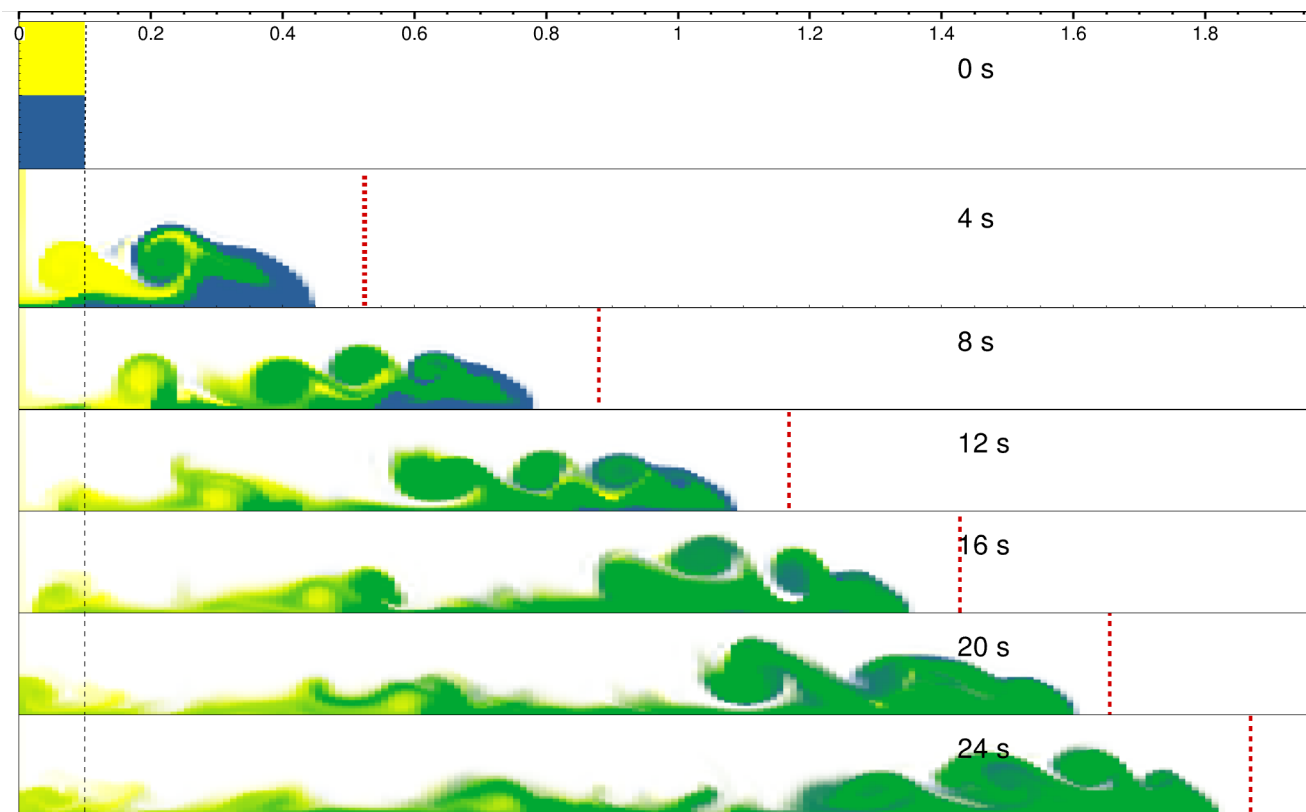


Рисунок 2.14 — Результаты моделирования по модели CABARET-NH и положение фронта в эксперименте В26 на моменты времени 0с, 4с, 8с, 12с, 16с, 20с, 24с. Синим и желтым цветами обозначена концентрация маркеров соленых жидкостей.

На Рис. 2.14 представлены результаты моделирования данного эксперимента. В отличие от предыдущего эксперимента, в данном относительно небольшая разница в плотностях между слоями жидкости в отделенной части. Рассматриваемый сценарий характеризуется быстрым перемешиванием между слоями, и такое перемешивание продолжается в дальнейшем, приводя к образованию единого движущегося массового потока. В начальной фазе, на момент $t = 4$ с и 8 с, наблюдается клин менее плотной верхней жидкости в передней части потока, что в полной мере соответствует фотографиям лабораторного эксперимента В26 в статье [66]. С момента времени $t = 12$ с жидкости в передней части фронта окончательно перемешиваются (зеленый цвет на Рис. 2.14).

Небольшое отставание фронта в расчете говорит о хорошем количественном совпадении результатов расчета с экспериментом.

Полученные результаты подтверждают, что модель успешно справляется с моделированием сложных динамических взаимодействий в таких условиях, и проявляет способность точно отразить характер перемешивания между слоями жидкости при относительной плавучести между слоями $B^* < 0.5$.

Серия С. Данная серия экспериментов проводилась для исследования эффектов стратификации в течениях, в которых верхний слой в отгороженной части содержал большую массу соли, чем нижний слой, т.е. при относительной плавучести между слоями $B^* > 0.5$. Такое начальное состояние достигалось за счет снижения высоты нижнего слоя h_L и увеличения h_U .

Для численного моделирования были выбраны два эксперимента С1 и С4, параметры которых представлены в Таб. 4. Данные эксперименты в начальный имеют близкую среднюю плотность в области до перегородки ρ_C и отличаются отношением плотностей слоев. В представленных экспериментах начальная глубина нижнего слоя $h_L = 0.2H$ (Рис. 2.7).

Таблица 4 — Параметры экспериментов серии С

Эксперимент	ρ_C [кг/м ³]	ρ_U [кг/м ³]	ρ_L [кг/м ³]	h_l/H	ρ^*	B^*
С1	1014.1	1013.2	1017.5	0.2	0.77	0.75
С4	1013.9	1008.9	1034.2	0.2	0.28	0.53

Эксперимент С1. В начальный момент в отделенной перегородкой области находятся два слоя, плотность верхнего слоя $\rho_U = 1013.2$ кг/м³ и нижнего - $\rho_L = 1017.5$ кг/м³, отношение высот слоев составляло $h_U/h_L = 4$.

Результаты расчета представлены на Рис. 2.15, вертикальными красными линиями обозначено положение фронта потока в лабораторном эксперименте. При сравнительно малом отношении плотностей слоев $\rho^* = 0.28$ скорость течения для этих двух потоков очень схожа и жидкости перемешиваются быстро. В начальной стадии эксперимента $t = 4$ с клин желтой жидкости разделяет более плотную синюю жидкость на две части, данный характер движения можно наблюдать и в результатах моделирования Рис. 2.15. Помимо качественного совпадения, результаты моделирования показывают хорошую согласованность положения фронта потока с экспериментом.

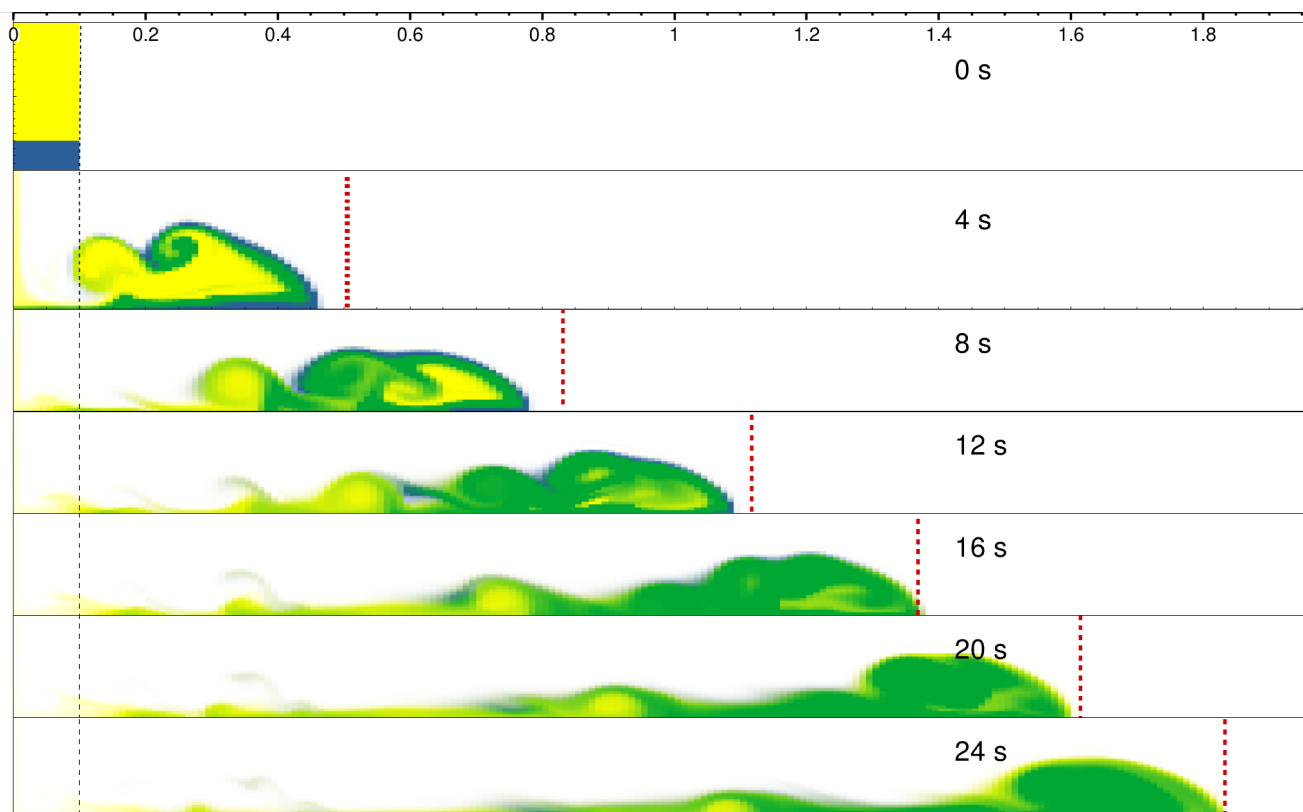


Рисунок 2.15 — Результаты моделирования по модели CABARET-NH и положение фронта в эксперименте С1 на моменты времени 0с, 4с, 8с, 12с, 16с, 20с, 24с. Синим и желтым цветами обозначена концентрация маркеров соленых жидкостей.

Эксперимент С4. В начальный момент в отделенной перегородкой области находятся два слоя, плотность верхнего слоя $\rho_U = 1008.9 \text{ кг/м}^3$ и нижнего - $\rho_L = 1034.2 \text{ кг/м}^3$, отношение высот слоев составляло $h_U/h_L = 4$.

Результаты расчета представлены на Рис. 2.16. Когда контраст плотности между двумя слоями велик, $\rho^* = 0.77$, верхний слой перемещается к фронту потока, внедряясь в нижний слой тонким клином. Жидкости слабо перемешиваются и основная часть нижней, более плотной, жидкости сосредотачивается над потоком верхней жидкости в виде плотного турбулентного следа за фронтом течения. Результаты моделирования качественно повторяют описанные наблюдения. В начальной фазе $t \leq 12\text{с}$ в расчете наблюдается отставание фронта потока от экспериментальных данных. В эксперименте нижний слой успевает пройти большее расстояние до взаимодействия с верхним слоем. Стоит отметить, что когда верхний слой окончательно формирует голову фронта $t \geq 16\text{с}$ положение фронта в модели и эксперименте практически совпадают.

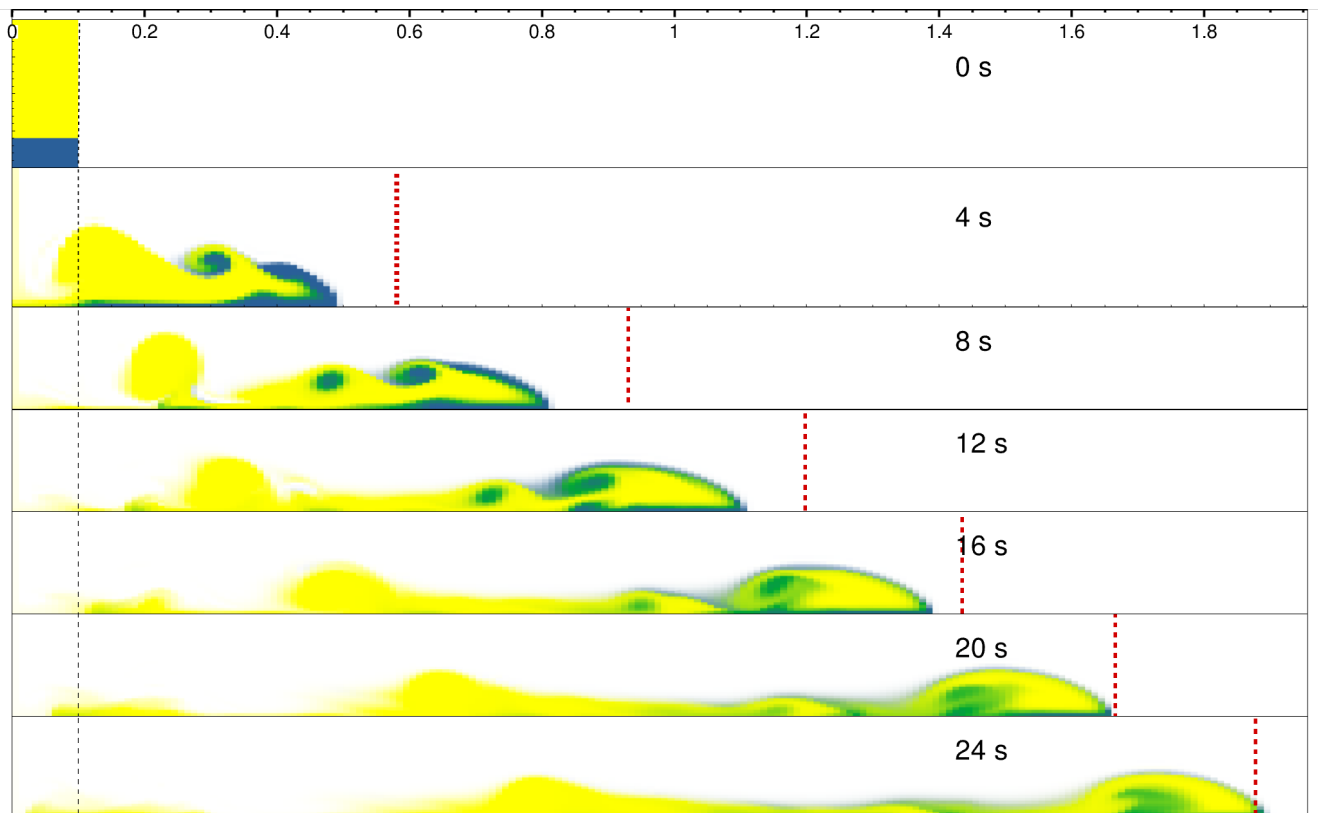


Рисунок 2.16 — Результаты моделирования по модели CABARET-NH и положение фронта в эксперименте C4 на моменты времени 0с, 4с, 8с, 12с, 16с, 20с, 24с. Синим и желтым цветами обозначена концентрация маркеров соленых жидкостей.

Полученные результаты подтверждают, что модель успешно справляется с моделированием течений двухслойной жидкости и проявляет способность точно отразить характер перемешивания между слоями жидкости в сценариях с относительной плавучестью между слоями $B^* > 0.5$.

Серия D. Четвертая серия экспериментов, серия D, проводилась для исследования эффектов стратификации в трехслойных стратифицированных по плотности течениях. Эксперименты серии B и C описывают характер двухслойных течений в зависимости от соотношения плотностей слоев соленой жидкости ρ^* и распределения движущей плавучести B^* между слоями. Данная группа экспериментов дополнительно исследует применимы ли предыдущие наблюдения к потокам с более изменчивой стратификацией.

Для численного моделирования были выбраны все три эксперимента D1-D3, их параметры представлены в Таб. 5. Данные эксперименты в начальный имеют одинаковую среднюю плотность в области до перегородки

$\rho_C = 1017.3$, но отличаются отношением плотностей слоев. В представленных экспериментах начальные высоты всех слоев равны между собой $h_U = h_M = h_L$ (Рис. 2.7).

Таблица 5 — Параметры экспериментов серии D

Эксперимент	ρ_C [кг/м ³]	ρ_U [кг/м ³]	ρ_M [кг/м ³]	ρ_L [кг/м ³]
D1	1017.3	1001.8	1005.3	1044.9
D2	1017.3	1001.8	1023.2	1026.8
D3	1017.3	1012.5	1016.0	1023.2

Для визуализации потоков жидкости в систему уравнений были включены три уравнения переноса маркеров (2.55). В начальный момент $\phi_1 = 1$ для всех ячеек ассоциированных с верхним слоем и при визуализации данному маркеру соответствует красный цвет. Аналогично, для среднего слоя $\phi_2 = 1$ и маркер обозначается желтым цветом, для нижнего слоя $\phi_3 = 1$ и при отображении использовался синий цвет.

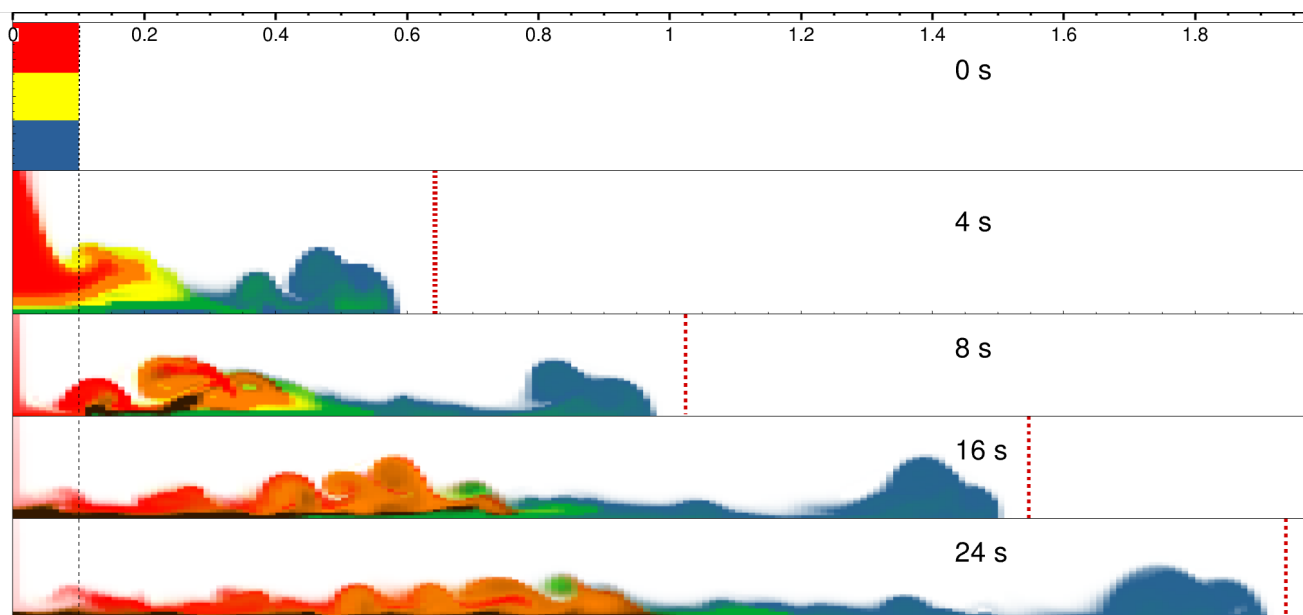


Рисунок 2.17 — Результаты моделирования по модели CABARET-NH и положение фронта в эксперименте D1 на моменты времени 0с, 4с, 8с, 16с, 24с.

Красным, синим и желтым цветами обозначена концентрация маркеров соленых жидкостей.

Эксперимент D1. В начальный момент в отделенной перегородкой области находятся три слоя соленой жидкости: плотность верхнего слоя $\rho_U = 1001.8$ кг/м³, среднего - $\rho_M = 1005.3$ кг/м³ и нижнего - $\rho_L = 1044.9$ кг/м³.

Отношение плотностей верхнего и среднего слоя составляло $\rho_{UM}^* = 0.45$, а среднего и нижнего - $\rho_{ML}^* = 0.14$.

Нижний слой содержит большую часть движущей плавучести и обладает в начальный момент существенно бóльшей плотностью, он опережает два верхних слоя и формирует переднюю часть фронта. При близости по плотности два верхних слоя быстро перемешиваются и не догоняют нижний слой, а внедряются в тело течения нижнего слоя тонким клином ниже зоны перемешивания нижнего слоя с пресной водой. Наблюдаемый в эксперименте характер движения хорошо повторяется моделью, результаты расчета представлены на Рис. 2.17.

Эксперимент D2. В начальный момент в отделенной перегородкой области находятся три слоя соленой жидкости: плотность верхнего слоя $\rho_U = 1001.8 \text{ кг/м}^3$, среднего - $\rho_M = 1023.2 \text{ кг/м}^3$ и нижнего - $\rho_L = 1026.8 \text{ кг/м}^3$. Отношение плотностей верхнего и среднего слоя составляло $\rho_{UM}^* = 0.12$, а среднего и нижнего - $\rho_{ML}^* = 0.87$.

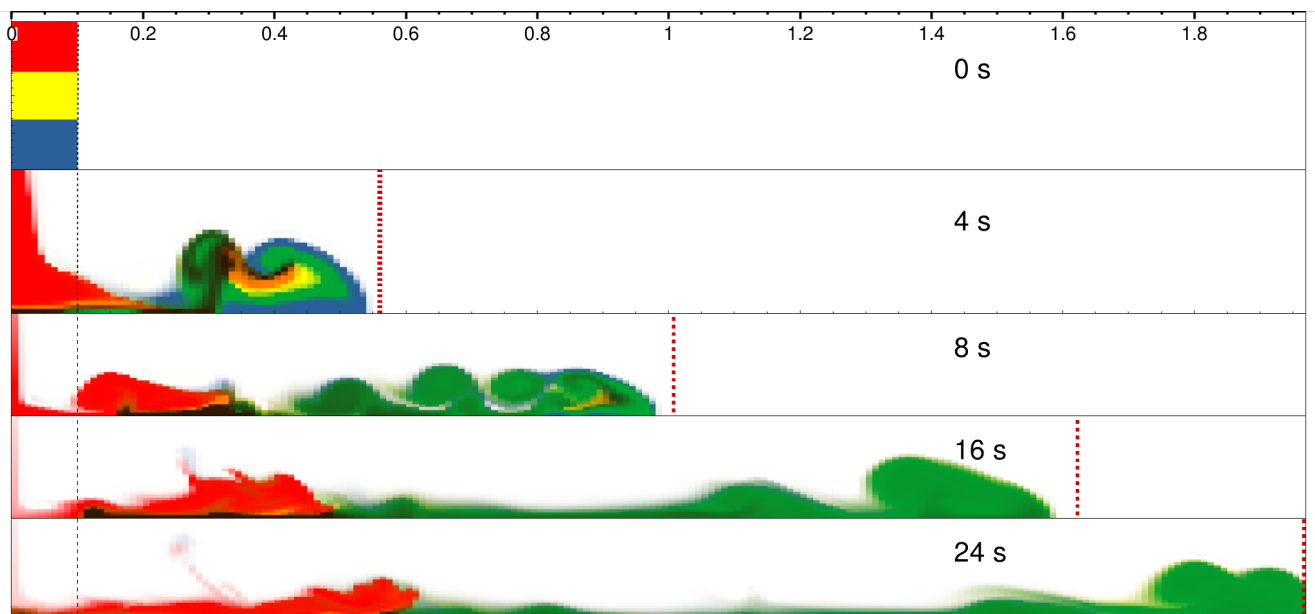


Рисунок 2.18 — Результаты моделирования по модели CABARET-NH и положение фронта в эксперименте D2 на моменты времени 0с, 4с, 8с, 16с, 24с.

