

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*На правах рукописи*

**Гаджиев Максим Магомедович**  
**О движении твердого тела с неподвижной точкой в**  
**потоке частиц**

1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин

**ДИССЕРТАЦИЯ**  
на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Научный руководитель:  
кандидат физико-математических наук  
Александр Сергеевич Кулешов

Москва – 2023

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Момент, действующий на тело с неподвижной точкой</b>	<b>14</b>
1.1 Вычисление момента . . . . .	14
1.2 Явное выражение для момента внешних сил в случае обтекания сферы и эллипсоида . . . . .	21
1.3 Обтекание пластины . . . . .	29
1.4 Обтекание тела, ограниченного центрально – симметричной поверхностью . . . . .	34
1.5 Обтекание тела, ограниченного поверхностью вращения . . . . .	36
1.6 Явное выражение для момента внешних сил в случае обтекания однородного диска и цилиндра . . . . .	40
1.7 Потенциальность момента внешних сил. Существование интеграла энергии . . . . .	47
1.8 Простейшие случаи интегрируемости . . . . .	49
<b>2 Динамически несимметричное тело в потоке частиц, ограниченное поверхностью эллипсоида</b>	<b>52</b>
2.1 Постановка задачи. Функция Гамильтона . . . . .	52
2.2 Неинтегрируемость рассматриваемой системы уравнений . . . . .	55
2.3 Расщепление сепаратрис возмущенной задачи . . . . .	58
<b>3 Необходимые условия существования дополнительного интеграла в задаче о движении в потоке частиц твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения</b>	<b>64</b>
3.1 Введение. Теорема В.В. Козлова об отсутствии аналитических интегралов вблизи положений равновесия гамильтоновых систем	64

3.2	Постановка задачи. Функция Гамильтона . . . . .	67
3.3	Применение теоремы В.В. Козлова . . . . .	68
3.4	Анализ полученных условий . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Стационарные движения твердого тела в потоке частиц и их устойчивость</b>	<b>79</b>
4.1	Перманентные вращения динамически несимметричного тела	79
4.2	Стационарные движения динамически симметричного тела . .	83
<b>5</b>	<b>Регулярные прецессии тела, ограниченного поверхностью эл- липсоида вращения в потоке частиц</b>	<b>89</b>
5.1	Постановка задачи. Первоначальные выводы об устойчивости регулярных прецессий . . . . .	89
5.2	Случай $z > 1$ . . . . .	95
5.3	Случай $z < 1$ . . . . .	99
5.4	Случай $z < \frac{1}{25}$ . . . . .	101
<b>6</b>	<b>Случай Гесса в задаче о движении твердого тела с неподвиж- ной точкой в потоке частиц</b>	<b>105</b>
6.1	Введение . . . . .	105
6.2	Постановка задачи . . . . .	105
6.3	Уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц в специальной системе координат . . . . .	107
6.4	Обезразмеривание уравнений. Дальнейшие преобразования . .	109
	<b>Заключение</b>	<b>117</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>118</b>

## Введение

Одной из классических задач механики является задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Эта задача описывается уравнениями Эйлера — Пуассона: системой шести уравнений первого порядка относительно компонент вектора угловой скорости тела и компонент единичного вектора, направленного против направления силы тяжести. Исследованием этой задачи занимались многие знаменитые математики и механики: Л. Эйлер [79], Ж.-Л. Лагранж [51], Л. Пуансо [93], С. В. Ковалевская [89, 90], В. Гесс [80], С.А. Чаплыгин [71] и многие другие. В этой задаче были найдены три общих случая интегрируемости уравнений движения (случаи Эйлера [79], Лагранжа [51] и Ковалевской [89, 90]), а также около десяти частных случаев интегрируемости, когда дополнительный первый интеграл существует лишь при специально выбранных начальных условиях (случаи Гесса [80], Горячева — Чаплыгина [71] и другие, подробнее об этом смотри [6, 14, 24]).

Появились различные задачи, в которых уравнения движения были аналогичны уравнениям Эйлера — Пуассона: так, например, Г. Кирхгоф показал [37], что уравнения движения твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости, которая обладает однозначным потенциалом скоростей и покоится на бесконечности, имеют вид, аналогичный уравнениям Эйлера — Пуассона. Впервые на эту особенность уравнений Кирхгофа обратил внимание А. Клебш [76]. Задача о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в линейном силовом поле (когда сила, действующая на каждую частицу твердого тела, пропорциональна расстоянию от некоторой плоскости), которая исследовалась Ф. Бруном [74], также приводится к системе уравнений типа уравнений Эйлера — Пуассона. Уравнениями, аналогичными уравнениям Эйлера — Пуассона, описывается задача Дж. Гриоли [81, 82] о движении заряженного твердого тела со стационарным распределением зарядов (диэлектрика) вокруг неподвижной точки в постоянном магнитном поле. Из-

вестны и многие другие задачи, в которых уравнения движения аналогичны системе уравнений Эйлера — Пуассона. Одной из таких задач является задача о движении твердого тела с неподвижной точкой, обтекаемого свободномолекулярным потоком частиц.

Впервые модель взаимодействия твердого тела со свободномолекулярным потоком частиц была предложена в работах А. А. Карымова [35, 36] и В. В. Белецкого [11, 13], в которых рассматривалась задача об обтекании спутника свободномолекулярным потоком газа. В дальнейшем выражения для сил и моментов, действующих на спутник со стороны потока частиц, полученные в работах [11, 13, 35, 36], использовались во многих работах, посвященных движению спутников (см., например, работы В. В. Белецкого с соавторами [12], В. В. Сидоренко [66], А. Ю. Когана и Т. С. Кирсановой [38], В. В. Сазонова [49, 64, 65], Д. Ширса [75, 95], Л. А. Васильева [19], Д. Д. Лещенко [1, 2, 3, 52, 53] и др.). Также были построены альтернативные модели взаимодействия твёрдого тела со свободномолекулярным потоком частиц, например, в работах А. Плахова с соавторами (см. [91, 92]), где рассматривались невыпуклые тела с шероховатой поверхностью, благодаря чему частицы могут сталкиваться с телом несколько раз.

Движение твердого тела с неподвижной точкой в свободномолекулярном потоке частиц под действием моментов аналогичной структуры было впервые рассмотрено в работе А. А. Бурова и А. В. Карапетяна [17]. В предлагаемой диссертации предпринята попытка дальнейшего развития результатов, полученных в работе А. А. Бурова и А. В. Карапетяна [17].

**Цели и задачи работы.** Цель диссертации заключается в том, чтобы выяснить, какие результаты, известные в классической задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой имеют место и в задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц. Работа посвящена исследованию интегрируемости уравнений движения, а также устойчивости стационарных движений.

**Методология и методы исследования.** Исследование выполнено с использованием известных аналитических методов теоретической механики,

математического анализа, качественной теории дифференциальных уравнений, а также теории устойчивости и бифуркаций движения.

**Достоверность и обоснованность результатов.** Результаты диссертации получены аналитически на основании строгих математических методов. Все вычисления проверены с помощью пакета символьных вычислений MAPLE 7. Графики и изображения, иллюстрирующие полученные аналитические результаты, построены численно.

### **Научная новизна.**

1. Для задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в свободномолекулярном потоке частиц впервые получены необходимые условия интегрируемости уравнений движения тела, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения.

2. Впервые доказано, что в задаче о движении динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения, не существует случая интегрируемости, аналогичного случаю Ковалевской в классической задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.

3. Впервые исследованы регулярные прецессии динамически симметричного твердого тела, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения, с неподвижной точкой в потоке частиц. Найдены параметры системы, при которых регулярные прецессии являются устойчивыми. Результаты представлены в виде бифуркационных диаграмм Пуанкаре – Четаева.

**Теоретическая и практическая значимость.** Диссертация носит теоретический характер. Предложенный для данной задачи метод поиска необходимых условий существования дополнительного интеграла вместе с уже полученными условиями может быть применён для поиска других интегрируемых случаев или для доказательства того, что других интегрируемых случаев кроме приведённых у задачи не существует.

Результаты работы могут найти применение при изучении динамики свободно закрепленных деталей космических аппаратов в верхних слоях атмосферы или на планетах с разреженной атмосферой.

**Личный вклад автора.** Все задачи, вошедшие в работу, были решены лично автором. Научный руководитель предложил постановку задачи и методы её исследования, осуществлял общее руководство работой и контролировал достоверность полученных результатов.

В работах [97, 98] автор получил выражения для главного вектора и главного момента сил, действующих на тело с неподвижной точкой со стороны потока частиц, для тел различной формы: пластинки, шара, тела, ограниченного поверхностью эллипсоида и поверхностью вращения. Также в работе [98] вклад автора состоит в доказательстве существования интеграла энергии для тела, ограниченного поверхностью вращения.

В работах [100, 102] вклад автора состоит в получении функции Гамильтона рассматриваемой системы, а также в применении к системе канонических уравнений теоремы В.В. Козлова и получении необходимых условий существования дополнительного интеграла, квадратичная часть которого независима с квадратичной частью функции Гамильтона. Автором проведён анализ полученных необходимых условий, в результате которого было доказано, что в задаче об обтекании свободномолекулярным потоком частиц динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения, не существует случая интегрируемости, аналогичного случаю Ковалевской в классической задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Автором также получены несколько различных параметров системы, которые удовлетворяют необходимым условиям существования дополнительного интеграла.

**Публикации.** Основные результаты и положения диссертации изложены в 9 научных работах автора, в том числе в 4 публикациях в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus, 2 опубликованы в сборниках трудов международных конференций, включенных в международные базы Web of Science и Scopus, 3 в прочих изданиях.

**Объём и структура работы.** Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. Общий объём работы составляет 129 страниц, содержащие 14 иллюстраций. Список литературы

включает 104 наименования.

В первой главе работы на основании подхода, предложенного в работах В. В. Белецкого [11, 13] и А. А. Карымова [35, 36], получено явное выражение для момента сил, действующего на тело с неподвижной точкой со стороны потока частиц. Произведено вычисление соответствующего момента в случае, когда тело ограничено центрально – симметричной поверхностью (в частности, поверхностью сферы или эллипсоида), когда тело представляет собой однородную пластинку и когда тело ограничено выпуклой поверхностью вращения. В частности, при изучении того, какую структуру имеет момент, действующий на твердое тело с неподвижной точкой, ограниченное поверхностью вращения, получено явное выражение для момента, действующего на тело в форме круглого диска или цилиндра.

Обсуждаются условия существования у полученной системы уравнений движения твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц первого интеграла типа интеграла энергии. Получены достаточные условия на компоненты момента, при выполнении которых уравнения движения тела обладают первым интегралом типа интеграла энергии. Показано, что эти условия всегда выполняются, когда твердое тело в потоке частиц ограничено поверхностью вращения, а неподвижная точка лежит на оси вращения. Указаны случаи интегрируемости уравнений движения твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц, аналогичные случаям интегрируемости Эйлера и Лагранжа в классической задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Указаны условия, при выполнении которых уравнения движения тела допускают частный первый интеграл, аналогичный интегралу Гесса, а у рассматриваемой системы уравнений движения существует интегрируемый случай, аналогичный случаю Гесса в классической задаче.

Во второй главе диссертации изучается задача о движении в потоке частиц твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения. Предполагается, что эллипсоид инерции твердого тела относительно неподвижной точки, представляет собой произвольный трехос-

ный эллипсоид. Получена функция Гамильтона рассматриваемой системы. В предположении, что эллипсоид вращения, ограничивающий твердое тело, близок к шару (полуоси эллипсоида связаны соотношением  $b = a(1 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon \ll 1$ ), а центр эллипсоида отстоит от неподвижной точки на малое расстояние  $l = \varepsilon c$ , методом расщепления сепаратрис доказано, что канонические уравнения движения несимметричного твердого тела в потоке частиц не имеют третьего аналитического и аналитически зависящего от параметра  $\varepsilon$  интеграла, независимого от классических и находящегося в инволюции с интегралом площадей.

В третьей главе диссертации снова рассматривается задача о движении в потоке частиц твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения. В предположении, что тело является динамически симметричным, а центр эллипсоида лежит на первой главной оси инерции, построенной в неподвижной точке, при помощи теоремы В. В. Козлова получены необходимые условия существования дополнительного интеграла, независимого с интегралом энергии, аналитического по каноническим переменным и параметру (параметром в данном случае является постоянная интеграла площадей). Показано, что соответствующие необходимые условия не выполняются, если распределение масс в теле соответствует классическому интегрируемому случаю С. В. Ковалевской. Таким образом, можно утверждать, что в задаче о движении в потоке частиц твердого тела с неподвижной точкой не существует интегрируемого случая, аналогичного случаю С. В. Ковалевской в классической задаче.

В четвертой главе диссертации исследуются стационарные движения твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц. Показано, что у динамически несимметричного твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц существует однопараметрическое семейство стационарных движений, когда тело совершает вращения с постоянной угловой скоростью вокруг единичного вектора, задающего направление потока частиц (перманентные вращения). Путем анализа корней линеаризованной системы уравнений возмущенного движения получены необходимые условия устойчивости соответ-

ствующих стационарных движений. В случае, когда твердое тело с неподвижной точкой является динамически симметричным и ограничено поверхностью вращения, ось симметрии которой совпадает с осью динамической симметрии, получено необходимое и достаточное условие устойчивости стационарных движений, аналогичное условию Маиевского — Четаева. Кроме того, показано, что для динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой, ограничено поверхностью вращения, ось симметрии которой совпадает с осью динамической симметрии, существует двухпараметрическое семейство стационарных движений тела — регулярные прецессии. Устойчивости соответствующих стационарных движений посвящена пятая глава диссертации.

В пятой главе диссертации изучается устойчивость регулярных прецессий динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения, причем неподвижная точка лежит на оси геометрической и динамической симметрии эллипсоида. Показано, что если полуоси эллипсоида равны  $(a, a, b)$ , то при значениях параметра  $z$ ,

$$z = \frac{b^2}{a^2},$$

лежащих в промежутке

$$\frac{1}{25} \leq z \leq 2,$$

регулярные прецессии тела будут устойчивы при всех значениях величин угловых скоростей прецессии и собственного вращения, при которых они существуют. При  $z > 2$  регулярные прецессии твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц будут устойчивы при всех значениях величин угловых скоростей прецессии и собственного вращения, при которых они существуют, если постоянный угол  $\theta$  между осью динамической симметрии тела и направлением потока лежит в промежутке

$$\theta \in \left( 0, \pi - \arccos \left( \frac{1}{6} \sqrt{25 + \frac{24}{z-1}} - \frac{1}{6} \right) \right).$$

При  $z < 1/25$  регулярные прецессии твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц будут устойчивы при всех значениях величин угловых скоростей прецессии и собственного вращения, при которых они существуют, если постоянный угол  $\theta$  между осью динамической симметрии тела и направлением потока лежит в промежутке

$$\theta \in \left( 0, \arccos \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1-25z}{1-z}} \right) \right) \cup \left( \arccos \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1-25z}{1-z}} \right), \pi \right).$$

Все аналитически полученные выводы об устойчивости стационарных движений подтверждены численно построенными иллюстрациями.

В шестой главе подробно рассмотрен случай интегрируемости, аналогичный случаю Гесса в классической задаче о движении тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой. Показано, что в этом случае решение задачи сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. На нулевом уровне интеграла площадей уравнения движения тела могут быть проинтегрированы в квадратурах.

В заключении еще раз кратко сформулированы основные результаты работы.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных конференциях и научных семинарах, среди которых:

1. XXI Международная конференция и молодежная школа "Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии", Нижний Новгород, Россия, 22-26 ноября 2021 года;
2. Научная конференция "Ломоносовские чтения — 2022", Москва, Россия, 18-20 апреля 2022 года;
3. XVI Международная конференция "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (конференция Пятницкого), Москва, Россия, 1-3 июня 2023 года;

4. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам DIFF – 2022, Суздаль, Россия, 30 июня – 5 июля 2022 года;
5. Международная конференция "Dynamical Systems of Classical and Celestial Mechanics" , Сочи, Россия, 19-23 сентября 2022 года;
6. XXII Международная конференция и молодежная школа "Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии" , Нижний Новгород, Россия, 14-17 ноября 2022 года;
7. Семинар секции теоретической механики имени профессора Н. Н. Поляхова Санкт – Петербургского Дома ученых РАН (под руководством профессора А. А. Тихонова), 11 мая 2022 года и 5 октября 2022 года;
8. Научный семинар "Дифференциальная геометрия и приложения" кафедры дифференциальной геометрии и приложений (под руководством академика РАН А. Т. Фоменко), МГУ, 6 декабря 2021 года;
9. Научный семинар "Аналитическая механика и теория устойчивости" имени В. В. Румянцева (под руководством профессора А. А. Зобовой, профессора Е. И. Кугушева), МГУ, 19 апреля 2022 года;
10. Научный семинар "Динамические системы и механика" (под руководством профессора П. С. Красильникова, профессора Б. С. Бардина), МАИ, 21 ноября 2021 года и 20 апреля 2023 года;
11. Научный семинар по геометрии дифференциальных уравнений под руководством профессора И. С. Красильщика, Независимый университет, 31 мая 2023 года;
12. Научный семинар "Гамильтоновы системы и статистическая механика" (под руководством академика РАН В. В. Козлова, академика РАН Д. В. Трещёва, члена-корреспондента РАН С. В. Болотина), Математический институт им. В.А. Стеклова, 9 октября 2023 года;

13. Научный семинар кафедры теоретической механики МФТИ (под руководством профессора С. В. Соколова), МФТИ, 12 октября 2023 года.

# Глава 1. Момент, действующий на тело с неподвижной точкой

## 1.1 Вычисление момента

Рассмотрим задачу о движении твердого тела в потоке частиц вокруг неподвижной точки. Будем предполагать, что поток частиц представляет собой свободный молекулярный поток постоянной плотности  $\rho$ , частицы которого движутся поступательно с постоянной абсолютной скоростью

$$-\mathbf{v} = v_0\boldsymbol{\gamma},$$

где  $\boldsymbol{\gamma}$  – единичный вектор, направленный вдоль набегающего потока. Тепловым движением молекул в потоке пренебрегаем.

Будем рассматривать следующий механизм взаимодействия молекул набегающего потока с поверхностью тела. Частица при соударении отдает практически всю свою энергию и приходит в температурное равновесие с местом удара (несколько теперь нагретым). Когда это нагревание пройдет, частица выходит в пространство с тепловой скоростью, равной тепловой скорости молекул поверхности тела. Так как эта тепловая скорость существенно меньше тепловой скорости наружных частиц, то можно идеализировать эту картину гипотезой абсолютно неупругого удара, когда частицы полностью теряют свою энергию при столкновении с телом (и не отражаются).

Получим выражения для силы и момента, действующего на тело с неподвижной точкой со стороны потока частиц. Воспользуемся подходом, приведенным в работах В. В. Белецкого [11, 13] и А. А. Карымова [35, 36]. Обозначим через  $O$  неподвижную точку твердого тела. Распределение скоростей в

---

При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [96, 97, 98, 99, 103]

твердом теле определяется формулой Эйлера

$$\mathbf{u}_M = \left[ \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OM} \right],$$

где  $M$  – произвольная точка твердого тела. Если обозначить угол между векторами  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\overrightarrow{OM}$  через  $\alpha$ , то

$$|\mathbf{u}_M| = |\boldsymbol{\omega}| \left| \overrightarrow{OM} \right| \sin \alpha \leq |\boldsymbol{\omega}| \left| \overrightarrow{OM} \right|.$$

Предположим, что величина скорости набегающего потока  $v_0$  существенно превосходит произведение характерного значения угловой скорости твердого тела и характерного расстояния от неподвижной точки до любой из точек твердого тела, то есть

$$\frac{|\boldsymbol{\omega}| \left| \overrightarrow{OM} \right|}{v_0} \ll 1. \quad (1)$$

Тогда будем считать, что в абсолютном пространстве скорости всех точек твердого тела равны нулю. Определим, каким будет воздействие потока на тело, если тело неподвижно, а поток имеет постоянную скорость. Перейдем в систему координат, движущуюся поступательно вместе с потоком. Будем в этой системе координат следить за неподвижной точкой  $O$  твердого тела (или за любой другой его точкой в силу предположения (1)). Абсолютная скорость  $\mathbf{v}_O^{\text{абс}}$  точки  $O$  равна нулю, так как  $O$  – неподвижная точка твердого тела. Переносная скорость  $\mathbf{v}_O^{\text{пер}}$  точки  $O$  – это абсолютная скорость той точки подвижного пространства (то есть пространства, поступательно движущегося вместе с выбранной системой координат), в которой в данный момент времени оказалась точка  $O$ . Эта скорость равна

$$\mathbf{v}_O^{\text{пер}} = -\mathbf{v} = v_0 \boldsymbol{\gamma}.$$

Относительная скорость  $\mathbf{v}_O^{\text{отн}}$  точки  $O$  – это скорость точки  $O$  относительно потока. По формуле сложения скоростей имеем:

$$0 = \mathbf{v}_O^{\text{абс}} = \mathbf{v}_O^{\text{пер}} + \mathbf{v}_O^{\text{отн}},$$

откуда находим, что точка  $O$  (а следовательно, в силу предположения (1) и все тело) движется относительно потока со скоростью

$$\mathbf{v}_O^{\text{ОТН}} = \mathbf{v} = -v_0\boldsymbol{\gamma}.$$

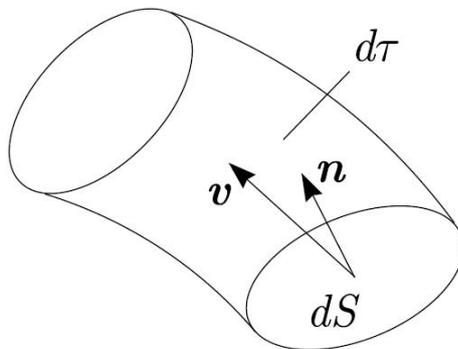


Рис. 1

Выделим на поверхности тела элементарную площадку  $dS$  и вычислим элементарный импульс, получаемый площадкой  $dS$ , движущейся поступательно относительно потока со скоростью  $\mathbf{v}$ , за время  $dt$  (см. Рис. 1). Считаем, что удар частиц о тело является абсолютно неупругим. Во время такого движения площадка "заметает" объем

$$d\tau = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS dt,$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к площадке, причем  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) > 0$ . Внутри объема  $d\tau$  содержится масса  $dm = \rho d\tau$ , где  $\rho$  – плотность потока. Элементарный импульс, получаемый площадкой, и действующая на нее сила имеют вид

$$d\mathbf{Q} = -\mathbf{v} dm = -\mathbf{v} \rho d\tau = -\rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS dt,$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = -\rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Рассмотрим выпуклое тело, ограниченное гладкой замкнутой поверхностью и движущееся поступательно со скоростью  $\mathbf{v} = -v_0\boldsymbol{\gamma}$  относительно потока. Главный вектор сил взаимодействия тела с молекулами задается фор-

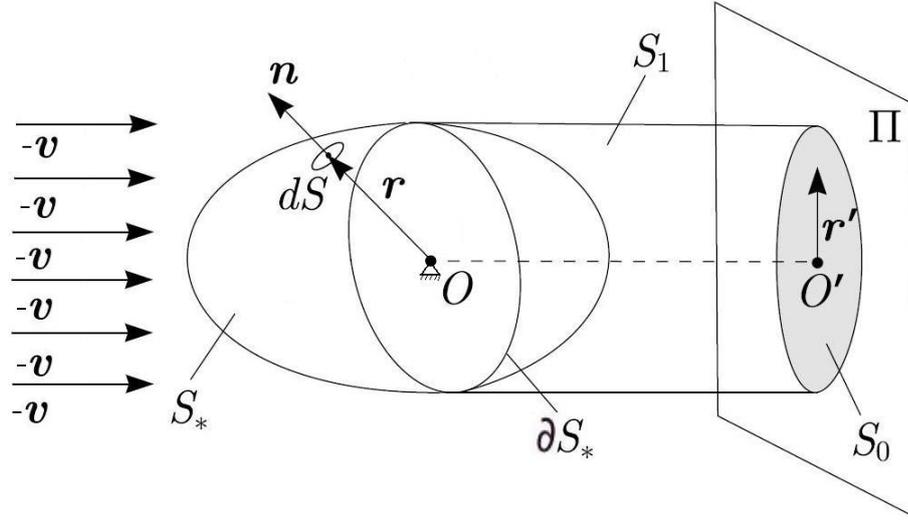


Рис. 2

мулой

$$\mathbf{F} = - \int_{S_*} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (2)$$

В формуле (2) через  $S_*$  обозначена часть поверхности тела, "омываемая" потоком молекул: на ее границе  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = 0$ , поскольку на границе направление потока является касательным к  $S_*$ , а во внутренних точках поверхности  $S_*$  внешняя нормаль  $\mathbf{n}$  удовлетворяет неравенству  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) > 0$ . Границу этой поверхности обозначим  $\partial S_*$  (см. Рис. 2).

