

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

*На правах рукописи*

**Загидуллин Артур Александрович**

**РАЗРАБОТКА ЧИСЛЕННОЙ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКОЙ  
ЛИБРАЦИИ ДЛЯ МОДЕЛИ УПРУГОЙ ЛУНЫ**

Специальность:

1.3.1. Физика космоса, астрономия

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2024

Работа выполнена на кафедре астрономии и космической геодезии Института физики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет (ФГАО ВО КФУ)»

**Научный руководитель:** **Нефедьев Юрий Анатольевич**

*доктор физико-математических наук, доцент*

**Официальные оппоненты** **Кондратьев Борис Петрович**

*доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры небесной механики, астрометрии и гравиметрии физического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова, ведущий научный сотрудник отдела небесной механики ГАИШ МГУ, ведущий научный сотрудник отдела небесной механики и динамической астрономии ГАО РАН*

**Кузнецов Эдуард Дмитриевич**

*доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой астрономии, геодезии, экологии и мониторинга окружающей среды Института естественных наук и математики УрФУ, ведущий научный сотрудник научной лаборатории астрохимических исследований Института естественных наук и математики УрФУ*

**Павлов Дмитрий Алексеевич**

*кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгоритмической математики, ведущий научный сотрудник Факультета компьютерных технологий и информатики СПбГЭТУ «ЛЭТИ», инженер – исследователь Междисциплинарной исследовательской лаборатории имени П. Л. Чебышева СПбГУ*

Защита состоится 23 мая 2024 года в 14 часов на заседании диссертационного совета МГУ.013.1 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: 119992, Москва, Университетский пр., д. 13.

E-mail: ArAZagidullin@kpfu.ru

Диссертация находится на хранении в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27). С информацией об организации защиты и с диссертацией в электронном виде можно ознакомиться на сайте диссертационного совета: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/2942>

Автореферат разослан 18 апреля 2024 года.

Ученый секретарь диссертационного совета  
доктор физико-математических наук

А. И. Богомазов

## АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ И СТЕПЕНЬ ЕЕ РАЗРАБОТАННОСТИ

Интерес к исследованиям Луны всегда был и остаётся неизменным: накапливаются многолетние лазерные наблюдения, проводятся налунные и окололунные эксперименты, открывающие неизвестные ранее факты, повышающие точность наблюдений, требуя развития соответствующих теорий для адекватного описания как динамики Луны, так и её внутреннего строения. Прогрессу в области теоретических изысканий в значительной степени способствует применение непрерывно развивающихся математических и компьютерных методов. Актуальность лунных исследований обусловлена необходимостью решения как фундаментальных проблем небесной механики и изучения Солнечной системы, так и решением всё более востребованных практических задач по освоению Луны и окололунного пространства.

На основании лунных экспериментов Clementine и Lunar Prospector и построенных по ним моделей гравитационного поля Луны, группа учёных JPL NASA, под руководством J. Williams [14] провела тщательный анализ наблюдений физической либрации Луны с привлечением лазерной локации Луны и, с учётом уточнённых данных по возможной структуре лунного ядра, оценила, каким образом различные виды диссипативных процессов скажутся на параметрах вращения Луны. Моделирование лазерных данных позволило учёным сделать выводы о примерном химическом составе лунного ядра и его размерах. Ранее было обнаружено [14], что диссипация лунного вращения вызывает периодическое колебание вектора нормали экватора Луны, амплитуда которого 0.26 угловых секунд относительно плоскости Кассини. Проведённый на основе новых данных о гравитационном поле, коэффициентах Лява и большого количества лазерных измерений группа Williams выявила, помимо вязкоупругих и приливных факторов диссипативные процессы на границе жидкого ядра и мантии (СМВ), которые ответственны примерно за треть наблюдаемой амплитуды в выявленном смещении полюса Луны. В ходе этого исследования были обнаружены и другие частоты физической либрации, на которых проявляются диссипативные свойства лунного вращения.

Позднее, также группой J. Williams были построены полуэмпирические аналитические ряды теории физической либрации Луны [15]. Аналитические ряды были рассчитаны не путём решения уравнений либрации: их параметры – степенные коэффициенты и частотные характеристики каждого члена – были получены методом Ласкара на основе высокоточного частотного анализа остаточных разностей между многолетними лазерными данными и параметрами вращения, извлечёнными из DE421. Большая часть полученных таким образом гармоник была отождествлена с вынужденными или свободными либрациями. Однако

остались и ещё ряд членов малой амплитуды (менее 50 мс), для которых не нашёлся источник их физической интерпретации. Единственное на сегодняшний день обоснованное объяснение происхождения этих неотожествлённых членов получено в работе Ю.В.Баркина [6]: он показал, что эти члены являются производными от свободных нутаций жидкого лунного ядра.

Таким образом, разработка и развитие теории лунной динамики остаётся весьма актуальной. Точная теория нужна не только для решения задач практического освоения Луны, но и для решения ряда фундаментальных проблем, связанных с получением данных о вязкоупругих характеристиках лунного тела, лунном ядре, его химическом составе и динамической фигуре. В частности, выяснение вопроса о наличии у Луны ядра и его физико-химических свойствах позволит приблизиться к решению задачи о возникновении и развитии системы Земля – Луна. Косвенные доказательства наличия лунного ядра были впервые получены из лазерных наблюдений. В 2011 году при переобработке сейсмических измерений [9, 16], полученных в программе Apollo, с применением современных математических и компьютерных методов были получены и прямые доказательства того, что у Луны есть ядро, были сделаны оценки его структуры и размеров, которые подтвердили результаты, ранее полученные из лазерных наблюдений. Однако, несмотря на столь большой прогресс в получении данных о лунном ядре, остаётся ещё ряд вопросов, без решения которых мы не имеем полной картины процессов, происходящих в теле Луны. Речь идёт о параметрах сжатия ядра, скорости его вращения, наличии твёрдой внутренней сердцевины в жидкой оболочке ядра – от этого зависит тип взаимодействия ядра с мантией, что, соответственно, не может не сказаться и на вращении Луны в целом.