Красным, синим и желтым цветами обозначена концентрация маркеров соленых жидкостей.

Два нижних слоя имеют одинаковую плотность, они быстро перемешиваются, что соответствует наблюдениям в серии В. Верхний слой отстает, образуя

тонкий удлиненный клин. Определенный в лабораторных испытаниях тип движения успешно повторяется в результатах расчета Рис. 2.18.

Эксперимент D3. В начальный момент в отделенной перегородкой области находятся три слоя соленой жидкости: плотность верхнего слоя $\rho_U = 1012.5 \text{ кг/м}^3$, среднего - $\rho_M = 1016.0 \text{ кг/м}^3$ и нижнего - $\rho_L = 1023.2 \text{ кг/м}^3$. Отношение плотностей верхнего и среднего слоя составляло $\rho_{UM}^* = 0.8$, а среднего и нижнего - $\rho_{ML}^* = 0.7$.

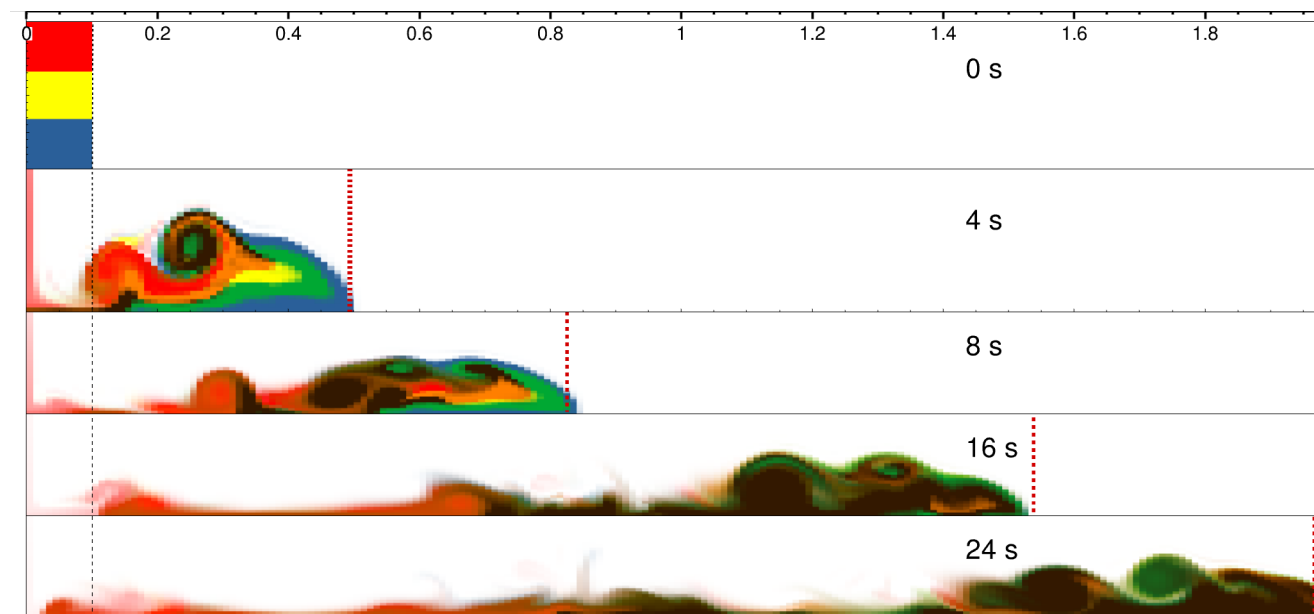


Рисунок 2.19 — Результаты моделирования по модели CABARET-NH и положение фронта в эксперименте D3 на моменты времени 0с, 4с, 8с, 16с, 24с.

Красным, синим и желтым цветами обозначена концентрация маркеров соленых жидкостей.

В данном эксперименте движущая плавучесть достаточно равномерно распределена между тремя слоями, они быстро перемешиваются во время первоначального распространения. Средний слой клином вторгается в нижний слой, и они оба смешиваются. Затем верхний слой вторгается в это новое смешанное течение, все три слоя перемешиваются и далее двигаются совместно. Описанная динамика течений повторяется и в результатах моделирования Рис. 2.19: на момент времени $t = 4\text{с}$ в передней части потока наблюдается зеленая клиновидная область - область перемешивания двух нижних слоев; к моменту времени $t = 8\text{с}$ два нижних слоя перемещались - фронт потока практически не содержит синий и желтый цвета, а верхний слой образует клин в толщине общего потока двух

нижних слоев; при $t \geq 16$ с все три слоя перемешались и движутся единым потоком.

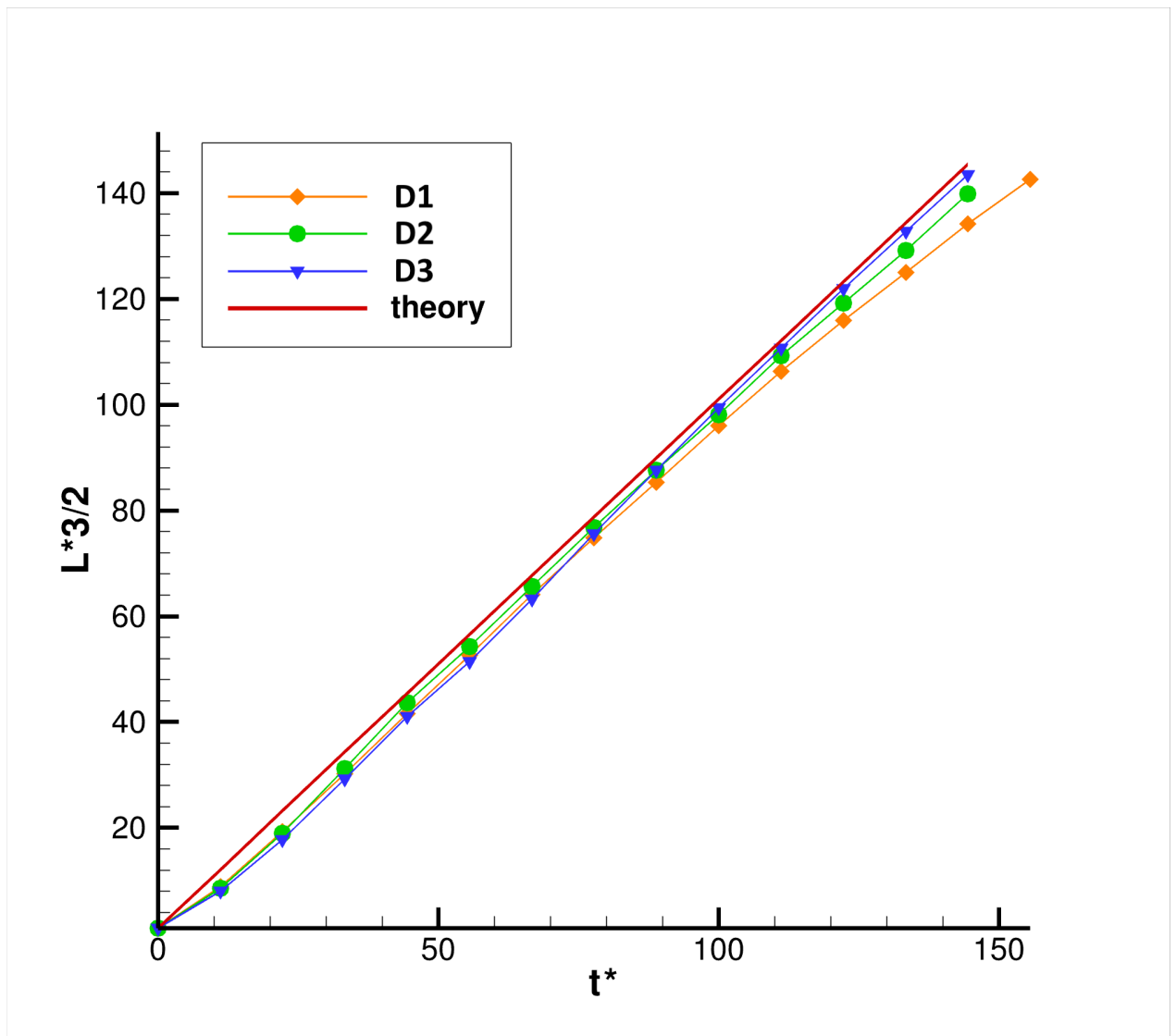


Рисунок 2.20 — Безразмерное положение фронта потока $L^{*3/2}$ в расчетах по модели CABARET-NH для экспериментов D1-D3 и график аналитического решения приближенной задачи

Анализ результатов показывает, что математическая модель успешно воспроизводит положение придонного потока в течение первых 8 секунд каждого эксперимента, что подтверждается сравнением с изображениями, представленными в том же временном интервале в работе [66]. Однако для моментов времени 16 и 24 секунд, изображенных на двух нижних строках Рис. 2.17 - Рис. 2.19, наблюдается существенное расхождение между численными результатами и экспериментальными данными. В статье [66] указано, что красные сегменты соответствуют моментам времени 12 и 16 секунд. Тем не менее с учетом данных

наших вычислений, можно предположить, что фотографии, представленные в этой работе, на самом деле соответствуют временным отметкам 16 и 24 секунд, а не 12 и 16 секунд, как указано в исходной статье.

Данное предположение подтверждается и при анализе графиков безразмерного положения фронта придонного течения $L^{*3/2}$. На основе расчетов серии D и теоретической зависимости $L^{*3/2}$, формула (2.52), построен график Рис. 2.20. Для расчета аналитического решения приближенной задачи средняя плотность выбиралась равной $\rho_c = 1017.3$, как и во всех экспериментах серии D (см. Таб. 5) и число Фруда $Fr = 1.3$. Результаты согласуются с теоретическими выводами статьи [66] и аналитическим решением приближенной задачи. Согласно этим выводам при бóльшей разнице плотности между нижним слоем и двумя верхними придонное течение замедляется сильнее.

Результаты численного моделирования с использованием численной схемы SABARET-NH подтверждают применимость построенной математической модели и соответствующей численной схемы для адекватного моделирования течений стратифицированной по плотности жидкости в лабораторных условиях. Показанная качественная и количественная согласованность результатов численных расчетов с экспериментальными показывает высокую точность построенной модели и численного метода расчета по этой математической модели.

Глава 3. Явно- неявная схема CABARET-INH

Расчетная область в задачах вычислительной океанологии зачастую обладает существенно различающимися горизонтальным и вертикальным размерами, поэтому применяемые в этих задачах вычислительные ячейки имеют высокое аспектное отношение. Главным ограничением на шаг по времени из условия Куранта является вертикальный размер используемых ячеек. В то же время использование полностью неявных схем для решения системы уравнений (2.4), приводит к необходимости разрешения больших систем линейных уравнений и уменьшает эффективность распараллеливания полученных алгоритмов.

В данном разделе описывается методика построения явно-неявной схемы на основе балансно-характеристической схемы КАБАРЕ, явной вдоль направления OX и неявной вдоль OZ , и алгоритм решения по ней. Введение неявности только по одному вертикальному направлению и компактность шаблона схемы позволяет разрешать неявность независимо в каждом отдельном столбце ячеек по оси OZ , что оставляет возможность эффективного распараллеливания вдоль явного направления, а также снять ограничения на шаг по времени (2.42), получаемые по вертикальному направлению. Разработанный алгоритм гиперболической прогонки позволяет сохранить вычислительную эффективность на уровне явной схемы CABARET-NH.

3.1 Балансные фазы явно-неявной схемы КАБАРЕ

Рассмотрим изменения балансной фазы 1 в сравнении с явной схемой (2.23):

$$\frac{\bar{\zeta}_C^{n+1/2} - \bar{\zeta}_C^n}{\tau/2} + \sum_k F_x \left(\vec{\psi}_k^n \right) + \sum_k F_z \left(\vec{\psi}_k^{n+1} \right) = 0 \quad (3.1)$$

где F_z - потоки через горизонтальные грани ячейки, вычисляемые по потоковым величинам $\vec{\psi}_k^{n+1}$ с нового слоя по времени, и F_x - остальные потоки (на вертикальных гранях), для вычисления которых используются потоковые величины со старого слоя по времени. Отметим, что до вычисления консервативных вели-

чин на полуцелом слое по времени необходимо определить значения потоковых величин $\vec{\psi}_k^{n+1}$, методика их вычисления будет описана ниже.

Консервативная фаза 3 в форме полного шага (2.25) остается без изменений.

3.2 Характеристическая фаза явно-неявной схемы КАБАРЕ

Основным отличием новой схемы от явного варианта является методика нахождения новых потоковых значений на горизонтальных гранях. Вместо локальных Римановых инвариантов и их характеристических скоростей (2.21), определяемых из дифференциальной системы уравнений (2.13), будем использовать следующее их приближение:

$$\begin{aligned} \vec{l}_1^z &= \left(\frac{c}{\sqrt{\rho_0\theta_0}}, 0, 1, 0 \right), \quad \vec{l}_2^z = \left(-\frac{c}{\sqrt{\rho_0\theta_0}}, 0, 1, 0 \right), \quad \vec{l}_3^z = (0, 1, 0, 0), \quad \vec{l}_4^z = (0, 0, 0, 1) \\ \lambda_{1,2}^z &= (w - \dot{z}) \pm c/\sqrt{\rho_0}, \quad \lambda_{3,4}^z = (w - \dot{z}) \\ I_1^z &= w + \frac{c}{\sqrt{\rho_0\theta_0}}\delta\theta, \quad I_2^z = w - \frac{c}{\sqrt{\rho_0\theta_0}}\delta\theta, \quad I_3^z = u, \quad I_4 = \delta\rho \end{aligned} \tag{3.2}$$

Изменения заключаются замене коэффициента $\left\langle \frac{c}{\sqrt{\rho_0\theta}} \right\rangle$ на $\frac{c}{\sqrt{\rho_0\theta_0}}$. С учетом критерия применимости приближения слабой сжимаемости (1.25), выполнение которого обеспечивается выбором искусственной скорости звука c , данные коэффициенты практически совпадают.

Экстраполяционные соотношения (2.30) определяют связь между неизвестными инвариантами на полуцелом слое $t_{n+1/2}$ и новом слое t_{n+1} . Дополнительные соотношения получим, приведя уравнения (3.1) к разностному аналогу неоднородного уравнения переноса для локальных инвариантов Римана. Выпишем подробно уравнения балансной фазы 1, используя обозначения (2.22):

$$\begin{aligned}
& \frac{(\theta \Delta V)_{i+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - (\theta \Delta V)_{i+1/2, k+1/2}^n}{\tau/2} + \\
& + \left((\theta u)_{i+1, k+1/2}^n \Delta z_R^n - (\theta u)_{i, k+1/2}^n \Delta z_L^n \right) - \\
& - \left((\theta u)_{i+1/2, k}^n \Delta z_T^n - (\theta u)_{i+1/2, k+1}^n \Delta z_B^n \right) + \\
& + \left((\theta (w - \dot{z}))_{i+1/2, k}^{n+1} - (\theta (w - \dot{z}))_{i+1/2, k+1}^{n+1} \right) \Delta x = 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\theta u \Delta V)_{i+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - (\theta u \Delta V)_{i+1/2, k+1/2}^n}{\tau/2} + \\
& + \left((\theta u^2)_{i+1, k+1/2}^n + \frac{c^2}{\rho_0} \left(\theta_{i+1, k+1/2}^n - \theta_0 \right) + g (H_0)_{i+1}^n \right) \Delta z_R^n - \\
& - \left((\theta u^2)_{i, k+1/2}^n + \frac{c^2}{\rho_0} \left(\theta_{i, k+1/2}^n - \theta_0 \right) + g (H_0)_i^n \right) \Delta z_L^n - \\
& - \left((\theta u^2)_{i+1/2, k}^n + \frac{c^2}{\rho_0} \left(\theta_{i+1/2, k}^n - \theta_0 \right) + g (H_0)_{i+1/2}^n \right) \Delta z_T^n + \\
& + \left((\theta u^2)_{i+1/2, k+1}^n + \frac{c^2}{\rho_0} \left(\theta_{i+1/2, k+1}^n - \theta_0 \right) + g (H_0)_{i+1/2}^n \right) \Delta z_B^n + \\
& + \left((\theta u (w - \dot{z}))_{i+1/2, k}^{n+1} - (\theta u (w - \dot{z}))_{i+1/2, k+1}^{n+1} \right) \Delta x = 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\theta w \Delta V)_{i+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - (\theta w \Delta V)_{i+1/2, k+1/2}^n}{\tau/2} + \\
& + \left((\theta u w)_{i+1, k+1/2}^n \Delta z_R^n - (\theta u w)_{i, k+1/2}^n \Delta z_L^n \right) - \\
& - \left((\theta u w)_{i+1/2, k}^n \Delta z_T^n - (\theta u w)_{i+1/2, k+1}^n \Delta z_B^n \right) + \\
& + \left((\theta w (w - \dot{z}))_{i+1/2, k}^{n+1} + \frac{c^2}{\rho_0} \left(\theta_{i+1/2, k}^{n+1} - \theta_0 \right) \right) \Delta x - \\
& - \left((\theta w (w - \dot{z}))_{i+1/2, k+1}^{n+1} + \frac{c^2}{\rho_0} \left(\theta_{i+1/2, k+1}^{n+1} - \theta_0 \right) \right) \Delta x = - \left(g \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \Delta V \right)_{i+1/2, k+1/2}^n
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\rho\theta\Delta V)_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - (\rho\theta\Delta V)_{i+1/2,k+1/2}^n}{\tau/2} + \\
& + \left((\rho\theta u)_{i+1,k+1/2}^n \Delta z_R^n - (\rho\theta u)_{i,k+1/2}^n \Delta z_L^n \right) - \\
& - \left((\rho\theta u)_{i+1/2,k}^n \Delta z_T^n - (\rho\theta u)_{i+1/2,k+1}^n \Delta z_B^n \right) + \\
& + \left((\rho\theta(w-\dot{z}))_{i+1/2,k}^{n+1} - (\rho\theta(w-\dot{z}))_{i+1/2,k+1}^{n+1} \right) \Delta x = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Используя равенства $a^*b^* - ab = \frac{a^*+a}{2}(b^* - b) + \frac{b^*+b}{2}(a^* - a)$ и учитывая (3.3), приведем уравнение (3.5) к следующему виду:

$$\begin{aligned}
& \frac{(\theta\Delta V)_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} + (\theta\Delta V)_{i+1/2,k+1/2}^n}{2} \frac{w_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - w_{i+1/2,k+1/2}^n}{\tau/2} + \\
& + \frac{\left((\theta u)_{i+1,k+1/2}^n \Delta z_R^n + (\theta u)_{i,k+1/2}^n \Delta z_L^n \right)}{2} \left(w_{i+1,k+1/2}^n - w_{i,k+1/2}^n \right) - \\
& - \frac{\left((\theta u)_{i+1,k+1/2}^n \Delta z_R^n + (\theta u)_{i,k+1/2}^n \Delta z_L^n \right)}{2} \left(w_{i+1,k+1/2}^n - w_{i,k+1/2}^n \right) + \\
& + \frac{\left((\theta(w-\dot{z}))_{i+1/2,k}^{n+1} + (\theta(w-\dot{z}))_{i+1/2,k+1}^{n+1} \right)}{2} \left(w_{i+1/2,k}^{n+1} - w_{i+1/2,k+1}^{n+1} \right) \Delta x + \\
& + \frac{c^2}{\rho_0} \left(\theta_{i+1/2,k}^{n+1} - \theta_{i+1/2,k+1}^{n+1} \right) \Delta x = - \left(g \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \Delta V \right)_{i+1/2,k+1/2}^n
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Левые собственные векторы (см. (3.2)), соответствующие инвариантам I_z^1 , I_z^2 имеют ненулевые 1 и 3 элементы. Оставим для рассмотрения (3.4) и (3.8) уравнения и перенесем все слагаемые, не связанные с горизонтальными, гранями в правую часть:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{(\theta \Delta V)_{i+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - (\theta \Delta V)_{i+1/2, k+1/2}^n}{\tau/2} + \\
+ \left((\theta (w - \dot{z}))_{i+1/2, k}^{n+1} - (\theta (w - \dot{z}))_{i+1/2, k+1}^{n+1} \right) \Delta x = G_\theta \\
\frac{(\theta \Delta V)_{i+1/2, k+1/2}^{n+1/2} + (\theta \Delta V)_{i+1/2, k+1/2}^n}{2} \frac{w_{i+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - w_{i+1/2, k+1/2}^n}{\tau/2} + \\
+ \frac{\left((\theta (w - \dot{z}))_{i+1/2, k}^{n+1} + (\theta (w - \dot{z}))_{i+1/2, k+1}^{n+1} \right)}{2} \left(w_{i+1/2, k}^{n+1} - w_{i+1/2, k+1}^{n+1} \right) \Delta x + \\
+ \frac{c^2}{\rho_0} \left(\theta_{i+1/2, k}^{n+1} - \theta_{i+1/2, k+1}^{n+1} \right) \Delta x = G_w
\end{array} \right. \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned}
G_\theta &= - \left((\theta u)_{i+1, k+1/2}^n \Delta z_R^n - (\theta u)_{i, k+1/2}^n \Delta z_L^n \right) + \\
&\quad + \left((\theta u)_{i+1/2, k}^n \Delta z_T^n - (\theta u)_{i+1/2, k+1}^n \Delta z_B^n \right) \\
G_w &= - \left(g \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \Delta V \right)_{i+1/2, k+1/2}^n - \\
&\quad - \frac{\left((\theta u)_{i+1, k+1/2}^n \Delta z_R^n + (\theta u)_{i, k+1/2}^n \Delta z_L^n \right)}{2} \left(w_{i+1, k+1/2}^n - w_{i, k+1/2}^n \right) + \\
&\quad + \frac{\left((\theta u)_{i+1, k+1/2}^n \Delta z_R^n + (\theta u)_{i, k+1/2}^n \Delta z_L^n \right)}{2} \left(w_{i+1, k+1/2}^n - w_{i, k+1/2}^n \right)
\end{aligned} \quad (3.9)$$

Считая изменение объема за половину шага по времени малым и учитывая приближение слабой сжимаемости, преобразуем систему (3.9) следующим