Будем считать, что направление вектора скорости  $\mathbf{v}$  не зависит от выбора элементарной площадки  $dS$ , и следовательно, интеграл в правой части равенства (2) может быть переписан в виде:

$$\mathbf{F} = -\rho \mathbf{v} \int_{S_*} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (3)$$

Вычислим теперь главный момент сил взаимодействия молекул с телом относительно неподвижной точки  $O$ . Этот момент вычисляется по формуле

$$\mathbf{M}_O = -\rho \int_{S_*} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \rho \left[ \mathbf{v} \times \int_{S_*} \mathbf{r} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \right], \quad (4)$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус – вектор точки поверхности тела относительно неподвижной точки  $O$ .

Для вычисления интегралов, входящих в формулы (3) и (4), введем новое тело  $T$ , которое построим следующим образом. Перпендикулярно вектору  $\mathbf{v}$  расположим плоскость  $\Pi$ . Удобно поместить эту плоскость на некотором расстоянии от точки  $O$  позади (по отношению к вектору  $\mathbf{v}$ ) тела. Проекция тела на плоскость  $\Pi$  вдоль вектора  $\mathbf{v}$  (ортогональная проекция) является некоторой плоской фигурой  $S_0$ . Введем еще цилиндрическую поверхность  $S_1$  с образующей  $\mathbf{v}$  и направляющей – границей  $\partial S_*$ . Поверхность  $S_1$  с одной стороны ограничена этой направляющей, а с другой – линией пересечения с плоскостью  $\Pi$ . Поверхность  $\Sigma = S_* \cup S_1 \cup S_0$  ограничивает тело  $T$ , объём которого обозначим через  $\tau$  (см. Рис. 2). Согласно теореме Остроградского – Гаусса справедливо соотношение

$$\int_{\Sigma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_T \operatorname{div} \mathbf{v} d\tau = 0,$$

поскольку  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ . Кроме того, справедливы соотношения

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_{S_1} = 0, \quad (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_{S_0} = -v_0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = -v_0. \quad (5)$$

Отсюда имеем:

$$\int_{\Sigma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{S_*} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S_1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S_0} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0,$$

откуда

$$\int_{S_*} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = - \int_{S_0} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = v_0 \int_{S_0} dS = v_0 S,$$

где  $S$  – площадь фигуры  $S_0$ . Таким образом,

$$\mathbf{F} = -\rho \mathbf{v} v_0 S = \rho v_0^2 S \boldsymbol{\gamma}. \quad (6)$$

Введем систему координат  $Oxyz$  с началом в неподвижной точке  $O$  и осями, направленными вдоль главных осей инерции для точки  $O$ . Пусть в

этой системе координат  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{v} = -v_0(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ . По теореме Гаусса – Остроградского

$$\int_{\Sigma} x(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{\Sigma} (x\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_T \operatorname{div}(x\mathbf{v}) d\tau = -v_0\gamma_1\tau,$$

и аналогично

$$\int_{\Sigma} y(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = -v_0\gamma_2\tau, \quad \int_{\Sigma} z(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = -v_0\gamma_3\tau.$$

Следовательно,

$$\int_{\Sigma} \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \tau\mathbf{v}.$$

С другой стороны, с учетом формул (5) можно написать, что

$$\int_{\Sigma} \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{S_*} \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS - v_0 \int_{S_0} \mathbf{r} dS.$$

На  $S_0$  вектор  $\mathbf{r}$  представляет собой вектор, соединяющий неподвижную точку с различными точками фигуры  $S_0$ . Поэтому на  $S_0$  представим вектор  $\mathbf{r}$  в виде:

$$\mathbf{r} = -\frac{l\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} + \mathbf{r}' = l\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{r}',$$

где  $l$  – длина перпендикуляра, опущенного на плоскость  $\Pi$  из неподвижной точки. Для вектора  $\mathbf{r}'$  справедливо условие  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}') = 0$ , так как вектор  $\mathbf{r}'$  лежит в плоскости  $\Pi$  (см. Рис. 2). Тогда

$$\begin{aligned} v_0 \int_{S_0} \mathbf{r} dS &= v_0 l \boldsymbol{\gamma} \int_{S_0} dS + v_0 \int_{S_0} \mathbf{r}' dS = -lS\mathbf{v} + v_0 \int_{S_0} \mathbf{r}' dS = \\ &= -lS\mathbf{v} + v_0 \mathbf{P}_{O'}. \end{aligned}$$

Интеграл

$$\mathbf{P}_{O'} = \int_{S_0} \mathbf{r}' dS \tag{7}$$

представляет собой первый момент фигуры  $S_0$  относительно точки  $O'$  – проекции неподвижной точки  $O$  на плоскость  $\Pi$ . Итак,

$$\tau \mathbf{v} = \int_{S_*} \mathbf{r} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + lS \mathbf{v} - v_0 \mathbf{P}_{O'}.$$

Отсюда

$$\int_{S_*} \mathbf{r} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = (\tau - lS) \mathbf{v} + v_0 \mathbf{P}_{O'},$$

и в соответствии с формулой (4)

$$\mathbf{M}_O = \rho v_0 [\mathbf{v} \times \mathbf{P}_{O'}] = -\rho v_0^2 [\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{P}_{O'}]. \quad (8)$$

Теперь вычислим интеграл (7). В этом интеграле вектор  $\mathbf{r}'$  представляет собой вектор, проведенный из точки  $O'$  в различные точки фигуры  $S_0$ . Представим теперь, что фигура  $S_0$  представляет собой наклеенную на плоскость  $\Pi$  бесконечно тонкую однородную пластину плотностью  $\rho_1 = \text{const}$ . Тогда

$$\int_{S_0} \mathbf{r}' dS = \frac{1}{\rho_1} \int_{S_0} \rho_1 \mathbf{r}' dS = \frac{\rho_1 S \overrightarrow{O'G}}{\rho_1} = S \cdot \overrightarrow{O'G}.$$

Здесь  $S = S(\boldsymbol{\gamma})$  – площадь фигуры  $S_0$ , а  $\overrightarrow{O'G}$  – вектор, соединяющий точку  $O'$  – проекцию неподвижной точки  $O$  на плоскость  $\Pi$  с центром масс  $G$  пластины, ограниченной фигурой  $S_0$ . В общем случае

$$S = S(\boldsymbol{\gamma}), \quad \overrightarrow{O'G} = \mathbf{c} = \mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma}).$$

Введем также обозначение

$$\rho v_0^2 = f.$$

В результате формула (7) примет окончательный вид

$$\mathbf{M}_O = -f S(\boldsymbol{\gamma}) [\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})]. \quad (9)$$

Таким образом, мы получили выражение для момента, действующего на твердое тело с неподвижной точкой, находящееся в потоке частиц. Неслож-

но видеть, что этот момент зависит от направления потока, "омывающего" тело. Заметим, что при выводе этой формулы мы использовали предположение (1). Поэтому формулой (9) следует пользоваться лишь при изучении медленных вращательных движений тела с неподвижной точкой.

Уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц имеют вид:

$$\mathbb{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbb{J}\boldsymbol{\omega}] = -fS(\boldsymbol{\gamma})[\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})], \quad (10)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}] = 0,$$

где  $\mathbb{J} = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$  – тензор инерции тела с неподвижной точки  $O$ .

Для того, чтобы более четко осознать, как в явном виде записываются уравнения (10), рассмотрим несколько примеров тел с неподвижной точкой, ограниченных различными поверхностями и обтекаемых потоком частиц.

## 1.2 Явное выражение для момента внешних сил в случае обтекания сферы и эллипсоида

Рассмотрим примеры вычисления момента  $\mathbf{M}_O$  для тел с простой геометрией.

**Пример 1.2.1.** Вычислим момент  $\mathbf{M}_O$ , определяемый формулой (9), в случае, когда тело с неподвижной точкой ограничено поверхностью сферы радиуса  $R$ , а неподвижной точкой является центр сферы. Тогда фигура  $S_0$  представляет собой круг, радиус которого равен радиусу  $R$  сферы. Площадь этого круга постоянна и равна

$$S(\boldsymbol{\gamma}) = \pi R^2 = \text{const}.$$

Очевидно, что центр масс однородной пластины, имеющей форму фигуры  $S_0$  будет располагаться в центре круга. Поэтому вектор  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})$ , соединяющий точку  $O'$  – проекцию неподвижной точки  $O$  на плоскость, перпендикулярную потоку, с центром масс пластины, имеющей форму фигуры  $S_0$  в данном

случае равен нулю. Поэтому

$$\mathbf{M}_O = 0.$$

Вычислим теперь момент  $\mathbf{M}_O$  в случае, когда в качестве неподвижной точки выбрана произвольная точка  $O_1$  внутри сферы. Введем систему координат  $O_1x_1x_2x_3$ , оси которой направлены по главным осям инерции тела для точки  $O_1$ . Координаты центра сферы – точки  $O$  в системе координат  $O_1x_1x_2x_3$  обозначим  $a_1, a_2, a_3$ , то есть

$$\overrightarrow{O_1O} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3,$$

где  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  – базисные векторы координатных осей системы  $O_1x_1x_2x_3$ . Аналогично, компоненты единичного вектора  $\boldsymbol{\gamma}$  вдоль направления потока будем обозначать  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ . Согласно известной формуле теоретической механики

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{O_1} &= \mathbf{M}_O - [\overrightarrow{OO_1} \times \mathbf{F}] = [\overrightarrow{O_1O} \times \mathbf{F}] = [\overrightarrow{O_1O} \times fS(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma}] = \\ &= f\pi R^2 [\overrightarrow{O_1O} \times \boldsymbol{\gamma}]. \end{aligned}$$

Пусть

$$\mathbf{M}_{O_1} = M_1\mathbf{e}_1 + M_2\mathbf{e}_2 + M_3\mathbf{e}_3$$

в системе координат  $O_1x_1x_2x_3$ . Тогда

$$M_1 = f\pi R^2 (a_2\gamma_3 - a_3\gamma_2), \quad M_2 = f\pi R^2 (a_3\gamma_1 - a_1\gamma_3),$$

$$M_3 = f\pi R^2 (a_1\gamma_2 - a_2\gamma_1).$$

Уравнения (10) в скалярной форме записываются следующим образом:

$$A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 = f\pi R^2 (a_2\gamma_3 - a_3\gamma_2),$$

$$A_2\dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3)\omega_1\omega_3 = f\pi R^2 (a_3\gamma_1 - a_1\gamma_3),$$

$$A_3\dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2 = f\pi R^2 (a_1\gamma_2 - a_2\gamma_1);$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2.$$

Видно, что в этом случае уравнения (10) принимают вид классических уравнений Эйлера – Пуассона, описывающих движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Поэтому можно рассматривать систему уравнений (10) как возможное обобщение классических уравнений Эйлера – Пуассона.

**Пример 1.2.2.** Вычислим момент  $M_O$ , действующий на тело с неподвижной точкой, имеющее форму эллипсоида, причем неподвижная точка совпадает с центром эллипсоида. Оси системы координат  $Oxyz$  с началом в неподвижной точке  $O$  направим вдоль главных осей инерции тела для точки  $O$ . Пусть в системе координат  $Oxyz$  уравнение эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} = 1. \quad (11)$$

Это означает, что главные оси инерции  $Oxyz$  являются в данном случае и главными осями поверхности эллипсоида. Найдем границу  $\partial S_*$  (смотри Рис. 2, 3). Касательная плоскость к эллипсоиду в точке  $(x, y, z)$  задается следующим уравнением относительно  $X, Y, Z$ :

$$\frac{xX}{a_1^2} + \frac{yY}{a_2^2} + \frac{zZ}{a_3^2} = 1.$$

Пусть точка с координатами  $(x, y, z)$  принадлежит границе  $\partial S_*$ . Тогда прямая

$$X = x + v_0\gamma_1 t, \quad Y = y + v_0\gamma_2 t, \quad Z = z + v_0\gamma_3 t$$

лежит в касательной плоскости к поверхности тела, то есть для любого  $t$  выполняется равенство

$$\frac{x}{a_1^2} (x + v_0\gamma_1 t) + \frac{y}{a_2^2} (y + v_0\gamma_2 t) + \frac{z}{a_3^2} (z + v_0\gamma_3 t) = 1.$$

С учетом (11) отсюда получаем:

$$\frac{x\gamma_1}{a_1^2} + \frac{y\gamma_2}{a_2^2} + \frac{z\gamma_3}{a_3^2} = 0. \quad (12)$$

Это уравнение вместе с уравнением эллипсоида (11) задает границу  $\partial S_*$ . "Омываемая" потоком часть  $S_*$  поверхности спутника лежит в полупространстве

$$\frac{x\gamma_1}{a_1^2} + \frac{y\gamma_2}{a_2^2} + \frac{z\gamma_3}{a_3^2} \leq 0.$$

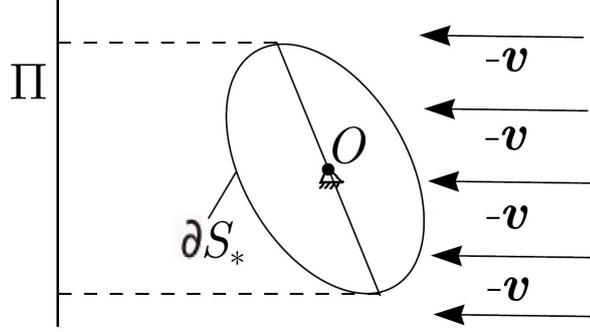


Рис. 3

Как известно (смотри, например [4]), любая плоскость, проходящая через центр эллипсоида, пересекает эллипсоид по эллипсу. Поэтому сечение поверхности (11) плоскостью (12) представляет собой эллипс. Найдём его площадь. Она равна произведению полуосей эллипса, умноженному на  $\pi$ . Квадраты полуосей эллипса суть экстремумы функции  $f = x^2 + y^2 + z^2$  при условиях (11) и (12). Воспользуемся методом неопределённых множителей Лагранжа и рассмотрим функцию

$$\mathcal{L} = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left( \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} - 1 \right) + \mu \left( \frac{x\gamma_1}{a_1^2} + \frac{y\gamma_2}{a_2^2} + \frac{z\gamma_3}{a_3^2} \right).$$

В точках ее экстремума выполняются равенства

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0.$$

Запишем эти условия в явном виде:

$$\begin{aligned}
2x + \frac{2\lambda x}{a_1^2} + \frac{\mu\gamma_1}{a_1^2} &= 0, & x &= -\frac{\mu\gamma_1}{2(a_1^2 + \lambda)}, \\
2y + \frac{2\lambda y}{a_2^2} + \frac{\mu\gamma_2}{a_2^2} &= 0, & y &= -\frac{\mu\gamma_2}{2(a_2^2 + \lambda)}, \\
2z + \frac{2\lambda z}{a_3^2} + \frac{\mu\gamma_3}{a_3^2} &= 0, & z &= -\frac{\mu\gamma_3}{2(a_3^2 + \lambda)}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Подставим найденные  $x$ ,  $y$  и  $z$  в уравнение (12):

$$\frac{\gamma_1^2}{a_1^2} (\lambda + a_2^2) (\lambda + a_3^2) + \frac{\gamma_2^2}{a_2^2} (\lambda + a_1^2) (\lambda + a_3^2) + \frac{\gamma_3^2}{a_3^2} (\lambda + a_1^2) (\lambda + a_2^2) = 0.$$

Таким образом,  $\lambda$  удовлетворяет квадратному уравнению

$$k_0\lambda^2 + k_1\lambda + k_2 = 0, \tag{14}$$

где обозначено

$$k_0 = \frac{\gamma_1^2}{a_1^2} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^2} + \frac{\gamma_3^2}{a_3^2}, \quad k_2 = a_1^2 a_2^2 a_3^2 \left( \frac{\gamma_1^2}{a_1^4} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^4} + \frac{\gamma_3^2}{a_3^4} \right).$$

Решать полученное уравнение не нужно. Чтобы выяснить смысл  $\lambda$ , умножим уравнения системы (13) на  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно и сложим:

$$\begin{aligned}
0 &= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2\lambda \left( \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} \right) + \mu \left( \frac{x\gamma_1}{a_1^2} + \frac{y\gamma_2}{a_2^2} + \frac{z\gamma_3}{a_3^2} \right) = \\
&= 2(x^2 + y^2 + z^2 + \lambda).
\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что в точках экстремума

$$\lambda = -x^2 - y^2 - z^2.$$

Площадь эллипса, являющегося сечением эллипсоида (11) плоскостью (12) равна

$$S_1 = \pi \sqrt{\lambda_1 \lambda_2},$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – корни квадратного уравнения (14). По теореме Виета

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{k_2}{k_0} = a_1^2 a_2^2 a_3^2 \frac{\frac{\gamma_1^2}{a_1^4} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^4} + \frac{\gamma_3^2}{a_3^4}}{\frac{\gamma_1^2}{a_1^2} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^2} + \frac{\gamma_3^2}{a_3^2}},$$

и, следовательно,

$$S_1 = \pi a_1 a_2 a_3 \sqrt{\frac{\frac{\gamma_1^2}{a_1^4} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^4} + \frac{\gamma_3^2}{a_3^4}}{\frac{\gamma_1^2}{a_1^2} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^2} + \frac{\gamma_3^2}{a_3^2}}}.$$

Фигура  $S_0$  является проекцией эллипса (11), (12) на плоскость  $\Pi$ , поэтому площадь этой фигуры равна

$$S(\gamma) = S_1 \frac{(\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\gamma})}{|\mathbf{N}|}, \quad \mathbf{N} = \left( \frac{\gamma_1}{a_1^2}, \frac{\gamma_2}{a_2^2}, \frac{\gamma_3}{a_3^2} \right).$$

Здесь  $\mathbf{N}$  – вектор нормали к плоскости (12), то есть плоскости, в которой лежит граница  $\partial S_*$ . Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} S(\gamma) &= \pi a_1 a_2 a_3 \sqrt{\frac{\frac{\gamma_1^2}{a_1^4} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^4} + \frac{\gamma_3^2}{a_3^4}}{\frac{\gamma_1^2}{a_1^2} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^2} + \frac{\gamma_3^2}{a_3^2}}} \frac{\frac{\gamma_1^2}{a_1^2} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^2} + \frac{\gamma_3^2}{a_3^2}}{\sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a_1^4} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^4} + \frac{\gamma_3^2}{a_3^4}}} = \\ &= \pi a_1 a_2 a_3 \sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a_1^2} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^2} + \frac{\gamma_3^2}{a_3^2}}. \end{aligned}$$

Итак, нами получено следующее выражение для площади  $S(\gamma)$  фигуры  $S_0$ :

$$S(\gamma) = \pi a_1 a_2 a_3 \sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a_1^2} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^2} + \frac{\gamma_3^2}{a_3^2}}.$$

Согласно (6) компоненты главного вектора сил взаимодействия тела с молекулами потока в системе координат  $Oxyz$  имеют вид:

$$F_1 = \rho v_0^2 \pi a_1 a_2 a_3 \gamma_1 \sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a_1^2} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^2} + \frac{\gamma_3^2}{a_3^2}},$$

$$F_2 = \rho v_0^2 \pi a_1 a_2 a_3 \gamma_2 \sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a_1^2} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^2} + \frac{\gamma_3^2}{a_3^2}},$$

$$F_3 = \rho v_0^2 \pi a_1 a_2 a_3 \gamma_3 \sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a_1^2} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^2} + \frac{\gamma_3^2}{a_3^2}}.$$

Центр масс фигуры  $S_0$  находится в точке  $O'$  – проекции неподвижной точки  $O$  на плоскость  $\Pi$ , перпендикулярную потоку. Поэтому  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma}) = 0$  и  $\mathbf{M}_O = 0$ .

Вычислим теперь момент  $\mathbf{M}$  относительно произвольной точки  $O_1$ , принадлежащей телу. Введем систему координат  $O_1x_1x_2x_3$ , оси которой направлены вдоль главных осей инерции тела для точки  $O_1$ . Компоненты вектора  $\boldsymbol{\gamma}$  в системе координат  $O_1x_1x_2x_3$  по прежнему будем обозначать  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ . Координаты точки  $O$  в системе координат  $O_1x_1x_2x_3$  обозначим:

$$\overrightarrow{O_1O} = h_1 \mathbf{e}_1 + h_2 \mathbf{e}_2 + h_3 \mathbf{e}_3.$$

Согласно известной формуле теоретической механики

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{O_1} &= \mathbf{M}_O - \left[ \overrightarrow{OO_1} \times \mathbf{F} \right] = \left[ \overrightarrow{O_1O} \times \mathbf{F} \right] = \left[ \overrightarrow{O_1O} \times fS(\boldsymbol{\gamma}) \boldsymbol{\gamma} \right] = \\ &= f\pi a_1 a_2 a_3 \sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a_1^2} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^2} + \frac{\gamma_3^2}{a_3^2}} \left[ \overrightarrow{O_1O} \times \boldsymbol{\gamma} \right]. \end{aligned}$$

Пусть

$$\mathbf{M}_{O_1} = M_1 \mathbf{e}_1 + M_2 \mathbf{e}_2 + M_3 \mathbf{e}_3$$

в системе координат  $O_1x_1x_2x_3$ , тогда

$$M_1 = f\pi a_1 a_2 a_3 \sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a_1^2} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^2} + \frac{\gamma_3^2}{a_3^2}} (h_2 \gamma_3 - h_3 \gamma_2),$$

$$M_2 = f\pi a_1 a_2 a_3 \sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a_1^2} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^2} + \frac{\gamma_3^2}{a_3^2}} (h_3 \gamma_1 - h_1 \gamma_3),$$

$$M_3 = f\pi a_1 a_2 a_3 \sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a_1^2} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^2} + \frac{\gamma_3^2}{a_3^2}} (h_1 \gamma_2 - h_2 \gamma_1).$$

Таким образом, в случае обтекания потоком частиц твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида, главные оси которого совпадают с главными осями инерции тела для неподвижной точки, уравнения движения тела (10) в скалярной форме записываются следующим образом:

$$A_1 \dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2) \omega_2 \omega_3 = f\pi a_1 a_2 a_3 \sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a_1^2} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^2} + \frac{\gamma_3^2}{a_3^2}} (h_2 \gamma_3 - h_3 \gamma_2),$$

$$A_2 \dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3) \omega_1 \omega_3 = f\pi a_1 a_2 a_3 \sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a_1^2} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^2} + \frac{\gamma_3^2}{a_3^2}} (h_3 \gamma_1 - h_1 \gamma_3), \quad (15)$$

$$A_3 \dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1) \omega_1 \omega_2 = f\pi a_1 a_2 a_3 \sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a_1^2} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^2} + \frac{\gamma_3^2}{a_3^2}} (h_1 \gamma_2 - h_2 \gamma_1);$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1 \gamma_3 - \omega_3 \gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2 \gamma_1 - \omega_1 \gamma_2.$$

Получим теперь некоторые выводы о структуре момента  $\mathbf{M}_O$  в случае обтекания потоком частиц твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностями различного вида.