Помочь в решении этих задач может высокоточная теория физической либрации Луны, которая развивается в данном диссертационном исследовании. При аналитическом решении либрационных уравнений результат получается из суммы решений соответствующего однородного уравнения и решения неоднородного уравнения. Первый тип решения ответственен за так называемые свободные либрации: которые могли бы возникнуть в лунном вращении вследствие каких-то случайных единовременных возмущений: падение крупного метеорита, например. Долгое время считалось, что такие либрации давно затухли в ходе эволюции лунного вращения. Однако, лазерные локация обнаружила подобные низкоамплитудные либрации на собственных частотах Лунного тела. Теоретически было также предсказано, что если у Луны есть жидкое ядро, то в её вращении должны появиться дополнительные моды свободной либрации, обусловленные несовпадением оси вращения лунного ядра с осью

вращения мантии – свободные нутации ядра, как у Земли. Однако расчёты показали, что период этих либраций близок к суточному лунному периоду, если рассматривать их в лунной системе координат, а в инерциальной – период порядка 300 лет [4], что при условии малых амплитуд (на уровне миллисекунд), существенно затрудняет их обнаружение. Но, если бы в наблюдениях ФЛЛ удалось обнаружить эту нутацию, мы бы получили дополнительные условия для определения и размеров лунного ядра, и его эллиптичности. Тем не менее, и эта проблема разрешима на теоретическом уровне. Так Ю.В.Баркиным [6] впервые была построена аналитическая теория физической либрации для модели Луны с жидким ядром. В результате, как и ожидалось, было получено несколько высокочастотных гармоник малой амплитуды (менее 30 мс), обусловленных исключительно наличием у Луны ядра. При сравнении теоретических результатов с полуэмпирической моделью ФЛЛ [15], выяснилось, что многие так называемые «неизвестные» члены с амплитудой менее 5 мс в полуэмпирической модели как раз и соответствуют полученным в теории Ю.В.Баркина гармоникам. Это важное открытие, имеющее методологическое значение для применения результатов теории к поиску в наблюдениях тех гармоник, которые помогут дать дополнительную информацию о параметрах лунного ядра. К сожалению, пока эти результаты о взаимосвязи аналитически и эмпирически полученных результатов не получили широкого распространения. Возможно, потому что в теории Баркина Ю.В. рассмотрена простейшая модель жидкого эллипсоидального ядра, свободно вращающегося внутри лунной мантии. Имеет смысл продолжить развитие этого подхода для того, чтобы путём моделирования параметров ядра добиться максимального соответствия теории с наблюдениями.

В представленном диссертационном исследовании приведены результаты разработанной теории физической либрации Луны на основе численного подхода к решению либрационных уравнений, которые были получены в Казанском федеральном университете. Основы теоретического описания вращения Луны были заложены Ш.Т.Хабибуллиным в конце 50-х годов прошлого столетия. В середине 90-х годов Н. К. Петровой [11], была создана аналитическая теория ФЛЛ. Представленная работа развивает результаты Н. К. Петровой на случай более точной модели лунного вращения, учитывающей такие эффекты, как косвенные и прямые возмущения от планет, влияние гармоник 4-го порядка гравитационного потенциала Луны, учёта усредненного приливообразующего потенциала и ряда других тонких эффектов, выходящих за пределы «главной проблемы».

## **Объект и предмет исследования**

**Предметом** исследования является физическая либрация Луны.

**Объектом** исследования является система Луна – гармонический анализ, движение твердого тела в гравитационном поле, твердотельные приливы, анализ вращательной лунной динамики.

**Цель** данной работы – разработка численной теории физической либрации для модели упругой Луны с учетом требований на точность, определяемую современными наблюдениями.

Решаемые **задачи**, необходимые для достижения поставленной цели:

### 1. Разработка модели с точки зрения главной проблемы ФЛЛ:

- Вывод системы уравнений Гамильтона с использованием самолетных углов в качестве канонических переменных;
- Анализ гравитационного поля Луны с точностью до 3-го порядка в разложении по сферическим функциям;
- Исследование влияния возмущения от Земли и Солнца, представляя их как точечные объекты;
- Использование как основной теории аналитической теории движения Луны Гутцвиллера – Шмидта.

### 2. Уточнение модели главной проблемы:

- Включение высших гармоник в разложение гравитационного поля Луны в теорию ФЛЛ;
- Трансформация уравнений вследствие перехода к динамической теории движения Луны DE421;
- Учет влияния приливного члена Земли и гравитационных сил со стороны планет.

Следует отметить, что учет приливных явлений от Земли производился с помощью методики, предложенной J.Williams [14], согласно которой включение приливных деформаций можно выполнить с некоторой степенью точности путем добавления поправочных величин к коэффициентам Стокса и к компонентам тензора инерции Луны. Это вполне обоснованная методика, так как, согласно международной службе вращения Земли IERS, она является стандартной при расчете приливных поправок к вращению Земли.

## **Основные положения, выносимые на защиту**

1. Разработанные математический метод и программный алгоритм для описания вращения твердого тела Луны в рамках главной проблемы позволили решить дифференциальные уравнения вращения Луны.

2. Разработанные методики и подходы для исследования параметров современных динамических эфемерид для построения высокоточной теории физической либрации Луны позволили осуществить привязку текущей численной теории к данным DE421.

3. Результаты проведенного в работе сравнительного анализа теорий физической либрации Луны необходимы при использовании теории DE421 для моделирования либрационных параметров, определяющих уравнения связи канонических переменных в системе самолетных углов с углами Эйлера.

4. Разработанные модели и методы, обеспечивающие решение задачи физической либрации Луны с учетом дополнительных возмущений, выходящих за рамки модели главной проблемы, необходимы для повышения уровня координатного обеспечения в процессе прилунения космических аппаратов и позволили учесть отклонения от главной проблемы физической либрации Луны.

#### **Научная новизна работы**

1. Впервые построена теория ФЛЛ с использованием собственной методики, и в отличие от других теорий применены самолетные углы в качестве либрационных переменных;

2. Разработан и реализован авторский алгоритм для интегратора дифференциальных уравнений ФЛЛ;

3. Создана численная теория для модели упругой Луны, которая опирается на современную высокоточную орбитальную теорию движения Луны, что повышает ее точность и достоверность;

4. Решена задача для уточненной модели вращения Луны, что позволило расширить представления о главной проблеме ФЛЛ.

Раскроем содержание первого пункта более подробно. Описание вращения Луны было реализовано через переменные, которые задают положение лунного тела (осей инерции  $a, b, c$ ) относительно эклиптики – это разновидность самолетных углов: угол рысканья  $\mu$  описывает движение оси  $a$  относительно среднего движения Луны в эклиптике, угол крена  $\nu$  отслеживает смещение оси  $a$  относительно эклиптики, а угол тангажа  $\pi$  ответственен за отклонение оси  $c$  от плоскости «полюс эклиптики – ось  $a$ » (рис 1). Указанные переменные, в отличие от классических углов либрации  $\tau, \rho, \sigma$ , описывающих либрационное движение в углах Эйлера, не привязаны к движению лунного узла, что позволяет не учитывать прецессию лунного узла при решении уравнений либрации. Кроме того, использование разных способов построения уравнений либрации при сравнении позволяет выявлять возможные систематические ошибки, разную чувствительность переменных к внешним возмущениям [12], получить объективную оценку внешней точности теории.

#### **Практическая и научная значимость работы**

Результаты работы могут быть использованы для решения задач селенодезии и небесной механики:

1. Точная теория ФЛЛ востребована для адекватной обработки современных и планируемых наблюдений за вращением Луны. При обработке наблюдений лазерной локации такая теория является необходимым инструментом, позволяющим подгонять теоретические параметры к наблюдаемым на основе уменьшения остаточных разностей  $O - C$ .