образом:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\theta_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - \theta_{i+1/2,k+1/2}^n}{\tau/2} + \\
 + \left((\theta(w - \dot{z}))_{i+1/2,k}^{n+1} - (\theta(w - \dot{z}))_{i+1/2,k+1}^{n+1} \right) \frac{\Delta x}{\Delta V_{i+1/2,k+1/2}} = \frac{G_\theta}{\Delta V_{i+1/2,k+1/2}} \\
 \frac{w_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - w_{i+1/2,k+1/2}^n}{\tau/2} \\
 + \frac{(w - \dot{z})_{i+1/2,k}^{n+1} + (w - \dot{z})_{i+1/2,k+1}^{n+1}}{2} \left(w_{i+1/2,k}^{n+1} - w_{i+1/2,k+1}^{n+1} \right) \frac{\Delta x}{\Delta V_{i+1/2,k+1/2}} + \\
 + \frac{c^2}{\theta_0 \rho_0} \left(\theta_{i+1/2,k}^{n+1} - \theta_{i+1/2,k+1}^{n+1} \right) \frac{\Delta x}{\Delta V_{i+1/2,k+1/2}} = \frac{G_w}{\theta_0 \Delta V_{i+1/2,k+1/2}}
 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\theta_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - \theta_{i+1/2,k+1/2}^n}{\tau/2} + \\
 + \frac{\left(\theta_{i+1/2,k}^{n+1} + \theta_{i+1/2,k+1}^{n+1} \right) \left((w - \dot{z})_{i+1/2,k}^{n+1} - (w - \dot{z})_{i+1/2,k+1}^{n+1} \right)}{2 \Delta z_{i+1/2,k+1/2}} + \\
 + \frac{\left((w - \dot{z})_{i+1/2,k}^{n+1} + (w - \dot{z})_{i+1/2,k+1}^{n+1} \right) \left(\theta_{i+1/2,k}^{n+1} - \theta_{i+1/2,k+1}^{n+1} \right)}{2 \Delta z_{i+1/2,k+1/2}} = \frac{G_\theta}{\Delta V_{i+1/2,k+1/2}} \\
 \frac{w_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - w_{i+1/2,k+1/2}^n}{\tau/2} + \\
 + \frac{\left((w - \dot{z})_{i+1/2,k}^{n+1} + (w - \dot{z})_{i+1/2,k+1}^{n+1} \right) \left(w_{i+1/2,k}^{n+1} - w_{i+1/2,k+1}^{n+1} \right)}{2 \Delta z_{i+1/2,k+1/2}} + \\
 + \frac{c^2}{\theta_0 \rho_0} \frac{\left(\theta_{i+1/2,k}^{n+1} - \theta_{i+1/2,k+1}^{n+1} \right)}{\Delta z_{i+1/2,k+1/2}} = \frac{G_w}{\theta_0 \Delta V_{i+1/2,k+1/2}}
 \end{array} \right. \quad (3.11)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{\theta_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - \theta_{i+1/2,k+1/2}^n}{\tau/2} + \frac{(\theta_{i+1/2,k}^{n+1} + \theta_{i+1/2,k+1}^{n+1}) (w_{i+1/2,k}^{n+1} - w_{i+1/2,k+1}^{n+1})}{2 \Delta z_{i+1/2,k+1/2}} + \\
& + \frac{((w - \dot{z})_{i+1/2,k}^{n+1} + (w - \dot{z})_{i+1/2,k+1}^{n+1}) (\theta_{i+1/2,k}^{n+1} - \theta_{i+1/2,k+1}^{n+1})}{2 \Delta z_{i+1/2,k+1/2}} = \frac{G_\theta}{\Delta V_{i+1/2,k+1/2}} \\
& \frac{w_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - w_{i+1/2,k+1/2}^n}{\tau/2} + \\
& + \frac{((w - \dot{z})_{i+1/2,k}^{n+1} + (w - \dot{z})_{i+1/2,k+1}^{n+1}) (w_{i+1/2,k}^{n+1} - w_{i+1/2,k+1}^{n+1})}{2 \Delta z_{i+1/2,k+1/2}} + \\
& + \frac{c^2 (\theta_{i+1/2,k}^{n+1} - \theta_{i+1/2,k+1}^{n+1})}{\theta_0 \rho_0 \Delta z_{i+1/2,k+1/2}} = \frac{G_w}{\theta_0 \Delta V_{i+1/2,k+1/2}}
\end{aligned} \right. \quad (3.12)$$

Т.к. $\theta_* = \theta_0 + \delta\theta_*$ и $\theta_0 = const$, то $\theta_* - \theta_{**} = \delta\theta_* - \delta\theta_{**}$. Тогда (3.12) можно записать относительно $\delta\theta$:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{\delta\theta_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - \delta\theta_{i+1/2,k+1/2}^n}{\tau/2} + \frac{(\theta_{i+1/2,k}^{n+1} + \theta_{i+1/2,k+1}^{n+1}) (w_{i+1/2,k}^{n+1} - w_{i+1/2,k+1}^{n+1})}{2 \Delta z_{i+1/2,k+1/2}} + \\
& + \frac{((w - \dot{z})_{i+1/2,k}^{n+1} + (w - \dot{z})_{i+1/2,k+1}^{n+1}) (\delta\theta_{i+1/2,k}^{n+1} - \delta\theta_{i+1/2,k+1}^{n+1})}{2 \Delta z_{i+1/2,k+1/2}} = \frac{G_\theta}{\Delta V_{i+1/2,k+1/2}} \\
& \frac{w_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - w_{i+1/2,k+1/2}^n}{\tau/2} + \\
& + \frac{((w - \dot{z})_{i+1/2,k}^{n+1} + (w - \dot{z})_{i+1/2,k+1}^{n+1}) (w_{i+1/2,k}^{n+1} - w_{i+1/2,k+1}^{n+1})}{2 \Delta z_{i+1/2,k+1/2}} + \\
& + \frac{c^2 (\delta\theta_{i+1/2,k}^{n+1} - \delta\theta_{i+1/2,k+1}^{n+1})}{\theta_0 \rho_0 \Delta z_{i+1/2,k+1/2}} = \frac{G_w}{\theta_0 \Delta V_{i+1/2,k+1/2}}
\end{aligned} \right. \quad (3.13)$$

Полученные уравнения представляют разностный аналог уравнений 1 и 3 простой формы (см. (2.12)). Как и в дифференциальном случае (см. раздел 2.2), домножим систему (3.13) на левый собственный вектор $\vec{l}_1^z = \left(\frac{c}{\sqrt{\rho_0 \theta_0}}, 0, 1, 0 \right)$:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{w_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - w_{i+1/2,k+1/2}^n}{\tau/2} + \frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta_0} \frac{\delta\theta_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - \delta\theta_{i+1/2,k+1/2}^n}{\tau/2} \right\} + \\
& + \frac{c}{\sqrt{\rho_0}} \left(\frac{\theta_{i+1/2,k}^{n+1} + \theta_{i+1/2,k+1}^{n+1}}{2\theta_0} \frac{w_{i+1/2,k}^{n+1} - w_{i+1/2,k+1}^{n+1}}{\Delta z_{i+1/2,k+1/2}} + \frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta_0} \frac{\delta\theta_{i+1/2,k}^{n+1} - \delta\theta_{i+1/2,k+1}^{n+1}}{\Delta z_{i+1/2,k+1/2}} \right) + \\
& + \frac{(w - \dot{z})_{i+1/2,k}^{n+1} + (w - \dot{z})_{i+1/2,k+1}^{n+1}}{2} \cdot + \\
& \cdot \left(\frac{w_{i+1/2,k}^{n+1} - w_{i+1/2,k+1}^{n+1}}{\Delta z_{i+1/2,k+1/2}} + \frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta_0} \frac{\delta\theta_{i+1/2,k}^{n+1} - \delta\theta_{i+1/2,k+1}^{n+1}}{\Delta z_{i+1/2,k+1/2}} \right) = G_R
\end{aligned} \tag{3.14}$$

где

$$G_R = \frac{G_w}{\theta_0 \Delta V_{i+1/2,k+1/2}} + \frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta_0} \frac{G_\theta}{\Delta V_{i+1/2,k+1/2}} \tag{3.15}$$

Учитывая приближение слабой сжимаемости ($\frac{|\theta - \theta_0|}{\theta_0} \ll 1$), $\frac{\theta_{i+1/2,k}^{n+1} + \theta_{i+1/2,k+1}^{n+1}}{2\theta_0} \approx 1$. Тогда (3.15) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{w_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - w_{i+1/2,k+1/2}^n}{\tau/2} + \frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta_0} \frac{\delta\theta_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - \delta\theta_{i+1/2,k+1/2}^n}{\tau/2} \right\} + \\
& + \left(\tilde{\lambda}_1^{n+1} \right)_{i+1/2,k+1/2} \left\{ \frac{w_{i+1/2,k}^{n+1} - w_{i+1/2,k+1}^{n+1}}{\Delta z_{i+1/2,k+1/2}} + \frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta_0} \frac{\delta\theta_{i+1/2,k}^{n+1} - \delta\theta_{i+1/2,k+1}^{n+1}}{\Delta z_{i+1/2,k+1/2}} \right\} = G_R
\end{aligned} \tag{3.16}$$

где

$$\left(\tilde{\lambda}_1^z \right)_{i+1/2,k+1/2}^{n+1} = \frac{(w - \dot{z})_{i+1/2,k}^{n+1} + (w - \dot{z})_{i+1/2,k+1}^{n+1}}{2} + \frac{c}{\sqrt{\rho_0}} \tag{3.17}$$

Введем новые обозначения для первого и второго инварианта (3.2): $R = I_1^z$ и $Q = I_2^z$. Выражения в фигурных скобках уравнения (3.16) представляют собой разность инвариантов R , взятых в разных узлах сетки. Перепишем (3.16) в терминах инварианта R :

$$\frac{R_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - R_{i+1/2,k+1/2}^n}{\tau/2} + \left(\tilde{\lambda}_1^z \right)_{i+1/2,k+1/2}^{n+1} \frac{R_{i+1/2,k}^{n+1} - R_{i+1/2,k+1}^{n+1}}{\Delta z_{i+1/2,k+1/2}} = G_R \tag{3.18}$$

Аналогично, домножая систему (3.13) на второй собственный вектор $\vec{l}_2^z = \left(-\frac{c}{\sqrt{\rho_0\theta_0}}, 0, 1, 0\right)$ и повторяя рассуждения выше, получаем уравнение на инвариант Q :

$$\frac{Q_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - Q_{i+1/2,k+1/2}^n}{\tau/2} + \left(\tilde{\lambda}_2^z\right)_{i+1/2,k+1/2}^{n+1} \frac{Q_{i+1/2,k}^{n+1} - Q_{i+1/2,k+1}^{n+1}}{\Delta z_{i+1/2,k+1/2}} = G_Q \quad (3.19)$$

где

$$G_Q = \frac{G_w}{\theta_0 \Delta V_{i+1/2,k+1/2}} - \frac{c}{\sqrt{\rho_0\theta_0}} \frac{G_\theta}{\Delta V_{i+1/2,k+1/2}} \quad (3.20)$$

$$\left(\tilde{\lambda}_2^z\right)_{i+1/2,k+1/2}^{n+1} = \frac{(w - \dot{z})_{i+1/2,k}^{n+1} + (w - \dot{z})_{i+1/2,k+1}^{n+1}}{2} - \frac{c}{\sqrt{\rho_0}}$$

При дозвуковых течениях ($c > |w - \dot{z}|$) знаки характеристических скоростей определены однозначно: $\lambda_1^z > 0$ и $\lambda_2^z < 0$ (см. (3.2)) и аналог вдоль оси OZ экстраполяционных соотношений (2.30) для первого и второго инварианта может быть записан в упрощенной форме:

$$\begin{cases} R_{i+1/2,k}^{n+1} + R_{i+1/2,k+1}^n = 2R_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} \\ Q_{i+1/2,k+1}^{n+1} + Q_{i+1/2,k}^n = 2Q_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} \end{cases} \quad (3.21)$$

Из соотношений (3.21) подставим выражения для инвариантов с полуцелого слоя по времени в уравнения (3.18), (3.19):

$$\begin{cases} R_{i+1/2,k}^{n+1} + R_{i+1/2,k+1}^n - 2R_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} + \\ + \tau \left(\tilde{\lambda}_1^z\right)_{i+1/2,k+1/2}^{n+1} \frac{R_{i+1/2,k}^{n+1} - R_{i+1/2,k+1}^{n+1}}{\Delta z_{i+1/2,k+1/2}} = \tau G_R \\ Q_{i+1/2,k+1}^{n+1} + Q_{i+1/2,k}^n - 2Q_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} + \\ + \tau \left(\tilde{\lambda}_2^z\right)_{i+1/2,k+1/2}^{n+1} \frac{Q_{i+1/2,k}^{n+1} - Q_{i+1/2,k+1}^{n+1}}{\Delta z_{i+1/2,k+1/2}} = \tau G_Q \end{cases} \quad (3.22)$$

Для упрощения дальнейших выкладок введем дополнительные обозначения для аналогов чисел Куранта двух инвариантов:

$$\begin{aligned} r_{R,i+1/2,k+1/2} &= \frac{\tau \left(\tilde{\lambda}_1^z \right)_{i+1/2,k+1/2}^{n+1}}{\Delta z_{i+1/2,k+1/2}} \\ r_{Q,i+1/2,k+1/2} &= \frac{\tau \left(\tilde{\lambda}_2^z \right)_{i+1/2,k+1/2}^{n+1}}{\Delta z_{i+1/2,k+1/2}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Используя введенные соотношения (3.23), перепишем систему (3.22), оставив в левых частях выражения с инвариантами с нового слоя по времени:

$$\left\{ \begin{aligned} (1 + r_{R,i+1/2,k+1/2}) R_{i+1/2,k}^{n+1} - r_{R,i+1/2,k+1/2} R_{i+1/2,k+1}^{n+1} &= \\ &= \tau G_R + 2R_{i+1/2,k+1/2}^n - R_{i+1/2,k+1}^n \\ (1 - r_{Q,i+1/2,k+1/2}) Q_{i+1/2,k+1}^{n+1} + r_{Q,i+1/2,k+1/2} Q_{i+1/2,k}^{n+1} &= \\ &= \tau G_Q + 2Q_{i+1/2,k+1/2}^n - Q_{i+1/2,k}^n \end{aligned} \right. \quad (3.24)$$

Полученную систему можно решать итерационно, обновляя после каждой итерации значения чисел Куранта (3.23). При условии слабой сжимаемости можно обойтись и без итераций, вычисляя числа Куранта по скорости с текущего t_n временного слоя:

$$\begin{aligned} r_{R,i+1/2,k+1/2} &= \frac{\tau \left(\tilde{\lambda}_1^z \right)_{i+1/2,k+1/2}^n}{\Delta z_{i+1/2,k+1/2}} \\ r_{Q,i+1/2,k+1/2} &= \frac{\tau \left(\tilde{\lambda}_2^z \right)_{i+1/2,k+1/2}^n}{\Delta z_{i+1/2,k+1/2}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Используя приближенные числа Куранта (3.25), система (3.24) является системой линейных уравнений относительно инвариантов с нового слоя по времени с блочной трехдиагональной матрицей с блоками размера 2×2 при рассмотрении уравнений с фиксированным индексом i , т.е. вычислительных ячеек внутри одного столбца жидкости. Формулы (3.24) в дальнейшем будем называть формулами «бегущего счета», т.к. по известным значениям инвариантов на одной границе, данные формулы позволяют вычислить остальные инварианты внутри области и на противоположной границе.

3.3 Алгоритм решения неявной схемы

Данный раздел посвящен алгоритму разрешения полученной системы в форме «бегущего счета». Уравнения (3.24), полученные в предыдущем пункте, можно разрешать независимо при фиксированном индексе i , в дальнейших выкладках будем опускать индексы по горизонтальному направлению. Перепишем формулы (3.24) в следующем виде:

$$\begin{cases} R_k^{n+1} = \alpha_{k+1}R_{k+1}^{n+1} + \beta_{k+1} \\ Q_{k+1}^{n+1} = \gamma_k Q_k^{n+1} + \delta_k \end{cases} \quad (3.26)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= \frac{r_{R,k+1/2}}{(1 + r_{R,k+1/2})}; & \beta_{k+1} &= \frac{\tau G_R + 2R_{k+1/2}^n - R_{k+1}^n}{(1 + r_{R,k+1/2})} \\ \gamma_k &= -\frac{r_{Q,k+1/2}}{(1 - r_{Q,k+1/2})}; & \delta_k &= \frac{\tau G_Q + 2Q_{k+1/2}^n - Q_k^n}{(1 - r_{Q,k+1/2})} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Алгоритм бегущего счета позволяет выразить R_1^{n+1} через $R_{N_z}^{n+1}$:

$$R_1^{n+1} = a_{N_z} R_{N_z}^{n+1} + b_{N_z} \quad (3.28)$$

Коэффициенты a_{N_z} и b_{N_z} вычисляются с помощью рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1; b_1 = \beta_1 \\ a_{k+1} &= a_k \alpha_{k+1}; b_{k+1} = b_k + a_k \beta_{k+1}, k = 1..N_z - 1 \end{aligned} \quad (3.29)$$

позволяющие методом обратного бегущего счета по известным a_1, b_1 вычислить искомые a_{N_z} и b_{N_z} .

Аналогично, для второго инварианта Q :

$$Q_{N_z}^{n+1} = d_1 Q_1^{n+1} + g_1 \quad (3.30)$$

где величины d_1 и g_1 вычисляются по рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} d_{N_z} &= \gamma_{N_z}; g_{N_z} = \delta_{N_z} \\ d_{N_z-k} &= d_{N_z-k+1} \gamma_{N_z-k}; g_{N_z-k} = g_{N_z-k+1} + d_{N_z-k+1} \delta_{N_z-k}, k = 1..N_z - 1 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Полученные соотношения (3.28) и (3.30) для разрешения дополняются граничными условиями на дне (2.3) и свободной поверхности (2.5).

Условие непротекания на дне:

$$\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_{i+1/2} \cdot u_{i+1/2, N_z}^{n+1} - w_{i+1/2, N_z}^{n+1} = 0$$

К текущему моменту горизонтальные скорости на новом слое по времени $u_{i+1/2, N_z}^{n+1}$ еще не вычислены, как приближение будем использовать следующее условие:

$$\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_{i+1/2} \cdot u_{i+1/2, N_z}^n - w_{i+1/2, N_z}^{n+1} = 0 \quad (3.32)$$

Согласно определению инвариантов R и Q :

$$w_{*,*}^* = \frac{R_{*,*}^* + Q_{*,*}^*}{2}$$

Тогда согласно (3.32):

$$R_{i+1/2, N_z}^{n+1} + Q_{i+1/2, N_z}^{n+1} = 2 \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_{i+1/2} \cdot u_{i+1/2, N_z}^n \quad (3.33)$$

Выразим инвариант Q :

$$R_{i+1/2, N_z}^{n+1} = -Q_{i+1/2, N_z}^{n+1} + 2 \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_{i+1/2} \cdot u_{i+1/2, N_z}^n \quad (3.34)$$

Учитывая (3.28) и (3.30) получим:

$$\begin{aligned} R_1^{n+1} &= a_{N_z} R_{N_z}^{n+1} + b_{N_z} = a_{N_z} \left(-Q_{N_z}^{n+1} + 2 \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right) \cdot u_{N_z}^n \right) + b_{N_z} = \\ &= a_{N_z} \left(-d_1 Q_1^{n+1} - g_1 + 2 \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right) \cdot u_{N_z}^n \right) + b_{N_z} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Таким образом, получаем связь инвариантов на поверхности. Дополняя это соотношение граничными условиями на свободной поверхности, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{i+1/2,1}^{n+1} = -a_{N_z} d_1 Q_{i+1/2,1}^{n+1} - a_{N_z} \left(g_1 - 2 \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)_{i+1/2} \cdot u_{i+1/2, N_z}^n \right) + b_{N_z} \\ (R)_{i+1/2,1}^{n+1} = w_{i+1/2,1}^{n+1} + \left(\frac{c_0}{\sqrt{\rho_0 \theta}} \right)_{i+1/2,1+1/2}^{n+1/2} \delta \theta_{i+1/2,1}^{n+1} \\ (Q)_{i+1/2,1}^{n+1} = w_{i+1/2,1}^{n+1} - \left(\frac{c_0}{\sqrt{\rho_0 \theta}} \right)_{i+1/2,1+1/2}^{n+1/2} \delta \theta_{i+1/2,1}^{n+1} \\ c^2 \delta \theta_{i+1/2,1}^{n+1} = -\rho_0 g \left(H_0 - z_{i+1/2,1}^{n+1} \right) \\ \frac{z_{i+1/2,1}^{n+1} - z_{i+1/2,1}^{n+1/2}}{\tau/2} + u_{i+1/2,1}^{n+1} \cdot \frac{(z_{i+1,1}^{n+1} - z_{i,1}^{n+1})}{\Delta x} = w_{i+1/2,1}^{n+1} \end{array} \right. \quad (3.36)$$

В последнем уравнении данной системы участвуют величины $u_{i+1/2,1}^{n+1}$, $z_{i+1,1}^{n+1}$, $z_{i,1}^{n+1}$, которые к этому этапу алгоритма неизвестны. Будем использовать эти величины с t_n момента времени в качестве приближения:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{i+1/2,1}^{n+1} = -a_{N_z} d_1 Q_{i+1/2,1}^{n+1} - a_{N_z} \left(g_1 - 2 \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)_{i+1/2} \cdot u_{i+1/2, N_z}^n \right) + b_{N_z} \\ (R)_{i+1/2,1}^{n+1} = w_{i+1/2,1}^{n+1} + \left(\frac{c_0}{\sqrt{\rho_0 \theta}} \right)_{i+1/2,1+1/2}^{n+1/2} \delta \theta_{i+1/2,1}^{n+1} \\ (Q)_{i+1/2,1}^{n+1} = w_{i+1/2,1}^{n+1} - \left(\frac{c_0}{\sqrt{\rho_0 \theta}} \right)_{i+1/2,1+1/2}^{n+1/2} \delta \theta_{i+1/2,1}^{n+1} \\ c^2 \delta \theta_{i+1/2,1}^{n+1} = -\rho_0 g \left(H_0 - z_{i+1/2,1}^{n+1} \right) \\ \frac{z_{i+1/2,1}^{n+1} - z_{i+1/2,1}^{n+1/2}}{\tau/2} + u_{i+1/2,1}^n \cdot \frac{(z_{i+1,1}^n - z_{i,1}^n)}{\Delta x} = w_{i+1/2,1}^{n+1} \end{array} \right. \quad (3.37)$$

Полученная система из 5 уравнений является линейной относительно неизвестных $\{R_{i+1/2,1}^{n+1}, Q_{i+1/2,1}^{n+1}, w_{i+1/2,1}^{n+1}, \delta \theta_{i+1/2,1}^{n+1}, z_{i+1/2,1}^{n+1}\}$. Решая данную систему, получим выражения для этих неизвестных. По ранее выписанным соотношениям (3.28) и (3.30) находим значения инвариантов в следующем порядке:

$$(Q)_{i+1/2,1}^{n+1} \rightarrow (Q)_{i+1/2,k}^{n+1}, k = 2..N_z \rightarrow (R)_{i+1/2,N_z}^{n+1} \rightarrow (R)_{i+1/2,k}^{n+1}, k = (N_z - 1) .. 2 \quad (3.38)$$

Имея все значения инвариантов R и Q (I_1^z и I_2^z) находим потоковые значения вертикальной скорости $w_{i+1/2,k}^{n+1}$ и параметра сжимаемости $\theta_{i+1/2,k}^{n+1}$ на горизонтальных гранях.

Повторяя аналогичные рассуждения для инвариантов $I_3^z = u$ и $I_4^z = \rho$ находим их значения на новом слое по времени t_{n+1} на горизонтальных гранях. Отметим, что характеристические скорости этих инвариантов $\lambda_3^z = \lambda_4^z = w$, то есть к данному моменту уже известны на момент времени t_{n+1} и процедура экстраполяции инвариантов осуществляется по характеристическим скоростям $w_{i+1/2,k}^{n+1}$.

3.4 Алгоритм решения явно-неявной схемы SABARET-INH

Аналогично ранее описанному алгоритму решения по явной схеме (см. 2.7), приведем краткое описание алгоритма решения разностных уравнений явно-неявной схемы. Вычисления начальных скоростей смещения сетки по вертикали повторяет явный алгоритм согласно формулам (2.39).