### 1.3 Обтекание пластины

В параграфе 1.1 мы предположили, что частицы потока, обтекающего тело с неподвижной точкой движутся поступательно с постоянной абсолютной скоростью

$$-\mathbf{v} = v_0 \boldsymbol{\gamma}.$$

Относительно системы координат, жестко связанной с движущимся твердым телом, вектор скорости потока записывается в виде

$$-\mathbf{v} = v_0 \gamma_1 \mathbf{e}_x + v_0 \gamma_2 \mathbf{e}_y + v_0 \gamma_3 \mathbf{e}_z.$$

Данный вектор является вектором нормали к плоскости, перпендикулярной потоку. Таким образом, уравнение плоскости, перпендикулярной потоку, может быть записано в виде:

$$x\gamma_1 + y\gamma_2 + z\gamma_3 = 0. \quad (16)$$

Здесь  $x$ ,  $y$  и  $z$  – это координаты произвольной точки рассматриваемой плоскости. Возьмем теперь произвольную точку тела, задаваемую в системе координат, жестко связанной с телом, радиусом – вектором  $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$  и найдем ее проекцию на плоскость (16).

Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку  $(X, Y, Z)$  параллельно вектору  $-\mathbf{v}$ , имеют вид:

$$x = X + v_x t, \quad y = Y + v_y t, \quad z = Z + v_z t,$$

то есть

$$x = X + v_0 \gamma_1 t, \quad y = Y + v_0 \gamma_2 t, \quad z = Z + v_0 \gamma_3 t. \quad (17)$$

Указанные координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  должны удовлетворять уравнению (16). Подставляя выражения (17) для  $x$ ,  $y$  и  $z$  в уравнение (16), получаем, принимая во внимание условие  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ , что

$$X\gamma_1 + Y\gamma_2 + Z\gamma_3 + v_0 t = 0.$$

Отсюда получаем для  $t$  следующее выражение:

$$t = -\frac{X\gamma_1 + Y\gamma_2 + Z\gamma_3}{v_0}. \quad (18)$$

Вернемся к формулам (17). С учетом того, что  $t$  определяется формулой (18), данные формулы можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} x &= X - (X\gamma_1 + Y\gamma_2 + Z\gamma_3)\gamma_1, & y &= Y - (X\gamma_1 + Y\gamma_2 + Z\gamma_3)\gamma_2, \\ z &= Z - (X\gamma_1 + Y\gamma_2 + Z\gamma_3)\gamma_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Если вернуться к векторным обозначениям

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad \mathbf{R} = (X, Y, Z), \quad \boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

то формулы (19), связывающие между собой  $x, y, z$  и  $X, Y, Z$  можно переписать в виде одного векторного соотношения

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \boldsymbol{\gamma}. \quad (20)$$

Поскольку  $(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = 1$ , то имеем:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \boldsymbol{\gamma},$$

откуда

$$\mathbf{r} = [\boldsymbol{\gamma} \times [\mathbf{R} \times \boldsymbol{\gamma}]]. \quad (21)$$

Полученная формула (21) показывает, как связаны между собой координаты некоторой точки тела, заданной вектором  $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$  с координатами ее проекции на плоскость  $\Pi$ , перпендикулярную потоку. Из формулы (21) очевидно следует, что все точки внутренней точки тела, радиусы – векторы которых имеют вид

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R} + g(\boldsymbol{\gamma}) \boldsymbol{\gamma},$$

где  $g(\boldsymbol{\gamma})$  – произвольная функция, проецируются в одну и ту же точку на плоскости  $\Pi$ . Таким образом, разным точкам внутренней твердого тела

может соответствовать одна и та же точка на плоскости П.

Но если предположить, что тело с неподвижной точкой представляет собой тонкую пластину, и не рассматривать вырожденный случай, когда вектор  $\boldsymbol{\gamma}$  лежит в плоскости пластины (в этом случае тень от пластины вырождается в отрезок прямой, и о его площади говорить не приходится), тогда каждой точке пластины, заданной вектором  $\mathbf{R}$ , соответствует точка проекции, заданная вектором  $\mathbf{r}$ , причем разным точкам пластины соответствуют разные точки проекции. Если теперь взять несколько точек пластины, то для них получим:

$$\mathbf{r}_i = [\boldsymbol{\gamma} \times [\mathbf{R}_i \times \boldsymbol{\gamma}]], \quad i = 1, 2, \dots, N$$

и, следовательно, если пластина, обтекаемая потоком частиц, является однородной, то

$$\frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \left[ \boldsymbol{\gamma} \times \left[ \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \times \boldsymbol{\gamma} \right] \right].$$

Отсюда следует, что в случае обтекания потоком частиц однородной пластины ее центр масс должен проецироваться в центр масс проекции. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 1.** В случае обтекания потоком частиц однородной пластины с неподвижной точкой, в качестве вектора  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})$  в формуле (9) для момента  $\mathbf{M}_O$  может быть выбран вектор, соединяющий неподвижную точку с центром масс пластины.

Проверим сформулированное утверждение на нескольких примерах.

**Пример 1.3.1.** В качестве первого примера рассмотрим задачу, предложенную в работе В. В. Сазонова [64]. В этой работе рассматривается движение спутника, представляющего собой пластину площади  $S_0$ , которая в осях, жестко связанных со спутником, лежит в плоскости  $Oxz$  и является симметричной относительно оси  $Ox$ . Рассмотрим твердое тело с неподвижной точкой  $O$  подобное спутнику из работы [64], то есть представляющее собой пластину, лежащую в плоскости  $Oxz$  и симметричную относительно оси  $Ox$ .

Так как пластина лежит в плоскости  $Oxz$ , следовательно, ось  $Oy$  перпендикулярна плоскости пластины. В силу симметрии пластины относительно оси  $Ox$  центр масс  $C$  пластины также лежит на оси  $Ox$ . Пусть центр масс  $C$  пластины отстоит от неподвижной точки на расстояние  $a$  вдоль оси  $Ox$ , тогда вектор  $\mathbf{R}$  равен

$$\mathbf{R} = \overrightarrow{OC} = a\mathbf{e}_x = (a, 0, 0).$$

Момент, действующий на пластину со стороны потока частиц, определяется формулой (9), причем в качестве вектора  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})$ , как уже говорилось, можно взять вектор  $\mathbf{R}$ . Вычислим площадь  $S(\boldsymbol{\gamma})$  тени. Эта площадь связана с площадью пластины формулой

$$S = S_0 \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  — угол между плоскостью пластины и плоскостью  $\Pi$ , причем  $\cos \varphi > 0$ . Как известно, угол между плоскостями равен углу между их нормальными. Единичным вектором нормали к плоскости  $\Pi$  является вектор

$$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

Поскольку вся пластина лежит в плоскости  $Oxz$ , то ось  $Oy$  перпендикулярна плоскости пластины, и единичный вектор нормали к пластине равен

$$\mathbf{e}_y = (0, 1, 0).$$

Следовательно, учитывая, что оба вектора  $\boldsymbol{\gamma}$  и  $\mathbf{e}_y$  — единичные, то имеем:

$$\cos \varphi = (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{e}_y) = |\gamma_2|.$$

(мы берем модуль у  $\gamma_2$ , чтобы добиться выполнения условия  $\cos \varphi > 0$ ). Тогда, окончательно,

$$\mathbf{M}_O = fS_0 |\gamma_2| [\boldsymbol{\gamma} \times a\mathbf{e}_x] -$$

в точности как в работе В. В. Сазонова [64].

**Пример 1.3.2.** В работе Т. А. Рыбниковой и Д. В. Трещева [62] рассматривалась пластина, закрепленная на невесомой штанге длины  $l$ , соединяющей неподвижную точку и центр масс пластины, причем штанга перпендикулярна плоскости пластины. Направим по штанге ось  $Oz$  системы координат, жестко связанной с данным твердым телом. Тогда радиус – вектор центра масс тела имеет вид:

$$\mathbf{R} = \overrightarrow{OC} = l\mathbf{e}_z = (0, 0, l).$$

Теперь вычислим площадь  $S(\boldsymbol{\gamma})$  тени от данной пластины. Вектором нормали к пластине является вектор

$$\mathbf{e}_z = (0, 0, 1).$$

Используя рассуждения, представленные выше, находим, что

$$\cos \varphi = (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{e}_z) = |\gamma_3|.$$

Таким образом,

$$fS(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma}) = fS_0l|\gamma_3|\mathbf{e}_z = (0, 0, fS_0l|\gamma_3|).$$

Можно представить этот вектор как вектор градиента некоторой функции  $U(\boldsymbol{\gamma})$ , равной

$$U(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{fS_0l}{2} |\gamma_3| \gamma_3,$$

то есть в точности как в работе [62].

В следующем параграфе обсудим особенности получения момента  $\mathbf{M}_O$  в случае обтекания потоком частиц тела с неподвижной точкой, ограниченного центрально – симметричной поверхностью и поверхностью вращения.

## 1.4 Обтекание тела, ограниченного центрально – симметричной поверхностью

Пусть поверхность тела, обтекаемого потоком частиц, обладает центральной симметрией относительно неподвижной точки  $O$ , то есть задается в главных осях инерции с началом в неподвижной точке уравнением

$$F(x, y, z) = F(-x, -y, -z) = 0. \quad (22)$$

Найдем границу  $\partial S_*$  части  $S_*$  поверхности (22), омываемой потоком частиц. Для этого возьмем точку  $(x, y, z)$  поверхности (22) и найдем касательную плоскость к поверхности в этой точке. Эта плоскость задается следующим уравнением относительно  $X, Y, Z$ :

$$F'_x(x, y, z)(X - x) + F'_y(x, y, z)(Y - y) + F'_z(x, y, z)(Z - z) = 0. \quad (23)$$

Прямая, задаваемая уравнениями

$$X = x + v_0\gamma_1 t, \quad Y = y + v_0\gamma_2 t, \quad Z = z + v_0\gamma_3 t$$

лежит в касательной плоскости к поверхности тела, то есть для любого  $t$  выполняется равенство

$$F'_x(x, y, z)\gamma_1 + F'_y(x, y, z)\gamma_2 + F'_z(x, y, z)\gamma_3 = 0. \quad (24)$$

Таким образом, граница  $\partial S_*$  задается уравнениями (22) и (24). Уравнение (22) показывает, что функция  $F(x, y, z)$  является четной функцией всех своих аргументов. Ее производные по  $x, y$  и  $z$  являются нечетными функциями, поскольку

$$\frac{\partial F(-x, -y, -z)}{\partial(-x)} = -\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial F(-x, -y, -z)}{\partial(-y)} = -\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial F(-x, -y, -z)}{\partial(-z)} = -\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}.$$

Таким образом, мы можем утверждать, что если уравнения (22) и (24) выполняются для точки с координатами  $(x, y, z)$ , то они будут выполняться также и для точки с координатами  $(-x, -y, -z)$ . Таким образом, граница  $\partial S_*$  будет симметричной кривой относительно центра симметрии  $O$ .

Выше мы получили формулу (21), показывающую, как связаны между собой координаты некоторой точки тела, заданной вектором  $\mathbf{R}$ , с координатами ее проекции на плоскость  $\Pi$ , перпендикулярную потоку. Используя эту формулу, заключаем, что поскольку граница  $\partial S_*$  будет симметричной относительно центра симметрии  $O$ , то и граница фигуры  $S_0$  на плоскости  $\Pi$  будет симметричной относительно точки  $O'$  – проекции точки  $O$  на плоскость  $\Pi$ . У симметричной однородной пластины, имеющей форму фигуры  $S_0$ , центр масс будет лежать в точке  $O'$ . Это означает, что вектор  $\mathbf{c}(\gamma) = 0$  и, следовательно,

$$\mathbf{M}_O = 0.$$

Теперь вычислим момент  $\mathbf{M}$  относительно произвольной точки  $O_1$ , лежащей внутри тела. Введем систему координат  $O_1x_1x_2x_3$ , оси которой направлены вдоль главных осей инерции для точки  $O_1$ . Координаты центра симметрии – точки  $O$  в системе координат  $O_1x_1x_2x_3$  обозначим

$$\overrightarrow{O_1O} = h_1\mathbf{e}_1 + h_2\mathbf{e}_2 + h_3\mathbf{e}_3.$$

Согласно известной формуле теоретической механики

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{O_1} &= \mathbf{M}_O - \left[ \overrightarrow{OO_1} \times \mathbf{F} \right] = \left[ \overrightarrow{O_1O} \times \mathbf{F} \right] = \left[ \overrightarrow{O_1O} \times fS(\gamma)\boldsymbol{\gamma} \right] = \\ &= -fS(\gamma) \left[ \boldsymbol{\gamma} \times \overrightarrow{O_1O} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, в этом случае в качестве вектора  $\mathbf{c}(\gamma)$  можно взять вектор, соединяющий неподвижную точку и центр симметрии. Окончательно, справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 2.** В случае обтекания потоком частиц твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного центрально – симметричной поверхно-

стью, в качестве вектора  $\mathbf{c}(\gamma)$  в формуле (9) для момента  $\mathbf{M}_O$  может быть выбран вектор, соединяющий неподвижную точку с центром симметрии поверхности, ограничивающей тело. Этот вектор имеет постоянные компоненты в системе координат, жестко связанной с движущимся твердым телом.

### 1.5 Обтекание тела, ограниченного поверхностью вращения

Пусть поверхность тела, обтекаемого потоком частиц, является поверхностью вращения. Получим выражение для момента  $\mathbf{M}_O$  в этом случае. При проведении рассуждений воспользуемся некоторыми результатами работ [7, 8, 35, 36]. Пусть тело с неподвижной точкой ограничено поверхностью вращения, уравнение которой в главных осях инерции с началом в неподвижной точке имеет вид:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - f(z) = 0. \quad (25)$$

Таким образом, ось  $Oz$  является осью симметрии данной поверхности вращения. Если поверхность вращения ограничена еще некоторой торцевой плоскостью, то к уравнению (25) следует добавить неравенство

$$z \leq z^*, \quad (26)$$

где  $z^*$  – фиксированная величина. Находим частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{df}{dz}.$$

Обозначим через  $G(z)$  величину

$$G(z) = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{df}{dz} \right)^2} = \sqrt{f(z) + \frac{1}{4} \left( \frac{df}{dz} \right)^2}.$$

Тогда вектор нормали к поверхности имеет вид

$$\mathbf{n} = \left( \frac{x}{G(z)}, \frac{y}{G(z)}, \frac{-\frac{1}{2} \frac{df}{dz}}{G(z)} \right).$$

Граница области, омываемой потоком частиц, определяется уравнением поверхности (25), а также уравнением  $(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = 0$  или в явном виде

$$\gamma_1 x + \gamma_2 y = \frac{1}{2} \gamma_3 \frac{df}{dz}. \quad (27)$$

Введем теперь новую систему координат. Ранее мы рассматривали систему главных осей инерции, которые совпадали с главными осями поверхности. Единичные базисные векторы этой системы мы обозначали  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ . Новые базисные векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  связаны со старыми базисными векторами  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  формулами

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\gamma_2}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} \mathbf{e}_x - \frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} \mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\gamma} = \gamma_1 \mathbf{e}_x + \gamma_2 \mathbf{e}_y + \gamma_3 \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{e}_3 = -\frac{\gamma_1 \gamma_3}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} \mathbf{e}_x - \frac{\gamma_2 \gamma_3}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} \mathbf{e}_y + \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \mathbf{e}_z.$$

Легко видеть, что

$$(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\gamma}) = 0,$$

$$(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\gamma}) = 0,$$

$$(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3) = 0.$$

Это означает, что  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_3$  представляют собой два взаимноортогональных единичных вектора в плоскости  $\Pi$ , перпендикулярной потоку. Пусть

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z -$$

радиус – вектор некоторой точки поверхности относительно старой системы координат. В новых осях тот же вектор имеет вид:

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + y_1 \mathbf{e}_2 + z_1 \mathbf{e}_3.$$

Тогда координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  связаны между собой соотношениями

$$x = \frac{x_1 \gamma_2}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} + \frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} \left( y_1 \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} - z_1 \gamma_3 \right),$$

$$y = -\frac{x_1 \gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} + \frac{\gamma_2}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} \left( y_1 \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} - z_1 \gamma_3 \right),$$

$$z = y_1 \gamma_3 + z_1 \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}.$$

Подставляя эти соотношения в уравнение (25) поверхности и в уравнение (27) границы, получим, что уравнение поверхности в новых координатах записывается следующим образом:

$$x_1^2 + \left( y_1 \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} - z_1 \gamma_3 \right)^2 = f \left( y_1 \gamma_3 + z_1 \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \right). \quad (28)$$

Уравнение границы принимает вид:

$$\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \left( y_1 \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} - z_1 \gamma_3 \right) = \frac{1}{2} \frac{df}{dz} \gamma_3. \quad (29)$$

Исключив из уравнений (28), (29) координату  $y_1$ , получим уравнение связи между  $x_1$  и  $z_1$ , то есть уравнение проекции границы на плоскость, перпендикулярную потоку. Эта проекция ограничивает область, площадь которой входит в выражение для момента сил, действующих на тело с неподвижной точкой. Выясним некоторые свойства этой площади. Из общего вида уравнений (28), (29) можно сделать следующие заключения.

1. Величина этой площади зависит только от параметров самой поверхности и переменной  $\gamma_3$  – угла между осью симметрии тела и направлением потока.
2. Кривая, ограничивающая проекцию, симметрична относительно оси  $z_1$ , то есть центр тяжести проекции обязательно лежит на оси  $z_1$ .

Итак, площадь проекции можно считать функцией переменной  $\gamma_3$ , то есть в данном случае  $S(\gamma) = S(\gamma_3)$ . Учитывая, что центр тяжести проекции

лежит на оси  $z_1$ , запишем радиус вектор  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})$  в виде:

$$\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma}) = c(\gamma_3) \mathbf{e}_3.$$

Заметим теперь, что вектор  $\mathbf{e}_3$  может быть представлен в виде:

$$\mathbf{e}_3 = -\frac{\gamma_3}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} \boldsymbol{\gamma} + \frac{1}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} \mathbf{e}_z.$$

Следовательно,

$$\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma}) = c(\gamma_3) \mathbf{e}_3 = -\frac{\gamma_3 c(\gamma_3)}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} \boldsymbol{\gamma} + \frac{c(\gamma_3)}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} \mathbf{e}_z$$

и выражение для момента сил (9) может быть переписано в виде:

$$\mathbf{M}_O = -fS(\gamma_3) \frac{c(\gamma_3)}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}} [\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}_z]. \quad (30)$$

Таким образом, можно считать, что в случае обтекания потоком частиц осесимметричного тела

$$\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{c(\gamma_3)}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}} \mathbf{e}_z$$

и  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор оси геометрической симметрии тела. Если главные оси инерции тела не совпадают с главными осями поверхности, то в главных осях инерции единичный вектор оси геометрической симметрии поверхности имеет компоненты

$$\mathbf{e}_z = \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

и всюду вместо  $\gamma_3$  следует писать  $(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma})$ . Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 3.** В случае обтекания потоком частиц твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного осесимметричной поверхностью, единичный вектор оси геометрической симметрии которой равен

$$\mathbf{e}_z = \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

а неподвижная точка  $O$  принадлежит оси симметрии, для площади  $S(\gamma)$  фигуры  $S_0$  и вектора  $\mathbf{c}(\gamma)$  справедливы следующие формулы:

$$S = S((\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma}), \quad \mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{c((\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma}))}{\sqrt{1 - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma})^2}} \boldsymbol{\alpha} = \chi((\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma})) \boldsymbol{\alpha}. \quad (31)$$

**Замечание 1.5.1.** В работах о движении космических аппаратов под действием моментов сил светового давления часто считается, что спутник ограничен поверхностью вращения. В этом случае выражение для момента сил, действующего на поверхность спутника, аналогично выражению (31). В дальнейшем, как правило, соответствующее выражение для момента аппроксимируется полиномами конечной степени относительно  $\gamma_3$ , после чего решается задача о движении спутника под действием такого приближенного момента. Подобные исследования содержатся, например, в работах [1, 2, 3, 52, 53].

В следующем параграфе для осесимметричного тела с неподвижной точкой, обтекаемого потоком частиц, получены частные случаи формул (3) и (4) для силы и момента, действующих со стороны потока частиц на тело с неподвижной точкой. Полученные формулы применяются при нахождении силы и момента, действующих на тело с неподвижной точкой, имеющего форму однородного диска и однородного цилиндра, ограниченного торцевыми плоскостями.

## 1.6 Явное выражение для момента внешних сил в случае обтекания однородного диска и цилиндра

В случае обтекания потоком частиц тела, ограниченного осесимметричной поверхностью, можно упростить формулы (3) и (4) для силы и момента, действующих на тело с неподвижной точкой со стороны потока частиц. Вместо главных осей инерции  $Oxyz$  будем рассматривать оси  $O\xi\eta\zeta$  с ортами  $\mathbf{e}_\xi$ ,  $\mathbf{e}_\eta$ ,  $\mathbf{e}_\zeta$ , связанными с единичными базисными векторами системы координат

Оxyz следующими формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \frac{\gamma_2}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} \mathbf{e}_\xi + \frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} \mathbf{e}_\eta, & \mathbf{e}_y &= -\frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} \mathbf{e}_\xi + \frac{\gamma_2}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} \mathbf{e}_\eta, \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_\zeta. \end{aligned}$$

Тогда легко убедиться, что вектор  $\boldsymbol{\gamma}$  будет лежать в плоскости  $O\eta\zeta = O\eta z$ , поскольку

$$\boldsymbol{\gamma} = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \mathbf{e}_\eta + \gamma_3 \mathbf{e}_z.$$

Введем теперь угол  $\delta$  следующим образом. Будем считать, что угол между  $\boldsymbol{\gamma}$  и  $\mathbf{e}_z$  равен  $\pi - \delta$ , тогда

$$\delta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Выражение для вектора  $\boldsymbol{\gamma}$  переписется в виде

$$\boldsymbol{\gamma} = \sin(\pi - \delta) \mathbf{e}_\eta + \cos(\pi - \delta) \mathbf{e}_\zeta = \sin \delta \mathbf{e}_\eta - \cos \delta \mathbf{e}_\zeta.$$

Таким образом, в системе координат  $O\xi\eta\zeta$  векторы  $\boldsymbol{\gamma}$ ,  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{r}$  имеют вид:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{e}_\eta \sin \delta - \mathbf{e}_\zeta \cos \delta, \quad \mathbf{n} = n_\xi \mathbf{e}_\xi + n_\eta \mathbf{e}_\eta + n_\zeta \mathbf{e}_\zeta, \quad \mathbf{r} = \xi \mathbf{e}_\xi + \eta \mathbf{e}_\eta + \zeta \mathbf{e}_\zeta. \quad (32)$$

Запишем выражения (3), (4) для осесимметричного тела. Учтем при этом, что вследствие полной симметрии задачи относительно плоскости  $O\eta\zeta$  выражения, содержащие множитель  $\xi$  или  $n_\xi$  в нечетной степени, после интегрирования обращаются в ноль, то есть

$$\int_{S_*} \xi^{(2k+1)} g(\eta, \zeta, n_\eta, n_\zeta, \delta) dS = 0, \quad \int_{S_*} n_\xi^{(2k+1)} g(\eta, \zeta, n_\eta, n_\zeta, \delta) dS = 0,$$

где  $g$  – произвольная функция своих переменных, а  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Подставляя (32) в (3) и (4), получаем

$$\mathbf{F} = -f(\mathbf{e}_\eta \sin \delta - \mathbf{e}_\zeta \cos \delta) \int_{S_*} (n_\eta \sin \delta - n_\zeta \cos \delta) dS, \quad (33)$$

$$\mathbf{M}_O = f \mathbf{e}_\xi \int_{S_*} (n_\eta \sin \delta - n_\zeta \cos \delta) (\zeta \sin \delta + \eta \cos \delta) dS. \quad (34)$$

Формулами (33), (34) можно пользоваться при вычислении силы и момента, действующих на тело с неподвижной точкой со стороны потока частиц, в случае обтекания потоком частиц осесимметричного тела. Воспользуемся этими формулами для вычисления силы и момента, действующих на осесимметричное тело с неподвижной точкой простейшей геометрии.