2. Для координатно-временного обеспечения навигационных задач на Луне и окололунном пространстве. При этом для навигационной привязки к селеноцентрической системе координат и получения с высокой точностью координат объектов на лунной поверхности необходимо знать неравномерности во вращении лунного тела.

3. Теория ФЛЛ обеспечивает возможность анализа внутренней структуры Луны. Для решения научных задач по изучению внутренней структуры лунного тела (параметры лунного ядра, диссипативные процессы на границе с лунным ядром, отклонения от модели твердого тела, упругие параметры тела и т.д.) необходимо иметь не только ряды физической либрации, но и инструмент, который позволит изменять параметры уравнений ФЛЛ, вносить новые члены в теорию и проводить анализ их влияния на конечный результат.

4. Разработанная в диссертационном исследовании методика может быть экстраполирована для изучения вращения резонансных спутников других планет. В будущих исследованиях объектов дальнего космоса, например, резонансных спутников Юпитера, необходимы информация о параметрах гравитационного поля и вращения спутника, топографические данные, что позволит обеспечить успешную навигацию космического аппарата и определить области, подходящие для его безопасного прилунения.

5. Создание лунного ежегодника, который будет использоваться при планировании лунных наблюдений и анализа селенодезических процессов.

Данные исследования могут быть использованы в ГАИШ МГУ, ИНАСАН, ИФЗ РАН, ИПА РАН, ГАО РАН, КФУ.

#### **Методология и методы исследования**

В работе используются следующие методы: описание гравитационного поля через разложение его по сферическим функциям; формализм Гамильтона – как метод построения уравнений вращения для задачи физической либрации Луны; Фурье анализ для определения частотных характеристик остаточных разностей при сравнении получаемого решения с наблюдаемыми данными по ФЛЛ.

#### **Достоверность полученных результатов**

Полученные в работе данные являются достоверными, так как: а) они в высокой степени согласуются с аналогичными результатами, опубликованными в высокорейтинговых рецензируемых научных изданиях;



б) в процессе их обработки применялись классические методы редукции и анализа наблюдательных данных; в) основные результаты успешно прошли апробацию на профильных астрометрических конференциях, проводимых ГАИШ МГУ, ГАО РАН и ИНАСАН РАН.

### **Апробация работы**

Основные результаты диссертационного исследования были доложены на заседаниях Кафедры астрономии и космической геодезии Казанского (Приволжского) федерального университета, на объединенном семинаре «Проблемы происхождения и эволюции кометно–астероидного вещества в Солнечной системе и околоземная астрономия» в ИНАСАН, а также на следующих всероссийских и международных научных конференциях:

1. Всероссийская астрономическая конференция 2021 года (ГАИШ МГУ), 23–28 августа 2021 г., Москва, Россия;
2. Третья астрометрическая конференция школа «Астрометрия вчера, сегодня, завтра» (ГАИШ МГУ), 14-16 октября 2019 г., Москва, Россия;
3. Всероссийская астрономическая конференция «Астрономия: познание без границ», 17-22 сентября 2017 г., Ялта, Россия;
4. Всероссийская астрометрическая конференция «Пулково-2018» (Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН), 1-5 октября 2018 г, Санкт-Петербург, Россия;
5. XV конференция молодых ученых, посвященная дню космонавтики Фундаментальные и прикладные космические исследования (ИНАСАН) 11-13 апреля 2018 г., Москва, Россия;
6. XIV конференция молодых ученых, посвященная дню космонавтики Фундаментальные и прикладные космические исследования (ИНАСАН), 12-14 апреля 2017 г., Москва, Россия;
7. XV конференция молодых ученых, посвященная дню космонавтики Фундаментальные и прикладные космические исследования (ИКИ РАН), 11-13 апреля 2018 г., Москва, Россия;
8. The eighth Moscow solar system symposium 8M-S<sup>3</sup> (ИКИ РАН) 9-13 октября 2017 г., Москва, Россия;
9. Международная конференция Физика.СПб/18 (ФТИ им. А.Ф. Иоффе), 23-25 октября 2018 г., Санкт-Петербург, Россия;
10. Международная молодёжная конференция Физика.СПб/21 (Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория), 23-27 октября 2021 г., Санкт-Петербург, Россия;
11. Международная молодёжная конференция Физика.СПб/22 (Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория), 23-27 октября 2022 г., Санкт-Петербург, Россия;
12. Международная конференция «85th Annual Meeting of The Meteoritical Society», 14–19 августа 2022 г., Глазго, Шотландия;

13. Международная конференция «84th Annual Meeting of The Meteoritical Society», 14-21 августа 2021 г., Чикаго, США;
14. AIAA SPACE and Astronautics Forum and Exposition сентябрь 2018 г., Калифорния, США;
15. Международный симпозиум «Lunar Exploration and Space Technology Heritage», июнь 2016 г., Казань (КФУ), Россия;

#### **Личный вклад автора**

1. Выполнен вывод уравнений Гамильтона в самолетных углах. Личный вклад автора составил 80%, опубликовано 7 статей (№2, 3, 8-11, 20, в списке публикаций автора);
2. Осуществлен вывод гармоник 4-го и 5-го порядков селенопотенциала и их верификации с приведенными в литературе. Личный вклад автора составил 80%, опубликована 1 статья (№ 2 в списке публикаций автора);
3. Построен алгоритм для работы с аналитическими рядами ФЛЛ. Личный вклад автора составил 70%, опубликована 1 статья (№ 1 в списке публикаций автора);
4. Проведено исследование динамической эфемериды DE421. Личный вклад автора 80%, опубликовано 10 статей (№ 1, 12-19, 21 в списке публикаций автора);
5. Разработана система уравнений Гамильтона для решения главной проблемы ФЛЛ. Личный вклад автора составил 80%, опубликованы 2 статьи (№2, 5 в списке публикаций автора);
6. Создана теория физической либрации Луны для упругой модели. Личный вклад автора составил 80%, опубликована 1 статья (№ 5 в списке публикаций автора);
7. Выполнен анализ параметров для построения теории ФЛЛ с точки зрения их достоверности и точности. Личный вклад автора составил 80%, опубликовано 7 статей (№4,5,7,22-25 в списке публикаций автора);

#### **СТРУКТУРА И ОБЪЕМ ДИССЕРТАЦИИ**

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения. Основной текст диссертации содержит 137 страниц, включая 31 рисунок, 12 таблиц. Приложение содержит 5 страниц. Список литературы включает 109 наименований.

#### **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

Во **Введении** кратко даны актуальность, цель работы, решаемые задачи, описаны новизна, достоверность и методы исследований, перечислены основные положения, выносимые на защиту, приведены основные публикации по теме диссертации, выполнен краткий анализ полученных в диссертационном исследовании результатов, обозначен вклад автора в совместных исследованиях, даны данные по объему и структуре работы, кратко описаны основные разделы диссертации.