Далее, начиная с $n = 0$, выполняется расчёт некоторого числа шагов по времени, на каждом из которых вычисляются консервативные и потоковые переменные на момент времени t_{n+1} . Для этого проводятся следующие вычисления.

- (1) Находим положение сетки на полуцелом шаге по времени:

$$z_{i+1/2,k}^{n+1/2} = z_{i+1/2,k}^n + \frac{\tau}{2} \dot{z}_{i+1/2,k}^n \quad (3.39)$$

- (2) Выполняем неявную фазу 2 схемы для направления OZ . Вычисляем инварианты $(I_p^z)_{i+1/2,k}^{n+1}$, $p = 1 \dots 4$ и потоковые переменные из инвариантов $\{\theta, w, u, \rho\}$ на новом временном слое на горизонтальных гранях согласно алгоритму описанному в разделе 3.3. А так же новое положение свободной поверхности $z_{*,0}^{n+1}$

- (3) Выполняем фазу 1 схемы согласно уравнениям (3.3)-(3.6), находим консервативные величины $\{\theta, u, w, \rho\}^{n+1/2}$ на полуцелом шаге по времени.
- (4) Выполняем фазу 2 схемы для направления OX согласно уравнениям (2.30), вычисляем потоковые величины на вертикальных границах $\{\delta\theta, u, w, \delta\rho\}^{n+1}$ и, согласно формулам (2.12), находим величины $\{\theta, \rho\}^{n+1}$.
- (5) Находим координаты z узлов сетки на новом временном слое согласно уравнениям (2.36).
- (6) Выполняем фазу 3 схемы, находим консервативные величины $\{\theta, u, w, \rho\}^{n+1}$ на новом шаге по времени по формуле полного шага (2.25).

Величина шага по времени должна быть выбрана из условия Куранта:

$$\tau^n = CFL \cdot \min_{i,k,p} \left(\frac{\Delta x}{|(\lambda_p^x)^n_{i+1/2,k+1/2}|} \right), \quad CFL < 1 \quad (3.40)$$

В отличие от выбора шага по времени в явной схеме (2.42), неявная схема по вертикальному направлению позволяет снять ограничения на шаг по времени по этому направлению.

Далее для обозначения этого алгоритма будем применять название «схема SABARET-INH».

3.5 Валидация схемы SABARET-INH на лабораторных экспериментах

Один из основных аспектов успешной разработки и применения численных алгоритмов заключается в их способности точно воспроизводить реальные физические процессы. В разделе 2.10 представлены результаты численного моделирования, проведенного с использованием явной схемы SABARET-NH, которые демонстрируют высокую степень согласованности с данными лабораторных экспериментов, проведенных в соответствии с методикой, описанной

в работе [66]. Эти результаты подтвердили применимость разработанной математической модели и использованной явной схемы для численных расчетов динамики стратифицированной жидкости.

В данном разделе представлены результаты численного моделирования лабораторных экспериментов по явно-неявной схеме CABARET-INH и сравнение эффективности расчетов по явной и явно-неявной схемам. Для валидации были выбраны эксперименты серии D из статьи [66], в которых изучалась динамика трехслойной жидкости в зависимости от плотностей слоев. Описание экспериментальной установки и схема начальной стратификация жидкости представлены на Рис. 2.6 и Рис. 2.7, соответственно. Параметры экспериментов собраны в Таб. 5. Подробное описание экспериментов приведено в разделе 2.10.

Во всех расчетах использовалась σ -сетка: 300 ячеек по горизонтали и 50 - по вертикали, совпадающая с расчетной сеткой в разделе о валидации явной схемы 2.10. Искусственная скорость звука выбиралась по формуле $c = \sqrt{\rho_0 g H}$, $g = 9.81 \text{ м/с}^2$. На боковых стенках и дне резервуара задавались условия непротекания: тангенсальная к границе компонента скорости равна нулю. Отдельно стоит отметить, что данный выбор искусственной скорости звука для всех моделируемых экспериментов приводил к выполнению критерия применимости приближения слабой сжимаемости (1.25), проверка критерия выполнялась на протяжении всех расчетов.

Для визуализации потоков жидкости в систему уравнений были включены три уравнения переноса маркеров (2.55). В начальный момент $\phi_1 = 1$ для всех ячеек ассоциированных с верхним слоем и при визуализации данному маркеру соответствует красный цвет. Аналогично, для среднего слоя $\phi_2 = 1$ и маркер обозначается желтым цветом, для нижнего слоя $\phi_3 = 1$ и при отображении использовался синий цвет.

Эксперимент D1. В начальный момент в отделенной перегородкой области находятся три слоя соленой жидкости: плотность верхнего слоя $\rho_U = 1001.8 \text{ кг/м}^3$, среднего - $\rho_M = 1005.3 \text{ кг/м}^3$ и нижнего - $\rho_L = 1044.9 \text{ кг/м}^3$. Отношение плотностей верхнего и среднего слоя составляло $\rho_{UM}^* = 0.45$, а среднего и нижнего - $\rho_{ML}^* = 0.14$.

На Рис. 3.1 представлены результаты расчетов по явно-неявной схеме, красными вертикальными линиями обозначено положение фронта в лаборатор-

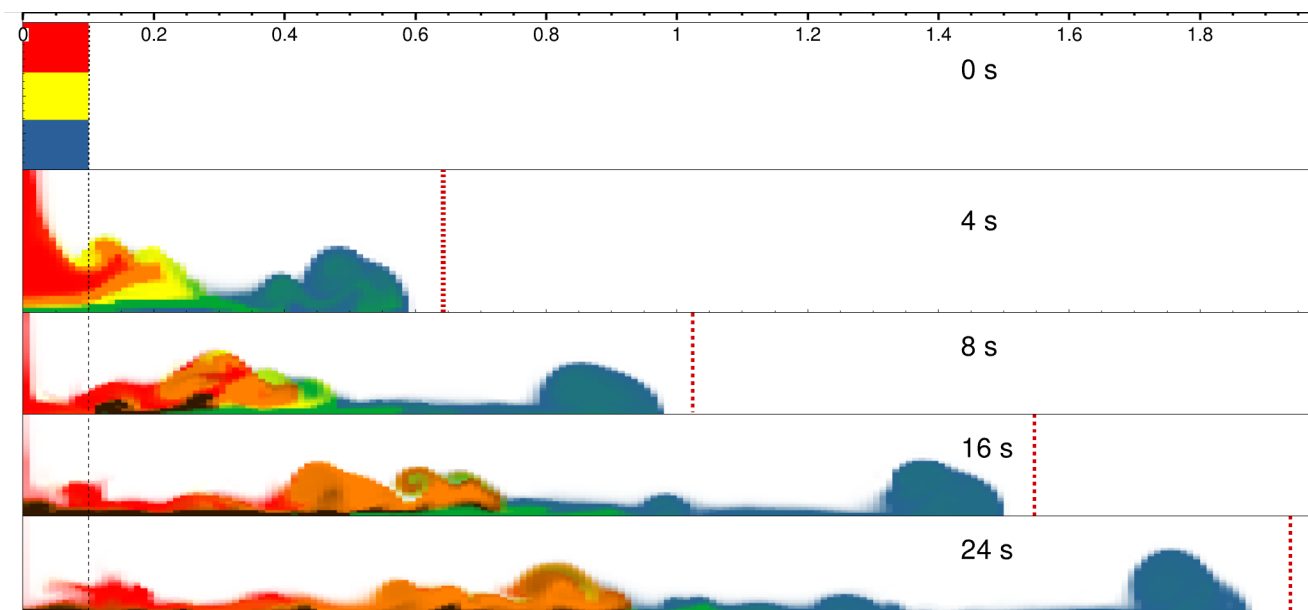


Рисунок 3.1 — Результаты моделирования по модели CABARET-INH и положение фронта в эксперименте D1 на моменты времени 0с, 4с, 8с, 16с, 24с.

Красным, синим и желтым цветами обозначена концентрация маркеров соленых жидкостей.

ном эксперименте в соответствующие моменты времени. Динамика жидкости в расчете совпадает с наблюдениями в эксперименте: в начальный момент времени, нижний слой жидкости, содержащий основную часть движущей плавучести и характеризующийся более высокой плотностью, опережает два верхних слоя, что приводит к формированию передней части фронта; близкие по плотности два верхних слоя $\rho_{UM}^* = 0.45$, быстро перемешиваются и не достигают фронта нижнего слоя, а интегрируются внутрь движущегося нижнего слоя, образуя характерную узкую зону перемешивания между нижним слоем и окружающей пресной водой.

Эксперимент D2. В начальный момент в отделенной перегородкой области находятся три слоя соленой жидкости: плотность верхнего слоя $\rho_U = 1001.8 \text{ кг/м}^3$, среднего - $\rho_M = 1023.2 \text{ кг/м}^3$ и нижнего - $\rho_L = 1026.8 \text{ кг/м}^3$. Отношение плотностей верхнего и среднего слоя составляло $\rho_{UM}^* = 0.12$, а среднего и нижнего - $\rho_{ML}^* = 0.87$.

Два нижних слоя имеют одинаковую плотность, они быстро перемешиваются, что соответствует наблюдениям в серии В. Верхний слой отстает, образуя тонкий удлиненный клин

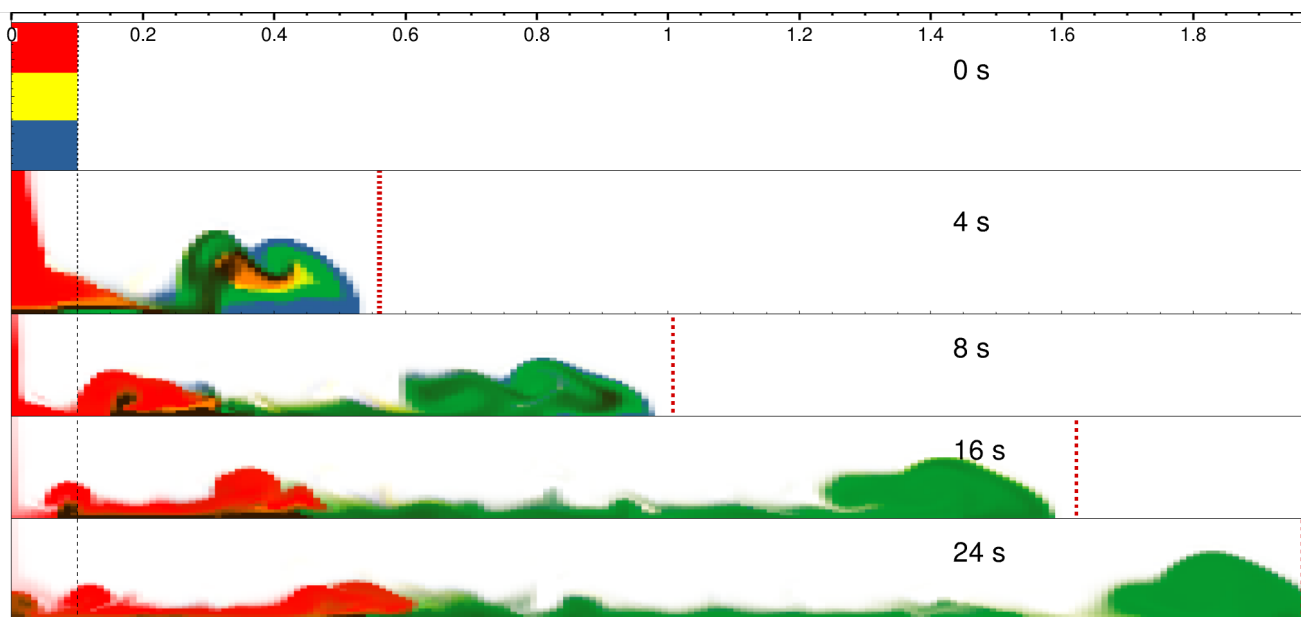


Рисунок 3.2 — Результаты моделирования по модели CABARET-INH и положение фронта в эксперименте D2 на моменты времени 0с, 4с, 8с, 16с, 24с. Красным, синим и желтым цветами обозначена концентрация маркеров соленых жидкостей.

Эксперимент D3. В начальный момент в отделенной перегородкой области находятся три слоя соленой жидкости: плотность верхнего слоя $\rho_U = 1012.5 \text{ кг/м}^3$, среднего - $\rho_M = 1016.0 \text{ кг/м}^3$ и нижнего - $\rho_L = 1023.2 \text{ кг/м}^3$. Отношение плотностей верхнего и среднего слоя составляло $\rho_{UM}^* = 0.8$, а среднего и нижнего - $\rho_{ML}^* = 0.7$.

В данном эксперименте движущая плавучесть достаточно равномерно распределена между тремя слоями, они быстро перемешиваются во время первоначального распространения. Средний слой клином вторгается в нижний слой, и они оба смешиваются. Затем верхний слой вторгается в это новое смешанное течение, и все течение тщательно перемешивается.

Сравнение результатов явной и явно-неявной схемы. Качественное сравнение результатов можно отметить, что явно-неявная схема обладает большей схемной вязкостью, это выражается в меньшем турбулентном следе за передней частью фронта течения. Стоит отметить, что распространение фронтов по двум схемам практически совпадает.

Для сравнения эффективности расчетов по двум схемам были проведены расчеты без выдачи файлов для визуализации и без определения положения и скорости фронта на одной вычислительной станции. В качестве моде-

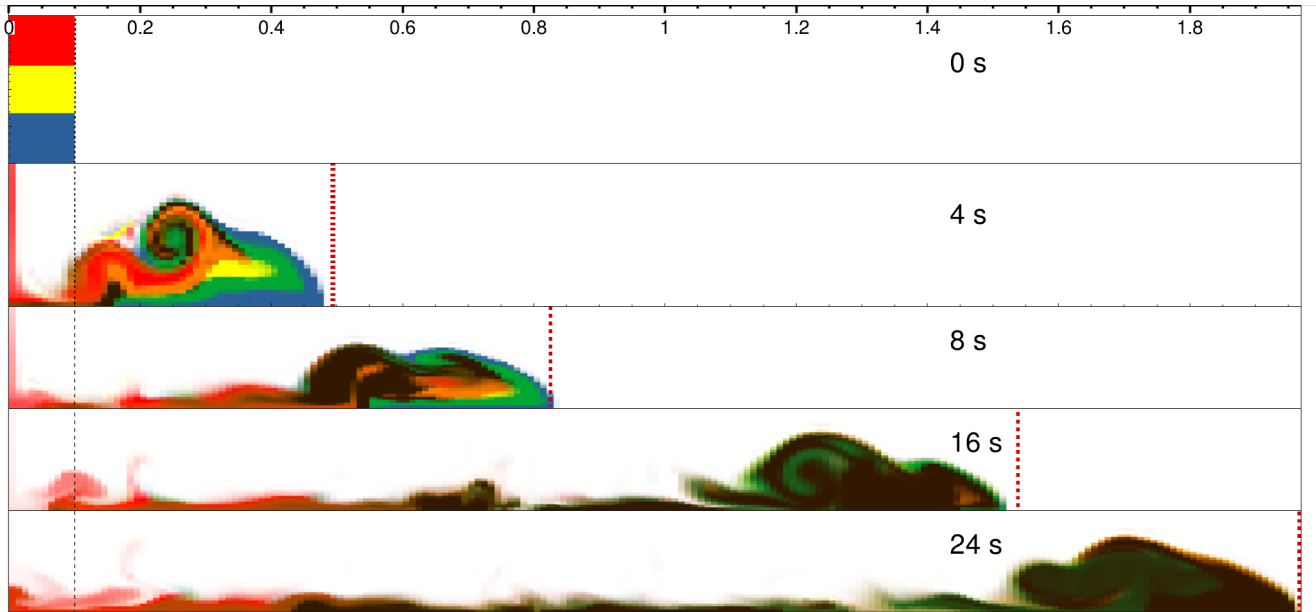


Рисунок 3.3 — Результаты моделирования по модели SABARET-INH и положение фронта в эксперименте D3 на моменты времени 0с, 4с, 8с, 16с, 24с. Красным, синим и желтым цветами обозначена концентрация маркеров соленых жидкостей.

лируемой задачи был выбран первый эксперимент серии D, все расчеты выполнялись до внутреннего времени $t = 25$ с, значение искусственной скорости звука выбиралось согласно формуле $c = \sqrt{gH}$. Были проведены расчеты на серии вычислительных сеток $[N_x \times N_z]$ (N_x - количество ячеек по горизонтали, N_z - по вертикали) с различным аспектным соотношением размеров ячеек $k = \Delta x / \Delta z$: $[300 \times 20]$, $k=1$; $[300 \times 50]$, $k=2.5$; $[300 \times 100]$, $k=5$. На рассматриваемых сетках, согласно формуле (2.42), основным ограничением на шаг по времени по явной схеме является вертикальное направление $\tau_{ex}^n = CFL \cdot \min_{i,k,p} \left(\Delta z / \left| (\lambda_p^x)^n_{i+1/2,k+1/2} \right| \right)$. Благодаря введенной неявности вдоль вертикального направления, расчетный шаг по времени в явно-неявной схеме ограничивается только устойчивостью явной схемы по горизонтальному направлению (3.40) $\tau_{ei} = CFL \cdot \min_{i,k,p} \left(\Delta x / \left| (\lambda_p^x)^n_{i+1/2,k+1/2} \right| \right)$. Таким образом отношение шагов по времени в схемах при одинаковых числах Куранта:

$$\frac{\tau_{ei}}{\tau_{ex}} \approx \frac{\Delta x}{\Delta z} = k \quad (3.41)$$

В Таб. 6 представлены данные отражающие затраты процессорного времени для выполнения одного индивидуального расчета для каждой из рассмат-

Таблица 6 — Сравнение вычислительной эффективности по явной схеме CABARET-NH и явно-неявной CABARET-INH

Сетка	k	T_{ex} [с]	T_{ei} [с]	T_{ex}/T_{ei}
300×20	1	59	63	0.94
300×50	2.5	374	163	2.29
300×100	5	1691	376	4.50

риваемых численных схем: T_{ex} - время по явной схеме CABARET-NH; T_{ei} - время по явно-неявной схеме CABARET-INH. Полученные данные подтверждают теоретическую оценку ускорения расчета по явно-неявной схеме (3.41) относительно явной схемы. Один расчетный шаг по явно-неявной схеме на 6-10% медленнее на рассмотренных сетках, что подтверждает высокую эффективность гиперболической прогонки - алгоритма разрешения введенной неявности.

Таким образом, сравнение между явной и явно-неявной схемами позволяют сделать несколько ключевых выводов.

Во-первых, применение явно-неявной схемы CABARET-INH существенно ускоряет расчеты на вычислительных сетках с высоким аспектным отношением ячеек. Это важное достоинство, которое позволяет эффективно проводить моделирование динамики стратифицированных течений в больших и вычислительно требовательных областях.

Во-вторых, несмотря на увеличение шага по времени при использовании явно-неявной схемы, результаты расчетов подтверждают высокое качество получаемых данных. Это гарантирует точность и надежность моделирования без значительной потери качества результатов.

Исходя из этих наблюдений, можно заключить, что явно-неявная схема CABARET-INH представляет собой эффективный и вычислительно экономичный инструмент для моделирования стратифицированных течений жидкости, особенно в условиях высокого аспектного отношения вычислительных ячеек. Эта схема дает возможность ускорить расчеты, что позволяет исследователям более эффективно исследовать динамику сложных систем в океанологии и других областях гидродинамики, не теряя при этом точность и качество получаемых данных.

Глава 4. Моделирование трехмерных течений

В предыдущих главах были описаны схемы для двухмерных задач динамики жидкости и протестированы алгоритмы построенные по ним. В данной главе рассматривается численное моделирование трехмерных течений неоднородной жидкости. Первый подраздел представляет описание трехмерной негидростатической модели динамики слабосжимаемой жидкости, которая лежит в основе проведенных исследований. Затем внимание уделяется изменениям в явно-неявной численной схеме CABARET-INH при переходе к системе трехмерных уравнений динамики неоднородной жидкости.

В следующем подразделе рассматривается применение разработанной численной схемы в контексте численного моделирования существенно трехмерных течений неоднородной жидкости в лабораторных экспериментах. Это позволяет оценить адекватность разработанной математической модели и численного алгоритма.

Перед переходом к моделированию течений в масштабах реальных морских акваторий рассматривается вопрос аппроксимации дифференциальных операторов, отвечающих за физические процессы которые необходимо учитывать на данных масштабах: вязкость, диффузия и сила Кориолиса. Для сохранения эффективности явно-неявной схемы данные операторы аппроксимируются явно вдоль горизонтальных направлений и неявно по вертикали. Приводится алгоритм разрешения введенной неявности.

В завершении главы представлено численное моделирование динамики Черного и Азовского морей, что служит практическим примером применения разработанных численных методов к задачам реальных геофизических объектов.

4.1 Трехмерная негидростатическая модель динамики слабосжимаемой жидкости

Рассмотрим систему трехмерных уравнений гидродинамики в приближении Буссинеска с учетом приближения слабой сжимаемости жидкости в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{J} \frac{\partial J\theta}{\partial t} + \frac{\partial\theta u}{\partial x} + \frac{\partial\theta v}{\partial y} + \frac{\partial\theta(w - \dot{z})}{\partial z} &= 0, \\
\frac{1}{J} \frac{\partial J\theta u}{\partial t} + \frac{\partial\theta u^2}{\partial x} + \frac{\partial\theta uv}{\partial y} + \frac{\partial\theta(w - \dot{z})u}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial\delta P}{\partial x} &= 0, \\
\frac{1}{J} \frac{\partial J\theta v}{\partial t} + \frac{\partial\theta uv}{\partial x} + \frac{\partial\theta v^2}{\partial y} + \frac{\partial\theta(w - \dot{z})v}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial\delta P}{\partial y} &= 0, \\
\frac{1}{J} \frac{\partial J\theta w}{\partial t} + \frac{\partial\theta uw}{\partial x} + \frac{\partial\theta vw}{\partial y} + \frac{\partial\theta w(w - \dot{z})}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial\delta P}{\partial z} &= - \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) g, \\
\frac{1}{J} \frac{\partial J\rho\theta}{\partial t} + \frac{\partial\rho\theta u}{\partial x} + \frac{\partial\rho\theta v}{\partial y} + \frac{\partial\rho\theta(w - \dot{z})}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial z}{\partial t} = \dot{z}, \quad \delta P = c^2 (\theta - \theta_0), \quad \theta_0 = 1, &
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где (x, y, z) — эйлерова декартова система координат, которая связана с лагранжевой системой координат (x', y', z') якобианом перехода $J = \partial(x, y, z) / \partial(x', y', z')$, (u, v, w) — компоненты вектора скорости в системе координат (x, y, z) , \dot{z} — скорость перемещения координаты z : $\dot{z} = 0$ соответствует Эйлеровым координатам, при $\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial t}$ — Лагранжевым, остальные параметры совпадают с параметрами системы (1.23). Координаты по горизонтальным направлениям OX и OY — считаем Эйлеровыми и неподвижными, что дает $J = \partial z / \partial z'$.