**Пример 1.6.1.** Пусть осесимметричное тело, обтекаемое потоком частиц, представляет собой круглый диск радиуса  $R$ , причем неподвижной точкой является центр диска. В системе координат  $O\xi\eta\zeta$  зададим диск следующими формулами:

$$\xi = r \cos \varphi, \quad \eta = r \sin \varphi, \quad \zeta = 0, \quad n_\xi = 0, \quad n_\eta = 0, \quad n_\zeta = \text{sign}(\cos \delta),$$

$$dS = r dr d\varphi.$$

Тогда граница обтекаемой области определяется условием:

$$(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) \leq 0, \quad \text{то есть} \quad -|\cos \delta| \leq 0.$$

Таким образом, по формуле (33) имеем следующее выражение для силы, действующей на диск:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= f |\cos \delta| (\mathbf{e}_\eta \sin \delta - \mathbf{e}_\zeta \cos \delta) \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\varphi = \\ &= f \pi R^2 |\cos \delta| (\mathbf{e}_\eta \sin \delta - \mathbf{e}_\zeta \cos \delta). \end{aligned}$$

В осях  $Oxyz$  выражение для силы  $\mathbf{F}$  может быть переписано следующим образом:

$$\mathbf{F} = f \pi R^2 |\gamma_3| \boldsymbol{\gamma}.$$

Аналогично, по формуле (34) для момента, действующего на диск, имеем выражение

$$\mathbf{M}_O = -f \mathbf{e}_\xi |\cos \delta| \cos \delta \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin \varphi dr d\varphi = 0.$$

**Пример 1.6.2.** Пусть осесимметричное тело, обтекаемое потоком частиц, представляет собой прямой круговой цилиндр радиуса  $R$  и высоты  $L$ , ограниченный двумя торцевыми плоскостями, причем неподвижной точкой является центр цилиндра. В системе координат  $Oxyz$  боковая поверхность цилиндра определяется формулами:

$$\xi = R \cos \varphi, \quad \eta = R \sin \varphi, \quad \zeta = \zeta, \quad |\zeta| \leq \frac{L}{2},$$

$$n_\xi = \cos \varphi, \quad n_\eta = \sin \varphi, \quad n_\zeta = 0, \quad dS = R d\varphi d\zeta.$$

Тогда граница обтекаемой области определяется условием:

$$(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) \leq 0, \quad \text{то есть} \quad \sin \varphi \sin \delta \leq 0,$$

причем  $\sin \delta \geq 0$ . Поэтому граница обтекаемой области определяется условием:

$$\sin \varphi \leq 0, \quad \text{то есть} \quad \varphi \in [\pi, 2\pi].$$

С учетом пределов изменения  $\zeta$  имеем:

$$\begin{aligned} \int_{S_*} (n_\eta \sin \delta - n_\zeta \cos \delta) dS &= \int_{\pi}^{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sin \varphi \sin \delta R d\varphi d\zeta = \\ &= LR \sin \delta \int_{\pi}^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = -2LR \sin \delta. \end{aligned}$$

Тогда по формуле (33)

$$\mathbf{F}_1 = 2fLR \sin \delta (\mathbf{e}_\eta \sin \delta - \mathbf{e}_\zeta \cos \delta).$$

Для момента, действующего на тело с неподвижной точкой в форме цилиндра, при обтекании потоком частиц его боковой поверхности имеем по формуле (34):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &= f\mathbf{e}_\xi \int_{\pi}^{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sin \varphi \sin \delta (\zeta + R \sin \varphi \cos \delta) R d\varphi d\zeta = \\ &= \mathbf{e}_\xi f R \sin^2 \delta \int_{\pi}^{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \zeta \sin \varphi d\varphi d\zeta + \mathbf{e}_\xi f R^2 \sin \delta \cos \delta \int_{\pi}^{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi d\zeta = \\ &= \frac{f\pi R^2 L \sin \delta \cos \delta}{2} \mathbf{e}_\xi. \end{aligned}$$

Переходим к вычислению силы и момента, действующих на торцы цилиндра со стороны потока частиц. Для торцевых плоскостей цилиндра, аналогично диску из предыдущего примера имеем:

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos \varphi, \quad \eta = r \sin \varphi, \quad \zeta = \text{sign}(\cos \delta) \frac{L}{2}, \\ n_\xi &= 0, \quad n_\eta = 0, \quad n_\zeta = \text{sign}(\cos \delta), \quad dS = r dr d\varphi. \end{aligned}$$

Поскольку

$$(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) = -|\cos \delta| \leq 0,$$

то область обтекания торца цилиндра определяется условиями

$$\varphi \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, R].$$

Поэтому по формуле (33) имеем, как и в предыдущем примере

$$\mathbf{F}_2 = f\pi R^2 |\cos \delta| (\mathbf{e}_\eta \sin \delta - \mathbf{e}_\zeta \cos \delta).$$

Для момента, действующего на торцевую плоскость цилиндра, по формуле (34) получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_2 &= -\mathbf{e}_\xi f \int_0^{2\pi} \int_0^R \operatorname{sign}(\cos \delta) \cos \delta \left( \operatorname{sign}(\cos \delta) \frac{L}{2} \sin \delta + r \sin \varphi \cos \delta \right) r dr d\varphi = \\ &= -\mathbf{e}_\xi f \frac{L}{2} \sin \delta \cos \delta \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\varphi = -\frac{f\pi R^2 L \sin \delta \cos \delta}{2} \mathbf{e}_\xi. \end{aligned}$$

Таким образом, суммарная сила, действующая на цилиндр, имеет вид:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = f (2LR \sin \delta + \pi R^2 |\cos \delta|) (\mathbf{e}_\eta \sin \delta - \mathbf{e}_\zeta \cos \delta). \quad (35)$$

Формулу (35) можно переписать в виде:

$$\mathbf{F} = f\pi R^2 \left( \frac{2L}{\pi R} \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} + |\gamma_3| \right) \boldsymbol{\gamma}. \quad (36)$$

Суммарный момент, действующий на цилиндр, равен

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = 0.$$

Вычислим теперь момент  $\mathbf{M}$  относительно произвольной точки  $O_1$ , принадлежащей телу. Введем систему координат  $O_1x_1x_2x_3$ , оси которой направлены вдоль главных осей инерции тела для точки  $O_1$ . Компоненты вектора  $\boldsymbol{\gamma}$  в системе координат  $O_1x_1x_2x_3$  по прежнему будем обозначать  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ . Координаты точки  $O$  в системе координат  $O_1x_1x_2x_3$  обозначим:

$$\overrightarrow{O_1O} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3.$$

Согласно известной формуле теоретической механики

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{O_1} &= \mathbf{M}_O - \left[ \overrightarrow{OO_1} \times \mathbf{F} \right] = \left[ \overrightarrow{O_1O} \times \mathbf{F} \right] = \left[ \overrightarrow{O_1O} \times fS(\boldsymbol{\gamma}) \boldsymbol{\gamma} \right] = \\ &= f\pi R^2 \left( \frac{2L}{\pi R} \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} + |\gamma_3| \right) \left[ \overrightarrow{O_1O} \times \boldsymbol{\gamma} \right]. \end{aligned}$$

Пусть

$$\mathbf{M}_{O_1} = M_1 \mathbf{e}_1 + M_2 \mathbf{e}_2 + M_3 \mathbf{e}_3$$

в системе координат  $O_1 x_1 x_2 x_3$ , тогда

$$M_1 = f \pi R^2 \left( \frac{2L}{\pi R} \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} + |\gamma_3| \right) (a_2 \gamma_3 - a_3 \gamma_2),$$

$$M_2 = f \pi R^2 \left( \frac{2L}{\pi R} \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} + |\gamma_3| \right) (a_3 \gamma_1 - a_1 \gamma_3),$$

$$M_3 = f \pi R^2 \left( \frac{2L}{\pi R} \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} + |\gamma_3| \right) (a_1 \gamma_2 - a_2 \gamma_1).$$

Таким образом, в случае обтекания потоком частиц твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида, главные оси которого совпадают с главными осями инерции тела для неподвижной точки, уравнения движения тела (10) в скалярной форме записываются следующим образом:

$$A_1 \dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2) \omega_2 \omega_3 = f \pi R^2 \left( \frac{2L}{\pi R} \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} + |\gamma_3| \right) (a_2 \gamma_3 - a_3 \gamma_2),$$

$$A_2 \dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3) \omega_1 \omega_3 = f \pi R^2 \left( \frac{2L}{\pi R} \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} + |\gamma_3| \right) (a_3 \gamma_1 - a_1 \gamma_3),$$

$$A_3 \dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1) \omega_1 \omega_2 = f \pi R^2 \left( \frac{2L}{\pi R} \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} + |\gamma_3| \right) (a_1 \gamma_2 - a_2 \gamma_1);$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1 \gamma_3 - \omega_3 \gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2 \gamma_1 - \omega_1 \gamma_2.$$

Легко видеть, что в данном случае компоненты момента  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ , действующего на тело с неподвижной точкой со стороны потока частиц, не являются дифференцируемыми функциями переменных  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ .

Установив некоторые факты о структуре момента  $\mathbf{M}_O$  в случае обтекания потоком частиц твердого тела с неподвижной точкой, ограниченной поверхностями разного вида, получим общие выводы о свойствах системы урав-

нений (10), описывающей движение твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц.

### 1.7 Потенциальность момента внешних сил. Существование интеграла энергии

Итак, уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц имеют вид уравнений (10). Эти уравнения обладают интегральным инвариантом плотности единица, а также первыми интегралами

$$J_1 = (\mathbb{J}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\gamma}), \quad J_2 = (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = 1.$$

Уравнения (10) обратимы, то есть выдерживают замену переменных и времени  $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}, t) \rightarrow (-\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}, -t)$ . Однако в общем случае эти уравнения не являются системой уравнений Гамильтона с какой-либо пуассоновой структурой. Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** Если для любых  $i, j, i \neq j$  выполнены соотношения

$$c_i \frac{\partial S}{\partial \gamma_j} + \frac{\partial c_i}{\partial \gamma_j} S(\boldsymbol{\gamma}) = c_j \frac{\partial S}{\partial \gamma_i} + \frac{\partial c_j}{\partial \gamma_i} S(\boldsymbol{\gamma}), \quad (37)$$

то уравнения движения гамильтоновы с пуассоновой структурой, определяемой алгеброй  $E$  (3), и допускают дополнительный первый интеграл типа интеграла энергии.

**Доказательство.** Пусть

$$S(\boldsymbol{\gamma}) \mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \quad (38)$$

для некоторой функции  $U(\boldsymbol{\gamma})$ . Тогда если функция  $U$  достаточно гладкая, то для выполнения соотношений (38) необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия (37). При этом уравнения движения могут быть представлены в виде

$$\dot{\mathbf{L}} = \{\mathbf{L}, H\}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \{\boldsymbol{\gamma}, H\}, \quad (39)$$

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k, \quad \{L_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0,$$

где функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2} (\mathbb{J}^{-1} \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}) - fU(\boldsymbol{\gamma}) \quad (40)$$

определяет  $J_0 = H$  – дополнительный первый интеграл уравнений (10) – аналог интеграла энергии.

В случае, когда поверхность тела центрально симметрична, в качестве вектора  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})$  может быть выбран вектор, соединяющий неподвижную точку и центр симметрии, и имеющий постоянные компоненты в системе координат, жестко связанной с движущимся телом (см. параграф 1.4). В этом случае соотношения (37) слегка упрощаются и принимают вид

$$c_i \frac{\partial S}{\partial \gamma_j} = c_j \frac{\partial S}{\partial \gamma_i}. \quad (41)$$

Очевидно, что в случае, когда тело с неподвижной точкой ограничено поверхностью сферы, то площадь  $S(\boldsymbol{\gamma})$  фигуры  $S_0$  является постоянной, и соотношения (41) выполняются. Как уже говорилось, в этом случае уравнения движения тела совпадают с уравнениями движения твердого тела в однородном силовом поле и имеют вид, представленный в примере 1.2.1.

Однако соотношения (41) выполняются далеко не всегда. Рассмотрим, например, случай, когда тело ограничено поверхностью эллипсоида (см. параграф 1.2), а вектор, соединяющий неподвижную точку  $O_1$  и центр эллипсоида  $O$  имеет вид

$$\overrightarrow{O_1 O} = h \mathbf{e}_x = (h, 0, 0).$$

В этом случае выражение  $S(\boldsymbol{\gamma}) \mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})$  имеет вид:

$$S(\boldsymbol{\gamma}) \mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma}) = \pi h a_1 a_2 a_3 \sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a_1^2} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^2} + \frac{\gamma_3^2}{a_3^2}} \mathbf{e}_1.$$

Соотношения (41) выполняются, только если  $a_2 = a_3$ , то есть эллипсоид, ограничивающий твердое тело, является эллипсоидом вращения, а неподвижная точка лежит на оси геометрической симметрии эллипсоида.

В параграфе 1.3 рассматривался пример из работы В. В. Сазонова [64]. В случае движения такого тела выражение  $S(\boldsymbol{\gamma}) \mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})$  имеет вид

$$S(\boldsymbol{\gamma}) \mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma}) = S_0 |\gamma_2| a \mathbf{e}_1 = (S_0 |\gamma_2| a, 0, 0).$$

В этом случае выражение  $S(\boldsymbol{\gamma}) \mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})$  не будет представляться в виде градиента некоторой функции  $U(\boldsymbol{\gamma})$ .

Напротив, в примере из работы Т. А. Рыбниковой и Д. В. Трещева [62], момент сил, действующих на тело с неподвижной точкой, может быть представлен как вектор градиента некоторой функции, и уравнения движения системы из работы [62] имеют гамильтонов вид.

В случае движения тела, ограниченного осесимметричной поверхностью, когда ось симметрии определяется вектором  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  и содержит неподвижную точку, справедливо Утверждение 3 параграфа 1.5. В этом случае, как нам известно, выполняются условия

$$\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = S(\boldsymbol{\gamma}) \mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{S((\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma})) c((\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma}))}{\sqrt{1 - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma})^2}} \boldsymbol{\alpha}.$$

Очевидно, что в этом случае потенциал  $U(\boldsymbol{\gamma})$  может быть представлен в виде:

$$U(\boldsymbol{\gamma}) = \int_0^{(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma})} \frac{S(u) c(u)}{\sqrt{1 - u^2}} du = U(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma}).$$

Таким образом, в случае обтекания потоком частиц тела, ограниченного осесимметричной поверхностью, уравнения движения (10) всегда допускают первый интеграл вида (40).

## 1.8 Простейшие случаи интегрируемости

В этом параграфе укажем некоторые случаи, когда уравнения движения твердого тела в потоке частиц (10) обладают необходимым числом дополнительных интегралов.

**Случай Эйлера - Пуансо.** Пусть поверхность тела центрально – симметрична и центр симметрии совпадает с точкой подвеса. Тогда уравнения (10) допускают первый интеграл

$$J_3 = (\mathbb{J}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{J}\boldsymbol{\omega}).$$

В этом случае задача вполне интегрируема и совпадает с задачей Эйлера – Пуансо.

**Случай осевой симметрии.** Пусть тело динамически симметрично, то есть выполнено, например, условие  $A_1 = A_2$ . Пусть также поверхность тела центрально – симметрична, центр симметрии лежит на оси  $Ox_3$ . Тогда уравнения движения допускают первый интеграл

$$J_3 = \omega_3 = \text{const.}$$

Этот случай аналогичен случаю Лагранжа.

#### **Аналоги случая Гесса.**

1. Пусть поверхность тела центрально – симметрична, центр симметрии и моменты инерции таковы, что справедливы условия

$$A_1 < A_2 < A_3, \quad \sqrt{\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}}c_3 \mp \sqrt{\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_3}}c_1 = 0, \quad c_2 = 0.$$

Тогда уравнения движения допускают частный интеграл

$$J_3 = \sqrt{\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}}A_1\omega_1 \pm \sqrt{\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_3}}A_3\omega_3 = 0.$$

2. Пусть поверхность тела осесимметрична, ось симметрии определяется вектором  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  и содержит неподвижную точку. Тогда, если моменты инерции и компоненты вектора  $\boldsymbol{\alpha}$  удовлетворяют условиям

$$A_1 < A_2 < A_3, \quad \sqrt{\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}}\alpha_3 \mp \sqrt{\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_3}}\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0,$$

то уравнения движения допускают частный интеграл

$$J_3 = \sqrt{\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}} A_1 \omega_1 \pm \sqrt{\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_3}} A_3 \omega_3 = 0.$$

Существуют ли в рассматриваемой механической системе какие-либо иные интегрируемые случаи? Ответ на этот вопрос частично дан в следующей главе, где сформулированы необходимые условия существования дополнительного интеграла в задаче о движении в потоке частиц твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения.

## Глава 2. Динамически несимметричное тело в потоке частиц, ограниченное поверхностью эллипсоида

### 2.1 Постановка задачи. Функция Гамильтона

Пусть поверхность, ограничивающая твердое тело, омываемое потоком частиц, представляет собой эллипсоид вращения, ось симметрии которого проходит через неподвижную точку. Пусть относительно главных осей инерции с началом в неподвижной точке  $O$  радиус – вектор центра эллипсоида записывается в виде:

$$\mathbf{r} = l\boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\mathbf{e}_x + \alpha_2\mathbf{e}_y + \alpha_3\mathbf{e}_z.$$

Как и в Параграфе 1.2 обозначим полуоси эллипсоида через  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  и будем считать, что

$$a_1 = a_2 = a, \quad a_3 = b.$$

Тогда уравнения движения в потоке частиц твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения, будут иметь вид (см. уравнения (15) и (31)):

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 &= f\pi a^2 bl \sqrt{\frac{1 - (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha})^2}{a^2} + \frac{(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha})^2}{b^2}} (\alpha_2\gamma_3 - \alpha_3\gamma_2), \\ A_2\dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3)\omega_1\omega_3 &= f\pi a^2 bl \sqrt{\frac{1 - (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha})^2}{a^2} + \frac{(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha})^2}{b^2}} (\alpha_3\gamma_1 - \alpha_1\gamma_3), \\ A_3\dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2 &= f\pi a^2 bl \sqrt{\frac{1 - (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha})^2}{a^2} + \frac{(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha})^2}{b^2}} (\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1); \\ \dot{\gamma}_1 &= \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2. \end{aligned} \tag{42}$$

Здесь через  $(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha})$  обозначено скалярное произведение единичных векторов  $\boldsymbol{\gamma}$  и  $\boldsymbol{\alpha}$ :

$$(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha}) = \gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_3.$$

Домножим первое уравнение системы (42) на  $\omega_1$ , второе – на  $\omega_2$ , третье – на  $\omega_3$  и сложим их. В результате получим следующее соотношение

$$\begin{aligned} A_1 \omega_1 \dot{\omega}_1 + A_2 \omega_2 \dot{\omega}_2 + A_3 \omega_3 \dot{\omega}_3 &= f \pi a^2 b l \sqrt{\frac{1 - (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha})^2}{a^2} + \frac{(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha})^2}{b^2}} \times \\ &\times (\alpha_1 (\omega_3 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_3) + \alpha_2 (\omega_1 \gamma_3 - \omega_3 \gamma_1) + \alpha_3 (\omega_2 \gamma_1 - \omega_1 \gamma_2)). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения (42) допускают первый интеграл типа интеграла энергии

$$F = \frac{A_1}{2} \omega_1^2 + \frac{A_2}{2} \omega_2^2 + \frac{A_3}{2} \omega_3^2 - G((\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha})) = h = \text{const.}$$

Функция  $G((\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha}))$  записывается по разному в зависимости от того, является ли эллипсоид, ограничивающий твердое тело, вытянутым ( $b > a$ ) или сжатым ( $a > b$ ). Для вытянутого эллипсоида вращения ( $b > a$ ) функция  $G((\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha}))$  имеет вид:

$$\begin{aligned} G((\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha})) &= \frac{f \pi a^2 b l}{2} (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \sqrt{\frac{1 - (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha})^2}{a^2} + \frac{(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha})^2}{b^2}} + \\ &+ \frac{f \pi b l}{2 \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha})}{\sqrt{\frac{1 - (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha})^2}{a^2} + \frac{(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha})^2}{b^2}}} \right). \end{aligned}$$

Для сжатого эллипсоида вращения ( $a > b$ ) функция  $G((\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha}))$  имеет вид:

$$G((\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha})) = \frac{f\pi a^2 b l}{2} (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \sqrt{\frac{1 - (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha})^2}{a^2} + \frac{(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha})^2}{b^2}} + \frac{f\pi b l}{2\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}} \ln \left( a\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha}) + a\sqrt{\frac{1 - (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha})^2}{a^2} + \frac{(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha})^2}{b^2}} \right).$$

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением случая вытянутого эллипсоида вращения  $b > a$  (случай сжатого эллипсоида вращения  $a > b$  рассматривается аналогично и дает тот же результат). В качестве обобщенных координат в данной задаче введем стандартные углы Эйлера  $\theta$ ,  $\psi$  и  $\varphi$ . Тогда имеем:

$$\gamma_1 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma_3 = \cos \theta \quad (43)$$

и функция Гамильтона рассматриваемой системы в стандартных обозначениях имеет вид:

$$F = F_0 - G((\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha})), \quad (44)$$

где  $F_0$  — кинетическая энергия — равна

$$F_0 = \frac{(A_1 \cos^2 \varphi + A_2 \sin^2 \varphi)}{2A_1 A_2 \sin^2 \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2 + \frac{(A_1 \sin^2 \varphi + A_2 \cos^2 \varphi)}{2A_1 A_2} p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{2A_3} + \frac{(A_2 - A_1) \sin \varphi \cos \varphi}{A_1 A_2 \sin \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta) p_\theta, \quad (45)$$

а в функцию  $G((\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha}))$  подставлены выражения (43) для переменных  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$ .

Очевидно, что функция Гамильтона  $F$  не зависит от координаты  $\psi$ , то есть канонический импульс  $p_\psi$  является постоянным. Рассматриваемая система сводится к двум степеням свободы, а её уравнения имеют вид уравнений Гамильтона с функцией Гамильтона  $F'$ , в которую  $p_\psi$  входит как параметр.

## 2.2 Неинтегрируемость рассматриваемой системы уравнений

В этом параграфе представлены некоторые результаты, касающиеся интегрируемости уравнений рассматриваемой гамильтоновой системы с функцией Гамильтона (44). Непосредственной проверкой можно установить справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 2.2.1.** Пусть эллипсоид вращения, ограничивающий твердое тело, близок к шару, а неподвижная точка отстоит от центра эллипсоида на малое расстояние, то есть в функции Гамильтона (44)

$$b = a(1 + \varepsilon), \quad l = \varepsilon c, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Тогда в первом приближении по  $\varepsilon$  функция Гамильтона задачи о движении в потоке частиц твердого тела с неподвижной точкой совпадает с функцией Гамильтона задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.  $\square$

Действительно, в первом приближении по  $\varepsilon$  мы получаем:

$$F = F_0 + \varepsilon F_1 + O(\varepsilon^2) \quad (46)$$

где кинетическая энергия  $F_0$  остается неизменной и определяется формулой (45), а функция  $F_1$  будет равна

$$F_1 = f\pi a^2 c (\gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_3). \quad (47)$$

Таким образом, в данном случае для обоснования неинтегрируемости рассматриваемой системы можно воспользоваться результатами В. В. Козлова [39, 41, 42, 44, 45], а также С. А. Довбыша [22, 23] и С. Л. Зиглина [26, 27, 28, 29, 30, 31]. На основе результатов этих работ можно сделать вывод, что справедливо следующее утверждение

**Теорема 2.2.1.** *Канонические уравнения движения несимметричного твердого тела с функцией Гамильтона (46) не имеют третьего аналитического и аналитически зависящего от параметра  $\varepsilon$  интеграла, незави-*

симого от классических, и находящегося в инволюции с интегралом площадей.  $\square$

Кинетическая энергия  $F_0$  является функцией Гамильтона задачи Эйлера – Пуансо. Считая параметр  $\varepsilon$  малым, можно рассматривать изучаемую задачу как возмущение интегрируемой задачи Эйлера – Пуансо.