**В первой Главе** описывается современное состояние спин-орбитальных теорий физической либрации Луны (ФЛЛ). Приводятся ряд факторов, которые способствовали повышению точности теории ФЛЛ, в первую очередь, полученных на основе обработки лазерной локации Луны. Важным было открытие у Луны диссипации механической энергии, обусловленной как приливным трением, так и турбулентными процессами на границе ядро - мантия (core mantle boundary). На основе уточнённой модели гравитационного поля, построенной в результате ряда космических миссий, была сделана оценка эллиптичности лунного ядра, которая создает дополнительное возмущение на вращение Луны. Теоретически предсказано наличие у Луны свободной нутации ядра (FCN – Free core nutation), обусловленной несовпадением осей инерции жидкого ядра и твердой мантии, пока не получило экспериментального подтверждения: требуются более длительные и более точные наблюдения, а также соответствующая уточнённая теория ФЛЛ.

С использованием данных Rambaux and Williams [9] и теории DE421 были получены эмпирические ряды ФЛЛ. Определены частоты и амплитуды свободной и вынужденной либрации с учетом внешних и внутренних возмущающих факторов. Тем не менее, в этих эмпирических рядах остались гармоники, обозначенные как неизвестные, природу появления которых авторам не удалось определить. До некоего времени эта проблема оставалась не решенной, пока в 2014 году Ю.В. Баркин [6] не построил аналитическую теорию либрации Луны с учётом наличия в её теле жидкого ядра. При сравнении теория Ю.В.Баркина с эмпирическими рядами выявился тот факт, что многие из неизвестных гармоник совпали с частотами, возникающими вследствие присутствия жидкого ядра.

Анализируя наблюдаемые данные относительно выхода полюса Луны из плоскости Кассини вследствие диссипации лунного вращения, Williams et al. [14] показали, что значение смещения величиной  $\sim 0.26$  угловых секунд, только  $\frac{2}{3}$  величины обязано приливам, а  $\frac{1}{3}$  соответствует диссипации на СМВ. Оценить соответствующую долю различных причин диссипации удалось благодаря введению в рассматриваемую модель вращения ядра и мантии с разной угловой скоростью. Однако в силу малости лунного ядра и медленной скорости вращения Луны, основным источником диссипации являются приливное трение.

Приливы играют важную роль и в формировании фигуры лунного тела. В работе [14] предложен и апробирован приближенный метод введения приливообразующего потенциала как постоянную добавку к моментам инерции и к коэффициентам Стокса второго порядка твердого тела Луны. Этот метод мы адаптировали для нашей задачи и с его помощью учли эффект приливной деформации Луны на физическую либрацию.

Также в первой главе анализируются аналитические теории ФЛЛ Н.К.Петровой [11], рассматривающей задачу в рамках главной проблемы, Ю.В.Баркина, включившего в рассмотрение жидкое эллиптическое лунное ядро, и Б.П.Кондратьева [5], представившего оригинальный математический подход к решению задачи ФЛЛ. В заключении данной главы приводится анализ современных динамических эфемерид.

**Вторая глава** посвящена разработке и построению теории вращения Луны в рамках модели, в которой Луна представляется как абсолютно твёрдое тело.

Вся методика построения уравнений ФЛЛ основаны на том, что вращение Луны имеет либрационный характер. Это означает, что Луна вращается медленно, средняя скорость вращения синхронизирована с орбитальной скоростью, внешние возмущения приводят лишь к малым покачиваниям (либрациям) относительно среднего положения. Иными словами, система подобного рода находится в резонансе 1:1. Впервые особенности вращения Луны были изучены Джовани Кассини, который в результате многолетних наблюдений сформулировал три закона, которые получили название эмпирических законов Кассини. Основные положения:

1. Время оборота Луны вокруг оси равно времени оборота вокруг Земли. Другими словами, скорость вращения Луны вокруг оси совпадает со скоростью движения вокруг Земли как по значению, так и по направлению;
2. Наклон лунного экватора к эклиптике постоянен составляет  $1^{\circ}32'$ ;
3. Радиусы-векторы полюсов плоскости лунной орбиты, экватора и эклиптики Луны расположены в единой плоскости.

Модель, которая в настоящей диссертации закладывается как первое приближение, называется главной проблемой в теории вращения Луны. Она включает в себя следующие положения:

1. Луна – абсолютно твёрдое тело, потенциал которого описывается через сферические функции с учётом гармоник второго, третьего и четвертого порядков;
2. Возмущающими факторами являются Земля и Солнце, которые при взаимодействии с Луной рассматриваются точечными объектами;
3. Орбитальное и вращательное движения с высокой степенью приближения рассматриваются как независимые, что позволяет использовать готовые решения для описания движения центра масс Луны.

В начале первого раздела приводится обоснование правомерности использования данной модели, а далее подробно рассматривается алгоритм математического построения уравнений ФЛЛ: от геометрического описания положения тела Луны в инерциальной системе координат, вывода кинематических уравнений, определяющих положение оси вращения Луны в динамической системе координат, до построения динамических уравнений

на основе числовых значений параметров лунного тела и влияния внешних сил, оказывающих возмущающее действие на вращательную динамику Луны. Особенностью применённого в работе подхода является отказ от традиционных углов Эйлера при описании ФЛЛ, и использование самолётных углов  $\mu, \nu, \pi$ , задающих вращение лунного тела относительно эклиптики (рис. 1). При этом строятся уравнения вращения Луны в рамках Гамильтоновой механики. Подробно рассматриваются вывод выражения для кинетической энергии  $T(\mu, \nu, \pi, \dot{\mu}, \dot{\nu}, \dot{\pi})$  и гармоник возмущающего потенциала  $U(\mu, \nu, \pi)$ .  $U(\mu, \nu, \pi)$  представляет собой гармонический ряд разложения по сферическим функциям. В итоге была построена система либрационных уравнений. Было определено в первом приближении, что ФЛЛ в долготе независима от либрации в широте. Последнее дало возможность вывести и решить характеристическое уравнение с целью определения значений собственных частот ФЛЛ.

Для описания движения центра масс Луны на этом этапе была взята аналитическая теория орбитального движения Луны относительно Земли Гутцвиллера и Шмидта [10]. Для описания движения Солнца нами были применена простейшая модель кеплеровской орбиты. Другими словами, на этапе решения в рамках главной проблемы мы полностью воспроизвели модель аналитической теории Петровой Н.К., что и позволило нам провести сравнение полученных результатов и оценить корректность разрабатываемого нами метода решения.

При выборе метода численного интегрирования либрационных уравнений мы исходили из требований внутренней точности решения и после сравнения нескольких современных методов было принято решение использовать метод Рунге-Куты 10-го порядка, обеспечивающий точность  $10^{-4}$  секунды дуги в углах ФЛЛ при шаге интегрирования 0.1 суток.