Система уравнений (4.1) описывает динамику жидкости в области $(x, y, z) \in \Omega$, $\Omega = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \times [B(x, y), z_{\max}(x, y, t)]$, ограниченной жесткими стенками при $x = x_{\min}$, $x = x_{\max}$, $y = y_{\min}$, $y = y_{\max}$, некоторым неровным дном при $z = B(x, y)$, а при $z = z_{\max}(x, y, t)$ — свободной поверхностью. Таким образом, система (4.1) дополняется следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned}
u(x_{\min}, y, z, t) = 0, \quad u(x_{\max}, y, z, t) = 0, \\
v(x, y_{\min}, z, t) = 0, \quad v(x, y_{\max}, z, t) = 0,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial B(x,y)}{\partial x}u(x,y,B(x,y),t) + \frac{\partial B(x,y)}{\partial y}v(x,y,B(x,y),t) - w(x,y,B(x,y),t) = 0, \quad (4.2)$$

$$\delta P(x,y,z_{\max}(x,y,t),t) = -\rho_0 g(H_0 - z_{\max}(x,y,t)), \quad (4.3)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial y} - w \right) \Big|_{z=z_{\max}(x,y,t)} = 0. \quad (4.4)$$

Собственные значения системы уравнений (4.1) являются действительными числами, поэтому система уравнений (4.1) является гиперболической. Для дальнейшего построения схемы балансно-характеристического типа, нам понадобится характеристическая форма системы уравнений (4.1) по каждому из направлений x, y, z . Подробное описание методики построения характеристической формы было приведено в Разделе 2.2. Здесь приведем финальные результаты данной методики - вид локальных инвариантов Римана и их характеристических скоростей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{\Gamma}^\bullet}{\partial t} + \Lambda^\bullet \frac{\partial \mathbf{\Gamma}^\bullet}{\partial \bullet} &= \mathbf{G}^\bullet, \quad \bullet = \{x, y, z\}, \\ \mathbf{\Gamma}^x &= (I_m^x)^T = \left(u + \left\langle \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \theta}} \right\rangle \delta\theta, u - \left\langle \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \theta}} \right\rangle \delta\theta, v, w, \rho \right)^T, \\ \Lambda^x &= \text{diag}(\lambda_m^x), \quad \lambda_1^x = u + \frac{c}{\sqrt{\rho_0}}, \quad \lambda_2^x = u - \frac{c}{\sqrt{\rho_0}}, \quad \lambda_3^x = \lambda_4^x = \lambda_5^x = u, \\ \mathbf{\Gamma}^y &= (I_m^y)^T = \left(v + \left\langle \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \theta}} \right\rangle \delta\theta, v - \left\langle \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \theta}} \right\rangle \delta\theta, u, w, \rho \right)^T, \\ \Lambda^y &= \text{diag}(\lambda_m^y), \quad \lambda_1^y = v + \frac{c}{\sqrt{\rho_0}}, \quad \lambda_2^y = v - \frac{c}{\sqrt{\rho_0}}, \quad \lambda_3^y = \lambda_4^y = \lambda_5^y = v, \\ \mathbf{\Gamma}^z &= (I_m^z)^T = \left(w + \left\langle \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \theta}} \right\rangle \delta\theta, w - \left\langle \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \theta}} \right\rangle \delta\theta, u, v, \rho \right)^T, \\ \Lambda^z &= \text{diag}(\lambda_m^z), \quad \lambda_1^z = w - \dot{z} + \frac{c}{\sqrt{\rho_0}}, \quad \lambda_2^z = w - \dot{z} - \frac{c}{\sqrt{\rho_0}}, \quad \lambda_3^z = \lambda_4^z = \lambda_5^z = w - \dot{z}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $\mathbf{\Gamma}^\bullet$ — векторы локальных инвариантов Римана [49], λ_m^\bullet — собственные значения по соответствующим направлениям, \mathbf{G}^\bullet — векторы правых частей, выражения для которых можно выписать явно, но для дальнейшего построения схемы данные члены не используются. Величины в угловых скобках $\langle * \rangle$ в (4.5) считаются постоянными в пределах каждой пространственно-временной ячейки и их значения вычисляются по консервативным переменным в центре ячейки.

4.2 Явно- неявная численная схема CABARET-INH для системы трехмерных уравнений динамики неоднородной жидкости

Опишем методику построения явно- неявной схемы КАБАРЕ для системы уравнений (4.1), явной вдоль направлений x и y и неявной вдоль z . Введение неявности только по одному вертикальному направлению позволяет сохранить вычислительную эффективность алгоритма и снять ограничения на шаг по времени, вызванные размерами ячеек сетки по вертикальному направлению.

Пусть имеется некоторая структурированная шестигранная сетка с прямыми ребрами по оси z и косыми по осям x и y , узлы которой могут передвигаться по оси z : $\omega_h = \{(x_i, y_j, z_{i,j,k}) \mid i = \overline{0, N_x}, j = \overline{0, N_y}, k = \overline{0, N_z}\}$, $x_{i+1} - x_i = h_{i+1/2}^x$, $y_{j+1} - y_j = h_{j+1/2}^y$, $z_{i,j,0} = z_{\max}(x_{i,j}, y_{i,j})$, $z_{i,j,N_z} = B(x_{i,j}, y_{i,j})$. Пусть также имеется неравномерная сетка по времени $\omega_\tau = \{t_n \mid t_{n+1} - t_n = \tau_n, n = \overline{0, K-1}\}$. Зададим в центрах ячеек сетки $\omega_h \times \omega_\tau$ так называемые консервативные переменные: $\varphi_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^n$ — на целых слоях по времени, $\varphi_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2}$ — на полуцелых слоях по времени. В центрах граней сетки зададим так называемые потоковые переменные на целых слоях по времени: $\psi_{i+1/2, j+1/2, k}^n$, $\psi_{i+1/2, j, k+1/2}^n$ и $\psi_{i, j+1/2, k+1/2}^n$. В качестве консервативных и потоковых переменных зададим полный набор неизвестных рассматриваемой системы: $\{\varphi, \psi\} = \{\rho, \theta, u, v, w, \delta P\}$.

Балансные фазы. Первая балансная фаза схемы CABARET-INH представляет собой консервативную аппроксимацию законов сохранения (4.1) по методу конечного объема для каждой ячейки сетки (см. обозначения на Рис. 4.1):

$$\begin{aligned} & \frac{(Vs)_c^{n+1/2} - (Vs)_c^n}{\tau_n/2} + \\ & + \mathbf{a}_R^n (z_{56}^n - z_{12}^n) h_c^y - \mathbf{a}_L^n (z_{78}^n - z_{34}^n) h_c^y + \mathbf{a}_D^n (z_{12}^n - z_{34}^n) h_c^y - \mathbf{a}_T^n (z_{56}^n - z_{78}^n) h_c^y + \\ & + \mathbf{b}_F^n (z_{67}^n - z_{23}^n) h_c^x - \mathbf{b}_B^n (z_{58}^n - z_{14}^n) h_c^x + \mathbf{b}_D^n (z_{23}^n - z_{14}^n) h_c^x - \mathbf{b}_T^n (z_{67}^n - z_{58}^n) h_c^x + \\ & + \mathbf{d}_T^{n+1} h_c^x h_c^y - \mathbf{d}_D^{n+1} h_c^x h_c^y = \mathbf{f}(\rho_c^n) V_c^n, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где V_c^n — объем ячейки на слое по времени n , h_c^x и h_c^y — размеры ячейки по направлениям x и y соответственно, z_{pm} — z -координата центра ребра сетки,

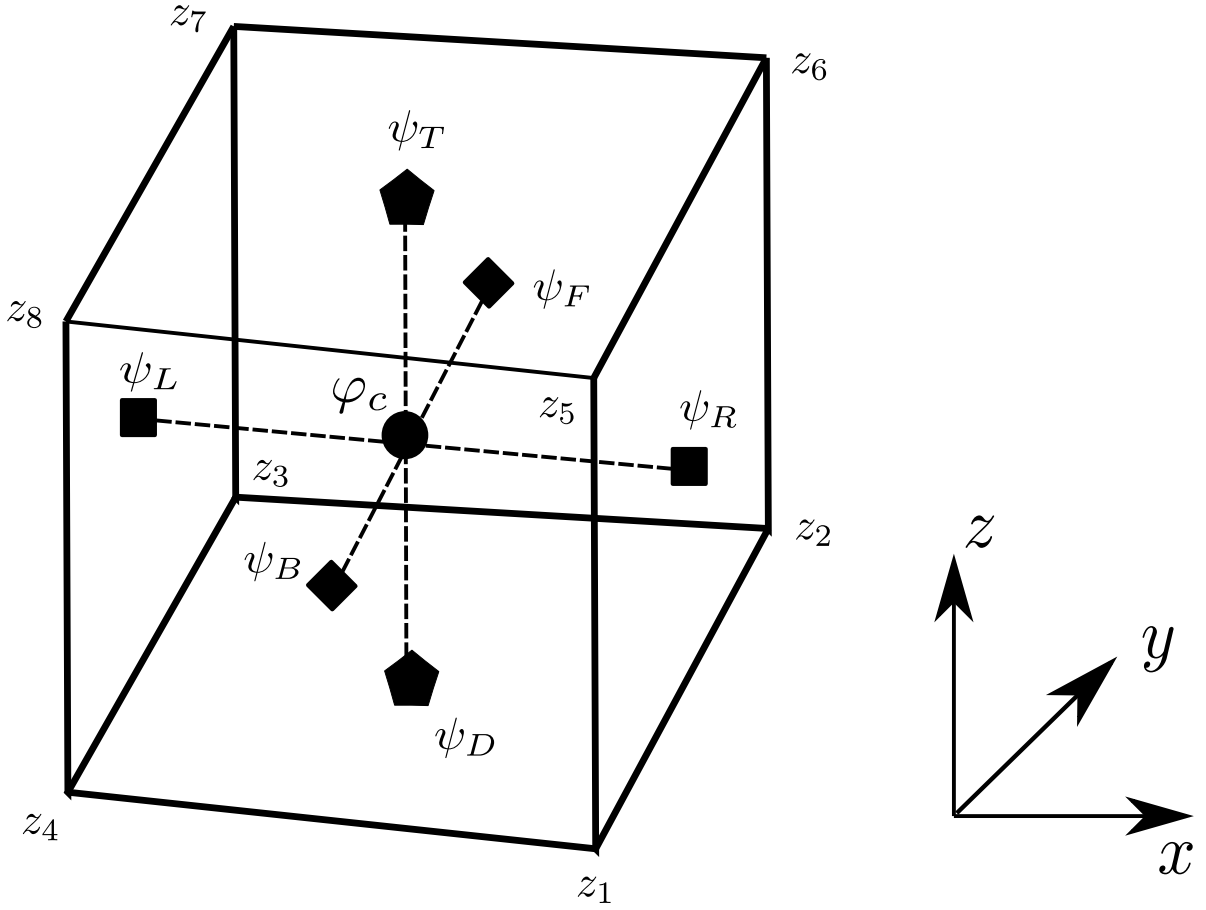


Рисунок 4.1 — Шаблон консервативных фаз (4.6) и (4.7)

соединяющего узлы с z -координатами z_p и z_m . Данные разностные уравнения записаны в векторной форме и используют следующие векторы:

$$\mathbf{s} = (\theta, \theta u, \theta v, \theta w, \theta \rho)^T,$$

$$\mathbf{a} = (\theta u, \theta u^2 + \delta P / \rho_0, \theta uv, \theta uw, \theta \rho u)^T,$$

$$\mathbf{b} = (\theta v, \theta uv, \theta v^2 + \delta P / \rho_0, \theta vw, \theta \rho v)^T,$$

$$\mathbf{d} = (\theta(w - \dot{z}), \theta u(w - \dot{z}), \theta v(w - \dot{z}), \theta w(w - \dot{z}) + \delta P / \rho_0, \theta \rho(w - \dot{z}))^T,$$

$$\mathbf{f}(\rho) = (0, 0, 0, -[\rho / \rho_0 - 1]g, 0)^T.$$

Основным отличием балансной фазы (4.6) от первой фазы явного алгоритма, описанного в Главе 2, является неявная аппроксимация потоков z -компоненты импульса. По формулам (4.6) необходимо вычислить значения консервативных переменных на промежуточном слое $\varphi_c^{n+1/2}$, что нельзя сделать явно, пока неизвестны потоковые переменные на горизонтальных гранях ячеек $\psi_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1}$. Вычисление этих потоковых переменных происходит на характеристической фазе алгоритма, которая будет описана в следующем раз-

деле. Балансная фаза (4.6) и характеристическая фаза вместе образуют этап “предиктор” алгоритма.

После нахождения потоковых переменных на горизонтальных гранях и консервативных переменных на промежуточном слое по формулам (4.6) осуществляется явное вычисление оставшихся потоковых переменных $\psi_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1}$ и $\psi_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1}$ по стандартным для схем семейства КАБАРЕ процедурам линейной экстраполяции инвариантов Римана, описанным в [49]. Затем проводится вычисление консервативных переменных на следующем слое по времени φ_c^{n+1} с помощью следующей консервативной аппроксимации законов сохранения (4.1) по методу конечного объема для каждой ячейки сетки:

$$\begin{aligned}
& \frac{(V\mathbf{s})_c^{n+1} - (V\mathbf{s})_c^n}{\tau_n} + \\
& + 0.5 [\mathbf{a}_R^n(z_{56}^n - z_{12}^n)h_c^y - \mathbf{a}_L^n(z_{78}^n - z_{34}^n)h_c^y + \mathbf{a}_D^n(z_{12}^n - z_{34}^n)h_c^y - \\
& - \mathbf{a}_T^n(z_{56}^n - z_{78}^n)h_c^y + \mathbf{b}_F^n(z_{67}^n - z_{23}^n)h_c^x - \mathbf{b}_B^n(z_{58}^n - z_{14}^n)h_c^x + \\
& + \mathbf{b}_D^n(z_{23}^n - z_{14}^n)h_c^x - \mathbf{b}_T^n(z_{67}^n - z_{58}^n)h_c^x + \mathbf{d}_T^n h_c^x h_c^y - \mathbf{d}_D^n h_c^x h_c^y] + \\
& + 0.5 [\mathbf{a}_R^{n+1}(z_{56}^{n+1} - z_{12}^{n+1})h_c^y - \mathbf{a}_L^{n+1}(z_{78}^{n+1} - z_{34}^{n+1})h_c^y + \\
& + \mathbf{a}_D^{n+1}(z_{12}^{n+1} - z_{34}^{n+1})h_c^y - \mathbf{a}_T^{n+1}(z_{56}^{n+1} - z_{78}^{n+1})h_c^y + \\
& + \mathbf{b}_F^{n+1}(z_{67}^{n+1} - z_{23}^{n+1})h_c^x - \mathbf{b}_B^{n+1}(z_{58}^{n+1} - z_{14}^{n+1})h_c^x + \\
& + \mathbf{b}_D^{n+1}(z_{23}^{n+1} - z_{14}^{n+1})h_c^x - \mathbf{b}_T^{n+1}(z_{67}^{n+1} - z_{58}^{n+1})h_c^x + \\
& + \mathbf{d}_T^{n+1} h_c^x h_c^y - \mathbf{d}_D^{n+1} h_c^x h_c^y] = 0.5 [\mathbf{f}(\rho_c^n)V_c^n + \mathbf{f}(\rho_c^{n+1})V_c^{n+1}]. \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Балансная фаза (4.7) аппроксимирует исходные уравнения со вторым порядком по времени и пространству и называется этапом “корректор”.

Характеристическая фаза. Характеристическая фаза в схемах класса КАБАРЕ представляет собой линейную экстраполяцию локальных инвариантов Римана (4.5) по направлениям, определяемым собственными значениями системы на полуцелом слое. Так, для инвариантов по направлению z справед-

ливы следующие формулы:

$$(I_m^z)^{n+1}_{i+1/2,j+1/2,k} = \begin{cases} 2(I_m^z)^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} - (I_m^z)^n_{i+1/2,j+1/2,k+1}, & \text{если } \tilde{\lambda}_m > 0, \\ 2(I_m^z)^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2,k-1/2} - (I_m^z)^n_{i+1/2,j+1/2,k-1}, & \text{если } \tilde{\lambda}_m < 0 \\ 0.5 \left[(I_m^z)^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2,k-1/2} + (I_m^z)^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} \right], & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\tilde{\lambda}_m = 0.5 \left[(\lambda_m^z)^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2,k-1/2} + (\lambda_m^z)^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} \right] \quad (4.8)$$

Приближение слабой сжимаемости позволяет рассматривать лишь дозвуковые течения жидкости, при которых направление переноса инвариантов I_1^z и I_2^z всегда фиксировано, что упрощает формулы (4.8):

$$(I_1^z)^{n+1}_{i+1/2,j+1/2,k} = 2(I_1^z)^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} - (I_1^z)^n_{i+1/2,j+1/2,k+1},$$

$$(I_2^z)^{n+1}_{i+1/2,j+1/2,k} = 2(I_2^z)^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2,k-1/2} - (I_2^z)^n_{i+1/2,j+1/2,k-1}. \quad (4.9)$$

Введенная неявность только вдоль вертикального направления и компактность вычислительного шаблона схемы КАБАРЕ позволяют сохранить алгоритм разрешения неявности, описанный для двумерных уравнений динамики жидкости в Разделах 3.2-3.3. Изменения претерпевают только формулы для правых частей (3.9) системы уравнений (3.8), в запись которых добавляются соответствующие аппроксимации производных по направлению OY .

4.3 Численное моделирование трехмерных течений неоднородной жидкости в лабораторных экспериментах

Для валидации численного алгоритма в существенно трехмерной постановке был выбран эксперимент, описанный в статье [69]. Лабораторная установка (рис. 4.2) состоит из прямоугольного бассейна, разделенного жесткой стенкой на две части квадратного сечения со стороной $L = 1$ м, заполненных прозрачной водопроводной водой плотности $\rho_2 = 1000$ кг/м³ и окрашенной соленой водой плотности $\rho_1 > \rho_2$. Оба резервуара заполняются на одинаковую высоту $h = 0.15$ м. В центре стены есть откатная перегородка шириной $d = 0.2$ м.

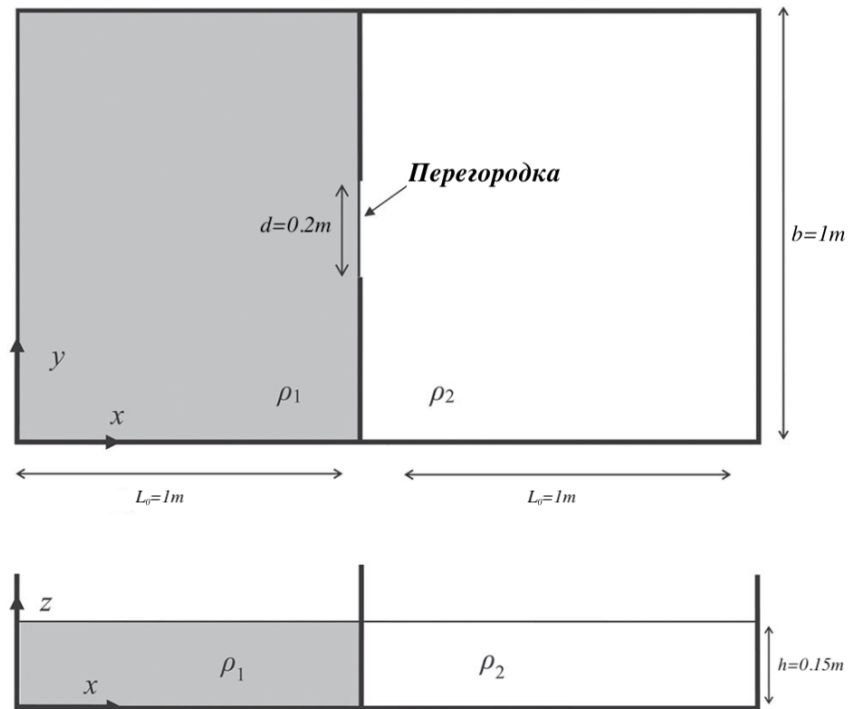
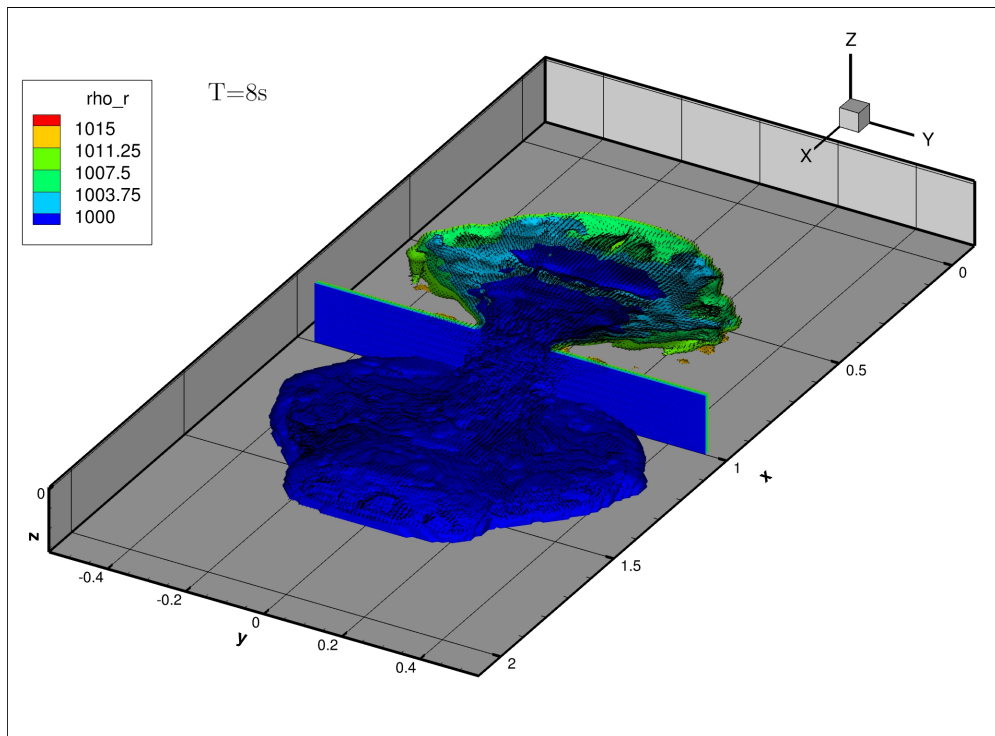


Рисунок 4.2 — Схема экспериментальной установки, вид сверху и сбоку

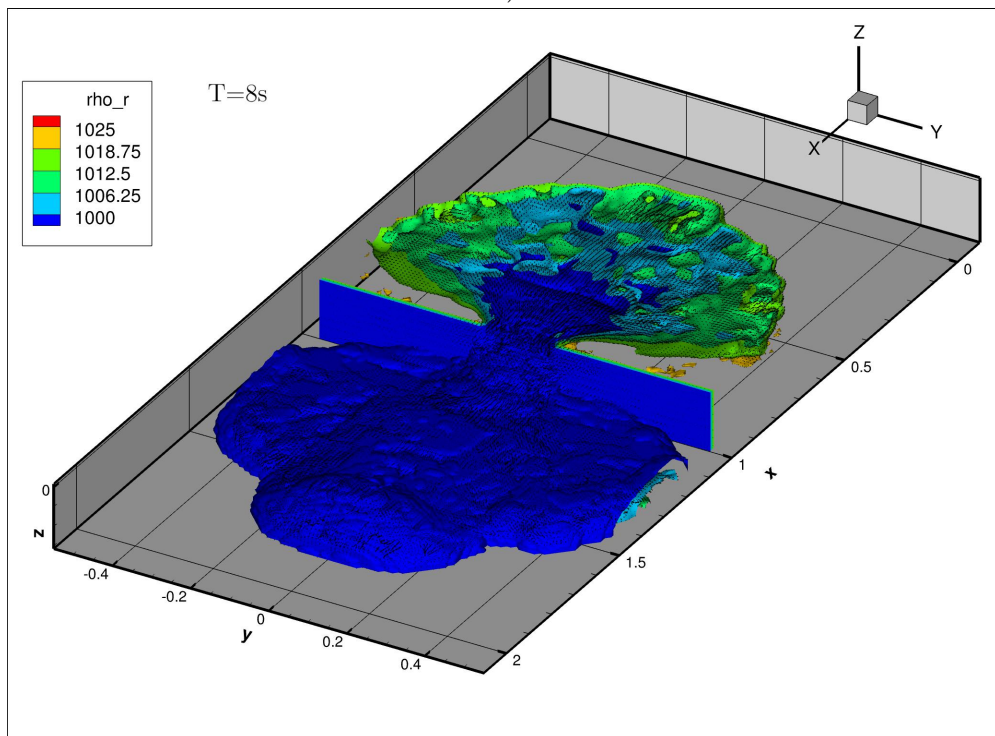
Рассматривались два эксперимента с ровной поверхностью дна, отличающиеся плотностью соленой жидкости. В первом эксперименте использовалась плотность $\rho_1 = 1015 \text{ кг/м}^3$, во втором — $\rho_1 = 1025 \text{ кг/м}^3$.