При анализе канонических уравнений с функцией Гамильтона (46) воспользуемся каноническими переменными Депри:  $l, g, h, L, G, H$  [6, 21, 40, 44, 63]. Переменные  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  выражаются через переменные Депри следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1\omega_1 &= \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, & A_2\omega_2 &= \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, & A_3\omega_3 &= L, \\ \gamma_1 &= \frac{H}{G} \sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}} \sin l + \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \left( \frac{L}{G} \sin l \cos g + \cos l \sin g \right), \\ \gamma_2 &= \frac{H}{G} \sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}} \cos l + \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \left( \frac{L}{G} \cos l \cos g - \sin l \sin g \right), \\ \gamma_3 &= \frac{LH}{GG} - \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}} \cos g. \end{aligned}$$

Пусть сначала  $\varepsilon = 0$ . В переменных Депри функция  $F_0$  записывается следующим образом:

$$F_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin^2 l}{A_1} + \frac{\cos^2 l}{A_2} \right) (G^2 - L^2) + \frac{L^2}{2A_3}.$$

В дальнейшем величины, обратные моментам инерции, будем обозначать  $c_1, c_2, c_3$ , то есть

$$c_1 = \frac{1}{A_1}, \quad c_2 = \frac{1}{A_2}, \quad c_3 = \frac{1}{A_3}.$$

Тогда функция  $F_0$  перепишется в виде:

$$F_0 = \frac{1}{2} (c_1 \sin^2 l + c_2 \cos^2 l) (G^2 - L^2) + \frac{c_3}{2} L^2. \quad (48)$$

В дальнейшем будем рассматривать несимметричное тело и без ограничения общности считать, что

$$c_1 < c_2 < c_3.$$

При каждом значении интеграла энергии  $F_0$  уравнения задачи Эйлера – Пуансо имеют два изолированных периодических решения гиперболического типа – перманентные вращения тела вокруг средней оси инерции в противоположных направлениях. В переменных Депри эти решения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\Gamma_1 : \quad l = 0, \quad g = G_0 c_2 t, \quad L = 0, \quad G = G_0; \\ \Gamma_2 : \quad l = \pi, \quad g = G_0 c_2 t, \quad L = 0, \quad G = G_0.\end{aligned}\tag{49}$$

Действительно, уравнения движения с функцией Гамильтона  $F_0$ , определяемой формулой (48), имеют вид:

$$\dot{l} = \frac{\partial F_0}{\partial L}, \quad \dot{L} = -\frac{\partial F_0}{\partial l}, \quad \dot{g} = \frac{\partial F_0}{\partial G}, \quad \dot{G} = -\frac{\partial F_0}{\partial g},$$

то есть в явном виде:

$$\begin{aligned}\dot{l} &= (c_3 - c_1 \sin^2 l - c_2 \cos^2 l) L, \quad \dot{g} = (c_1 \sin^2 l + c_2 \cos^2 l) G, \\ \dot{L} &= (c_2 - c_1) (G^2 - L^2) \sin l \cos l, \quad \dot{G} = 0.\end{aligned}$$

Легко видеть, что данные уравнения обладают частными решениями  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  вида (49). Постоянная интеграла энергии, вычисленная на этих решениях, будет равна

$$F_0 = \frac{c_2 G_0^2}{2}.$$

Через траектории решений (49) проходят две двумерные инвариантные асимптотические поверхности с уравнениями

$$L = \pm \frac{G_0 \sqrt{c_2 - c_1} \sin l}{\sqrt{c_3 - c_1 \sin^2 l - c_2 \cos^2 l}}, \quad G = G_0.\tag{50}$$

Действительно, если приравнять функцию  $F_0$  её значению, вычисленному на решениях (49), то получим:

$$\frac{1}{2} (c_1 \sin^2 l + c_2 \cos^2 l) (G_0^2 - L^2) + \frac{c_3}{2} L^2 = \frac{c_2 G_0^2}{2},$$

то есть

$$(c_1 \sin^2 l + c_2 \cos^2 l) G_0^2 + (c_3 - c_1 \sin^2 l - c_2 \cos^2 l) L^2 = c_2 G_0^2.$$

Таким образом, получаем

$$(c_3 - c_1 \sin^2 l - c_2 \cos^2 l) L^2 = (c_2 - c_1) G_0^2 \sin^2 l,$$

откуда непосредственно следует (50).

Асимптотические поверхности (50) называются сепаратрисами. Они сплошь заполнены траекториями, при  $t \rightarrow \pm\infty$  неограниченно приближающимся к траекториям  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , определяемым соотношениями (49).

Если периодические решения гиперболического типа невозмущенной задачи невырождены, то они не исчезнут при добавлении возмущения [60], и через их траектории снова пройдут пары сепаратрис. Однако возмущенные сепаратрисы не обязательно совпадут. Это явление, обнаруженное впервые А. Пуанкаре [61], называется расщеплением сепаратрис. Оно коренным образом различает поведение траекторий невозмущенной и полной системы. Из существования расщепленных сепаратрис следует, например, расходимость рядов многочисленных вариантов теории возмущений.

Невырожденность периодических решений (49) задачи Эйлера – Пуансо впервые была установлена в работе В. В. Козлова [42]. Таким образом, можно рассмотреть задачу о расщеплении сепаратрис (50) при малых значениях параметра  $\varepsilon$ .

### 2.3 Расщепление сепаратрис возмущенной задачи

Рассмотрим поведение асимптотических поверхностей (50) при малых  $\varepsilon$  в случае, когда центр эллипсоида лежит на средней оси инерции, построенной в неподвижной точке. В этом случае в формуле (47) для функции  $F_1$  нам следует положить

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 0.$$

В результате функция  $F_1$ , определяемая формулой (47), примет вид:

$$F_1 = f\pi a^2 c\gamma_2.$$

В дальнейшем введем малый параметр  $\mu$ , связанный с параметром  $\varepsilon$  формулой

$$\mu = \varepsilon f\pi a^2 c.$$

Тогда функция Гамильтона  $F$ , определяемая формулой (46), запишется в виде

$$F = \frac{1}{2} (c_1 \sin^2 l + c_2 \cos^2 l) (G^2 - L^2) + \frac{c_3}{2} L^2 + \\ + \mu \left( \frac{H}{G} \sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}} \cos l + \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \left( \frac{L}{G} \cos l \cos g - \sin l \sin g \right) \right).$$

Возмущающую функцию, которая в данном выражении умножается на малый параметр  $\mu$ , будем в дальнейшем обозначать  $F_{11}$ . Тогда справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.3.1.** *Если центр эллипсоида вращения, ограничивающего тело с неподвижной точкой, находящееся в потоке частиц, лежит на средней оси инерции, то асимптотические поверхности (50) расщепляются при малых значениях параметра  $\mu$ .*

**Доказательство.** Для определенности рассмотрим случай, когда в выражении (50) для  $L$  стоит знак "плюс". В другом случае доказательство аналогично.

Уравнения асимптотической поверхности, проходящей через траекторию возмущенного периодического решения  $\Gamma_1$ , можно записать следующим образом:

$$L = \frac{\partial S}{\partial l}, \quad G = \frac{\partial S}{\partial g}, \quad S = S_0 + \mu S_1 + \dots,$$

где  $S = S(l, g)$  – функция от  $l$  и  $g$ , удовлетворяющая уравнению

$$F_0 \left( l, \frac{\partial S}{\partial l}, \frac{\partial S}{\partial g} \right) + \mu F_{11} \left( l, g, \frac{\partial S}{\partial l}, \frac{\partial S}{\partial g} \right) = \frac{c_2 G_0^2}{2}$$

(см. [60]). Когда  $\mu = 0$ , имеем:

$$S = S_0 = G_0 g + \int_0^l \frac{\sqrt{c_2 - c_1} G_0 \sin x}{\sqrt{c_3 - c_1 \sin^2 x - c_2 \cos^2 x}} dx.$$

Что же касается функции  $S_1$ , то она должна удовлетворять следующему уравнению

$$\begin{aligned} & (c_1 \sin^2 l + c_2 \cos^2 l) \left( G_0 \frac{\partial S_1}{\partial g} - L \frac{\partial S_1}{\partial l} \right) + c_3 L \frac{\partial S_1}{\partial l} + \\ & + \frac{H}{G_0} \sqrt{1 - \frac{L^2}{G_0^2}} \cos l + \sqrt{1 - \frac{H^2}{G_0^2}} \left( \frac{L}{G_0} \cos l \cos g - \sin l \sin g \right) = 0. \end{aligned} \quad (51)$$

В этом уравнении вместо обобщенного импульса  $L$  необходимо подставить его выражение из (50). Будем искать функцию  $S_1$  в виде:

$$S_1 = X(l) \sin g + Y(l) \cos g + Z(l).$$

Подставляя выражение для функции  $S_1$  в дифференциальное уравнение (51) и приравнявая нулю коэффициенты при  $\sin g$ , при  $\cos g$  и коэффициент, не зависящий от  $g$ , получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} & (c_3 - c_1 \sin^2 l - c_2 \cos^2 l) L \frac{dX}{dl} - G_0 (c_1 \sin^2 l + c_2 \cos^2 l) Y = \\ & = \sqrt{1 - \frac{H^2}{G_0^2}} \sin l, \\ & (c_3 - c_1 \sin^2 l - c_2 \cos^2 l) L \frac{dY}{dl} + G_0 (c_1 \sin^2 l + c_2 \cos^2 l) X = \\ & = -\frac{L}{G_0} \sqrt{1 - \frac{H^2}{G_0^2}} \cos l, \\ & (c_3 - c_1 \sin^2 l - c_2 \cos^2 l) L \frac{dZ}{dl} = -\frac{H}{G_0} \sqrt{1 - \frac{L^2}{G_0^2}} \cos l. \end{aligned} \quad (52)$$

Два первых уравнения системы (52) удобно записать в виде

$$\frac{dX}{dl} - f(l)Y = \varphi_1, \quad \frac{dY}{dl} + f(l)X = \varphi_2, \quad (53)$$

$$f(l) = \frac{c_1 \sin^2 l + c_2 \cos^2 l}{\sqrt{c_2 - c_1} \sin l \sqrt{c_3 - c_1 \sin^2 l - c_2 \cos^2 l}},$$

$$\varphi_1 = \sqrt{1 - \frac{H^2}{G_0^2}} \cdot \frac{\sin l}{L(c_3 - c_1 \sin^2 l - c_2 \cos^2 l)},$$

$$\varphi_2 = -\sqrt{1 - \frac{H^2}{G_0^2}} \cdot \frac{\cos l}{G_0(c_3 - c_1 \sin^2 l - c_2 \cos^2 l)}.$$

Введем комплекснозначные функции  $\psi = X + iY$  и  $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ . Тогда система двух уравнений (53) запишется в виде одного уравнения

$$\frac{d\psi}{dl} + if(l)\psi = \varphi(l).$$

Так как это дифференциальное уравнение линейно по  $\psi$ , то его общее решение имеет вид:

$$\psi = \exp(-i\theta(l)) \int_{\alpha}^l \exp(i\theta(x)) \varphi(x) dx, \quad \theta(x) = \int f(x) dx. \quad (54)$$

Здесь  $\alpha$  – произвольная постоянная. Интеграл, с помощью которого выражается функция  $\theta$ , можно вычислить в явном виде. Он равен

$$\begin{aligned} \theta(x) = & \arcsin \left( \sqrt{\frac{c_2 - c_1}{c_3 - c_1}} \cos x \right) + \\ & + \frac{c_2}{\sqrt{(c_2 - c_1)(c_3 - c_2)}} \ln \frac{\sqrt{c_3 - c_1} \sin x}{\sqrt{c_3 - c_1 \sin^2 x - c_2 \cos^2 x} + \sqrt{c_3 - c_2} \cos x}. \end{aligned}$$

Поскольку функция  $\psi(l)$  должна быть аналитична при  $l = 0$ , а функция  $\exp(-i\theta(l))$  имеет особенность в этой точке, то в формуле (54) постоянную  $\alpha$  следует положить равной нулю.

Аналогично можно записать уравнения для асимптотической поверхности, проходящей через траекторию возмущенного периодического решения  $\Gamma_2$ :

$$L = \frac{\partial S'}{\partial l}, \quad G = \frac{\partial S'}{\partial g}, \quad S = S'_0 + \mu S'_1 + \dots,$$

$$S'_0 = G_0 g + \int_{\pi}^l \frac{\sqrt{c_2 - c_1} G_0 \sin x}{\sqrt{c_3 - c_1 \sin^2 x - c_2 \cos^2 x}} dx,$$

$$S'_1 = X'(l) \sin g + Y'(l) \cos g + Z'(l),$$

$$\psi' = X' + iY' = \exp(-i\theta(l)) \int_{\pi}^l \exp(i\theta(x)) \varphi(x) dx.$$

Предположим, что эти сепаратрисы совпадают. Тогда очевидно  $\psi = \psi'$  и, следовательно, интеграл

$$J = \int_0^{\pi} \exp(i\theta(x)) \varphi(x) dx$$

должен быть равен нулю. Учитывая равенство

$$\exp\left(i \arcsin\left(\sqrt{\frac{c_2 - c_1}{c_3 - c_1}} \cos x\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c_3 - c_1}} \left(\sqrt{c_3 - c_1 \sin^2 x - c_2 \cos^2 x} + i\sqrt{c_2 - c_1} \cos x\right),$$

записываем этот интеграл в явном виде:

$$J = \frac{1}{G_0} \sqrt{1 - \frac{H^2}{G_0^2}} \sqrt{\frac{c_3 - c_1}{c_2 - c_1}} \times$$

$$\times \int_0^{\pi} \left( \frac{\sqrt{c_3 - c_1} \sin x}{\sqrt{c_3 - c_1 \sin^2 x - c_2 \cos^2 x} + \sqrt{c_3 - c_2} \cos x} \right)^{i\beta} \frac{dx}{c_3 - c_1 \sin^2 x - c_2 \cos^2 x},$$

(55)

где через  $\beta$  обозначено выражение

$$\beta = \frac{c_2}{\sqrt{(c_2 - c_1)(c_3 - c_1)}}.$$

Выполним в интеграле (55) замену переменной по формуле

$$x = \operatorname{arcctg} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c_3 - c_1}{c_3 - c_2}} \cdot \frac{1 - t^2}{t} \right), \quad 0 < t < \infty.$$

Тогда

$$J = \frac{2\sqrt{1 - \frac{H^2}{G_0^2}}}{G_0\sqrt{(c_3 - c_2)(c_2 - c_1)}} \int_0^\infty \frac{t^{i\beta}}{1 + t^2} dt.$$

Интеграл, стоящий в этой формуле, легко вычисляется с помощью пакета символьных вычислений MAPLE 7. Он равен

$$\frac{\pi}{2 \operatorname{ch} \left( \frac{\pi\beta}{2} \right)}.$$

Следовательно,  $J \neq 0$ . Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы.  $\square$

Отметим, что хотя при малых  $\mu \neq 0$  возмущенные асимптотические поверхности не совпадают, тем не менее, в общем случае они всегда пересекаются по бесконечному множеству точек. Через эти точки проходят траектории двойко – асимптотических решений, неограниченно приближающихся при  $t \rightarrow \pm\infty$  к траекториям возмущенных периодических решений  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

В следующей главе диссертации сформулированы необходимые условия существования дополнительного интеграла в задаче о движении в потоке частиц твердого динамически симметричного тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения.

# Глава 3. Необходимые условия существования дополнительного интеграла в задаче о движении в потоке частиц твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения

## 3.1 Введение. Теорема В.В. Козлова об отсутствии аналитических интегралов вблизи положений равновесия гамильтоновых систем

В 1976 году В. В. Козлов в работе [43] (см. также [46, 47]), доказал теорему, дающую достаточные условия несуществования у гамильтоновой системы аналитического по каноническим переменным первого интеграла, независимого от функции Гамильтона  $H$ . Ниже приводится постановка задачи в обозначениях работ [43, 46, 47] и формулировка соответствующей теоремы.

Рассмотрим систему канонических уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1 \dots n, \quad n \geq 2 \quad (56)$$

с функцией Гамильтона  $H(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \alpha)$ , аналитически зависящей от переменных  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  и параметра  $\alpha \in (a, b)$ . Предположим, что при всех  $\alpha$  точка  $x_i = 0, y_i = 0, (i = 1, \dots, n)$  – положение равновесия системы уравнений (56). Функцию  $H$  в окрестности положения равновесия можно представить в следующем виде:

$$H = H^{(2)} + H^{(3)} + \dots,$$

где  $H^{(s)}$  – однородная форма степени  $s$  по переменным  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Коэффициенты этого разложения аналитичны по параметру  $\alpha$ .

---

При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [100, 102, 104]

Здесь и всюду ниже предполагается, что при всех  $\alpha \in (a, b)$  собственные числа линеаризованных канонических уравнений чисто мнимы и различны. В этом случае существует аналитичное по  $\alpha$  каноническое преобразование  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$  такое, что в новых переменных:

$$H^{(2)} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{2} (\xi_i^2 + \eta_i^2).$$

В координатах  $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$  снова

$$H = H^{(2)} + H^{(m)} + H^{(m+1)} + \dots; \quad m \geq 3, \quad H^{(m)} \neq 0.$$

Положим  $\xi_i = \sqrt{2I_i} \sin \varphi_i$ ,  $\eta_i = \sqrt{2I_i} \cos \varphi_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ). Тогда

$$H^{(m)} = \sum_{0 \leq |m_1| + \dots + |m_n| \leq m} B_{m_1 \dots m_n}(I_1, \dots, I_n, \alpha) \exp(i(m_1 \varphi_1 + \dots + m_n \varphi_n)).$$

Коэффициенты  $B_{m_1 \dots m_n}$  аналитичны в области  $D_\varepsilon \times (a, b)$ ;

$$D_\varepsilon = \{I_1^2 + \dots + I_n^2 \leq \varepsilon; \quad I_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, n\},$$

где  $\varepsilon$  – малое положительное число.

**Теорема 3.1.1.** [43, 46, 47] *Предположим, что система уравнений (56) удовлетворяет следующим условиям:*

1. частоты линеаризованных уравнений  $\lambda_i$  не связаны тождественным по  $\alpha$  соотношением

$$\sum_{i=1}^n m_i \lambda_i = 0$$

с целыми  $m_i$  такими, что

$$0 < \sum_{i=1}^n |m_i|;$$

2. при некотором  $\alpha = \bar{\alpha}$  существуют  $n - 1$  линейно-независимых целочисленных векторов  $(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_n)$  таких, что

$$0 < \sum_{i=1}^n |\bar{m}_i| \leq m, \quad \sum_{i=1}^n \bar{m}_i \lambda_i = 0, \quad B_{\bar{m}_1 \dots \bar{m}_n} \neq 0.$$

Тогда канонические уравнения (56) не имеют независимого от  $H$  интеграла, аналитического по каноническим переменным и параметру  $\alpha \in (a, b)$ .  $\square$

**Замечание 3.1.1.** При выполнении условий Теоремы 3.1.1 (теоремы Козлова) могут существовать независимые интегралы с зависимыми (при некоторых значениях  $\alpha$ ) квадратичными частями их разложений Маклорена. Например, канонические уравнения с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2} (x_1^2 + y_1^2) + \frac{\alpha}{2} (x_2^2 + y_2^2) + 2x_1 y_1 y_2 - x_2 y_1^2 + x_1^2 x_2$$

допускают первый интеграл

$$F = x_1^2 + y_1^2 + 2(x_2^2 + y_2^2),$$

зависимый при  $\alpha = 2$  с квадратичной формой  $H^{(2)}$ , однако все условия теоремы выполнены.  $\square$

Преимущество теоремы В.В. Козлова по сравнению с другими методами доказательства неинтегрируемости гамильтоновых систем (например, неинтегрируемость задачи о движении плоского двойного маятника доказывалась различными методами в [56, 77, 78, 83, 84, 85, 86]) состоит в отсутствии предварительных ограничительных предположений, касающихся конструктивных параметров системы. Это преимущество в существенной мере компенсирует то обстоятельство, что дополнительный интеграл должен принадлежать классу аналитических функций, квадратичные части которых функционально независимы с квадратичной частью функции Гамильтона. Отметим также, что применение теоремы Козлова в конкретных задачах наталкивается на довольно громоздкие вычисления, связанные с нормализацией

функции Гамильтона.

Теорема Козлова успешно применялась при доказательстве отсутствия дополнительного аналитического интеграла в плоской круговой ограниченной задаче трех тел [43, 46, 47]; при исследовании интегрируемости задачи о вращении вокруг неподвижной точки динамически симметричного твердого тела, центр тяжести которого лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции [20, 43, 47]; при получении необходимых условий существования дополнительного первого интеграла в задаче о движении тяжелого динамически и геометрически симметричного эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости [32]; при доказательстве отсутствия дополнительного интеграла в задаче о движении плоского двойного маятника [16, 18]; при исследовании уравнений Кирхгофа движения твердого тела в жидкости [48, 59]. В данной главе теорема Козлова применяется для вывода необходимых условий существования дополнительного интеграла в задаче о движении в потоке частиц твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения.

### 3.2 Постановка задачи. Функция Гамильтона

В предыдущей главе работы нами было показано, что задача о движении в потоке частиц твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения, является гамильтоновой системой с функцией Гамильтона (44). Предположим, что центр эллипсоида вращения лежит на первой главной оси инерции, построенной в неподвижной точке, на расстоянии  $l$  от неподвижной точки. Иными словами в функции Гамильтона  $F$  положим

$$\alpha_1 = l, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \text{то есть} \quad (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha}) = \gamma_1.$$

Предположим также, что тело является динамически симметричным, причем ось динамической симметрии тела не совпадает с осью симметрии эллип-

соида, ограничивающего тело. Будем считать, что

$$A_1 = A_2 = A, \quad A_3 = C.$$

Кроме того, предположим, что эллипсоид вращения, ограничивающий твердое тело, является вытянутым  $b > a$ . Для сжатого эллипсоида  $a > b$  получаются аналогичные результаты. Тогда функция Гамильтона задачи в стандартных обозначениях имеет вид:

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \left( \frac{p_\theta^2}{A} + \frac{p_\varphi^2}{C} + \frac{(p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2}{A \sin^2 \theta} \right) - \\ & - \frac{f\pi a^2 b l}{2} \sin \theta \sin \varphi \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2}} - \\ & - \frac{f\pi b l}{2\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} \sin \theta \sin \varphi}{\sqrt{\frac{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2}}} \right). \end{aligned} \quad (57)$$

Очевидно, что функция Гамильтона  $H$  не зависит от координаты  $\psi$ , то есть канонический импульс  $p_\psi$  является постоянным. Уравнения движения тела имеют гамильтонов вид с функцией Гамильтона (57), в которую  $p_\psi$  входит как параметр. Будем считать постоянной  $p_\psi$  именно тем параметром, о котором шла речь в формулировке теоремы Козлова [20, 43, 47]. Получим необходимые условия существования у системы уравнений Гамильтона с функцией Гамильтона  $H$  независимого с  $H$  дополнительного интеграла, аналитического по  $p_\psi$ .