Положение тела Луны в пространстве определяется положением триэдра её осей инерции (Динамическая система координат – ДСК) в ИСК, в качестве которой мы с достаточно высокой степенью приближения принимаем эклиптическую систему. Параметры ФЛЛ, или по-другому, углы либрации  $\mu, \nu, \pi$  задают это положение (рис. 1). Здесь СИК представляет собой систему инерциальных координат, а СК – систему декартовых координат. Так координаты  $(X, Y, Z)^T$  радиуса-вектора Земли в селеноцентрической эклиптической системе координат в ДСК могут быть получены с помощью матриц поворота ( $\prod_r(q)$ ):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \prod_x(-\pi) \times \prod_{\bar{Y}}(\nu) \times \prod_z(L + \mu) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (1)$$

Для применения метода Гамильтона были введены канонические угловые переменные:  $q_i = \{\mu, \nu, \pi\}$  или  $\vec{q} = (q_1 q_2 q_3)$  и сопряжённые им

канонические импульсы  $p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i}$  или  $\vec{p} = (p_1 p_2 p_3)$ . В результате, гамильтониан системы  $H = T - U = H(\vec{q}, \vec{p})$ . Тогда, согласно стандартной методике, уравнения Гамильтона будут записаны в виде:  $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = Q_i(\vec{q}, \vec{p})$ ;  $\frac{dp_i}{dt} = \frac{-\partial H}{\partial q_i} = P_i(\vec{q}, \vec{p})$ , Здесь Q и P – нелинейные функции от канонических переменных.

В разделе 4 главы 2 приводиться алгоритм метода Рунге Кутты. Мы в наших исследованиях ограничились 10-м порядком точности, на основе которого решалась система дифференциальных уравнений ФЛЛ. Внешняя точность решения определялась на основе сравнения с аналитической теорией Петровой Н.К. В результате, остаточные разности имели периодический характер с наибольшими амплитудами порядка  $1,5''$  на частотах близких к собственным частотам системы уравнений ФЛЛ. Разность между решениями составила в долготе по модулю 1.5 угловых секунд, а в широтных компонентах (в углах  $\nu$  и  $\pi$ ) не более 0.8 угловых секунд. На эту ошибку при сравнении численной и аналитической теории в свое время обратил внимание Ерошкиным Г.И. [7] при сравнении своей численной теории ФЛЛ с теорией Eckhardt D.H. [8].

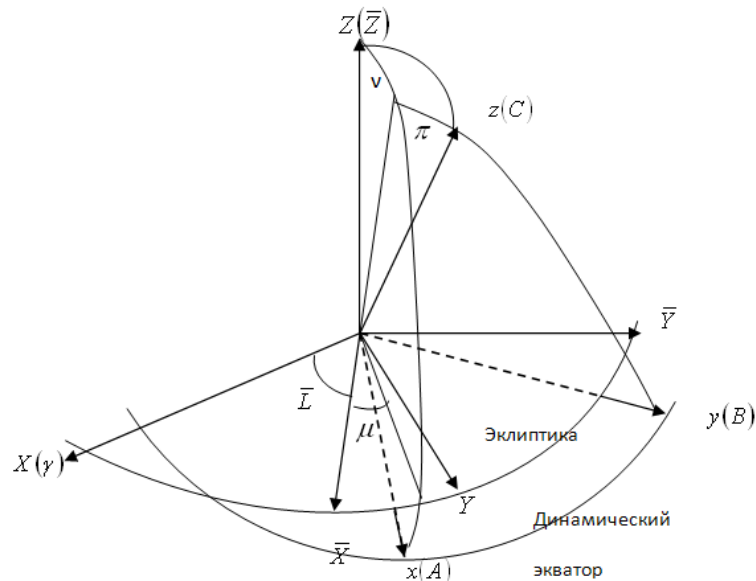


Рис. 1. X, Y, Z представляет собой СИК, в которой абсцисса X направлена на ТВР, а аппликата Z направлена в полюс эклиптики. x, y, z являются осями СДК, которые совпадают с осями инерции А, В, С, соответственно.  $\mu, \nu, \pi$  – самолетные углы ФЛЛ.  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  – эклиптическая СК.

Ерошкиным Г.И., также было отмечено, что основными частотами в остаточных разностях являются частоты близкие к собственным частотам

системы, что и приводит к наличию большой разности между сравниваемых теориях, несмотря на высокую точность самих численных теорий. Причина такого расхождения результатов двух методов решения одной задачи, скорее всего, обусловлена погрешностью аналитического метода, а именно: недостаточно полным учётом резонансных членов и членов с малыми знаменателями.

**В третьей главе** представлено описание методики перехода от менее точной аналитической теории движения Луны Гутцвиллера-Шмидта к динамической теории DE421. Выбор именно этой теории обусловлен рядом факторов: теория DE421 стала стандартом использования при обработке астрономических данных, а также имеющая полуэмпирическое решение в виде пуассоновских рядов. Наличие полуэмпирического решения позволило нам провести верификацию, построенных нами алгоритмов с работой DE421:

1. Алгоритм по извлечению параметров лунной орбиты
2. Алгоритм по извлечению ФЛЛ, заложенной в эфемериду

В результате, при переходе на DE421 амплитуда в остаточных разностях при сравнении численного интегрирования и решения заложенного в DE421 в широте составила около 11 угловых секунд, а либрация в долготе составила 1.5 угловых секунд. Причина таких больших значений остаточной разности очевидна: численная теория DE 421 построена на более точной модели вращения Луны. Мы же на этом этапе сравниваем только с решением главной проблемы. Поэтому на следующем этапе исследований мы переходим к уточнению модели лунного вращения.

**В четвертой главе** было выполнено усовершенствование модели ФЛЛ главной проблемы, описанной во второй главе, за счёт включения в разложение потенциала 4-й гармоники, приливного воздействия на Луну со стороны Земли, а также учет прямого гравитационного взаимодействия планет с телом Луны. Вклад 4-й гармоники составил по амплитуде в либрации по широте примерно 1 угловую секунду с основным периодом близким к собственному периоду 2.9 года. В либрации по широте хорошо выделяется период близкий к собственному периоду системы, равный 27 дней, где размах в угле  $\nu$  составил 0.3 угловых секунды, а в угле  $\pi$  0.6 угловых секунд. Необходимо отметить, что вклад 4-й гармоники, как и 3-й, в либрацию по долготе вызывает постоянное смещение оси инерции  $a$  от лунного нулевого меридиана.

Далее был проведен учет гравитационных возмущений от других планет Солнечной системы, которые можно разделить на косвенные и прямые. Косвенные возмущения определяются влиянием планеты на орбиту Луны, что автоматически было учтено при переходе на орбиту эфемериды DE421. Прямое влияние планет учитывается через потенциальную энергию

взаимодействия точечной планеты с телом Луны, описываемым, для решения этой задачи, только второй гармоникой селенопотенциала. В результате нами было получено, что вследствие этого возмущения амплитуда в либрации по долготе составляет порядка  $10^{-5}$  угловой секунды, а по широте (как в угле  $\nu$ , так и в угле  $\pi$ ) составляют порядка  $10^{-4}$  угловых секунд, т.е. рассматриваемое возмущение оказывает очень малое влияние либрацию. Аналогичные результаты были получены ранее в работе [1], где также рассматривается подобный подход влияния планет на вращательную динамику Луны, и было показано, что данный эффект является достаточно малым, что свидетельствует о корректности применяемого нами метода и полученных результатов.