После того как перегородка убрана, возникает ненулевой градиент давления между жидкостями резервуаров, создавая тем самым гравитационное течение. Более плотная жидкость из левого резервуара распространяется в придонном слое в правый резервуар. Пресная жидкость из правой части установки перетекает влево в приповерхностном слое. На рис. 4.3 приведены изоповерхности плотности в расчетах по модели SABARET-INH на момент $t = 8 \text{ с}$ для двух экспериментов. Динамика стратифицированной жидкости качественно совпадает с экспериментальными данными.

Расчеты лабораторных тестов проводились по численным моделям SABARET-NH и SABARET-INH со свободной поверхностью в приближении «мягкой крышки» на сетке 200×100 ячеек на 30 слоях по вертикали с числом Куранта $CFL = 0.3$ и искусственной скоростью звука $c = \sqrt{gh}$, $g = 9.8 \text{ м/с}^2$. Результаты расчетов приводятся только по модели SABARET-INH, так



а)



б)

Рисунок 4.3 — Изоповерхности плотности при $t = 8$ с в расчетах по модели CABARET-INH: а) $\rho_1 = 1015$ кг/м³; б) $\rho_1 = 1025$ кг/м³

как результаты по явной и явно-неявной схеме неотличимы на приведенных графиках. Аспектное отношение в используемых вычислительных ячейках:

$$\frac{h}{h^z} = 2,$$

где $h = h^x = h^y$ — шаг сетки по осям x и y , h^z — шаг сетки по оси z .

Стоит отдельно отметить, что расчетное время до достижения $t = 10$ с по численным моделям CABARET-NH и CABARET-INH отличалось в 1.94 раза за счет большего расчетного шага по времени в явно-неявной схеме, что подтверждает на практике высокую эффективность алгоритма решения разностных уравнений построенной явно-неявной схемы.

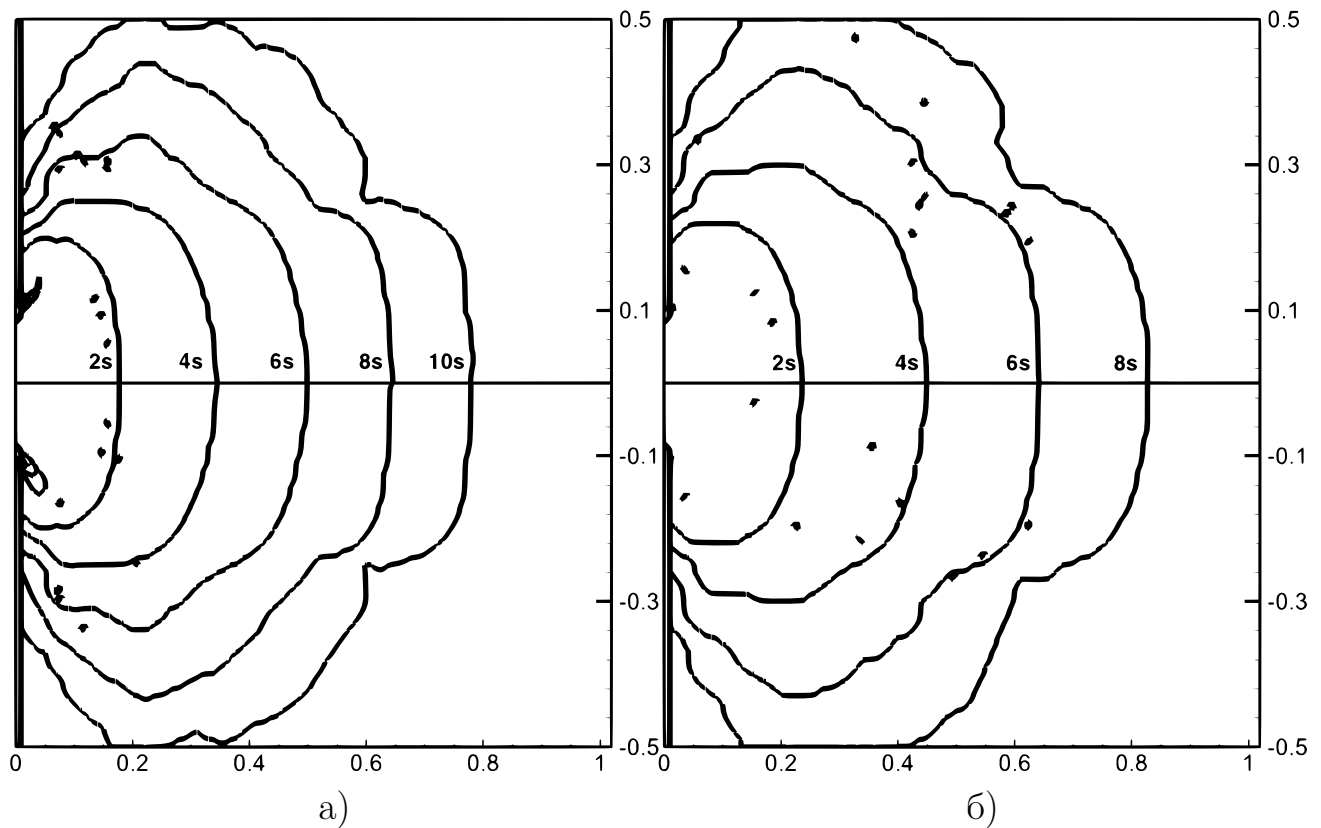


Рисунок 4.4 — Положение фронта гравитационного течения в разные моменты времени (2 с, 4 с, 6 с, 8 с, 10 с) из расчетов по модели CABARET-INH при разных плотностях: а) $\rho_1 = 1015$ кг/м³; б) $\rho_1 = 1025$ кг/м³

Рис. 4.4 отражает положение фронта потока более плотной жидкости на разные моменты времени. Положение фронта определялось аналогично описанному в статье [69]: построенная изоповерхность для плотности $\rho = 1000.18$ кг/м³ проецировалась на плоскость $z = 0$, полученный контур определялся

как положение фронта. Аналогичные графики по экспериментальным данным представлены в статье [69], качественное сравнение показывает хорошую согласованность данных расчета с результатами эксперимента.

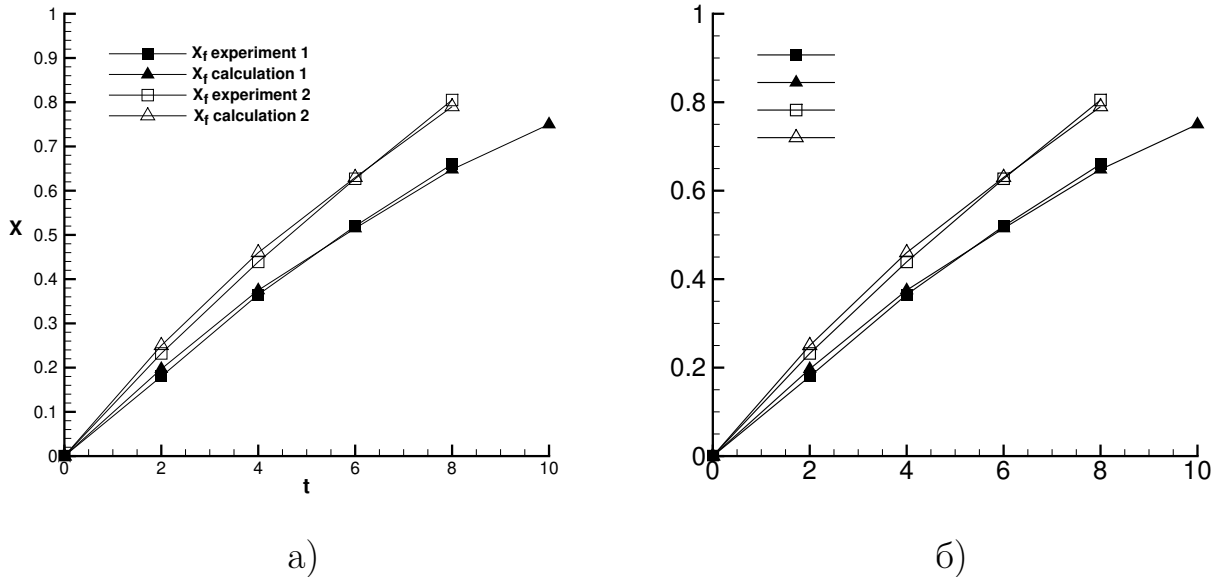


Рисунок 4.5 — Расчетное (по модели CABARET-INH) и экспериментальное максимальное положение фронта в зависимости от времени в эксперименте 1 ($\rho_1 = 1015$ кг/м³) и в эксперименте 2 ($\rho_1 = 1025$ кг/м³):
вдоль осей: а) x ; б) y

Для количественного сравнения полученных положений фронта с экспериментальными данными построены графики максимального распространения фронта по каждому из горизонтальных направлений (x и y), показывающие ширину фронта распространения более плотной жидкости в правом резервуаре (Рис. 4.5). Экспериментальные данные по двум постановкам, представленные в статье [69], ограничены первыми 8 с. Приведенные данные и качественное сравнение показывают хорошее совпадение результатов расчетов с экспериментальными данными. Наличие отклонений от экспериментальных данных может быть объяснено отсутствием модели учета выкатывания перегородки [70] и погрешностью измерений самого эксперимента.

Для подтверждения робастности алгоритма и согласованности результатов расчета при разных аспектных отношениях была проведена серия расчетов на сгущающихся по вертикальному направлению сетках. В расчетах использовались сетки 100×50 ячеек с $N_\kappa = 15 \cdot \kappa/2$ слоями по вертикали, где

$\kappa \in \{2, 4, 8, 16\}$ — аспектное отношение. Число Куранта на всех сетках выбиралось равным 0.3 и искусственная скорость звука $c = \sqrt{gh} = 1.21$ м/с.

На рис. 4.6 приведены положения фронта гравитационного потока на разные моменты времени, черной линии соответствует $\kappa = 2$, красной — $\kappa = 4$, зеленой — $\kappa = 8$ и синей — $\kappa = 16$. Фронт гравитационного потока определялся аналогично рис. 4.4. Положения фронтов в расчетах отличаются на величину, сравнимую с длиной одной ячейки по горизонтали, что может быть объяснено погрешностью алгоритма вычисления изоповерхности и малым разрешением по вертикали для сетки при $\kappa = 2$.

Дополнительно были построены линии постоянной высоты поверхности гравитационного потока (изоповерхность $\rho = 1000.18$ кг/м³) на момент времени $t = 8$ с (рис. 4.7), что позволяет сравнить расчеты по вертикальному направлению. При всех аспектных отношениях наблюдается ядро потока, движущееся от границы раздела двух резервуаров в положительном направлении оси x высотой от 5 до 7.5 см при $t = 8$ с. Так же в стороны от основного потока отходят возмущения, высоты которых составляют от 2.5 до 5 см при $t = 8$ с.

Проведенные расчеты подтверждают робастность построенной явно-неявной схемы при разных аспектных соотношениях и показывают согласованность получаемых результатов.

4.4 Неявная схема расчета вязкости, диффузии и сил Кориолиса

Далее будет рассматриваться только явно-неявная схема SABARET-INH.

Перед переходом к моделированию течений в масштабах реальных морских акваторий рассмотрим вопрос аппроксимации дифференциальных операторов, отвечающих за физические процессы, которые необходимо учитывать на данных масштабах: вязкость, диффузия и сила Кориолиса. Для сохранения эффективности явно-неявной схемы данные операторы аппроксимируются явно вдоль горизонтальных направлений и неявно по вертикали.

Добавленные процессы влияют только на балансные фазы схемы SABARET-INH. Для построения численного алгоритма воспользуемся мето-

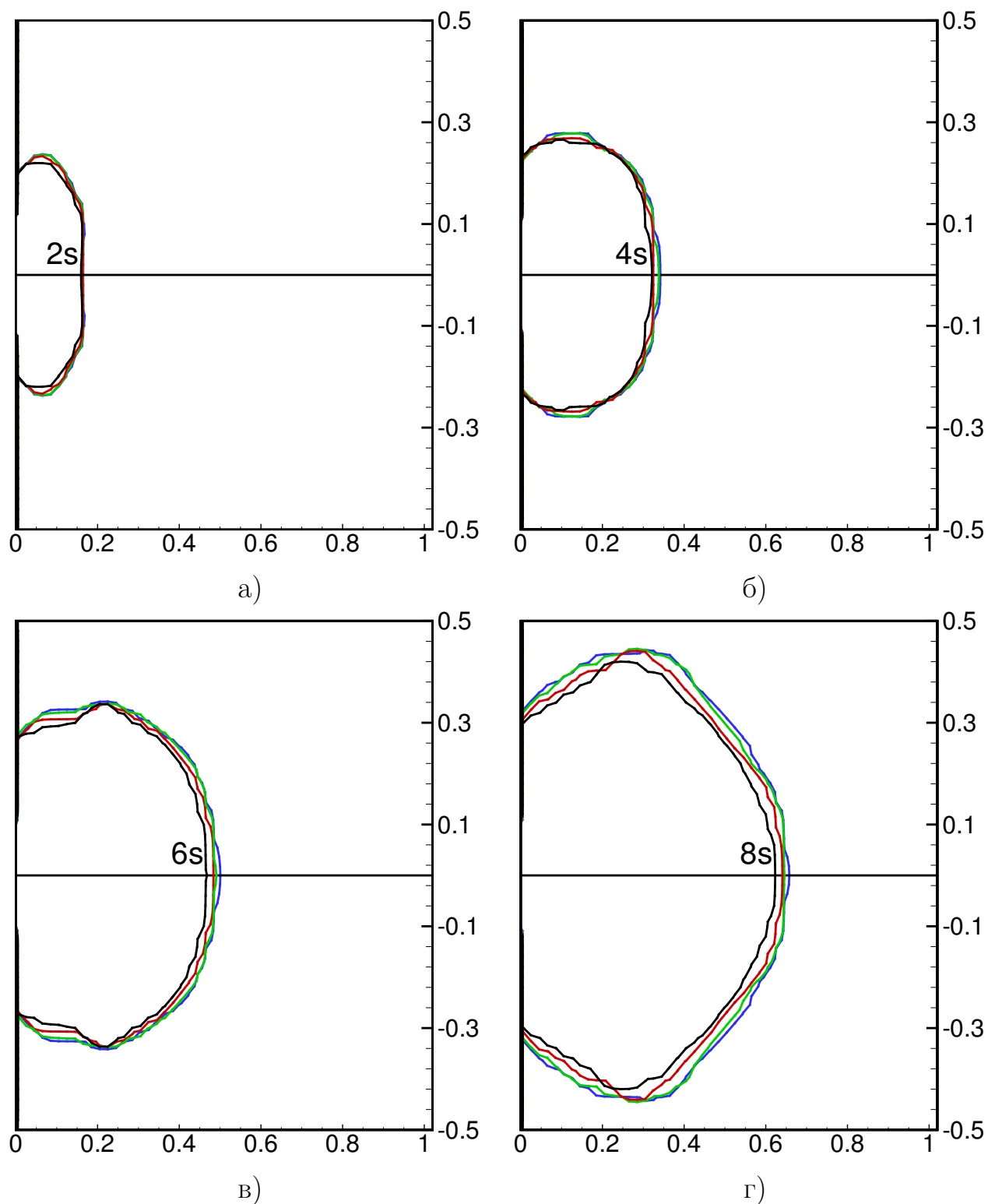


Рисунок 4.6 — Положение фронта в расчетах по модели САВАРЕТ-INH эксперимента 1 ($\rho_1 = 1015 \text{ кг/м}^3$) на сетках с разным аспектным отношением а) $t = 2$ с, б) $t = 4$ с, в) $t = 6$ с, д) $t = 8$ с. Черный - $\kappa = 2$, красный - $\kappa = 4$, зеленый - $\kappa = 8$, синий - $\kappa = 16$

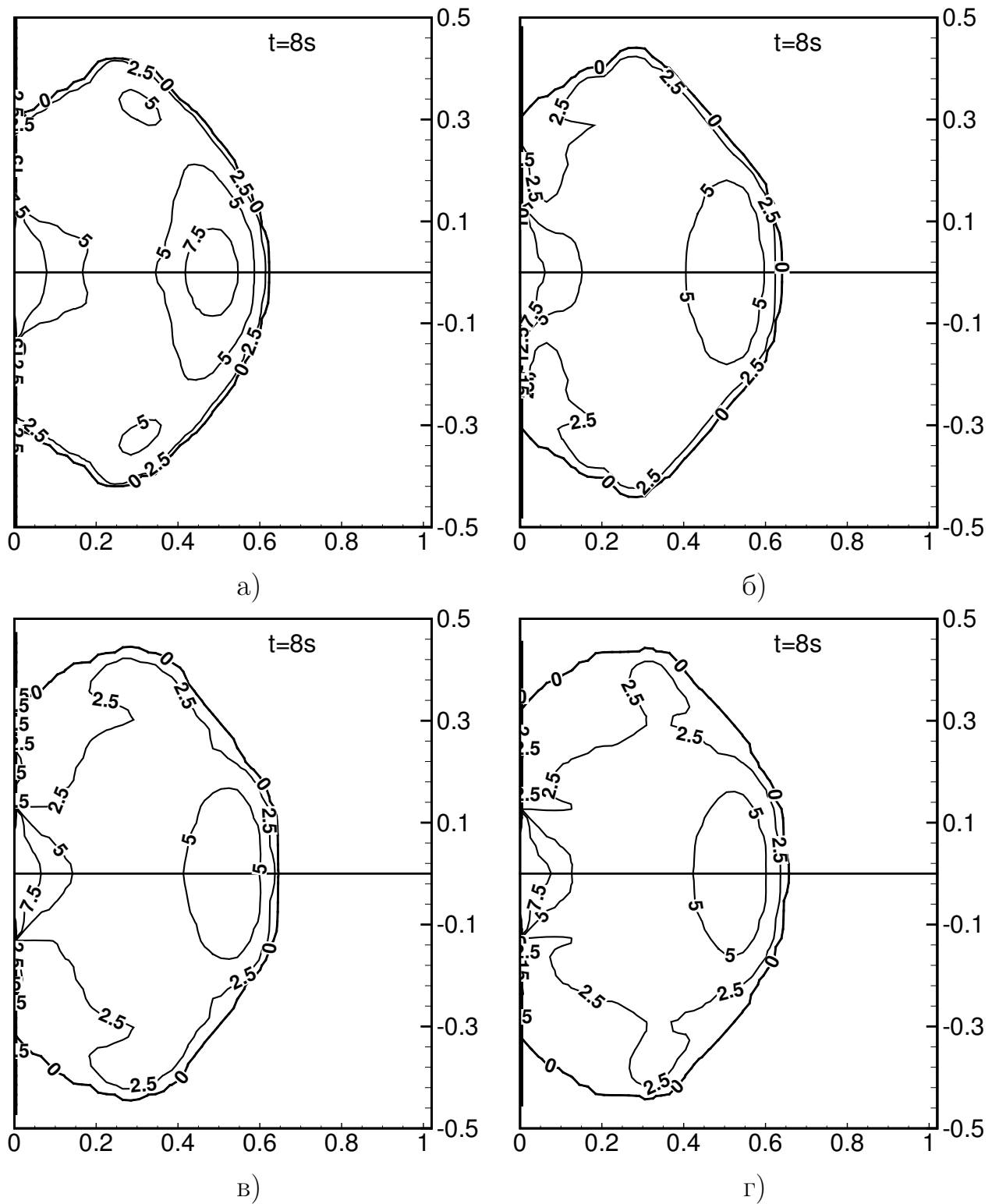


Рисунок 4.7 — Высота в см гравитационного потока на момент времени $t = 8$ с на сетках с разным аспектным отношением κ : а) $\kappa = 2$; б) $\kappa = 4$; в) $\kappa = 8$; д)

$\kappa = 16$

дикий расщепления по физическим процессам [71]. Будем рассматривать их в несколько этапов.

На первом этапе балансной фазы 1 вычисляются консервативные переменные на полуцелом временном слое $\tilde{\varphi}_c^{n+1/2}$, учитывая только конвективные члены и составляющие вязкости и диффузии вдоль осей OX и OY . Здесь символ " \sim " сверху означает промежуточное значение консервативной переменной. Явная аппроксимация горизонтальных составляющих вязкости и диффузии строится по консервативным переменным φ_c^n и добавляется в схему (4.6).

Второй этап добавляет вертикальную вязкость и диффузию, используя неявный алгоритм. Рассмотрим отдельно численную схему для вертикальной вязкости по направлению OX . Выделим вертикальный столбец жидкости на позиции i, j по горизонтали и введем обозначение $N_z = nz(i, j)$. Для внутренних слоев по z ($k = 2..N_z - 1$) запишем следующие уравнения:

$$\frac{u_{k+1/2}^{*,n+1/2} - \tilde{u}_{k+1/2}^{n+1/2}}{\tau/2} = \frac{1}{(\theta\Delta z)_{k+1/2}^{n+1/2}} \left(\nu_{u,k} \frac{(\theta u^*)_{k-1/2}^{n+1/2} - (\theta u^*)_{k+1/2}^{n+1/2}}{h_k} - \nu_{u,k+1} \frac{(\theta u^*)_{k+1/2}^{n+1/2} - (\theta u^*)_{k+3/2}^{n+1/2}}{h_{k+1}} \right)$$

где $u^{*,n+1/2}$ - значение консервативной скорости вдоль оси OX после второго этапа.