### 3.3 Применение теоремы В.В. Козлова

При любом значении  $p_\psi$  точка

$$(p_\theta, p_\varphi, \theta, \varphi) = \left( 0, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) -$$

положение равновесия приведенной системы Гамильтона. Положим

$$p_\theta = y_1, \quad p_\varphi = y_2, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + x_1, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} + x_2.$$

Выберем размерные параметры задачи так, что

$$f\pi l a^2 = 1, \quad A = 1, \quad p_\psi = \sqrt{x}, \quad \frac{1}{C} = y, \quad \frac{b^2}{a^2} = z.$$

Тогда  $(x, y, z)$  изменяются в области  $\mathbb{R}_+^3 = \{x, y, z : x > 0, y > 0, z > 0\}$ . Первые три члена разложения функции Гамильтона (57) в ряд в окрестности положения равновесия  $y_1 = 0, y_2 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0$  имеют вид:

$$H = H^{(2)} + H^{(3)} + H^{(4)} + \dots,$$

$$H^{(2)}(y_1, y_2, x_1, x_2) = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{y}{2}y_2^2 + \sqrt{x}x_1y_2 + \frac{(1+x)}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2,$$

$$H^{(3)}(y_1, y_2, x_1, x_2) = 0,$$

$$H^{(4)}(y_1, y_2, x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2y_2^2 + \frac{5}{6}\sqrt{x}x_1^3y_2 + \left(\frac{z}{4} - \frac{1}{2}\right)x_1^2x_2^2 +$$

$$+ \left(\frac{x}{3} + \frac{z}{8} - \frac{1}{6}\right)x_1^4 + \left(\frac{z}{8} - \frac{1}{6}\right)x_2^4.$$

Заметим, что в случае  $z = 1$ , то есть когда тело, обтекаемое потоком частиц, ограничено поверхностью сферы, выражения  $H^{(2)}(y_1, y_2, x_1, x_2)$  и  $H^{(4)}(y_1, y_2, x_1, x_2)$  в точности совпадают с соответствующими выражениями, полученными в работах [20, 43, 47] при разложении в ряд функции Гамильтона задачи о движении тяжелого динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой, центр тяжести которого находится в экваториальной плоскости эллипсоида инерции.

Уравнения движения системы с гамильтонианом  $H^{(2)}$  имеют вид линеаризованных уравнений движения исходной системы

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{x} & -(x+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & \sqrt{x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Характеристическое уравнение для определения собственных частот линейной системы (58) записывается следующим образом:

$$\lambda^4 + (1 + x + y)\lambda^2 + y(1 + x) - x = 0. \quad (59)$$

Его корни являются чисто мнимыми, если выполняется условие

$$y > \frac{x}{1+x}.$$

Обозначим через  $E$  подобласть  $\mathbb{R}_+^2$ , где выполняется это неравенство. Для применения теоремы Козлова найдем условие, при котором отношение частот равно трем.

Характеристическое уравнение (59) является биквадратным, следовательно, если отношение частот равно трем, то отношение квадратов частот должно равняться девяти. Вычисляя квадраты частот и приравнявая их отношение девяти, получаем следующее условие на параметры  $x$  и  $y$ :

$$4(1 + x + y) = 5\sqrt{1 + 6x - 2y + x^2 - 2xy + y^2}, \quad (60)$$

которое может быть представлено в виде:

$$9x^2 - 82xy + 9y^2 + 118x - 82y + 9 = 0. \quad (61)$$

Уравнение (61) – это уравнение гиперболы; ее ветви при  $x > 0$ ,  $y > 0$  лежат целиком в  $E$ .

Из неравенства треугольника для главных центральных моментов инерции следует, что

$$y \geq \frac{1}{2}.$$

Для фиксированного  $y_0 \geq 1/2$  существует значение  $x_0 > 0$  такое, что точка  $(x_0, y_0)$  удовлетворяет уравнению (61). Пусть  $(a, b)$  – малый интервал изменения параметра  $x$ , включающий точку  $x_0$ . При  $x \in (a, b)$ ,  $y = y_0$  корни характеристического уравнения являются чисто мнимыми и различными, причем при  $x = x_0$  выполнено условие  $\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$ . Остается выяснить, при каких условиях обращается в ноль вековой коэффициент  $B_{1,-3}$ . Условие обращения в ноль этого коэффициента совместно с условием (61) дает необходимые условия существования дополнительного интеграла, независимого с интегралом энергии  $H$ , в рассматриваемой задаче.

Для вычисления коэффициента  $B_{1,-3}$  сделаем каноническую замену переменных  $(x_1, y_1, x_2, y_2) \rightarrow (q_1, p_1, q_2, p_2)$  такую, что в новых переменных квадратичная часть  $H^{(2)}$  функции Гамильтона представляется в виде

$$H^{(2)} = \frac{A_1}{2}p_1^2 + \frac{B_1}{2}q_1^2 + \frac{A_2}{2}p_2^2 + \frac{B_2}{2}q_2^2,$$

где  $A_i$  и  $B_i$ , ( $i = 1, 2$ ) – коэффициенты, подлежащие определению.

Искомая замена линейна по переменным  $q_1, p_1, q_2, p_2$ . Представим ее в наиболее общем виде, а именно:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 p_1 + \beta_1 p_2 + \xi_1 q_1 + \eta_1 q_2, \\ y_2 &= \alpha_2 p_1 + \beta_2 p_2 + \xi_2 q_1 + \eta_2 q_2, \\ x_1 &= \alpha_3 p_1 + \beta_3 p_2 + \xi_3 q_1 + \eta_3 q_2, \\ x_2 &= \alpha_4 p_1 + \beta_4 p_2 + \xi_4 q_1 + \eta_4 q_2. \end{aligned} \tag{62}$$

Замена (62) должна удовлетворять двум свойствам:

- 1) она должна быть унивалентной канонической заменой и
- 2) при подстановке переменных  $y_1, x_1, y_2, x_2$ , выраженных через  $p_1, q_1, p_2, q_2$  по формулам (62) в функцию Гамильтона  $H^{(2)}$  коэффициенты при всех смешанных произведениях должны обращаться в ноль.

В силу критерия каноничности [55, 68], записанного в форме

$$\sum_{i=1}^n P_i dQ_i - \sum_{i=1}^n p_i dq_i = -dF,$$

замена переменных (62) будет унивалентной и канонической, если выполняются условия:

$$\begin{aligned} \beta_1 \alpha_3 + \beta_2 \alpha_4 - \beta_3 \alpha_1 - \beta_4 \alpha_2 &= 0, \\ \xi_1 \alpha_3 + \xi_2 \alpha_4 - \xi_3 \alpha_1 - \xi_4 \alpha_2 + 1 &= 0, \\ \eta_1 \alpha_3 + \eta_2 \alpha_4 - \eta_3 \alpha_1 - \eta_4 \alpha_2 &= 0, \\ \xi_1 \beta_3 + \xi_2 \beta_4 - \xi_3 \beta_1 - \xi_4 \beta_2 &= 0, \\ \eta_1 \beta_3 + \eta_2 \beta_4 - \eta_3 \beta_1 - \eta_4 \beta_2 + 1 &= 0, \\ \eta_1 \xi_3 + \eta_2 \xi_4 - \eta_3 \xi_1 - \eta_4 \xi_2 &= 0. \end{aligned} \tag{63}$$

Кроме этих шести соотношений, нам следует записать условия обращения в нуль коэффициентов при смешанных членах в функции Гамильтона  $H^{(2)}$ , записанной в переменных  $q_1, p_1, q_2, p_2$  (таких смешанных членов также будет шесть:  $p_1 p_2, p_1 q_1, p_1 q_2, p_2 q_1, p_2 q_2, q_1 q_2$ ). Эти условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \xi_1 \eta_1 + \xi_3 \eta_3 + \xi_4 \eta_4 + \sqrt{x} (\xi_2 \eta_3 + \xi_3 \eta_2) + x \xi_3 \eta_3 + y \xi_2 \eta_2 &= 0, \\ \alpha_1 \xi_1 + \alpha_3 \xi_3 + \alpha_4 \xi_4 + \sqrt{x} (\alpha_2 \xi_3 + \alpha_3 \xi_2) + x \alpha_3 \xi_3 + y \alpha_2 \xi_2 &= 0, \\ \beta_1 \xi_1 + \beta_3 \xi_3 + \beta_4 \xi_4 + \sqrt{x} (\beta_2 \xi_3 + \beta_3 \xi_2) + x \beta_3 \xi_3 + y \beta_2 \xi_2 &= 0, \\ \alpha_1 \eta_1 + \alpha_3 \eta_3 + \alpha_4 \eta_4 + \sqrt{x} (\alpha_2 \eta_3 + \alpha_3 \eta_2) + x \alpha_3 \eta_3 + y \alpha_2 \eta_2 &= 0, \\ \alpha_1 \beta_1 + \alpha_3 \beta_3 + \alpha_4 \beta_4 + \sqrt{x} (\alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) + x \alpha_3 \beta_3 + y \alpha_2 \beta_2 &= 0, \\ \beta_1 \eta_1 + \beta_3 \eta_3 + \beta_4 \eta_4 + \sqrt{x} (\beta_2 \eta_3 + \beta_3 \eta_2) + x \beta_3 \eta_3 + y \beta_2 \eta_2 &= 0. \end{aligned} \tag{64}$$

Таким образом, шестнадцать величин  $\alpha_i, \beta_i, \xi_i$  и  $\eta_i, i = 1, \dots, 4$  связаны в общей сложности двенадцатью нелинейными соотношениями (63), (64). Для того, чтобы число уравнений равнялось числу неизвестных, предположим с самого начала, что

$$\beta_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \eta_3 = 0, \quad \xi_4 = 0.$$

Решение полученной системы 12-ти уравнений (63)-(64) относительно 12-ти неизвестных находилось при помощи программы символьных вычислений

MAPLE 7. Оказалось, что данное решение имеет вид:

$$\begin{aligned}\xi_1 = 0, \quad \eta_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \beta_4 = 0, \quad \xi_2 = \alpha\xi_3, \\ \alpha_1 = \frac{\sqrt{x}}{\xi_3(2\sqrt{x} + (y-1-x)\alpha)}, \quad \eta_1 = \frac{\alpha\sqrt{x}}{\beta_2(2\sqrt{x} + (y-1-x)\alpha)}, \\ \beta_3 = -\frac{\beta_2(\sqrt{x} + (y-1-x)\alpha)}{\alpha\sqrt{x}}, \quad \alpha_4 = -\frac{\sqrt{x} + (y-1-x)\alpha}{\xi_3\alpha(2\sqrt{x} + (y-1-x)\alpha)}, \\ \eta_4 = \frac{\sqrt{x}}{\beta_2(2\sqrt{x} + (y-1-x)\alpha)},\end{aligned}$$

где  $\beta_2$  и  $\xi_3$  – свободные параметры, а  $\alpha$  – положительный корень квадратного уравнения

$$\sqrt{x}Z^2 + (x+1-y)Z - \sqrt{x} = 0.$$

Пусть свободные параметры принимают следующие значения:

$$\beta_2 = \frac{\alpha\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + (y-1-x)\alpha)}, \quad \xi_3 = 1.$$

Тогда искомая замена (62) принимает вид:

$$\begin{aligned}y_1 = \frac{1}{1+\alpha^2}p_1 + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}q_2, \quad y_2 = \frac{1}{\alpha}p_2 + \alpha q_1, \\ x_1 = q_1 - p_2, \quad x_2 = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}(q_2 - p_1).\end{aligned}\tag{65}$$

В переменных  $q_1, p_1, q_2, p_2$  форма  $H^{(2)}$  запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}H^{(2)} = \frac{A_1}{2}p_1^2 + \frac{B_1}{2}q_1^2 + \frac{A_2}{2}p_2^2 + \frac{B_2}{2}q_2^2, \\ A_1 = \frac{1}{1+\alpha^2}, \quad B_2 = \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}, \\ A_2 = \frac{y - 2\alpha\sqrt{x} + (1+x)\alpha^2}{\alpha^2} = \frac{(1+\alpha^2)(y - \sqrt{x}\alpha)}{\alpha^2}, \\ B_1 = \alpha^2 y + 2\alpha\sqrt{x} + 1 + x = (1+\alpha^2) \left( y + \frac{\sqrt{x}}{\alpha} \right).\end{aligned}$$

Перейдем теперь к переменным действие-угол  $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi})$  по формулам:

$$q_1 = i\sqrt{\frac{I_1}{2}}\sqrt{\frac{A_1}{B_1}}(e^{-i\varphi_1} - e^{i\varphi_1}), \quad p_1 = \sqrt{\frac{I_1}{2}}\sqrt{\frac{B_1}{A_1}}(e^{i\varphi_1} + e^{-i\varphi_1}),$$

$$q_2 = i\sqrt{\frac{I_2}{2}}\sqrt{\frac{A_2}{B_2}}(e^{-i\varphi_2} - e^{i\varphi_2}), \quad p_2 = \sqrt{\frac{I_2}{2}}\sqrt{\frac{B_2}{A_2}}(e^{i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2}).$$

Здесь  $i$  – мнимая единица. В новых переменных форма  $H^{(4)}$  принимает вид:

$$H^{(4)} = \sum_{0 \leq |m_1| + |m_2| \leq 4} B_{m_1 m_2} e^{i(m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2)}.$$

Необходимым условием существования дополнительного интеграла является обращение в нуль коэффициента  $B_{1,-3}$  в разложении функции  $H^{(4)}$ , выписанной в новых переменных. Вычислим коэффициент  $B_{1,-3}$  в явном виде. Заметим, что экспонента  $\exp(i(\varphi_1 - 3\varphi_2))$  может встретиться только в следующих выражениях:

$$p_1 p_2^3, p_1 p_2^2 q_2, p_1 p_2 q_2^2, p_1 q_2^3, q_1 p_2^3, q_1 p_2^2 q_2, q_1 p_2 q_2^2, q_1 q_2^3.$$

Это замечание существенно упрощает процесс вычисления коэффициента  $B_{1,-3}$ . Прежде, чем переходить к переменным действие-угол, выделим в форме  $H^{(4)}$  только те слагаемые, которые могут дать экспоненту  $\exp(i(\varphi_1 - 3\varphi_2))$ . Получим:

$$H^{(4)} = \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha^2)^2} \left(1 - \frac{z}{2}\right) (p_1 p_2^2 q_2 + q_1 p_2 q_2^2) + \frac{\alpha^4}{(1 + \alpha^2)^4} \left(\frac{2}{3} - \frac{z}{2}\right) p_1 q_2^3 +$$

$$+ \left(\frac{5}{3} - \frac{z}{2} - \frac{4}{3}x - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{5\sqrt{x}}{2\alpha} - \frac{5}{6}\sqrt{x}\alpha\right) q_1 p_2^3 + \dots$$

Для упрощения дальнейших преобразований введем обозначения

$$K_1 = \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha^2)^2} \left(1 - \frac{z}{2}\right), \quad K_2 = \frac{\alpha^4}{(1 + \alpha^2)^4} \left(\frac{2}{3} - \frac{z}{2}\right),$$

$$K_3 = \frac{5}{3} - \frac{z}{2} - \frac{4}{3}x - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{5\sqrt{x}}{2\alpha} - \frac{5}{6}\sqrt{x}\alpha.$$

Тогда

$$H^{(4)} = K_1 (p_1 p_2^2 q_2 + q_1 p_2 q_2^2) + K_2 p_1 q_2^3 + K_3 q_1 p_2^3 + \dots$$

Условие равенства нулю коэффициента  $B_{1,-3}$  может быть записано в следующем общем виде:

$$K_1 - K_3 \frac{B_2}{A_2} = \sqrt{\frac{B_1}{A_1}} \sqrt{\frac{B_2}{A_2}} \left( K_2 \frac{A_2}{B_2} - K_1 \right).$$

Соответствующее условие может быть переписано так:

$$\begin{aligned} & 5\sqrt{x}\alpha^3 + (3z + 8x - 10)\alpha^2 + 3(z - 7)\sqrt{x}\alpha + 6y - 3zy + 6 = \\ & = ((4 - 3z)(y - \alpha\sqrt{x}) + 3(z - 2)\alpha^2) \sqrt{xy + y - x}. \end{aligned} \quad (66)$$

Дальнейшие преобразования выражения (66) опираются на формулу (60), а также на соотношения

$$\sqrt{xy + y - x} = \frac{3}{10}(1 + x + y), \quad \alpha = \frac{9y - x - 1}{10\sqrt{x}},$$

которые могут быть установлены непосредственной проверкой с учетом соотношений (60) и (61). Окончательно, условие равенства нулю коэффициента

$B_{1,-3}$ , выраженное через параметры  $x$ ,  $y$  и  $z$ , можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
& 27x^3z + 111x^2yz - 159xy^2z - 243y^3z - 9x^3 - 617x^2y - 39x^2z + \\
& + 2093xy^2 - 118xyz + 1701y^3 + 621y^2z + 653x^2 - 4374xy - 59xz - \\
& - 2727y^2 - 129yz + 2633x + 543y + 7z - 29 = 0.
\end{aligned} \tag{67}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.3.1.** *Необходимые условия существования дополнительного интеграла, независимого с интегралом энергии  $H$ , аналитического по каноническим переменным и параметру  $x$ , в задаче о движении в потоке частиц динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида, центр которого лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, имеют вид соотношений (61) и (67).  $\square$*

**Замечание 3.3.1.** При  $z = 1$ , то есть в случае, когда тело, обтекаемое потоком частиц, ограничено поверхностью сферы, условия (61) и (67) принимают вид

$$9x^2 - 82xy + 9y^2 + 118x - 82y + 9 = 0, \tag{68}$$

$$\begin{aligned}
& 18x^3 - 506x^2y + 1934xy^2 + 1458y^3 + 614x^2 - 4492xy - 2106y^2 + \\
& + 2574x + 414y - 22 = 0,
\end{aligned} \tag{69}$$

и совпадают с необходимыми условиями существования дополнительного интеграла в задаче о движении тяжелого динамически симметричного тела с неподвижной точкой, центр масс которого лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, полученными в работах [20, 43, 46, 47]. Алгебраические кривые (68) и (69) пересекаются в двух точках  $(x, y)$ :

$$\left(\frac{4}{3}, 1\right) \quad \text{и} \quad (7, 2),$$

которым отвечают интегрируемые случаи Лагранжа ( $A = C$ ) и Ковалевской ( $A = 2C$ ).  $\square$

Положим в соотношениях (61), (67)  $y = 2$ , то есть рассмотрим твердое тело с распределением масс, соответствующем случаю Ковалевской. Тогда соотношение (61) принимает вид:

$$(9x + 17)(x - 7) = 0,$$

и может выполняться только при  $x = 7$ . Подстановка значений  $x = 7$  и  $y = 2$  в соотношение (67) дает

$$12000(z - 1) = 0.$$

Таким образом, для твердого тела с распределением масс, соответствующем случаю Ковалевской, дополнительный первый интеграл, независимый с интегралом энергии, может существовать только в случае, когда тело ограничено поверхностью сферы. В случае, когда твердое тело, находящееся в потоке частиц, ограничено поверхностью эллипсоида, дополнительного первого интеграла не существует.

### 3.4 Анализ полученных условий

Анализ системы уравнений (61), (67), выполненный при помощи программы символьных вычислений MAPLE 7, показывает, что у этой системы при любом значении параметра  $z$  существуют решения

$$x = 0, y = \frac{1}{9}; \quad x = -\frac{16}{3}, y = 1; \quad x = \frac{4}{3}, y = 1. \quad (70)$$

Первые два из решений (70) не принадлежат области

$$x > 0, \quad y \geq \frac{1}{2}$$

и, следовательно, не имеют физического смысла. Что же касается третьего решения, то ему соответствует интегрируемый случай Лагранжа ( $A = C$ ). Таким образом, в данной задаче при любой форме эллипсоида (и когда он

сжат, и когда он вытянут) существует интегрируемый случай, соответствующий случаю Лагранжа.

Кроме трех решений (70) система уравнений (61), (67) допускает зависящее от  $z$  решение, в котором  $y$  является корнем квадратного уравнения с коэффициентами, зависящими от  $z$ , а  $x$  выражается через  $y$  и  $z$ :

$$(3z - 4)(7z - 52)y^2 - (76z^2 - 632z + 736)y + 20z^2 - 432z + 592 = 0,$$

$$x = \frac{(4048z^2 - 471z^3 - 3200 - 2672z)y + 3252z^2 - 54z^3 - 17424z + 18816}{2(3z - 4)(7z - 52)((23z - 32)y - 38z + 56)}.$$

Среди значений параметров  $(x, y, z)$ , удовлетворяющих данным соотношениям, можно найти значения, имеющие физический смысл. Таковыми, например, являются значения

$$x = \frac{57}{23}, \quad y = \frac{30}{23}, \quad z = \frac{1}{5}.$$

Таким образом, при некоторых значениях параметров выполняются необходимые условия того, что уравнения движения динамически симметричного тела с неподвижной точкой, находящегося в потоке частиц и ограниченного поверхностью эллипсоида вращения, обладают дополнительным первым интегралом, независимым с интегралом энергии и площадей.

## Глава 4. Стационарные движения твердого тела в потоке частиц и их устойчивость

### 4.1 Перманентные вращения динамически несимметричного тела

Уравнения (10), описывающие движение твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц, допускают частные решения вида

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}, \quad (71)$$

если постоянный (в подвижной системе координат, жестко связанной с телом) вектор

$$\mathbf{e} = e_1 \mathbf{e}_x + e_2 \mathbf{e}_y + e_3 \mathbf{e}_z$$

и постоянная  $\omega$  удовлетворяют уравнению

$$\omega^2 [\mathbf{e} \times \mathbb{J}\mathbf{e}] = -fS(\mathbf{e}) [\mathbf{e} \times \mathbf{c}(\mathbf{e})], \quad (72)$$

которое получается из первого векторного уравнения системы (10) с учетом (71) (при этом  $\dot{\mathbf{e}} = 0$ ,  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$ ).

Умножая уравнение (72) скалярно на  $\mathbb{J}\mathbf{e}$  и учитывая геометрический интеграл, получим, что вектор  $\mathbf{e}$  удовлетворяет двум скалярным уравнениям

$$(\mathbb{J}\mathbf{e} \cdot [\mathbf{e} \times \mathbf{c}(\mathbf{e})]) = 0, \quad \mathbf{e}^2 = 1. \quad (73)$$

Первое уравнение системы (73) определяет в пространстве  $\mathbb{R}^3$  коническую поверхность третьего порядка, а совокупность первого и второго уравнения этой системы задает на сфере Пуассона  $\mathbb{S}^2 \in \mathbb{R}^3$  соответствующие кривые кинематически возможных осей перманентных вращений.

---

При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [101]

Умножим уравнение (72) на единичные вектор  $\mathbf{e}_z$  оси  $Oz$  и получим, что постоянная  $\omega$  удовлетворяет уравнению

$$\omega^2 (A_2 - A_1) e_1 e_2 = f S(\mathbf{e}) (c_1 e_2 - c_2 e_1). \quad (74)$$

При этом, очевидно, что для существования действительного решения ( $\omega^2 \geq 0$ ) уравнения (74), необходимо выполнение неравенства

$$(A_2 - A_1) e_1 e_2 (c_1 e_2 - c_2 e_1) \geq 0. \quad (75)$$

Таким образом, решениям (71) соответствует однопараметрическое семейство перманентных вращений тела следующего вида: тело совершает вращения с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг единичного вектора  $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{e}$ , задающего направление потока частиц. Каждой оси перманентного вращения, определяемой вектором  $\mathbf{e}$ , удовлетворяющим системе уравнений (73), отвечает единственное по модулю значение угловой скорости  $\omega$ , вычисляемое с помощью соотношения (74). При этом тело может вращаться как по часовой ( $\omega < 0$ ), так и против часовой ( $\omega > 0$ ) стрелки.

Предположим, что в главных осях инерции вектор  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})$  имеет вид:

$$\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma}) = c_3(\boldsymbol{\gamma}) \mathbf{e}_z = (0, 0, c_3(\boldsymbol{\gamma})). \quad (76)$$

Тогда система уравнений (10) в скалярной форме запишется следующим образом:

$$A_1 \dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2) \omega_2 \omega_3 = -f \gamma_2 S(\boldsymbol{\gamma}) c_3(\boldsymbol{\gamma}),$$

$$A_2 \dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3) \omega_1 \omega_3 = f \gamma_1 S(\boldsymbol{\gamma}) c_3(\boldsymbol{\gamma}),$$

$$A_3 \dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1) \omega_1 \omega_2 = 0; \quad (77)$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1 \gamma_3 - \omega_3 \gamma_1,$$

$$\dot{\gamma}_3 = \omega_2 \gamma_1 - \omega_1 \gamma_2.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае, когда вектор  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})$  имеет довольно простой вид (76), уравнения (77) не обязательно обладают интегралом типа энергии. Для существования у системы уравнений (77) интеграла типа энергии достаточно, чтобы произведение

$$S(\boldsymbol{\gamma}) c_3(\boldsymbol{\gamma})$$

было функцией только переменной  $\gamma_3$ . Ниже мы рассмотрим этот случай, а пока будем рассматривать общий вид системы уравнений (77).