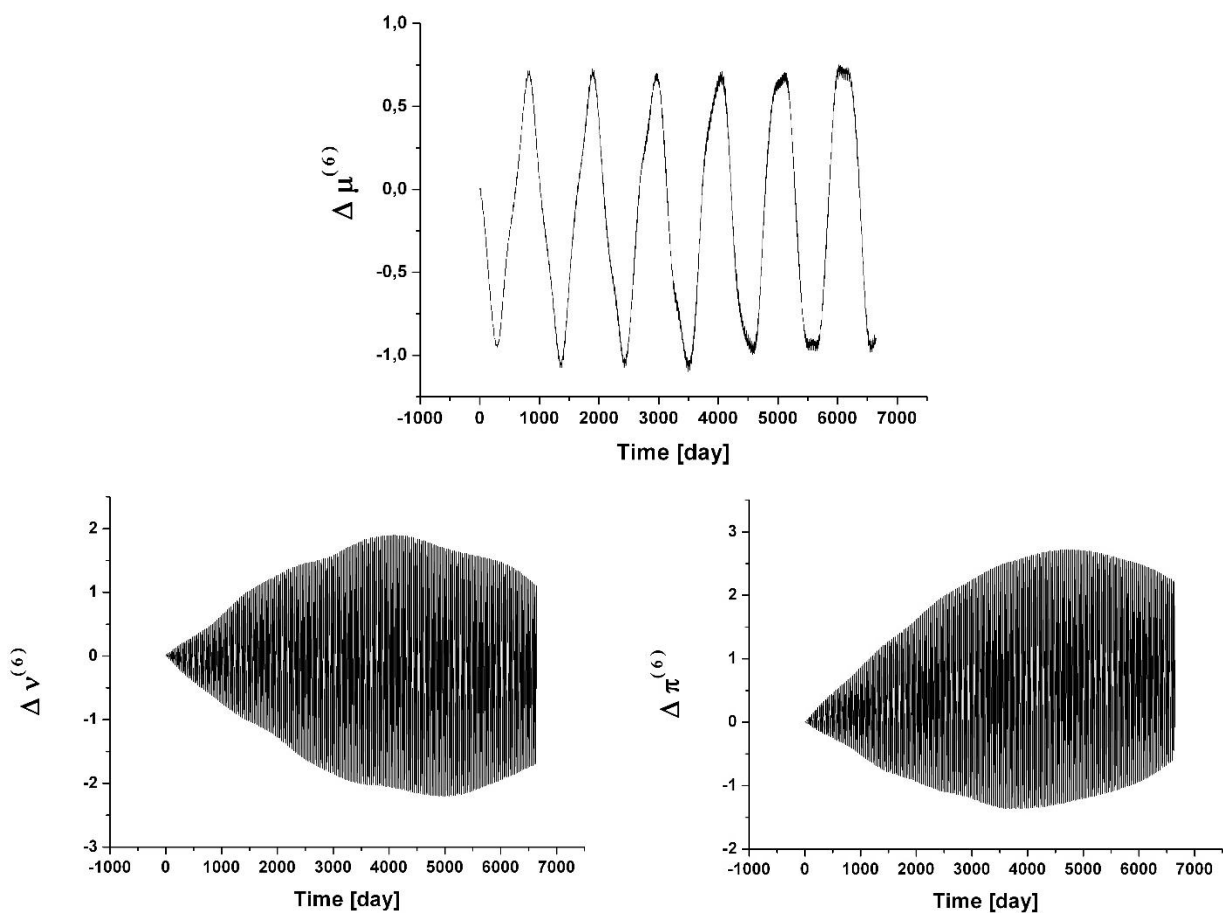


Рис. 2 Остаточные разности в угл. сек. между численным решением и динамической эфемеридой DE421

Следующим фактором, повышающим точность ФЛЛ, является учет приливного влияния Земли. Нами был применен приближенный метод, разработанный в [14], где были вычислены усредненные поправки к коэффициентам Стокса 2-го порядка. Поскольку вращение Луны медленное, то в качестве первого приближения можно приливное влияние рассматривать как дополнительные поправки к перераспределению массы. В



итоге учёта этого эффекта удалось уменьшить амплитуду в остаточных разностях по широте на один порядок. Итоговые остаточные разности приведены на рис. 2. Расхождения наших параметров с данными DE421, соответствующие остаточным разностям варьируются от -1.1 до 0.75 секунд дуги в угле либрации по долготе  $\mu$ , в  $\nu$  от -2.4 до 1.9 секунд дуги и в  $\pi$  от -1.4 до 2.6 секунд дуги. Чтобы уменьшить остаточные разности необходимо усовершенствовать модель: более точно учесть приливные деформации Луны, а также рассмотреть процессы на границе ядро/мантия [№1 в списке публикаций автора]. Эти эффекты приводят к нарушению консервативности гамильтоновых уравнений и, соответственно, требуют дальнейшего изучения.

**В заключении** отметим, что разработка модели и методов, обеспечивающих решение задачи физической либрации Луны с учетом дополнительных возмущений, выходящих за рамки модели главной проблемы ФЛЛ [2], необходима для построения численной теории ФЛЛ [3], повышения уровня координатного обеспечения в процессе прилунения космических аппаратов и позволила определить отклонения от главной проблемы физической либрации Луны.

### Публикации автора

**Статьи в журналах WoS/Scopus, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ:**

1. Petrova N.K., **Zagidullin A.A.**, Nefedyev Y.A. The analytical and numerical approaches to the theory of the Moon's librations: Modern analysis and results. *Advances in Space Research*. 2017. vol. 60. is. 10. p. 2303-2313. Web of Science JIF2022=2.6, личный вклад 80%, объем 1.32 печатных листов.
2. **Загидуллин А.А.**, Петрова Н.К., Усанин В.С., Нефедьев Ю.А., Глушков М.В. Разработка численного подхода в теории физической либрации в рамках «главной проблемы». Ученые записки Казанского университета<sup>1</sup>. Серия Физико математические науки. 2017. т.159. №4. с. 529-546 //Переводная статья: **Zagidullin A. A.**, Petrova N.K. Usanin V.S., Nefedyev Y.A., Glushkov M.V. Development of the Numerical Approach in the Theory of Physical Libration within the Framework of the "Main Problem". *Uchenye zapiski kazanskogo universiteta-seriya fiziko-matematicheskie nauki*. 2017. vol. 159. Is 4. p. 529-546. Scopus SJR2022 = 0.3, личный вклад 80%, объем 2.16 печатных листов. *Прим.: Журнал индексируется системой Scopus с 2016 года.*
3. Петрова Н.К., Нефедьев Ю.А., **Загидуллин А.А.**, Андреев А.О. Использование аналитической теории физической либрации Луны для обнажения свободных нутаций лунного ядра. *Астрономический журнал*. 2018. т. 95. №. 12. с. 920-925 // Переводная статья: Petrova N.K., Nefed'ev

---

<sup>1</sup> Журнал включен в Scopus в 2016 году

Yu.A., **Zagidullin A.A.**, Andreev A.O. Use of an Analytical Theory for the Physical Libration of the Moon to Detect Free Nutation of the Lunar Core. *Astronomy Reports*. 2018. vol. 95, № 12. p. 1020-2024. Web of Science JIF2022=1.0, личный вклад 80%, объем 0.6 печатных листов.