Группируя коэффициенты при неизвестных величинах $u_{k-1/2}^{*,n+1/2}$, $u_{k+1/2}^{*,n+1/2}$, $u_{k+3/2}^{*,n+1/2}$, получим:

$$\left[-K_{k+1/2}^T \theta_{k-1/2}^{n+1/2} \right] u_{k-1/2}^{*,n+1/2} + \left[1 + K_{k+1/2}^T \theta_{k+1/2}^{n+1/2} + K_{k+1/2}^B \theta_{k+1/2}^{n+1/2} \right] u_{k+1/2}^{*,n+1/2} + \left[-K_{k+1/2}^B \theta_{k+3/2}^{n+1/2} \right] u_{k+3/2}^{*,n+1/2} = \tilde{u}_{k+1/2}^{n+1/2}, \quad (4.10)$$

где

$$K_{k+1/2}^T = \frac{\tau}{2} \frac{1}{(\theta h)_{k+1/2}^{n+1/2}} \frac{\nu_{u,k}}{h_k},$$

$$K_{k+1/2}^B = \frac{\tau}{2} \frac{1}{(\theta h)_{k+1/2}^{n+1/2}} \frac{\nu_{u,k+1}}{h_{k+1}}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} A_{k+1/2} &= -K_{k+1/2}^T \theta_{k-1/2}^{n+1/2}, \\ B_{k+1/2} &= -K_{k+1/2}^B \theta_{k+3/2}^{n+1/2}, \\ C_{k+1/2} &= 1 + K_{k+1/2}^T \theta_{k+1/2}^{n+1/2} + K_{k+1/2}^B \theta_{k+1/2}^{n+1/2}, \\ F_{k-1/2} &= \tilde{u}_{k-1/2}^{n+1/2} \end{aligned}$$

С учетом данных обозначений, уравнения (4.10) примут вид:

$$A_{k+1/2} u_{k-1/2}^{*,n+1/2} + C_{k+1/2} u_{k+1/2}^{*,n+1/2} + B_{k+1/2} u_{k+3/2}^{*,n+1/2} = F_{k+1/2}, k = 2..N_z - 1 \quad (4.11)$$

Для аппроксимации $(\nu_u \frac{\partial \theta u^*}{\partial z})_0^{n+1/2}$ на верхнем слое ($k=1$) используется граничное условие на свободной поверхности (1.30):

$$\frac{u_{1/2}^{*,n+1/2} - \tilde{u}_{1/2}^{n+1/2}}{\tau/2} = \frac{1}{(\theta \Delta z)_{1/2}^{n+1/2}} \left(-\tau_x \theta_{1/2}^{n+1/2} - \nu_{u,1} \frac{(\theta u^*)_{1/2}^{n+1/2} - (\theta u^*)_{3/2}^{n+1/2}}{h_1} \right)$$

Введя обозначения:

$$\begin{aligned} K_{1/2}^B &= \frac{\tau}{2} \frac{1}{(\theta h)_{1/2}^{n+1/2}} \frac{\nu_{u,1}}{h_1}, \\ F_{1/2} &= \tilde{u}_{1/2}^{n+1/2} - \frac{\tau}{2} \frac{\tau_x}{h_{1/2}^{n+1/2}}, \\ B_{1/2} &= -K_{1/2}^B \theta_{3/2}^{n+1/2}, \quad C_{1/2} = 1 + K_{1/2}^B \theta_{1/2}^{n+1/2} \end{aligned}$$

Тогда уравнение для верхнего слоя примет вид:

$$C_{1/2} u_{1/2}^{*,n+1/2} + B_{1/2} u_{3/2}^{*,n+1/2} = F_{1/2} \quad (4.12)$$

Для нижнего слоя ($k = N_z$) граничное условие на дне (1.31) определяет $(\nu_u \frac{\partial \theta u}{\partial z})_{N_z}^{n+1/2} = -\beta |u_{N_z}^n|$ и, следовательно, уравнение для вертикальной вязкости принимает вид:

$$\frac{u_{N_z-1/2}^{n+1/2} - \tilde{u}_{N_z-1/2}^{n+1/2}}{\tau/2} = \frac{1}{(\theta\Delta z)_{N_z-1/2}^{n+1/2}} \left(\nu_{u,N_z-1} \frac{(\theta u)_{N_z-3/2}^{n+1/2} - (\theta u)_{N_z-1/2}^{n+1/2}}{h_{N_z} - 1} + \beta |u_{N_z}^n| \right)$$

Введя обозначения:

$$K_{N_z-1/2}^T = \frac{\tau}{2} \frac{1}{(\theta h)_{N_z-1/2}^{n+1/2}} \frac{\nu_{u,N_z-1}}{h_{N_z-1}}$$

$$F_{N_z-1/2} = \tilde{u}_{N_z-1/2}^{n+1/2},$$

$$A_{N_z-1/2} = -K_{N_z-1/2}^T \theta_{N_z-3/2}^{n+1/2},$$

$$C_{N_z-1/2} = 1 + K_{N_z-1/2}^T \theta_{N_z-1/2}^{n+1/2}$$

Тогда уравнение для нижнего слоя примет вид:

$$A_{N_z-1/2} u_{N_z-3/2}^{*,n+1/2} + C_{N_z-1/2} u_{N_z-1/2}^{*,n+1/2} = F_{N_z-1/2} \quad (4.13)$$

Матрица системы уравнений (4.11)-(4.13) является трехдиагональной и разрешается методом прогонки.

Аналогичная система получается для второй компоненты скорости v , температуры T и солёности S .

На третьем, заключительном, этапе добавляется неявный алгоритм для силы Кориолиса. В каждой расчетной ячейке можем записать следующую систему двух уравнений (пространственные индексы ячейки не пишем, для краткости):

$$\frac{(u^{n+1/2} - u^{*,n+1/2})}{dt/2} = l \cdot v^{n+1/2}$$

$$\frac{(v^{n+1/2} - v^{*,n+1/2})}{dt/2} = -l \cdot u^{n+1/2}$$

Из этой системы находим $u^{n+1/2}, v^{n+1/2}$ - горизонтальные компоненты скорости на полуцелом временном слое:

$$u^{n+1/2} = \frac{4u^{*,n+1/2} + 2l \cdot \tau \cdot v^{*,n+1/2}}{4 + l^2 \cdot \tau^2}$$

$$v^{n+1/2} = \frac{4v^{*,n+1/2} - 2l \cdot \tau \cdot u^{*,n+1/2}}{4 + l^2 \cdot \tau^2}$$

Аналогичным образом изменяется схема для балансной фазы 3.

Таким образом, построенная явно-неявная схема позволяет сохранить вычислительную эффективность численного алгоритма и оставить ограничения на шаг по времени только по горизонтальным направлениям.

4.5 Моделирование динамики Черного и Азовского морей

Описанная выше методика была опробована на задаче моделирования динамики Черного и Азовского морей. Не претендуя на точность и расчет всех физических процессов, влияющих на течения жидкости, целью данного моделирования была проверка робастности полученных численных алгоритмов.

Зависимость плотности от температуры и солености определялась следующим образом:

$$\rho(S, T) = \rho_0 * (1 + cT \cdot T + cT2 \cdot T^2 + cST \cdot S \cdot T + cS \cdot S) \quad (4.14)$$

где $\rho_0 = 1000$ [кг·м⁻³], $cT = 6.89e-5$ [градС⁻¹], $cT2 = -0.918e-5$ [градС⁻²], $cST = -0.39e-5$ [(градС·‰)⁻¹], $cS = 82.e-5$ [‰⁻¹].

Модельная область, аппроксимирующая акваторию Черного и Азовского морей, простирается от 27°26'60" восточной долготы до 41°45'00" восточной долготы и от 40°54'36" северной широты до 47°16'12" северной широты. Расчетная сетка вдоль широтного и меридианного направлений содержит 286 и 159 узлов соответственно. Таким образом, горизонтальные размеры вычислительных ячеек составляют ~ 4 км. При этом, в вертикальном направлении использовались сетки с переменным количеством слоев, до 36 слоев в самых глубоких областях Черного моря. На (Рис. 4.8) представлена используемая батиметрия. Батиметрия и начальные данные на 1 января 2006 года (Рис. 4.9)

были предоставлены научной группой Залесного В. Б. (ИВМ им. Г.И. Марчука РАН). Были разработаны процедуры конвертации и интерполяции реалистичных начальных данных (распределения температуры и солености) на расчетные сетки, используемые в нашем расчетном комплексе.

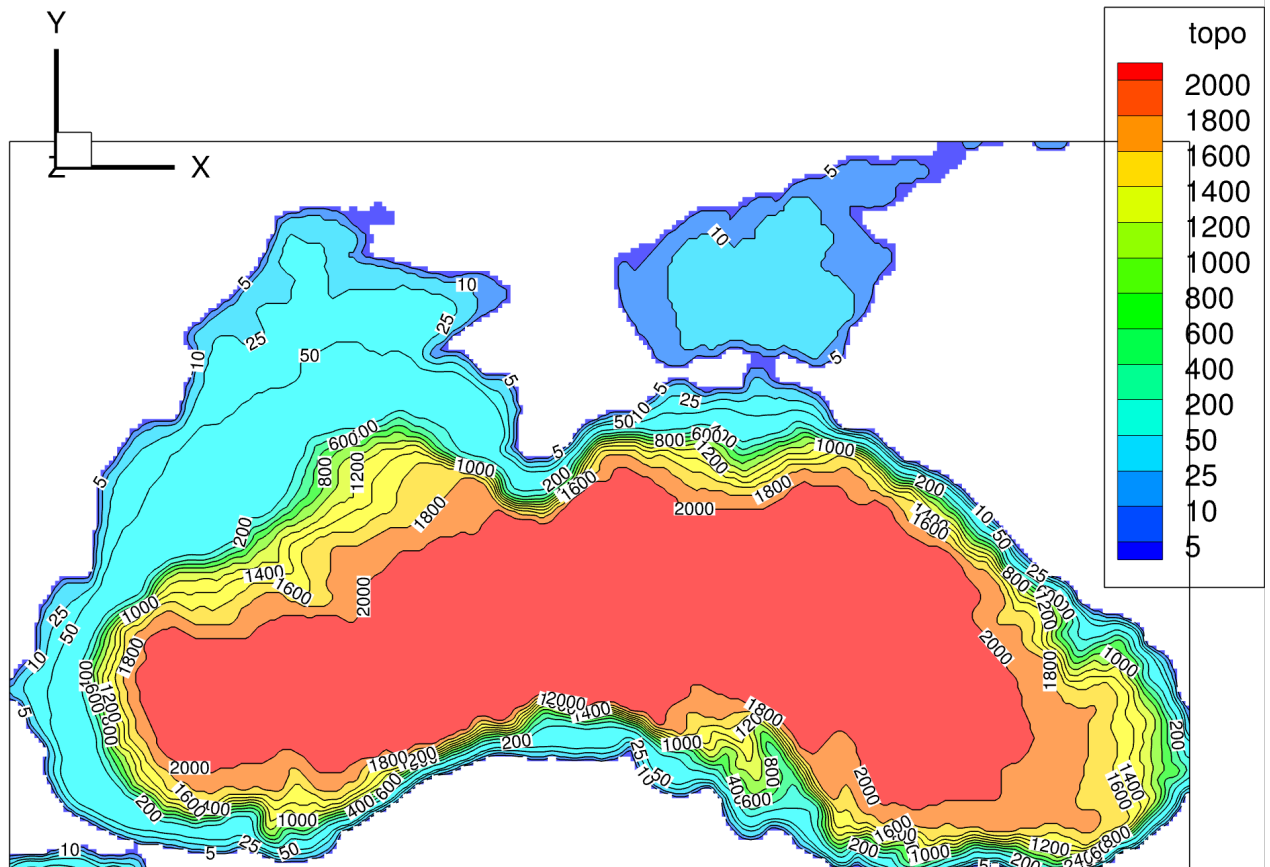


Рисунок 4.8 — Топография дна Черного и Азовского морей в метрах

Меридиональная и широтная компоненты скорости ветра на уровне 10м от поверхности воды получены из базы данных Era-Interim data (URL: http://data-portal.ecmwf.int/data/d/interim_daily/) европейского центра среднесрочных прогнозов ECMWF за 2006 год с пространственным разрешением $0.75^\circ \times 0.75^\circ$ и шагом по времени 6 часов. После процедуры переинтерполяции на используемую в расчете сетку, был рассчитан вектор ветровой нагрузки:

$$\vec{\tau} = C_d \rho_{air} |\vec{U}_{10}| \vec{U}_{10} \quad (4.15)$$

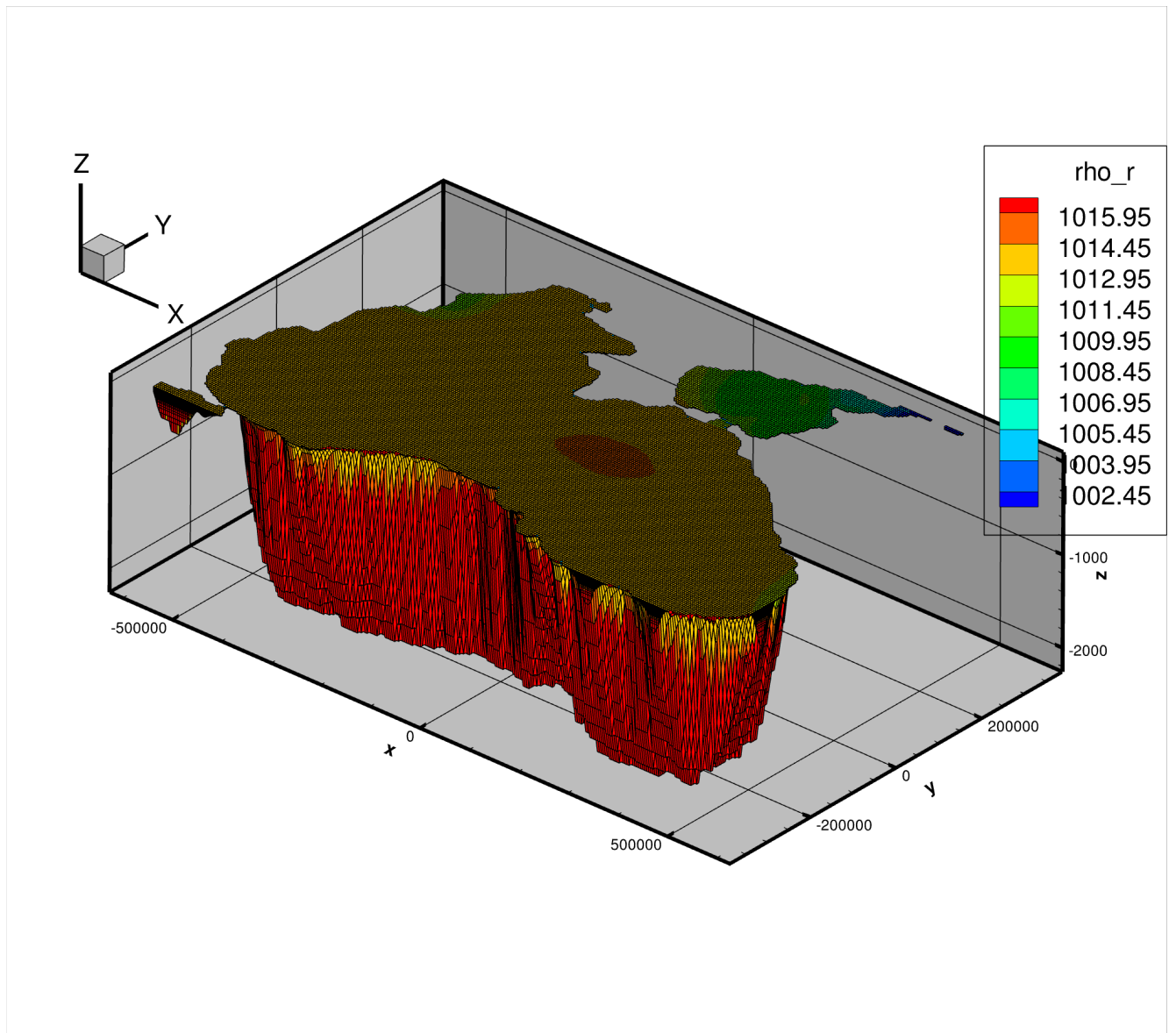


Рисунок 4.9 — Начальные значения плотности и расчетная сетка

где $\rho_{air} = 1 \text{ кг/м}^3$ - плотность воздуха, \vec{U}_{10} - скорость ветра на уровне 10 метров от поверхности, C_d - коэффициент сопротивления, рассчитанный по эмпирической формуле из статьи Mestas-Nuñez A. M. [72]:

$$C_d = 10^{-3} \begin{cases} 0.49 + 0.065|\vec{U}_{10}|, & \text{если } |\vec{U}_{10}| > 10\text{м/с}, \\ 1.14, & \text{если } 3 < |\vec{U}_{10}| \leq 10\text{м/с}, \\ 0.62 + 1.56|\vec{U}_{10}|^{-1}, & \text{если } 1 < |\vec{U}_{10}| \leq 3\text{м/с}, \\ 2.18, & \text{если } |\vec{U}_{10}| \leq 1\text{м/с}, \end{cases} \quad (4.16)$$

В расчетах использовались следующие параметры вязкости: $\nu_x = \nu_y = 4 \cdot 10^2 \text{ [м}^2/\text{с]}$, $\nu_z = 10^{-2} \text{ [м}^2/\text{с]}$, $\mu_x = \mu_y = 10 \text{ [м}^2/\text{с]}$.

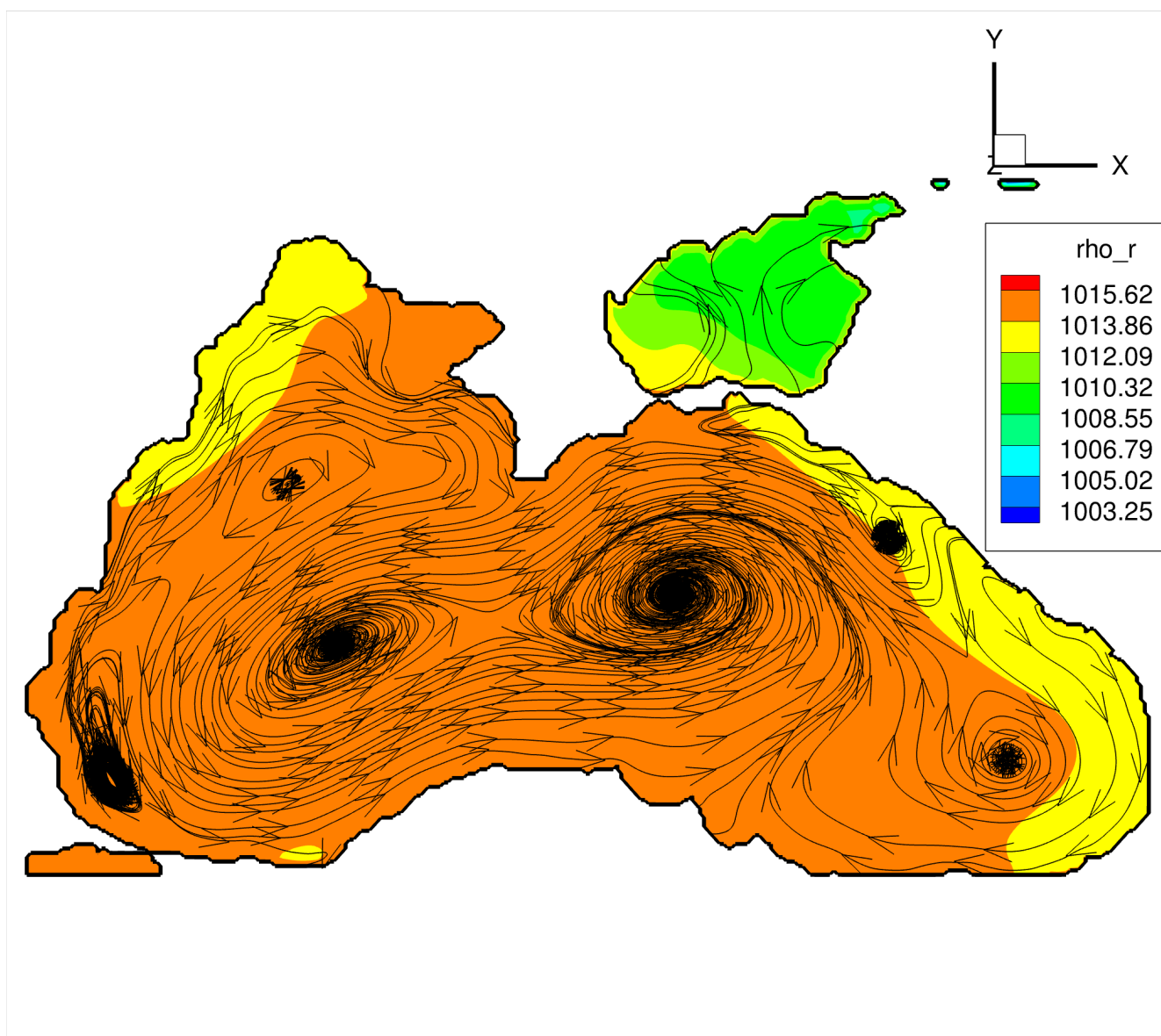


Рисунок 4.10 — Линии тока на глубине 5 метров модели CABARET-INH 20 мая 2006 год

Боковые границы области ограничены вертикальной стеной с минимальной глубиной 3 м. На всех граничных боковых гранях ставилось условие проскальзывания. Речные стоки и обмен через пролив Босфор не учитывались в данном моделировании.

Был выполнен расчет динамики Черного моря с 1 января 2006 года до 31 декабря 2006 года. На рис. 4.10 приведены линии тока на глубине 5 метров полученные в расчетах по модели CABARET-INH. Качественное сравнение результатов расчета с основными течениями в данной акватории [73] показало, что численная модель воспроизводит основное Черноморское течение (Rim Current) с восточным и западным вихрями внутри него, а так же меньшие квази-

стационарные вихри: антициклон в районе Батуми и вихрь к северу от пролива Босфор.

Таким образом, показана применимость построенного численного алгоритма SABARET-INH для расчетов в масштабах реальных морских акваторий.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

- (1) Описана негидростатическая модель динамики жидкости со свободной поверхностью, основанная на гиперболизации системы уравнений Навье-Стокса с помощью приближения слабой сжимаемости - ALE-HNS (Arbitrary Lagrangian-Eulerian Hyperbolic Navie-Stocks). Гиперболический тип полученной системы уравнений позволяет применять вычислительно эффективные явные схемы. Дифференциальная система уравнений выводится в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных, что помогает естественным образом учитывать положение свободной поверхности и использовать адаптивные по вертикали сетки при численном решении по данной системы.
- (2) На основе балансно-характеристической схемы КАБАРЕ построена явная численная схема CABARET-NH для дифференциальной модели ALE-HNS в двухмерной и трехмерной постановках и приведен алгоритм расчета по ней. Доказано свойство сбалансированности полученной схемы. Проведены верификационные расчеты.
- (3) Построена явно-неявная численная схема CABARET-INH для дифференциальной модели ALE-HNS в двухмерной и трехмерной постановках – явная вдоль горизонтальных направлений и неявная по вертикальному. Построенная схема позволяет снять ограничения на шаг по времени по вертикальному направлению, что существенно увеличивает расчетный шаг по времени на сетках с большим аспектным отношением вычислительных ячеек. Приведен эффективный алгоритм расчета по построенной схеме на основе гиперболической прогонки.
- (4) Реализованы две версии программного комплекса - для явной и явно-неявной разностной схемы. Обе версии состоят из следующих модулей: построение сетки, формирование начальных данных (в том числе, из внешних источников), расчет течения жидкости, подготовка данных с результатами расчета для выдачи в графическом формате. Все модули распараллелены с помощью технологии MPI

на произвольное число процессоров для расчета на параллельных кластерах.

- (5) Используя разработанные программные комплексы, проведена валидация построенных численных моделей на лабораторных экспериментах динамики стратифицированной жидкости. Результаты расчетов показывают хорошую качественную и количественную согласованность с экспериментальными данными. Проведена проверка робастности построенного численного алгоритма на задаче моделирования течений в Черном и Азовском морях.

Гиперболизированная система уравнений Навье-Стокса, описанная в работе, представляется хорошей альтернативой моделям на основе уравнений Навье-Стокса. Данная математическая модель позволяет применять хорошо зарекомендовавшие себя схемы для гиперболических систем уравнений.