Легко убедиться, что если уравнения движения твердого тела в потоке частиц имеют вид (77), то частные решения (71) для этой системы записываются следующим образом:

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \gamma_{30} = \pm 1; \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega = \text{const.} \quad (78)$$

Получим необходимые условия устойчивости перманентных вращений (78) путем анализа корней характеристического уравнения линеаризованной системы уравнений возмущенного движения [33, 34, 54, 72].

В возмущенном движении положим

$$\gamma_3 = \gamma_{30} + z, \quad \omega_3 = \omega + y,$$

а для остальных переменных сохраним их прежние обозначения. Тогда уравнения возмущенного движения запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \frac{(A_3 - A_2)}{A_1} \omega \omega_2 + \frac{f S_0 c_{30}}{A_1} \gamma_2 &= \Omega_1, \\ \dot{\omega}_2 + \frac{(A_1 - A_3)}{A_2} \omega \omega_1 - \frac{f S_0 c_{30}}{A_2} \gamma_1 &= \Omega_2, \end{aligned} \quad (79)$$

$$\dot{\gamma}_1 - \omega \gamma_2 + \gamma_{30} \omega_2 = \Gamma_1, \quad \dot{\gamma}_2 + \omega \gamma_1 - \gamma_{30} \omega_1 = \Gamma_2,$$

$$\dot{y} = Y, \quad \dot{z} = Z.$$

Здесь  $\Omega_i, \Gamma_i, (i = 1, 2), Y$  и  $Z$  – функции, зависящие от  $\omega_j, \gamma_j, (j = 1, 2), y$  и  $z$ , разложения которых по степеням указанных переменных начинаются с членов не ниже второго порядка, причем все эти функции тождественно по  $y$  и  $z$  уничтожаются при  $\omega_j = 0, \gamma_j = 0, (j = 1, 2)$ . Через  $S_0$  и  $c_{30}$  обозначены выражения

$$S_0 = S(0, 0, \gamma_{30}), \quad c_{30} = c_3(0, 0, \gamma_{30}).$$

Характеристическое уравнение, отвечающее линеаризованной системе, которая получается из системы (79) отбрасыванием правых частей, имеет вид:

$$\lambda^2 (\varkappa_0 \lambda^4 + \varkappa_1 \lambda^2 + \varkappa_2) = 0,$$

$$\varkappa_0 = A_1 A_2 > 0,$$

$$\varkappa_1 = (A_1 A_2 + (A_3 - A_2)(A_3 - A_1)) \omega^2 + f(A_1 + A_2) S_0 c_{30} \gamma_{30},$$

$$\varkappa_2 = ((A_3 - A_2) \omega^2 \gamma_{30} + f S_0 c_{30}) ((A_3 - A_1) \omega^2 \gamma_{30} + f S_0 c_{30}).$$

Это уравнение имеет два нулевых корня. Один из них обусловлен однопараметричностью семейства перманентных вращений (78) (свободный параметр -  $\omega$ ), а другой – наличием геометрического интеграла. Следовательно, условия, при которых все корни уравнения

$$\varkappa_0 \lambda^4 + \varkappa_1 \lambda^2 + \varkappa_2 = 0,$$

являются чисто мнимыми, представляют собой необходимые условия устойчивости перманентных вращений (78). Эти условия имеют вид

$$\varkappa_1 > 0, \quad \varkappa_2 > 0, \quad \varkappa_1^2 - 4\varkappa_0 \varkappa_2 > 0. \quad (80)$$

Поскольку по условию должно быть  $\varkappa_1 > 0, \varkappa_2 > 0$ , следовательно, условия (80) могут быть приведены к системе двух условий

$$\varkappa_2 > 0, \quad \varkappa_1 > 2\sqrt{\varkappa_0 \varkappa_2}.$$

В явном виде соответствующие условия записываются следующим образом:

$$\left( (A_3 - A_2) \omega^2 + f S_0 c_{30} \gamma_{30} \right) \left( (A_3 - A_1) \omega^2 + f S_0 c_{30} \gamma_{30} \right) > 0, \quad (81)$$

$$\begin{aligned} & (A_1 A_2 + (A_3 - A_2) (A_3 - A_1)) \omega^2 + f (A_1 + A_2) S_0 c_{30} \gamma_{30} > \\ & > 2 \sqrt{A_1 A_2 \left( (A_3 - A_2) \omega^2 + f S_0 c_{30} \gamma_{30} \right) \left( (A_3 - A_1) \omega^2 + f S_0 c_{30} \gamma_{30} \right)}. \end{aligned} \quad (82)$$

Если тело с неподвижной точкой, "омываемое" потоком частиц, является динамически симметричным, то есть  $A_1 = A_2$ , неравенства (81) и (82) принимают вид:

$$\left( (A_3 - A_1) \omega^2 + f S_0 c_{30} \gamma_{30} \right)^2 > 0, \quad (83)$$

$$\left( A_1^2 + (A_3 - A_1)^2 \right) \omega^2 + 2 f A_1 S_0 c_{30} \gamma_{30} > 2 A_1 \sqrt{\left( (A_3 - A_1) \omega^2 + f S_0 c_{30} \gamma_{30} \right)^2}. \quad (84)$$

В этом случае, если

$$(A_3 - A_1) \omega^2 + f S_0 c_{30} \gamma_{30} \neq 0, \quad 2 A_1 \neq A_3,$$

то очевидно, что неравенство (83) всегда выполняется. Неравенство (84) после возведения в квадрат обеих частей данного неравенства приводится к виду:

$$(2 A_1 - A_3)^2 \omega^2 \left( A_3^2 \omega^2 + 4 A_1 f S_0 c_{30} \gamma_{30} \right) > 0.$$

Таким образом, неравенство (84) равносильно неравенству

$$A_3^2 \omega^2 > -4 A_1 f S_0 c_{30} \gamma_{30}. \quad (85)$$

Условие (85) является аналогом условия Маиевского – Четаева [33, 34, 54, 72] в задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц.

## 4.2 Стационарные движения динамически симметричного тела

Теперь рассмотрим случай динамически симметричного тела ( $A_1 = A_2$ ), ограниченного поверхностью вращения, ось симметрии которой совпадает

с осью динамической симметрии. В этом случае

$$S(\gamma) = S(\gamma_3), \quad c_3(\gamma) = c_3(\gamma_3)$$

и система уравнений (77) допускает первые интегралы

$$U_0 = \frac{A_1}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{A_3}{2} \omega_3^2 - f \int_0^{\gamma_3} S(\gamma_3) c_3(\gamma_3) d\gamma_3 = k_0 = \text{const}, \quad (86)$$

$$U_1 = A_1 (\omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2) + A_3 \omega_3 \gamma_3 = k_1 = \text{const}, \quad (87)$$

$$U_2 = \omega_3 = k_2 = \text{const}. \quad (88)$$

В рассматриваемом случае система уравнений (77) допускает квадратичный по обобщенным скоростям первый интеграл (86) и два линейных по обобщенным скоростям первых интеграла (87)-(88). Следовательно, при изучении стационарных движений данной системы можно воспользоваться теорией Рауса систем с первыми интегралами [87, 88]. Согласно этой теории, критическим значениям одного из интегралов системы при фиксированных значениях постоянных других интегралов отвечают стационарные движения рассматриваемой системы, причем экстремальным значениям – устойчивые стационарные движения. Существование же первых интегралов связано с наличием тех или иных симметрий в системе. В частности, наличие линейных по скоростям интегралов связано с наличием непрерывных групп симметрий.

Процедура применения теории Рауса для исследования механических систем, допускающих непрерывные группы симметрий, существенно упрощается и сводится, как известно [67, 87, 88, 94], к анализу эффективного потенциала системы.

Для построения эффективного потенциала в данной задаче мы должны найти минимум выражения (86) по переменным  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  на фиксированных уровнях интегралов (87) и (88).

Заметим, что данные интегралы зависят на полюсах  $P_{\pm}$  ( $\gamma_3 = \gamma_{30}$ ) сферы Пуассона  $\mathbb{S}^2$ . Действительно, для полюсов  $P_{\pm}$  имеем:

$$U_1 = A_3 \omega \gamma_{30} = k_1, \quad U_2 = \omega = k_2$$

и поэтому

$$A_3 k_2 \gamma_{30} = k_1.$$

В соответствии с [67, 87, 88], если

$$k_1 \neq A_3 k_2 \gamma_{30},$$

то эффективный потенциал имеет вид

$$W_{k_1, k_2}(\gamma_3) = \frac{(k_1 - A_3 k_2 \gamma_3)^2}{2A_1(1 - \gamma_3^2)} - f \int_0^{\gamma_3} S(\gamma_3) c_3(\gamma_3) d\gamma_3. \quad (89)$$

Если

$$k_1 = k_{1+} = A_3 k_2, \quad (90)$$

то эффективный потенциал имеет вид

$$W_{k_{1+}, k_2}(\gamma_3) = \frac{A_3^2 k_2^2 (1 - \gamma_3)}{2A_1(1 + \gamma_3)} - f \int_0^{\gamma_3} S(\gamma_3) c_3(\gamma_3) d\gamma_3. \quad (91)$$

Аналогично, если

$$k_1 = k_{1-} = -A_3 k_2, \quad (92)$$

то эффективный потенциал имеет вид

$$W_{k_{1-}, k_2}(\gamma_3) = \frac{A_3^2 k_2^2 (1 + \gamma_3)}{2A_1(1 - \gamma_3)} - f \int_0^{\gamma_3} S(\gamma_3) c_3(\gamma_3) d\gamma_3. \quad (93)$$

Функция (91) не имеет особенностей в окрестности полюса  $\gamma_3 = 1$  сферы Пуассона. Аналогично, функция (93) не имеет особенностей в окрестности полюса  $\gamma_3 = -1$ . Эти полюсы соответствуют перманентным вращениям (78)

динамически симметричного тела в потоке частиц.

Если  $\gamma_3 = +1$ , то соответствующие перманентные вращения будут устойчивы (неустойчивы) при выполнении условия [67, 87, 88]

$$\left. \frac{dW_{k_{1+}, k_2}}{d\gamma_3} \right|_{\gamma_3=+1} < 0 \quad (> 0),$$

то есть когда выполняется неравенство

$$-\frac{A_3^2 \omega^2}{4A_1} - fS(0, 0, 1) c_3(0, 0, 1) < 0 \quad (> 0).$$

Данное неравенство можно переписать в виде

$$A_3^2 \omega^2 > -4fA_1S(0, 0, 1) c_3(0, 0, 1) \quad (A_3^2 \omega^2 < -4fA_1S(0, 0, 1) c_3(0, 0, 1)). \quad (94)$$

Легко видеть, что если  $c_3(0, 0, 1) > 0$ , то данное неравенство выполняется при любом значении угловой скорости  $\omega$ .

Если  $\gamma_3 = -1$ , то соответствующие перманентные вращения будут устойчивы (неустойчивы) при выполнении условия

$$\left. \frac{dW_{k_{1-}, k_2}}{d\gamma_3} \right|_{\gamma_3=-1} > 0 \quad (< 0),$$

то есть когда выполняется неравенство

$$\frac{A_3^2 \omega^2}{4A_1} - fS(0, 0, -1) c_3(0, 0, -1) > 0 \quad (< 0).$$

Данное неравенство можно переписать в виде

$$A_3^2 \omega^2 > 4fA_1S(0, 0, -1) c_3(0, 0, -1) \quad (95)$$

$$(A_3^2 \omega^2 < 4fA_1S(0, 0, -1) c_3(0, 0, -1)).$$

Легко видеть, что можно записать условия (94) и (95) в виде одного неравенства (85). Таким образом, неравенство (85) служит необходимым и достаточным условием устойчивости перманентных вращений (78) геометрически и динамически симметричного тела в потоке частиц.

При произвольных значениях постоянных  $k_1$  и  $k_2$  первых интегралов (87), (88) система уравнений (77) имеет также двухпараметрическое семейство решений

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega\gamma_1, \quad \omega_2 = \omega\gamma_2, \quad \omega_3 = \omega \cos \theta + \Omega, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1 - \gamma_3^2 = \sin^2 \theta, \quad \gamma_3 = \cos \theta, \end{aligned} \quad (96)$$

где постоянные  $\omega$  и  $\Omega$  находятся из системы уравнений

$$A_1\omega \sin^2 \theta + A_3 (\omega \cos \theta + \Omega) \cos \theta = k_1, \quad \omega \cos \theta + \Omega = k_2, \quad (97)$$

а угол  $\theta$  – из уравнения

$$\frac{dW(\theta)}{d\theta} = 0, \quad (98)$$

где обозначено

$$W(\theta) = W_{k_1, k_2}(\gamma_3)|_{\gamma_3 = \cos \theta} = \frac{(k_1 - A_3 k_2 \cos \theta)^2}{2A_1 \sin^2 \theta} - f \int_0^{\cos \theta} S(\gamma_3) c_3(\gamma_3) d\gamma_3. \quad (99)$$

Решениям уравнения  $dW/d\theta = 0$  отвечают параллели

$$P_\theta = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \sin^2 \theta, \quad \gamma_3 = \cos \theta)$$

сферы Пуассона, а решениям (96) – регулярные прецессии динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц: тело вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси динамической симметрии, которая, в свою очередь, вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг единичного вектора  $\gamma$  направления потока, "омывающего" тело. При этом угол между осью динамической симметрии тела и вектором  $\gamma$  равен  $\theta = \arccos \gamma_3$ .

Уравнение (98) в явном виде записывается следующим образом:

$$\frac{(k_1 - A_3 k_2 \cos \theta) (A_3 k_2 - k_1 \cos \theta)}{A_1 \sin^3 \theta} + f S(\cos \theta) c_3(\cos \theta) \sin \theta = 0.$$

Условие устойчивости стационарных движений (96) (необходимое и достаточное с точностью до знака равенства), имеет вид

$$\frac{d^2W(\theta)}{d\theta^2} \geq 0, \quad (100)$$

при этом угол  $\theta$  должен удовлетворять уравнению (98). Очевидно, что для получения каких-то более определенных выводов об устойчивости стационарных движений (96), нам следует в явном виде определить поверхность, ограничивающую твердое тело с неподвижной точкой, помещенное в поток частиц. Ниже соответствующий анализ проведен для динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения, ось симметрии которого совпадает с осью динамической симметрии твердого тела.

**Замечание 4.2.1.** Аналогичные результаты об устойчивости стационарных движений в задаче о движении космического аппарата с солнечным стабилизатором были получены в работе В. В. Сидоренко [66].

## Глава 5. Регулярные прецессии тела, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения в потоке частиц

### 5.1 Постановка задачи. Первоначальные выводы об устойчивости регулярных прецессий

Пусть динамически симметричное тело с неподвижной точкой ограничено поверхностью эллипсоида вращения, ось симметрии которого совпадает с осью динамической симметрии тела, а неподвижная точка лежит на оси симметрии. Будем считать, что осью динамической симметрии является ось  $Oz$  тела, а эллипсоид вращения, которым оно ограничено, является вытянутым эллипсоидом вращения. Тогда явное выражение для эффективного потенциала, определяемое формулой (99), имеет вид:

$$W(\theta) = \frac{(k_1 - A_3 k_2 \cos \theta)^2}{2A_1 \sin^2 \theta} - \frac{f\pi a^2 bl}{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{b^2}} - \frac{f\pi bl}{2\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} \cos \theta}{\sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{b^2}}} \right).$$

Условие существования регулярных прецессий (98) в рассматриваемом случае записывается следующим образом:

$$\frac{(k_1 - A_3 k_2 \cos \theta)(A_3 k_2 - k_1 \cos \theta)}{2A_1 \sin^3 \theta} + f\pi a^2 bl \sin \theta \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{b^2}} = 0. \quad (101)$$

---

При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [101]

Запишем уравнение (101) в безразмерной форме. Для этого введем безразмерные постоянные интегралов

$$p_1 = \frac{k_1}{\sqrt{A_3 f \pi a^2 l}}, \quad p_2 = k_2 \sqrt{\frac{A_3}{f \pi a^2 l}} \quad (102)$$

и безразмерные параметры

$$y = \frac{A_1}{A_3} \in \left[ \frac{1}{2}, +\infty \right), \quad z = \frac{b^2}{a^2} > 1.$$

Тогда условие существования регулярных прецессий (101) в безразмерной форме переписывается следующим образом:

$$\frac{(p_1 - p_2 \cos \theta)(p_2 - p_1 \cos \theta)}{y \sin^3 \theta} + \sin \theta \sqrt{z \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = 0,$$

или, домножая на  $-y \sin^3 \theta$

$$a_{11} p_1^2 + 2a_{12} p_1 p_2 + a_{22} p_2^2 + a_1 = 0, \quad (103)$$

$$a_{11} = \cos \theta, \quad a_{12} = -\frac{1 + \cos^2 \theta}{2}, \quad a_{22} = \cos \theta,$$

$$a_1 = -y \sin^4 \theta \sqrt{z \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}.$$

Легко видеть, что при каждом фиксированном значении  $\theta$  уравнение (103) задает некоторую кривую второго порядка. Приведём эту кривую к каноническому виду. Для этого введем новые переменные  $x_1$  и  $y_1$  по формулам:

$$x_1 = p_1 - p_2, \quad y_1 = p_1 + p_2. \quad (104)$$

Для того, чтобы понять физический смысл безразмерных постоянных интегралов  $x_1$  и  $y_1$ , вспомним определение постоянных  $k_1$  и  $k_2$  (см. формулы (87), (88)). Для динамически симметричного тела можно записать:

$$k_1 = A_1 (\omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2) + A_3 \omega_3 \gamma_3 = (\mathbb{J}_O \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\gamma}), \quad k_2 = \omega_3 = \frac{(\mathbb{J}_O \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_z)}{A_3},$$

где  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор, направленный вдоль динамической оси симметрии тела. Подставляя данные выражения в (102), мы получим следующее:

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{A_3 f \pi a^2 l}} (\mathbb{J}_0 \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\gamma}), \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{A_3 f \pi a^2 l}} (\mathbb{J}_0 \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_z)$$

По формуле (104) получается, что  $x_1$  — это, с точностью до постоянного множителя, проекция кинетического момента тела на ось  $\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{e}_z$ :

$$x_1 = p_1 - p_2 = \frac{1}{\sqrt{A_3 f \pi a^2 l}} (\mathbb{J}_0 \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{e}_z))$$

А  $y_1$  — это, с точностью до постоянного множителя, проекция кинетического момента тела на ось  $\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{e}_z$ :

$$y_1 = p_1 + p_2 = \frac{1}{\sqrt{A_3 f \pi a^2 l}} (\mathbb{J}_0 \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{e}_z))$$

Векторы  $(\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{e}_z)$  и  $(\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{e}_z)$  перпендикулярны друг другу:

$$((\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{e}_z) \cdot (\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{e}_z)) = \boldsymbol{\gamma}^2 - \mathbf{e}_z^2 = 0.$$

Третий ортогональный вектор перпендикулярен  $\boldsymbol{\gamma}$  и  $\mathbf{e}_z$ , следовательно, проходит вдоль линии узлов:

$$[(\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{e}_z) \times (\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{e}_z)] = 2 [\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}_z]$$

Таким образом,  $\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{e}_z$  и  $\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{e}_z$  — ортогональные векторы в плоскости, перпендикулярной линии узлов, а  $x_1$  и  $y_1$ , с точностью до константы, проекции кинетического момента, взятого относительно неподвижной точки, на эти векторы.

Запишем уравнение (103) в координатах  $x_1, y_1$ :

$$\frac{1}{4} (1 + \cos \theta)^2 x_1^2 - \frac{1}{4} (1 - \cos \theta)^2 y_1^2 + a_1 = 0 \quad (105)$$

Полученное уравнение с точностью до множителя представляет собой канонический вид кривой второго порядка. Определим вид этой кривой. При

$\theta \neq \pi n$  свободный член  $a_1 < 0$ , а коэффициенты в квадратичной части отличны от нуля. Это означает (см., например, [4, 15]), что в каждом сечении плоскостями  $\theta \neq \pi n$  поверхности, задаваемой уравнением (105), мы имеем гиперболу. При  $\theta = \pi n$  свободный член, а также один из коэффициентов в квадратичной части будут равны нулю. Таким образом, в сечении плоскостями  $\theta = \pi n$  поверхность (105) представляет собой одну прямую вида

$$p_1 = (-1)^n p_2$$

Эта прямая совпадает, в зависимости от  $n$ , с одной из прямых, определяемых соотношениями (90), (92). Эти прямые соответствуют однопараметрическим решениям системы уравнений (77), которые, в свою очередь, отвечают перманентным вращениям (78) тела вокруг оси динамической симметрии, совпадающей с направлением потока частиц, омывающего тело с неподвижной точкой.

Условие устойчивости стационарных движений (96) в случае, когда тело с неподвижной точкой, находящееся в потоке частиц, ограничено поверхностью вытянутого эллипсоида вращения, имеет вид (100), или, в явном виде:

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + 2 \cos^2 \theta)}{y \sin^4 \theta} p_1^2 - \frac{(5 + \cos^2 \theta) \cos \theta}{y \sin^4 \theta} p_1 p_2 + \frac{(1 + 2 \cos^2 \theta)}{y \sin^4 \theta} p_2^2 + \\ & + \frac{(2z \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta}{\sqrt{z \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}} \geq 0. \end{aligned}$$

После домножения на положительный множитель  $y \sin^4 \theta$ , данное неравенство примет вид:

$$b_{11} p_1^2 + 2b_{12} p_1 p_2 + b_{22} p_2^2 + b_1 \geq 0, \quad (106)$$

$$b_{11} = 1 + 2 \cos^2 \theta, \quad b_{12} = -\frac{(5 + \cos^2 \theta) \cos \theta}{2}, \quad b_{22} = 1 + 2 \cos^2 \theta,$$

$$b_1 = \frac{y (2z \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta - 1) \sin^4 \theta \cos \theta}{\sqrt{z \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}}.$$

Запишем неравенство (106) в переменных  $x_1, y_1$ :

$$\frac{1}{4}(1 + \cos \theta)^2(2 + \cos \theta)x_1^2 + \frac{1}{4}(1 - \cos \theta)^2(2 - \cos \theta)y_1^2 + b_1 \geq 0 \quad (107)$$

При каждом фиксированном  $\theta$  границей области устойчивости (то есть кривой, которой соответствует знак равенства в неравенстве (107)) также будет некоторая кривая второго порядка. Вид этой кривой зависит от знака свободного члена  $b_1$ . При  $b_1 < 0$  граница области устойчивости представляет собой эллипс с центром в точке  $x_1 = 0, y_1 = 0$ . На плоскости безразмерных параметров  $x_1, y_1$  при каждом фиксированном  $\theta$  вне соответствующего эллипса будет область устойчивости регулярных прецессий (96), а внутри — область неустойчивости. При  $b_1 > 0$  граница области устойчивости выражается в мнимый эллипс, а при  $b_1 = 0$  граница представляет из себя прямую. Можно заметить, что при  $b_1 \geq 0$  неравенство (107) выполняется для любых значений  $x_1, y_1$ , следовательно регулярные прецессии будут устойчивыми.

Рассматривая одновременно условие существования (105) и условие устойчивости (107) стационарных движений тела с неподвижной точкой в потоке частиц, можно сделать вывод об устойчивости таких движений. Именно, если при некотором фиксированном  $\theta$  гипербола (105) и эллипс (107) не пересекаются, то стационарное движение (96), соответствующее данному  $\theta$ , является устойчивым (Рис. 4–6)

Исследуем вопрос устойчивости регулярных прецессий более подробно. Из условия существования (105) стационарных движений выразим величину  $y_1^2$ :

$$y_1^2 = \frac{(1 + \cos \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^2}x_1^2 + \frac{4a_1}{(1 - \cos \theta)^2} \quad (108)$$

Так как  $y_1^2 \geq 0$ , то из (108) получим ограничение на  $x_1$ :

$$x_1^2 \geq \frac{4y \sin^4 \theta}{(1 + \cos \theta)^2} \sqrt{z \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = (x_1)_*^2 \quad (109)$$

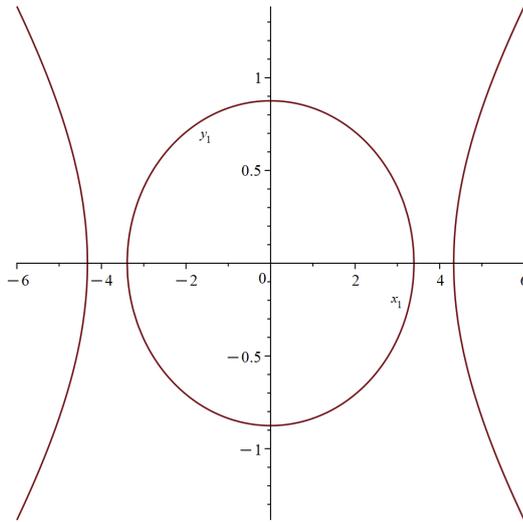


Рис. 4. Вид гиперболы и эллипса при  $y = \frac{5}{6}$ ,  $z = 8$ ,  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ .

