

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию  
Александра Андреевича Скутина  
«Некоторые вопросы теории алгебр Ли и  $p$ -групп»,  
представленной на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по специальности 1.1.5 —  
математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Напомним, что шириной  $b(x)$  элемента  $x$  конечной  $p$ -группы  $G$  (алгебры Ли  $A$ ) называется индекс его централизатора в  $G$  (разность размерностей алгебры  $A$  и централизатора элемента  $x$  в  $A$ , соответственно), а шириной  $b(G)$   $p$ -группы  $G$  — максимум  $b(x)$  по всем  $x \in G$  (аналогично определяется ширина  $b(A)$  алгебры Ли  $A$ ). В первых трех (из четырех) глав диссертационной работы исследуется вопрос о связи между шириной  $p$ -группы (нильпотентной алгебры Ли) и порядком (размерностью) ее коммутанта  $G'$  (соответственно  $A'$ ).

В 1973 году Джеймс Уайголд внес в 4-е издание «Коуровской тетради», знаменитого сборника нерешенных вопросов теории групп, вопрос о справедливости следующей гипотезы: конечная  $p$ -группа  $G$ , порядок коммутанта которой больше  $p^{n(n-1)/2}$ , порождается элементами ширины не менее  $n$ . Основные результаты первых двух глав диссертации — доказательство справедливости этой гипотезы (первая глава) и ее аналога для nilпотентных алгебр Ли (вторая глава).

Остановимся чуть подробнее на предыстории возникновения этой гипотезы. Она возникла, когда Майкл Вон-Ли сумел доказать, что порядок коммутанта конечной  $p$ -группы не превосходит  $p^{b(b+1)/2}$ , где  $b = b(G)$ , — вопрос о справедливости этого утверждения тоже принадлежит Уайголду (1957). Доказательство Вон-Ли основано на переходе к присоединенной алгебре Ли (эта идея в данной тематике восходит к работе Питера Ноймана 1970 года). Эта же техника использовалась и в последующих попытках решить гипотезу Уайголда, которые привели лишь к частичным результатам (справедливость гипотезы была, например, установлена для групп ступени nilпотентности 2).

Замечательно, что доказательство гипотезы Уайголда, предложенное диссертантом, с одной стороны чисто групповое, а с другой стороны, естественным образом переносится на nilпотентные алгебры Ли, причем над произвольным полем (не обязательно характеристики  $p$ , как в случае присоединенной алгебры Ли). Счастливая догадка (прозрение?) диссертанта состояла в том, чтобы доказывать (по индукции, естественно) более сильное утверждение (для простоты ограничимся случаем  $p$ -групп и предположим, что  $p \neq 2$ ): если  $|G'| > p^{n(n-1)/2}$ , то подмножество всех элементов ширины не менее  $n$  не может быть покрыто  $p - 1$  собственными подгруппами группы  $G$ .

В третьей главе диссертант, продолжая анализировать связь между размерностью коммутанта nilпотентной алгебры Ли  $A$  и шириной ее элементов, показывает, что в случае, когда  $A$  задана над бесконечным полем и конечномерна, размерность  $A'$  можно ограничить в терминах ширины элементов из некоторого итерированного семейства подалгебр определенного типа алгебры  $A$ . Полученную теорему можно рассматривать как некий весьма общий аналог для алгебр Ли результата Вон-Ли для  $p$ -групп, упомянутого выше. Отмечу, что диссертанту стоило подробнее остановиться на мотивации данного подхода к этой проблематике, объяснив достоинства предложенной им итерированной конструкции подалгебр.

Четвертая глава, стоящая немного особняком, посвящена проблеме описания максимальных по вложению подалгебр Ли среди локально нильпотентных дифференцированных алгебр многочленов от  $n$  переменных. В известной монографии Дж. Фройденбурга в 2006 году была высказана гипотеза, что подалгебра треугольных дифференцирований максимальна и всякая максимальная (среди локально нильпотентных дифференцирований) подалгебра ей сопряжена. Диссертант доказал первую часть этой гипотезы — о максимальной подалгебре треугольных дифференцирований, построил контрпример ко второй части — о сопряженности, но сформулировал и доказал ее уточненную версию.

На мой взгляд, в диссертационной работе получены впечатляющие результаты, которые вносят существенный вклад в современную алгебру. Их доказательства понятны и полны. Все результаты получены автором лично и своевременно опубликованы в четырех статьях в хорошо известных и уважаемых журналах из международных баз данных. Автореферат правильно отражает содержание работы.

К недостаткам диссертации относится ее оформление, которое может быть охарактеризовано как небрежное. И хотя это не дает повода усомниться в математической квалификации диссертанта, но мешает в полной мере получить удовольствие от знакомства с его идеями. Не вдаваясь в несущественные детали, отмечу, что работа выглядит не слишком продуманной склейкой из четырех статей диссертанта.

Тем не менее, уровень полученных результатов таков, что отмеченные недостатки не влияют на общую высокую оценку работы. Считаю, что диссертация «Некоторые вопросы теории алгебр Ли и  $p$ -групп» соответствует всем критериям «Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова», а ее автор Александр Андреевич Скутин заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Официальный оппонент  
доктор физ.-мат. наук, профессор  
главный научный сотрудник  
Института математики  
им. С. Л. Соболева СО РАН

А. В. Васильев

Подпись А. В. Васильева заверяю:  
Ученый секретарь ИМ СО РАН  
кандидат физ.-мат. наук

Н. А. Даурцева

20 марта 2023 г.