Результаты верификационных и валидационных расчетов, позволяют говорить о перспективности применения построенных численных моделей CABARET-NH и CABARET-INH в задачах вычислительной океанологии.

Список сокращений и условных обозначений

TVD - Total Variation Diminishing

TVB - Total Variation Bounded

ENO - Essentially Non-Oscillatory

MUSCL - Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws

СЭЛ - смешанные эйлерово-лагранжевые (переменные)

CFL - число Куранта-Фридрихса-Леви

ALE-HNS - Arbitrary Lagrangian-Eulerian Hyperbolic Navie-Stocks

MPI - Message Passing Interface

Список литературы

1. *Bjerknes V.* Das Problem von der Wetter-vorhersage, Betrachtet vom Standpunkt der Mechanik und der Physik // Meteorologische Zeitschrift. — 1904. — Vol. 21.
2. *Munk W. H.* On the wind-driven ocean circulation // Journal of Atmospheric Sciences. — 1950. — Vol. 7, no. 2. — Pp. 80–93.
3. *Кибеля И. А., Кочин Н. Е., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. — Рипол Классик, 2013.
4. *Benjamin T. B., Ursell F. J.* The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. — 1954. — Vol. 225, no. 1163. — Pp. 505–515.
5. *Гаврилов Н. В., Ляпидевский В. Ю., Ляпидевская З. А.* Трансформация внутренних волн большой амплитуды над шельфом // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. — 2022. — Т. 8, № 3. — С. 32–43.
6. *Gosse L.* A well-balanced flux-vector splitting scheme designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms // Computers and Mathematics with Applications. — 2000. — Vol. 39, no. 9–10. — Pp. 135–159.
7. *Marchuk G. I., Dymnikov V. P., Zalesnyi V. B.* Mathematical models in geophysical hydrodynamics and numerical methods for their realization. — Leningrad Gidrometeoizdat, 1987.
8. Geophysical fluid dynamics. Vol. 710 / J. Pedlosky [et al.]. — New York : Springer, 1987. — P. 10.1007.
9. *Müller P.* The equations of oceanic motions. — Cambridge University Press, 2006.
10. *Vallis G. K.* Atmospheric and oceanic fluid dynamics. — Cambridge University Press, 2017.
11. *Kurganov A., Petrova G.* Central-upwind schemes for two-layer shallow water equations // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2009. — Vol. 31, no. 3. — Pp. 1742–1773.

12. New Numerical Algorithm for the Multi-Layer Shallow Water Equations Based on the Hyperbolic Decomposition and the CABARET Scheme / V. M. Goloviznin [et al.] // *Physical Oceanography*. — 2019. — Vol. 26, no. 6. — Pp. 528–546.
13. Validation of the low dissipation computational algorithm CABARET-MFSH for multilayer hydrostatic flows with a free surface on the lock-release experiments / V. M. Goloviznin [et al.] // *Journal of Computational Physics*. — 2022. — Vol. 463. — P. 111239.
14. The GFDL global ocean and sea ice model OM4. 0: Model description and simulation features / A. Adcroft [et al.] // *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*. — 2019. — Vol. 11, no. 10. — Pp. 3167–3211.
15. *Korn P.* Formulation of an unstructured grid model for global ocean dynamics // *Journal of Computational Physics*. — 2017. — Vol. 339. — Pp. 525–552.
16. ICON-O: The Ocean Component of the ICON Earth System Model-Global Simulation Characteristics and Local Telescoping Capability / P. Korn [и др.]. — 2021.
17. *Casulli V.* A semi-implicit finite difference method for non-hydrostatic, free-surface flows // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. — 1999. — Vol. 30, no. 4. — Pp. 425–440.
18. *Yuan H., Wu C. H.* An implicit three-dimensional fully non-hydrostatic model for free-surface flows // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. — 2004. — Vol. 46, no. 7. — Pp. 709–733.
19. *Matsumura Y., Hasumi H.* Brine-driven eddies under sea ice leads and their impact on the Arctic Ocean mixed layer // *Journal of Physical Oceanography*. — 2008. — Vol. 38, no. 1. — Pp. 146–163.
20. *Skyllingstad E. D., Smyth W. D., Crawford G. B.* Resonant wind-driven mixing in the ocean boundary layer // *Journal of Physical Oceanography*. — 2000. — Vol. 30, no. 8. — Pp. 1866–1890.
21. A finite-volume, incompressible Navier Stokes model for studies of the ocean on parallel computers / J. Marshall [et al.] // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. — 1997. — Vol. 102, no. C3. — Pp. 5753–5766.

22. *Escalante C., Luna T. M. de* A general non-hydrostatic hyperbolic formulation for Boussinesq dispersive shallow flows and its numerical approximation // *Journal of Scientific Computing*. — 2020. — Vol. 83, no. 3. — Pp. 1–37.
23. Hyperbolic divergence cleaning for the MHD equations / A. Dedner [et al.] // *Journal of Computational Physics*. — 2002. — Vol. 175, no. 2. — Pp. 645–673.
24. Divergence correction techniques for Maxwell solvers based on a hyperbolic model / C. D. Munz [et al.] // *Journal of Computational Physics*. — 2000. — Vol. 161, no. 2. — Pp. 484–511.
25. *Pinardi N., Rosati A., Pacanowski R. C.* The sea surface pressure formulation of rigid lid models. Implications for altimetric data assimilation studies // *Journal of Marine Systems*. — 1995. — Vol. 6, no. 1–2. — Pp. 109–119.
26. *Gushchin V. A., Kondakov V. G.* One approach of solving tasks in the presence of free surface using a multiprocessor computing systems // *International Conference on Large-Scale Scientific Computing*. — Springer, Cham, 2019. — Pp. 324–331.
27. *Yuan H., Wu C. H.* A two-dimensional vertical non-hydrostatic σ model with an implicit method for free-surface flows // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. — 2004. — Vol. 44, no. 8. — Pp. 811–835.
28. *Залесный В. Б., Гусев А. В., Фомин В. В.* Численная модель негидростатической морской динамики, основанная на методах искусственной сжимаемости и многокомпонентного расщепления // *Океанология*. — 2016. — Т. 56, № 6. — С. 959–971.
29. *Stelling G., Zijlema M.* An accurate and efficient finite-difference algorithm for non-hydrostatic free-surface flow with application to wave propagation // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. — 2003. — Vol. 43, no. 1. — Pp. 1–23.
30. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов [и др.]. — 1976.

31. Головизнин В. М., Самарский А. А., Фаворский А. П. Вариационный принцип получения уравнений магнитной гидродинамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1981. — Т. 21, № 2. — С. 409–422.
32. Головизнин В. М., Сабитова А., Самарская Е. А. О полностью консервативных локально-баротропных разностных схемах газовой динамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных // Дифференциальные уравнения. — 1985. — Т. 21, № 7. — С. 1144–1155.
33. 3D unstructured mesh ALE hydrodynamics with the upwind discontinuous finite element method / D. S. Kershaw [et al.] // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1998. — Vol. 158, no. 1–2. — Pp. 81–116.
34. Gusev A. V., Diansky N. A. Numerical simulation of the world ocean circulation and its climatic variability for 1948–2007 using the INMOM // Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics. — 2014. — Vol. 50. — Pp. 1–12.
35. Simulation of modern climate with the new version of the INM RAS climate model / E. M. Volodin [et al.] // Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics. — 2017. — Vol. 53. — Pp. 142–155.
36. Ushakov K. V., Ibrayev R. A., Kalmykov V. V. Simulation of the world ocean climate with a massively parallel numerical model // Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics. — 2015. — Vol. 51. — Pp. 362–380.
37. NEMO ocean engine / G. Madec [et al.]. — 2017.
38. Elements of the modular ocean model (MOM) / S. M. Griffies [et al.]. — 2012. — P. 47.
39. The HYCOM (hybrid coordinate ocean model) data assimilative system / E. P. Chassignet [et al.] // Journal of Marine Systems. — 2007. — Vol. 65, no. 1–4. — Pp. 60–83.
40. MITgcm user manual / A. Adcroft [et al.]. — Massachusetts Institute of Technology, 2008.
41. Самарский А. А. Теория разностных схем. — ФМЛ, 1989.
42. Eymard R., Gallouët T., Herbin R. Finite volume methods // Handbook of Numerical Analysis. Vol. 7. — 2000. — Pp. 713–1018.

43. *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. — 1959. — Т. 47, № 3. — С. 271–306.
44. *Einfeldt B.* On Godunov-type methods for gas dynamics // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1988. — Vol. 25, no. 2. — Pp. 294–318.
45. *Harten A., Osher S.* Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes. I // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1987. — Vol. 24, no. 2. — Pp. 279–309.
46. *Shu C. W.* TVB uniformly high-order schemes for conservation laws // Mathematics of Computation. — 1987. — Vol. 49, no. 179. — Pp. 105–121.
47. *Harten A.* ENO schemes with subcell resolution // Journal of Computational Physics. — 1989. — Vol. 83, no. 1. — Pp. 148–184.
48. *Colella P.* A direct Eulerian MUSCL scheme for gas dynamics // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. — 1985. — Vol. 6, no. 1. — Pp. 104–117.
49. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов / В. М. Головизнин [и др.]. — Изд-во Моск. ун-та, 2013.
50. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows / E. Audusse [et al.] // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2004. — Vol. 25, no. 6. — Pp. 2050–2065.
51. *Cuvelier C., Segal A., Van Steenhoven A. A.* Finite element methods and Navier-Stokes equations. Vol. 22. — Springer Science, Business Media, 1986.
52. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — 1978.
53. Валидация кода CABARET-SC1 на экспериментах по водородной взрывобезопасности на АЭС / Л. А. Большов [и др.] // Атомная энергия. — 2019. — Т. 127, № 4. — С. 198–203.
54. *Hirt C. W., Amsden A. A., Cook J. L.* An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds // Journal of Computational Physics. — 1974. — Vol. 14, no. 3. — Pp. 227–253.

55. *Нох В. Ф.* СЭЛ совместный эйлерово-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач // Вычислительные методы в гидродинамике. — Москва : Мир, 1967. — С. 128—164.
56. *Франк Р. М., Лазарус Р. Б.* Смешанный метод, использующий переменные Эйлера и Лагранжа // Вычислительные методы в гидродинамике. — Москва : Мир, 1967. — С. 55—75.
57. *Головизнин В. М., Карабасов С. А.* Нелинейная коррекция схемы Кабааре // Математическое моделирование. — 1998. — Т. 10, № 12. — С. 107—123.
58. *Afanasiev N., Goloviznin V.* A locally implicit time-reversible sonic point processing algorithm for one-dimensional shallow-water equations // Journal of Computational Physics. — 2021. — Vol. 434. — P. 110220.
59. Part IV. An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane / J. C. Martin [et al.] // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. — 1952. — Vol. 244, no. 882. — Pp. 312—324.
60. Entrainment in turbulent gravity currents / M. A. Hallworth [et al.] // Nature. — 1993. — Vol. 362, no. 6423. — Pp. 829—831.
61. *Gladstone C., Phillips J. C., Sparks R. S. J.* Experiments on bidisperse, constant-volume gravity currents: propagation and sediment deposition // Sedimentology. — 1998. — Vol. 45, no. 5. — Pp. 833—843.
62. An experimental study of particle-driven gravity currents on steep slopes with entrainment of particles / M. Rastello [и др.]. — 2002.
63. Gravity currents produced by constant and time varying inflow in a circular cross-section channel: Experiments and theory / S. Longo [et al.] // Advances in Water Resources. — 2016. — Vol. 90. — Pp. 10—23.
64. *Amy L. A., Peakall J., Talling P. J.* Density-and viscosity-stratified gravity currents: Insight from laboratory experiments and implications for submarine flow deposits // Sedimentary Geology. — 2005. — Vol. 179, no. 1—2. — Pp. 5—29.

65. Entrainment, transport and deposition of sediment by saline gravity currents / J. Zordan [et al.] // *Advances in Water Resources*. — 2018. — Vol. 115. — Pp. 17–32.
66. An experimental investigation of density-stratified inertial gravity currents / C. Gladstone [et al.] // *Sedimentology*. — 2004. — Vol. 51, no. 4. — Pp. 767–789.
67. *Middleton G. V.* Experiments on density and turbidity currents: I. Motion of the head // *Canadian Journal of Earth Sciences*. — 1966. — Vol. 3, no. 4. — Pp. 523–546.
68. *Huppert H. E., Simpson J. E.* The slumping of gravity currents // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1980. — Vol. 99, no. 4. — Pp. 785–799.
69. Experimental and numerical simulation of three-dimensional gravity currents on smooth and rough bottom / M. La Rocca [et al.] // *Physics of Fluids*. — 2008. — Vol. 20, no. 10. — P. 106603.
70. A numerical study of the triggering mechanism of a lock-release density current / F. G. Serchi [et al.] // *European Journal of Mechanics-B/Fluids*. — 2012. — Vol. 33. — Pp. 25–39.
71. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. — 2009.
72. An evaluation of ECMWF-based climatological wind stress fields / A. M. Mestas-Nuñez [et al.] // *Journal of Physical Oceanography*. — 1994. — Vol. 24, no. 7. — Pp. 1532–1549.
73. Circulation in the surface and intermediate layers of the Black Sea / T. Oguz [et al.] // *Deep Sea Research Part I: Oceanographic Research Papers*. — 1993. — Vol. 40, no. 8. — Pp. 1597–1612.

Публикации автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

- А.1 Неявные обратимые по времени схемы КАБАРЕ для квазилинейных уравнений мелкой воды / В. М. Головизнин, Д. Ю. Горбачев, А. М. Колокольников, П. А. Майоров и др. // Вычислительные методы и программирование. — 2016. — Т. 17. — С. 402–414. [RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0.468], [0.9 / 0.8]
- А.2 Моделирование динамики жидкости со свободной поверхностью в гравитационном поле схемой КАБАРЕ / Н. А. Афанасьев, В. М. Головизнин, П. А. Майоров, А. В. Соловьев // Математические заметки СВФУ. — 2022. — т. 29, № 4. — с. 77–94. [Scopus, SJR: 0.344], [1.3 / 0.6]
- А.3 Явно-неявная схема CABARETI-NH для уравнений динамики слабосжимаемой жидкости / В. М. Головизнин, П. А. Майоров, Н.А. Афанасьев, П.А. Майоров, А.В. Соловьев // Вычислительные методы и программирование. — 2023. — Т. 24, № 2. — С. 152–169. [RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0.468], [1.3 / 1.2]
- А.4 Явный численный алгоритм для уравнений негидростатической динамики жидкости на основе схемы КАБАРЕ / В. М. Головизнин, П. А. Майоров, П.А. Майоров, А.В. Соловьев, Н.А. Афанасьев // Математическое моделирование. — 2023. — Т. 35, № 5. — С. 62–86. [RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0.559], [1.8 / 1.6]
- Перевод: Explicit numerical algorithm for the nonhydrostatic fluid dynamics equations based on the cabaret scheme / V. M. Goloviznin, P. A. Mayorov, P. A. Mayorov, A. V. Solovjev, N. A. Afanasiev // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2023. — Vol. 15, no. 6. — P. 1008–1023. [Scopus, SJR: 0.286], [1.8 / 1.6]

Иные публикации

- В.1 Многослойная негидростатическая модель течения жидкости со свободной поверхностью на основе схемы КАБАРЕ / П. А. Майоров, П. А. Майоров, А. В. Соловьев, В. М. Головизнин // Ломоносовские чтения 2018. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2018. — С. 44–45.
- В.2 Сравнение гидростатической и негидростатической моделей на лотковых экспериментах / В. М. Головизнин, П. А. Майоров, П. А. Майоров, А. В. Соловьев // Тихоновские чтения 2020. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2020. — С. 71–71.
- В.3 Неявная по одному направлению схема КАБАРЕ на сетках с большим аспектным отношением / В. М. Головизнин, П. А. Майоров, П. А. Майоров, А. В. Соловьев // Тихоновские чтения 2020. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2020. — С. 72–72.
- В.4 Головизнин В. М., Майоров П. А., Майоров П. А. Негидростатическая модель уравнений динамики стратифицированной слабосжимаемой жидкости с поверхностью в приближении мягкой крышки // Ломоносовские чтения-2020. Секция Вычислительной математики и кибернетики. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2020. — С. 54–55.
- В.5 Моделирование течений в Южном океане по схеме КАБАРЕ негидростатической модели динамики жидкости / В. М. Головизнин, П. А. Майоров, П. А. Майоров, А. В. Соловьев // Ломоносовские чтения-2021. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2021. — С. 61–62.
- В.6 Hyperbolized “soft cover” model for calculating stratified flows with a free boundary in a non-hydrostatic approximation / В. М. Головизнин, П. А. Майоров, П. А. Майоров, А. В. Соловьев // Marchuk Scientific Readings-2021. — Institute of comput. mathematics and mat. geophysics SB RAS: 2021. — P. 98–99.
- В.7 Негидростатическая модель динамики стратифицированной жидкости со свободной поверхностью CABARET-NH / В. М. Головизнин, П. А. Майоров, П. А. Майоров, А. В. Соловьев // Суперкомпьютерные технологии математического моделирования: тезисы докладов V международной конференции. — Издательский дом СВФУ Якутск, Россия: 2022. — С. 49–49.

Список рисунков

2.1	Обозначения переменных.	40
2.2	Начальное положение узлов расчетной сетки	51
2.3	Начальное положение поверхности	55
2.4	Положение свободной поверхности а) $t = 2.75T_a$ б) $t = 3T_a$	57
2.5	Отклонение численного решения от аналитического а) $t = 2.75T_a$ б) $t = 3T_a$	58
2.6	Лабораторная установка	60
2.7	Схема экспериментов	61
2.8	Результаты моделирования по модели CABARET-NH и положение фронта в эксперименте A1 на моменты времени 0 с, 4 с, 8 с, 12 с, 16 с. Синим цветом обозначена концентрация маркеров соленой жидкости.	64
2.9	Результаты моделирования по модели CABARET-NH и положение фронта в эксперименте A2 на моменты времени 0 с, 4 с, 8 с, 12 с, 16 с. Синим цветом обозначена концентрация маркеров соленой жидкости.	65
2.10	Результаты моделирования по модели CABARET-NH и положение фронта в эксперименте A3 на моменты времени 0 с, 4 с, 8 с, 12 с, 16 с. Синим цветом обозначена концентрация маркеров соленой жидкости.	66
2.11	Результаты моделирования по модели CABARET-NH и положение фронта в эксперименте A4 на моменты времени 0 с, 4 с, 8 с, 12 с, 16 с. Синим цветом обозначена концентрация маркеров соленой жидкости.	67
2.12	Безразмерное положение фронта потока $L^{*3/2}$ в расчетах по модели CABARET-NH для экспериментов A1-A4 и график аналитического решения приближенной задачи	68
2.13	Результаты моделирования по модели CABARET-NH и положение фронта в эксперименте B25 на моменты времени 0с, 4с, 8с, 12с, 16с, 20с, 24с. Синим и желтым цветами обозначена концентрация маркеров соленых жидкостей.	70

- 2.14 Результаты моделирования по модели CABARET-NH и положение фронта в эксперименте B26 на моменты времени 0с, 4с, 8с, 12с, 16с, 20с, 24с. Синим и желтым цветами обозначена концентрация маркеров соленых жидкостей. 71
- 2.15 Результаты моделирования по модели CABARET-NH и положение фронта в эксперименте C1 на моменты времени 0с, 4с, 8с, 12с, 16с, 20с, 24с. Синим и желтым цветами обозначена концентрация маркеров соленых жидкостей. 73
- 2.16 Результаты моделирования по модели CABARET-NH и положение фронта в эксперименте C4 на моменты времени 0с, 4с, 8с, 12с, 16с, 20с, 24с. Синим и желтым цветами обозначена концентрация маркеров соленых жидкостей. 74
- 2.17 Результаты моделирования по модели CABARET-NH и положение фронта в эксперименте D1 на моменты времени 0с, 4с, 8с, 16с, 24с. Красным, синим и желтым цветами обозначена концентрация маркеров соленых жидкостей. 75
- 2.18 Результаты моделирования по модели CABARET-NH и положение фронта в эксперименте D2 на моменты времени 0с, 4с, 8с, 16с, 24с. Красным, синим и желтым цветами обозначена концентрация маркеров соленых жидкостей. 76
- 2.19 Результаты моделирования по модели CABARET-NH и положение фронта в эксперименте D3 на моменты времени 0с, 4с, 8с, 16с, 24с. Красным, синим и желтым цветами обозначена концентрация маркеров соленых жидкостей. 77
- 2.20 Безразмерное положение фронта потока $L^{*3/2}$ в расчетах по модели CABARET-NH для экспериментов D1-D3 и график аналитического решения приближенной задачи 78
- 3.1 Результаты моделирования по модели CABARET-INH и положение фронта в эксперименте D1 на моменты времени 0с, 4с, 8с, 16с, 24с. Красным, синим и желтым цветами обозначена концентрация маркеров соленых жидкостей. 96

3.2	Результаты моделирования по модели CABARET-INH и положение фронта в эксперименте D2 на моменты времени 0с, 4с, 8с, 16с, 24с. Красным, синим и желтым цветами обозначена концентрация маркеров соленых жидкостей.	97
3.3	Результаты моделирования по модели CABARET-INH и положение фронта в эксперименте D3 на моменты времени 0с, 4с, 8с, 16с, 24с. Красным, синим и желтым цветами обозначена концентрация маркеров соленых жидкостей.	98
4.1	Шаблон консервативных фаз (4.6) и (4.7)	104
4.2	Схема экспериментальной установки, вид сверху и сбоку	107
4.3	Изоповерхности плотности при $t = 8$ с в расчетах по модели CABARET-INH: а) $\rho_1 = 1015$ кг/м ³ ; б) $\rho_1 = 1025$ кг/м ³	108
4.4	Положение фронта гравитационного течения в разные моменты времени (2 с, 4 с, 6 с, 8 с, 10 с) из расчетов по модели CABARET-INH при разных плотностях: а) $\rho_1 = 1015$ кг/м ³ ; б) $\rho_1 = 1025$ кг/м ³	109
4.5	Расчетное (по модели CABARET-INH) и экспериментальное максимальное положение фронта в зависимости от времени в эксперименте 1 ($\rho_1 = 1015$ кг/м ³) и в эксперименте 2 ($\rho_1 = 1025$ кг/м ³): вдоль осей: а) x ; б) y	110
4.6	Положение фронта в расчетах по модели CABARET-INH эксперимента 1 ($\rho_1 = 1015$ кг/м ³) на сетках с разным аспектным отношением а) $t = 2$ с, б) $t = 4$ с, в) $t = 6$ с, д) $t = 8$ с. Черный - $\kappa = 2$, красный - $\kappa = 4$, зеленый - $\kappa = 8$, синий - $\kappa = 16$	112
4.7	Высота в см гравитационного потока на момент времени $t = 8$ с на сетках с разным аспектным отношением κ : а) $\kappa = 2$; б) $\kappa = 4$; в) $\kappa = 8$; д) $\kappa = 16$	113
4.8	Топография дна Черного и Азовского морей в метрах	118
4.9	Начальные значения плотности и расчетная сетка	119
4.10	Линии тока на глубине 5 метров модели CABARET-INH 20 мая 2006 год	120

Список таблиц

1	Периоды колебаний и погрешность численных решений	59
2	Параметры экспериментов серии А	63
3	Параметры экспериментов серии В	69
4	Параметры экспериментов серии С	72
5	Параметры экспериментов серии D	75
6	Сравнение вычислительной эффективности по явной схеме CABARET-NH и явно-неявной CABARET-INH	99