4. Петрова Н.К., Нефедьев Ю.А., Андреев А.О., **Загидуллин А.А.** Налунные измерения физической либрации луны: методы и оценка точности. *Астрономический журнал*. 2020. т. 97. № 12. с. 1042-050 // Переводная статья: Petrova N.K., Nefedyev Yu.A., **Zagidullin A.A.**, Andreev A.O. Lunar-Based Measurements of the Moons Physical Libration: Methods and Accuracy Estimates. *Astronomy Reports*. 2020. vol.64. is.12. p. 1078-1086. Web of Science JIF2022=1.0, личный вклад 80%, объем 1.08 печатных листов.

5. **Загидуллин А.А.**, Усанин В.С., Петрова Н.К., Нефедьев Ю.А., Гудкова Т.В. Физическая либрация Луны: расширенная проблема. *Астрономический журнал*. 2021. т. 98. № 1. с. 75-88 // Переводная версия: **Zagidullin A.A.**, Usanin V.S., Petrova N.K. Nefed'ev Yu.A, Gudkova T.V. Physical libration of the moon: an extended problem. *Astronomy Reports*. 2020. vol. 64. p. 1093–1106 Web of Science JIF2022=1.0, личный вклад 80%, объем 1.68 печатных листов.

6. **Zagidullin A.A.**, Petrova N. K., Andreev A. O., Nefedyev Y. A. Development of the Theory of Physical Libration of the Moon Taking into Account the Lunar Two-Layer Model Including a Solid Mantle and a Liquid Core. *Meteoritics & Planetary Science*. 2022. vol. 57. is. 1. p. 6282. Web of Science JIF2022=2.2, личный вклад 70%, объем 0.12 печатных листов.

7. **Zagidullin A.A.**, Petrova N.K., Nefedyev Yu.A., Andreev A.O. Creation of a generalized dynamic model of planetary moons based on an analytical approach for describing the libration processes of their rotation. *St. Petersburg State Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics*. 2023. Vol. 16, No. 1.2, 517 – 522 Scopus SJR2022=0.38, личный вклад 80%, объем 0.72 печатных листов.

#### **Иные публикации**

8. Zagidullin A. A., Petrova N. K., Usanin V. S., Nefedief Yi. A., Glushkov M. V. Numerical approach to constructing the lunar physical libration: results of the initial stage. *European Planetary Science Congress*. 2015. vol. 10. Art. id. 67., личный вклад 60%, объем 0.12 печатных листов.

9. Zagidullin A. A., Petrova N. K. Development of a numerical approach to the theory of the rotation of the Moon: A study of latitudinal parameters physical libration. 41st COSPAR Scientific Assembly, 30 July - 7 August. 2016. Art. id. B0.1-31-16., личный вклад 80%, объем 0.12 печатных листов.

10. Загидуллин А. А., Петрова Н. К., Усанин В. С., Нефедьев Ю. А., Глушков М.В. Численный подход к построению физической либрации Луны: результаты второго этапа. *Reports of the International Symposium «Lunar Exploration and Space Technology Heritage»*. 25-30 August. Kazan:

Kazan federal university. 2016. С. 218 - 225., личный вклад 80%, объем 0.96 печатных листов.

11. Загидуллин А. А., Петрова Н. К., Усанин В. С., Нефедьев Ю. А. Физическая либрация Луны - главная проблема. XIV конференция молодых ученых, посвященная дню космонавтики Фундаментальные и прикладные космические исследования. 12 -14 апреля. Москва, Институт космических исследований РАН. 2017. С. 5 -7., личный вклад 70%, объем 0.36 печатных листов.

12. Загидуллин А. А., Петрова Н. К., Усанин В. С., Нефедьев Ю. А Анализ орбитальных теорий для построения численной теории физической либрации Луны. Всероссийская астрономическая конференция 2017 «Астрономия: познание без границ». 17-22 сентября. Ялта, Крым. 2017. С. 2 - 5., личный вклад 70%, объем 0.48 печатных листов.

13. Загидуллин А. А., Петрова Н. К., Усанин В. С., Нефедьев Ю. А. Анализ орбитальных теорий для построения численной теории физической либрации Луны. Тезисы докладов Международной молодёжной конференции Физика.СПб 24 -26 октября. Санкт-Петербург: ЛИТЕО. 2017. С. 11 -12., личный вклад 70%, объем 0.24 печатных листов.

14. Загидуллин А. А., Петрова Н. К., Усанин В. С., Нефедьев Ю. А. Адаптация численной эфемериды DE к построению теории физической либрации Луны. XV конференция молодых ученых, посвященная дню космонавтики Фундаментальные и прикладные космические исследования. 11 - 13 апреля. Москва, институт космических исследований РАН. 2018. С. 40 - 43., личный вклад 70%, объем 0.48 печатных листов.

15. Zagidullin A. A., Petrova N. K., Usanin V. S., Nefedief Yi. A., Andreev A.O. Analysis of dynamic ephemeris and physical libration of the Moon in order to create a lunar navigational system. AIAA SPACE and Astronautics Forum and Exposition. 17-19 September. Orlando, USA. 2018. Art. id. 5299., личный вклад 70%, объем 0.12 печатных листов.

16. Загидуллин А. А., Петрова Н. К., Усанин В. С., Нефедьев Ю. А. Проблема редукиции углов вращения Луны, полученных в разных теориях лунной физической либрации. Всероссийская астрометрическая конференция «Пулково-2018» 1 - 5 октября. Санкт-Петербург: Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория Российской академии наук. 2018. С. 14., личный вклад 80%, объем 0.12 печатных листов.

17. Загидуллин А. А., Петрова Н. К., Усанин В. С., Нефедьев Ю. А., Андреев А.О. Использование современных численных и аналитических эфемерид Луны. Тезисы докладов Международной конференции Физика.СПб 23 -25 октября Санкт-Петербург: ЛИТЕО. 2018. С. 3 - 4., личный вклад 80%, объем 0.24 печатных листов.

