

**ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук Галстяна Арсена Хачатуровича
на тему: «Проблема Ферма-Штейнера в гиперпространствах»
по специальности 1.1.3 – Геометрия и топология**

В диссертации Галстяна А.Х. исследуется классическая одномерная вариационная задача – найти все деревья с минимальным весом в метрическом пространстве, соединяющие заданный конечный набор точек. При этом, соискатель рассматривает только деревья, представляющие собой граф-звезду с ровно одной дополнительной вершиной – узлом, от расположения которого в пространстве зависит вес дерева. Задача поиска минимума функционала длины такого соединения набора вершин называется проблемой Ферма-Штейнера.

В диссертации задача рассматривается в классе гиперпространств, то есть метрических пространств, точками которых являются компактные подмножества конечномерного вещественного нормированного пространства, с метрикой Хаусдорфа. Таким образом, имеется свобода в выборе конечной размерности исходного линейного пространства и задания в нём нормы. Решение проблемы Ферма-Штейнера автор называет компактом Штейнера. Наиболее интересен для приложений, связанных с машинным распознаванием образов, случай евклидовой плоскости. Все приводимые в диссертации примеры построены для евклидовой плоскости.

Во **введении** к диссертации сформулировано две задачи, которые решаются в работе, и приводятся известные результаты относительно проблемы Ферма-Штейнера в гиперпространствах. Также автор даёт историческую справку и обсуждает актуальность исследуемой темы. После этого приводятся положения, выносимые на защиту, указывается на научную новизну полученных результатов, обосновывается теоретическая и

практическая ценность работы, перечисляются публикации в рецензируемых журналах, содержащие все теоремы, утверждения и леммы диссертации.

Первая глава диссертации посвящена введению обозначений, необходимых сведений и определений. Стоит отметить принадлежащую автору теорему раздела 1.6 про непрерывность деформаций выпуклых компактов.

Вторая и последняя глава диссертационной работы содержит решения двух сформулированных во введении задач. Она состоит из четырёх разделов.

Раздел 2.1 разрабатывает подход к решению задачи Ферма-Штейнера в случае финитной, то есть состоящей из конечных множеств точек, границы. Построение достаточно общей теории для финитных границ позволяет эффективнее чем раньше решать для них задачу Ферма-Штейнера. Это первая из поставленных во введении задач, и она решалась автором совместно с А.А.Тужилиным и А.О.Ивановым. Основными результатами в этом разделе являются оценки на количество точек в минимальных компактах Штейнера, а также критерии минимальности компакта Штейнера. Применение построенной теории продемонстрировано на примере, где достигнуто существенное упрощение по сравнению с предыдущим решением.

В разделах 2.2, 2.3 и 2.4 приведены результаты, полученные А.Х.Галстяном без соавторов.

В разделах 2.2, 2.3 автор вводит три различных типа точек: дискретные, далёкие и неплотные. В разделе 2.2 им доказано, что в случае, когда граница состоит лишь из выпуклых множеств, обязательно найдутся далёкие точки, а в случае финитной границы и строго выпуклой нормы исходного пространства, непременно имеются дискретные точки. При этом автор доказал, что если – помимо финитности границы и строгой выпуклости нормы пространства – замыкание внутренности максимального компакта Штейнера совпадает с этим компактом, то все три типа точек (дискретные,

далёкие и неплотные) совпадают. Однако, введение этих трёх типов точек оказалось небесполезно. Они сыграли ключевую роль в теории устойчивости границы в проблеме Ферма-Штейнера.

Раздел 2.4 посвящён как раз этой теории устойчивости, развитие которой является второй задачей диссертации. Под устойчивостью имеется в виду устойчивость решения задачи Ферма-Штейнера при переходе от финитной границы к границе, состоящей из выпуклых оболочек исходных конечных граничных множеств. Под решением подразумеваем неизменность веса минимальной сети типа звезды. В этом разделе автор в терминах перечисленных точек трёх типов доказал три достаточных условия неустойчивости границы в проблеме Ферма-Штейнера. Одно из этих условий для случая пространств со строго выпуклой нормой содержит оценку снизу на уменьшение веса минимальной сети при замене исходной границы из набора конечных множеств на границу из их выпуклых оболочек. Применение этого условия продемонстрировано в подразделе 2.4.3 на примере из раздела 2.1.

В заключении кратко перечисляются полученные результаты, и указывается их теоретическая и практическая значимость.

Таким образом, можно утверждать, что соискатель внёс существенный вклад в теорию геометрической оптимизации. Результаты диссертационной работы А.Х. Галетяна являются оригинальными, имеют как теоретическую, так и практическую значимость. Все они прошли апробацию на всероссийских и международных конференциях, а также своевременно опубликованы в 4-х рецензируемых изданиях из списка рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ.

Текст работы составлен грамотно, структура продумана, а все доказательства и теоретические выкладки достаточно ясны и выверены.

Автореферат к диссертации верно отражает её содержание.

Отмечу следующие замечания:

1. В автореферате приведены доказательства некоторых утверждений, что излишне, и увеличивает его объём до 45 страниц.

2. Рисунок 2.15 на странице 64 – в него приходится долго вematриваться, чтобы понять каков максимальный компакт Штейнера. Было бы гораздо удобнее, если бы максимальный компакт был заштрихован.

3. Определения трёх типов точек громоздки и сложны для восприятия. Было бы существенно проще, если бы каждое из определений 2.1.2, 2.2.1 и 2.2.2 сопровождалось соответствующими пояснениями и иллюстрациями.

4. Вообще, автор несколько увлекается формальным стилем изложения, что не способствует лёгкости восприятия.

Однако перечисленные выше замечания не умаляют ценности проведённого соискателем исследования. Диссертация отвечает всем требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к кандидатским диссертациям. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3 – Геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Всё перечисленное выше даёт основание считать, что соискатель Галстян Арсен Хачатурович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 – Геометрия и топология.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры дискретной математики
отделения математики
механико-математического факультета
ФГБОУ ВО «Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова»

Ковалёв Михаил Дмитриевич



подпись

17.10.2023

Дата подписания

Контактные данные:

тел.: +7-(958)-815-01-63, e-mail: mkov@rambler.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом
защита диссертация:

01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика

Адрес места работы:

119991, ГСП-1, Москва, ул. Ленинские горы, МГУ, д. 1,
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени
М.В. Ломоносова», Механико-математический факультет,
Отделение математики, Кафедра дискретной математики
Тел.: +7-(958)-815-01-63; e-mail: mkov@rambler.ru

Подпись сотрудника

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

М.Д. Ковалёва удостоверяю:

Нач. отдела кадров (Ф.И.О. Ковалёва И.А.)