18. Загидуллин А. А., Петрова Н. К., Усанин В. С., Нефедьев Ю. А. Проблема редукции углов вращения Луны, полученных в разных теориях лунной физической либрации. Труды ГАО РАН. 2018. № 225. С. 155 -160., личный вклад 70%, объем 0.72 печатных листов.
19. Загидуллин А. А., Петрова Н. К., Усанин В. С., Нефедьев Ю. А. Анализ орбитальных теорий для построения численной теории физической либрации Луны. Известия Крымской астрофизической обсерватории. 2018. Т. 114., № 1. С. 37 - 42., личный вклад 70%, объем 0.72 печатных листов.
20. Zagidullin A. A., Petrova N. K., Usanin V. S., Nefedief Yi. A., Andreev A.O. Analysis of orbital theories for the construction of the numerical theory of the lunar physical librations. Journal of Physics: Conference Series. 2018. vol. 1038., no. 1. Art. id. 012004, SNIP 0.447, личный вклад 70%, объем 0.12 печатных листов.
21. Zagidullin A. A., Petrova N. K., Usanin V. S., Nefedief Yi. A., Andreev A.O. Analysis of analytical and numerical dynamic lunar ephemerides. Journal of Physics: Conference Series. 2020. vol. 1697., Is 1., Art. id. 012018., личный вклад 70%, объем 0.12 печатных листов.
22. Zagidullin A. A., Petrova N. K., Nefedief Yi. A., Andreev A.O. The Simulation System for Determining the Positions of Lunar Objects on the Basis of Satellite Observations in the Selenocentric System. 84th Annual Meeting of the Meteoritical Society. 15-21 August. Chicago, Illinois. LPI Contribution. 2021. No. 2609, Art. id. 6214, личный вклад 80%, объем 0.12 печатных листов.
23. Zagidullin A. A., Petrova N. K., Usanin V. S., Nefedief Yi. A., Andreev A.O. Development of the Theory of Physical Libration of the Moon Taking into Account the Lunar Two-Layer Model Including a Solid Mantle and a Liquid Core. 85th Annual Meeting of The Meteoritical Society. 14-19 August. Glasgow, Scotland. LPI Contribution. 2022. No. 2695. Art. id.6282, личный вклад 80%, объем 0.12 печатных листов.
24. Zagidullin A. A., Petrova N. K., Usanin V. S., Nefedief Yi. A., Andreev A.O. Simulation of the Size and Flattening of the Lunar Core for Synchronization with Data on Laser Observations. Meteoritics & Planetary Science. 2022. Vol. 57., no. 1. Pp. 6278., личный вклад 70%, объем 0.12 печатных листов.
25. Zagidullin A. A., Petrova N. K., Usanin V. S., Nefedief Yi. A., Andreev A.O. Development of a Highly Accurate Theory of the Physical Libration of the Moon for Its Use in the System of Coordinate and Time Support. 86th Annual Meeting of the Meteoritical Society. 13-18 August. Los Angeles, California/Virtual. LPI Contribution. 2023. no. 2990. Art. id. 6126, личный вклад 80%, объем 0.12 печатных листов.

### Цитируемая литература:

1. Гусев А.В. Вращение, физическая либрация и внутреннее строение активной и многослойной Луны / Петрова Н.К., Ханада Х. // Изд-во. Казанского федерального университета – 2015. – 323 с.
2. Загидуллин, А.А. Разработка численного подхода в теории физической либрации в рамках «главной проблемы» / А.А. Загидуллин, Н.К. Петрова, В.С. Усанин, Ю.А. Нефедьев, М.В. Глушков // Учен. Зап. Казан. ун-та. Сер. Физ. матем. Науки. – 2017. – Т. 4. – С. 529 -546.
3. Загидуллин, А.А. Анализ орбитальных теорий для построения численной теории физической либрации Луны / А.А. Загидуллин, Н.К. Петрова, В.С. Усанин, Ю.А. Нефедьев// Известия Крымской астрофизической обсерватории. – 2018. – Т. 114., № 1. – С. 37 - 42.
4. Загидуллин, А.А. Использование современных численных и аналитических эфемерид Луны / А.А. Загидуллин, В.С. Усанин, Н.К. Петрова, Ю.А. Нефедьев, А.О. Андреев // Тезисы докладов Международной конференции Физика.СПб 23 -25 октября 2018 года. Санкт-Петербург: ЛИТЕО. – 2018. – С. 3 - 4.
5. Кондратьев Б.П. Векторный подход к проблеме физической либрации Луны. 2 Нелинейная задача // Астрономический вестник. –2011. – том 45, №5. – 458-469 с.
6. Barkin Y. Effects of a physical libration of the moon caused by a liquid core, and determination of the fourth mode of a free libration / Hanada H., Matsumoto K. // Solar Sys.Res. – 2014. – Vol.48 (6). – 403–419 p.
7. Eroshkin G.I. Comparison of a numerical model of the physical libration of the moon with two semi-analytical ones // Figure and Dynamics of the Earth, Moon and Planets: Proc. Int. Symp. Holota P. (Ed.). Prague, Czech. Acad. Sci., Astron. Inst. Res. Inst. Geod. Topogr. Cartogr. – 1987. – 685–696 p.
8. Eckhardt D.H. Theory of the libration of the Moon // Earth, Moon, Planets – 1981. –Vol. 25, no. 1. – 3-49 p.
9. Garcia, R.F. Very preliminary reference Moon model / R.F. Garcia, J.G. Gagnepain Beyneix, S. Chevrot, P. Lognonne // Phys. Earth Planet. Inter. – 2011". – Vol. 188. – Pp. 96 -113.
10. Gutzwiller M.C. The motion of the Moon as computed by the method of Hill, Brown, and Eckert / Schmidt D.S. // Astronomical Papers Prepared for the Use of the American Ephemeris and Nautical Almanac. Washington, G.P.O. – 1986. – Vol. 23, pt. 1. – 272 p.
11. Petrova N. Analytical extension of Lunar libration tables // Earth Moon Planet. –1996. – Vol. 73 (1). – 71–99 p
12. Pavlov D. A. Determining parameters of Moon's orbital and rotational motion from LLR observations using GRAIL and IERS-recommended models /

Williams J. G., Suvorkin V.V. // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* – 2016. – Vol. 126, Is. 1-3. – 61-88 p.

13. Rambaux N. The Moon's physical librations and determination of their free modes / Williams J.G. // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* – 2011. – Vol. 109, no. 1. – 85-100 p.

14. Williams J.G. Lunar rotational dissipation in solid body and molten core // *J. Geoph. Res.* – 2001. – Vol. 106 (E11). – 933–968 p.

15. Williams, J.G. DE421 Lunar Orbit, Physical Librations, and Surface Coordinates / J.G. Williams, D.H. Bogg, W.M. Folkner // *Jet Propulsion Laboratory California Institute of Technology Interoffice memorandum.* – 2008. – IOM 335 -JW, DB, WF-20080314 – 001.

16. Weber, R.C. Seismic detection of the lunar core / R.C. Weber, P. Lin, E.J. Garnero, Q. Williams, P. Lognonne // *Science.* – 2011. – Vol. 331. – Pp. 309.