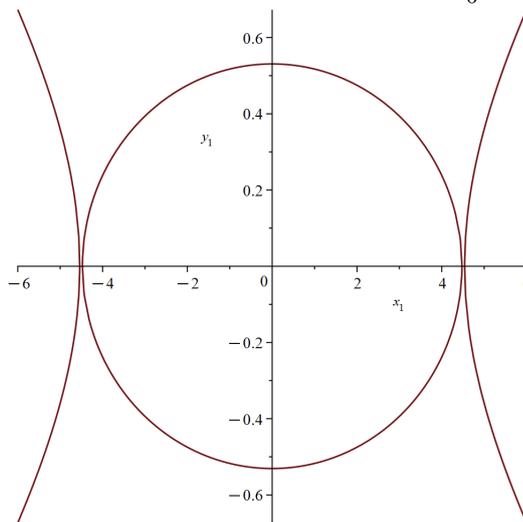


Рис. 5. Вид гиперболы и эллипса при  $y = \frac{5}{6}$ ,  $z = 8$ ,  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ .

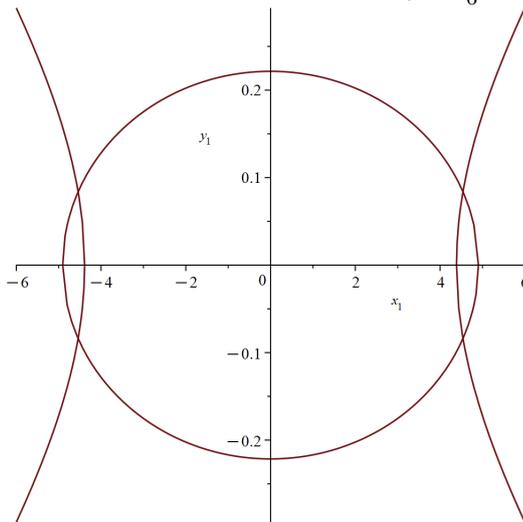


Рис. 6. Вид гиперболы и эллипса при  $y = \frac{5}{6}$ ,  $z = 8$ ,  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ .

Подставим полученное выражение (108) для  $y_1^2$  в условие устойчивости (107). Получим неравенство:

$$(1 + \cos \theta)^2 x_1^2 + (2 - \cos \theta) a_1 + b_1 \geq 0 \quad (110)$$

Левая часть неравенства представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх. Обозначим через  $x_{10}$  абсциссу точки пересечения параболы с положительной полуосью  $Ox_1$ . Найдём это значение:

$$x_{10}^2 = -\frac{(2 - \cos \theta) a_1 + b_1}{(1 + \cos \theta)^2}$$

После подстановки значений  $a_1$  и  $b_1$  запишем выражение  $x_{10}^2$  в явном виде:

$$x_{10}^2 = \frac{y \sin^4 \theta \sqrt{z \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}}{(1 + \cos \theta)^2} \left( 2 - 3 \cos \theta + \frac{\cos \theta}{z \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \right) \quad (111)$$

При  $x_1^2 \geq x_{10}^2$  условие устойчивости (110) будет выполняться. Таким образом мы получили условие, при которых регулярные прецессии могут существовать (109), и условие, при которых регулярные прецессии будут устойчивыми (110). Отсюда мы можем сделать следующие выводы (Рис. 7):

1. При  $x_{10}^2 < (x_1)_*^2$  регулярные прецессии устойчивы при любых допустимых значениях  $x_1, y_1$  (а соответственно, при любых  $p_1, p_2$ ).
2. При  $x_{10}^2 > (x_1)_*^2$  регулярные прецессии устойчивы только при  $x_1^2 > x_{10}^2$

## 5.2 Случай $z > 1$

Рассмотрим сначала случай вытянутого эллипсоида вращения ( $z > 1$ ). Найдём условия, при которых  $x_{10}^2 > (x_1)_*^2$ . Получим:

$$3 \cos^3 \theta (1 - z) + 2 \cos^2 \theta (1 - z) + \cos \theta (3z - 1) + 2z < 0$$

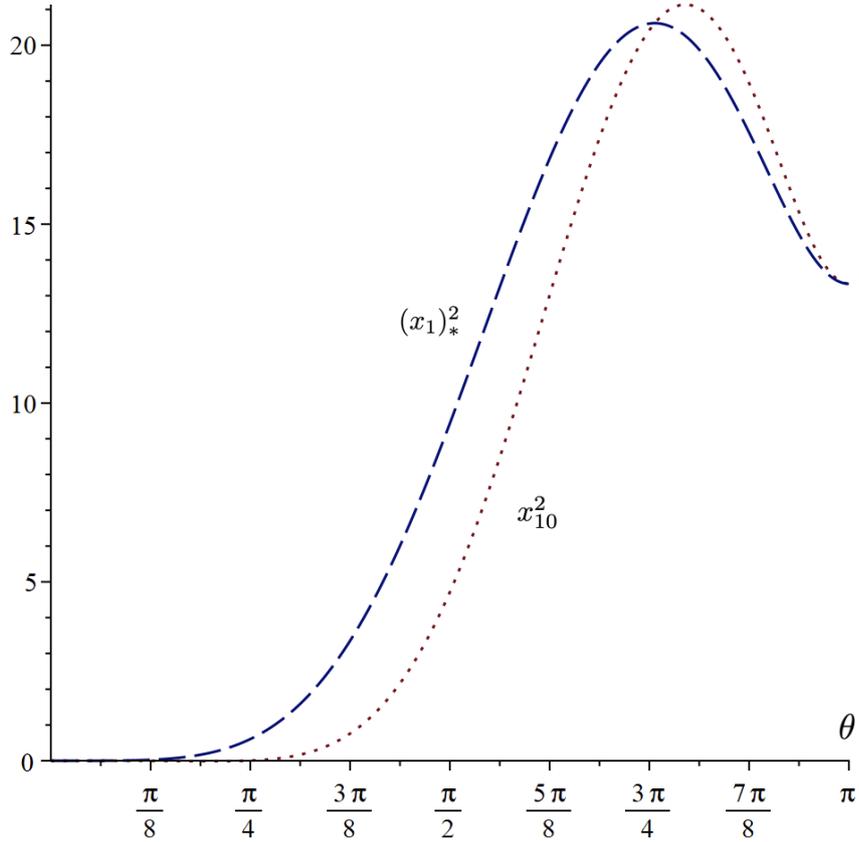


Рис. 7. Взаимное расположение  $x_{10}^2$  и  $(x_1)_*^2$  при  $y = \frac{5}{6}, z = 8$

Или, раскладывая на множители левую часть, получим следующее неравенство:

$$3(z-1)(\cos \theta + 1) \left( \cos \theta - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{25z-1}{z-1}} \right) \left( \cos \theta - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{25z-1}{z-1}} \right) > 0 \quad (112)$$

Первые три множителя в левой части неравенства (112) положительные. Посмотрим на выражение  $\left( \cos \theta - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{25z-1}{z-1}} \right)$ . Возведением в квадрат можно показать, что при  $z > 1$  верно неравенство:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{25z-1}{z-1}} > 1$$

Таким образом, множитель  $\left( \cos \theta - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{25z-1}{z-1}} \right)$  в неравенстве (112) всегда отрицателен. И мы можем упростить (112) до следующего вида:

$$\cos \theta - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{25z-1}{z-1}} < 0 \quad (113)$$

Рассмотрим данное неравенство. Функция

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{25z-1}{z-1}}$$

монотонно возрастает при  $z > 1$ . При этом она принимает значение  $-1$  при  $z = 2$ , и дальше асимптотически стремится к значению  $-\frac{2}{3}$ . Таким образом, при  $1 < z \leq 2$  выражение  $(\cos \theta - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{25z-1}{z-1}}) \geq 0$ , а значит, неравенство (113) не выполняется. Отсюда делаем вывод, что при  $1 < z \leq 2$  регулярные прецессии устойчивы при любом значении  $\theta$  и любых допустимых значениях параметров  $x_1$  и  $y_1$  (и соответственно, при любых допустимых значениях постоянных интегралов  $p_1, p_2$ ).

На Рис. 8 при  $y = 2$ ,  $z = \frac{12}{11}$  представлена бифуркационная диаграмма Пуанкаре–Четаева на уровне  $y_1 = 0$ . На этом графике прямая  $\theta = \pi$  соответствует перманентным вращениям тела вокруг оси динамической симметрии. Видно, как от этой прямой ответвляются устойчивые регулярные прецессии тела. Кроме того, на плоскости безразмерных параметров  $x_1$  и  $y_1$  при фиксированных значениях  $\theta$  были построены графики соответствующих гиперболы и эллипса, задаваемых соотношениями (105) и (107) (см. рис. 9). Видно, что в рассматриваемом случае они не пересекаются.

Введём новое обозначение  $\theta_2$ :

$$\theta_2 = \arccos \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{25z-1}{z-1}} \right) \quad (114)$$

Мы можем записать, что при  $z > 2$  неравенство (113) выполняется при  $\cos \theta < \cos \theta_2$  и не выполняется при  $\cos \theta \geq \cos \theta_2$ .

На рис. 10 при  $y = 2$ ,  $z = \frac{5}{2}$  представлена бифуркационная диаграмма Пуанкаре–Четаева на уровне  $y_1 = 0$ . Видно, что регулярные прецессии тела, ответвляющиеся от перманентных вращений, являются неустойчивыми вблизи значения  $\theta = \pi$ , а затем, проходя через точку перегиба, становятся устойчивыми. Точка перегиба соответствует значению  $\theta = \theta_2$ , где  $\theta_2$  определяется формулой (114).

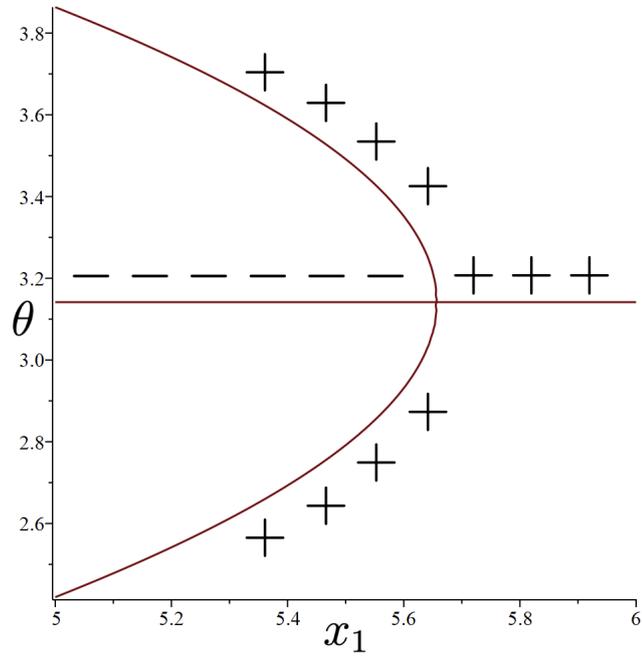


Рис. 8. Сечение поверхности (105) плоскостью  $y_1 = 0$  при  $y = 2, z = \frac{12}{11}$ .

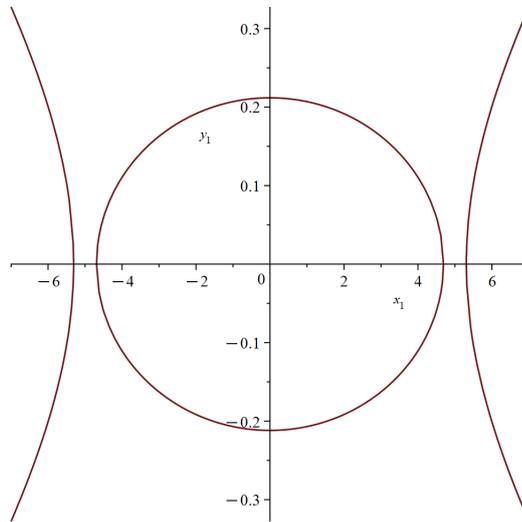


Рис. 9. Взаимное расположение гиперболы и эллипса при  $y = 2, z = \frac{12}{11}, \theta = \frac{5\pi}{6}$ .

Кроме того, на рис. 11 на плоскости безразмерных параметров  $x_1$  и  $y_1$  представлены графики гиперболы и эллипса при значении  $\theta = \theta_2$ , определяемом формулой (114). Видно, что при этом значении они касаются, но не пересекаются.

Объединяя полученные выводы, можем заключить следующее – исходное неравенство (112) выполняется при  $z > 2$  и  $\cos \theta < \cos \theta_2$ . И не выполняется при всех других значениях переменных. Таким образом (см. выводы раздела 5.1), регулярные прецессии устойчивы при любых значениях  $x_1, y_1$  (а соответственно и при любых значениях постоянных первых интегралов  $p_1, p_2$ ), если  $1 < z \leq 2$  или  $z > 2$  и  $\cos \theta > \cos \theta_2$ . Если же  $z > 2$  и  $\cos \theta < \cos \theta_2$ , то регулярные прецессии устойчивы только при  $x_1^2 > x_{10}^2$ .

### 5.3 Случай $z < 1$

Теперь рассмотрим устойчивость для сжатого эллипсоида вращения ( $z < 1$ ). Все найденные значения для  $x_{10}^2$  и  $(x_1)_*^2$  верны и для сжатого эллипсоида (109), (111). Условия, при которых  $x_{10}^2 > (x_1)_*^2$ , будут аналогичны (112). Упростив их, получим следующее неравенство:

$$\left( \cos \theta - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1-25z}{1-z}} \right) \left( \cos \theta - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1-25z}{1-z}} \right) < 0 \quad (115)$$

Левая часть (115) представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх. При  $z \in (\frac{1}{25}, 1)$  парабола не имеет корней, поэтому неравенство (115) не имеет решений. Также при  $z = \frac{1}{25}$  неравенство (115) не выполняется. Таким образом можем сделать вывод, что при  $z \in [\frac{1}{25}, 1)$  значение  $x_{10}^2 \leq (x_1)_*^2$ , а значит регулярные прецессии будут устойчивыми при любых значениях параметров  $x_1, y_1$ .

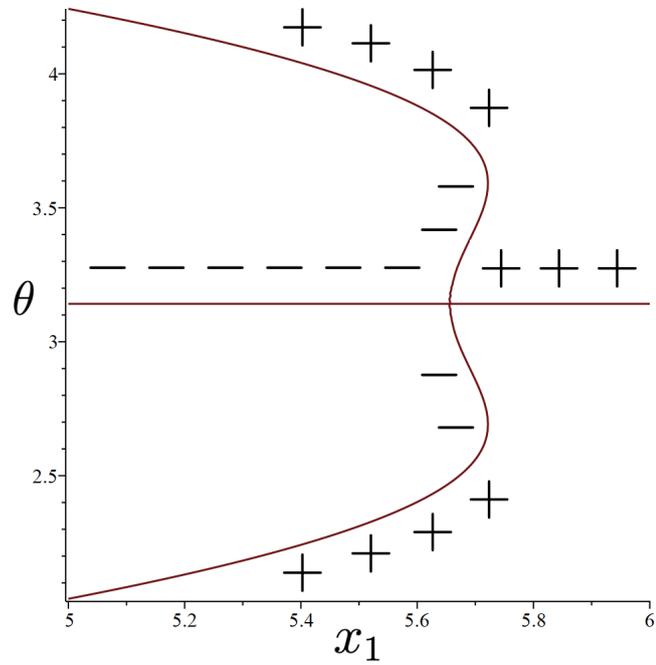


Рис. 10. Сечение поверхности (105) плоскостью  $y_1 = 0$  при  $y = 2, z = \frac{5}{2}$ .

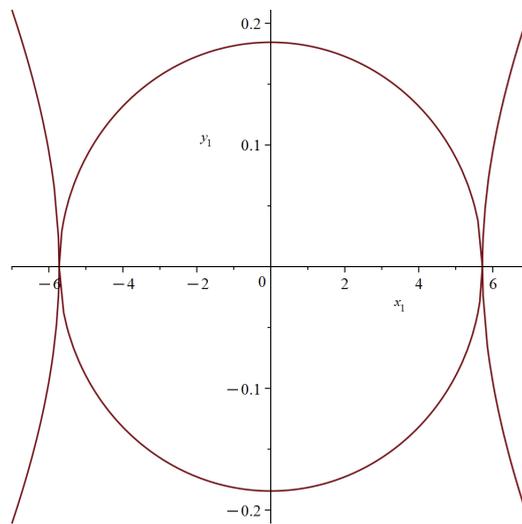


Рис. 11. Взаимное расположение гиперболы и эллипса при  $y = 2, z = \frac{5}{2}, \theta = \theta_2$

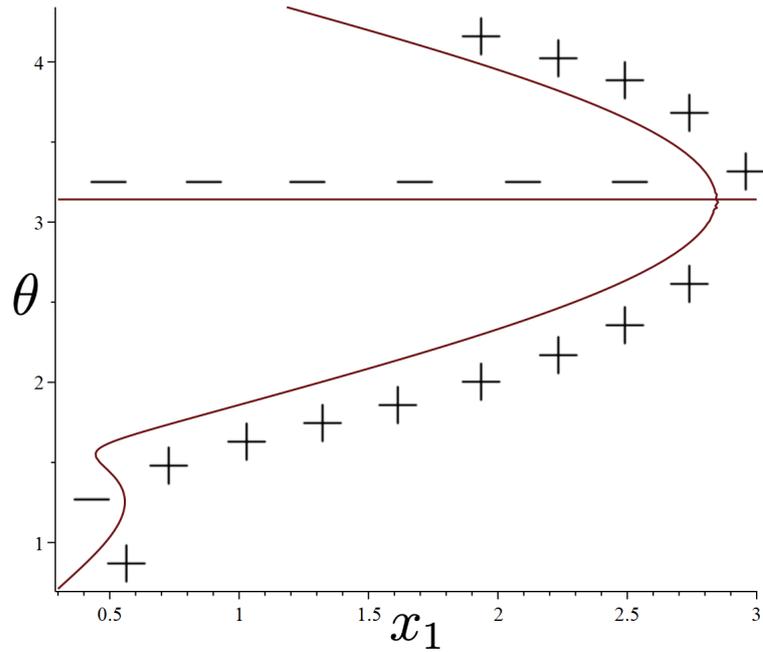


Рис. 12. Сечение поверхности (105) плоскостью  $y_1 = 0$  при  $y = \frac{101}{200}, z = \frac{1}{100}$ .

#### 5.4 Случай $z < \frac{1}{25}$

Рассмотрим наконец случай  $z < \frac{1}{25}$ . Неравенство (115) будет выполняться при следующих значениях  $\theta$ :

$$\theta \in \left( \arccos \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1-25z}{1-z}} \right); \arccos \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1-25z}{1-z}} \right) \right) \quad (116)$$

Введём новое обозначение  $\theta_1$ :

$$\theta_1 = \arccos \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1-25z}{1-z}} \right)$$

Получается, что при  $\theta \in (0, \theta_1) \cup (\theta_2, \pi)$  неравенство (115) не будет выполняться, следовательно, регулярные прецессии будут устойчивыми при любых значениях параметров  $x_1, y_1$ . В случае же, если  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ , то регулярные прецессии будут устойчивыми только при  $x_1^2 > x_{10}^2$ .

На рис. 12 при  $y = \frac{101}{200}, z = \frac{1}{100}$  представлена бифуркационная диаграмма Пуанкаре–Четаева на уровне  $y_1 = 0$ . Видно, что регулярные прецессии тела, ответвляющиеся от перманентных вращений, являются устойчивыми вблизи значения  $\theta = \pi$ , и устойчивость сохраняется при уменьшении угла

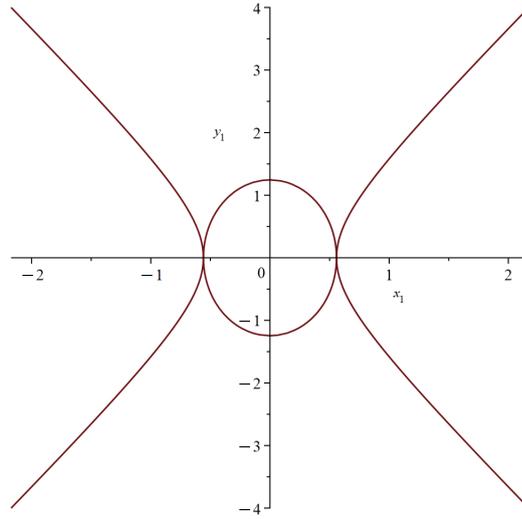


Рис. 13. Вид гиперболы и эллипса при  $y = \frac{101}{200}$ ,  $z = \frac{1}{100}$ ,  $\theta = \arccos\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1-25z}{1-z}}\right)$ .

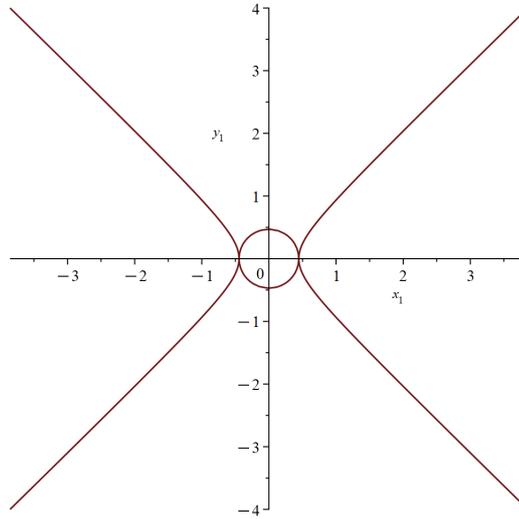


Рис. 14. Вид гиперболы и эллипса при  $y = \frac{101}{200}$ ,  $z = \frac{1}{100}$ ,  $\theta = \arccos\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1-25z}{1-z}}\right)$ .

до  $\theta_2$ . Далее, при значениях  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ , регулярные прецессии становятся неустойчивыми, и при  $\theta < \theta_1$  снова становятся устойчивыми.

На рис. 13–14 на плоскости безразмерных параметров  $x_1$  и  $y_1$  представлены графики гиперболы и эллипса при значениях

$$z = \frac{1}{100}, \quad \theta = \arccos\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1-25z}{1-z}}\right) \quad \text{и} \quad \theta = \arccos\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1-25z}{1-z}}\right).$$

Видно, что при этих значениях угла  $\theta$  гиперболы и эллипс касаются, но не пересекаются.

Итак, окончательно можно сделать вывод, что все регулярные прецессии (96) динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения, находящегося в потоке частиц, будут устойчивы независимо от величин параметров  $x_1, y_1$  (а соответственно и независимо от значений постоянных первых интегралов  $p_1$  и  $p_2$ ), если отношение квадратов полуосей эллипсоида лежит в промежутке

$$\frac{1}{25} \leq z \leq 2.$$

При  $z > 2$  регулярные прецессии тела будут устойчивы независимо от значений параметров  $x_1$  и  $y_1$  при

$$\theta \in \left[ 0, \arccos \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{25z-1}{z-1}} \right) \right).$$

А при

$$\theta \in \left[ \arccos \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{25z-1}{z-1}} \right), \pi \right)$$

регулярные прецессии устойчивы при значении параметра

$$x_1^2 > \frac{y \sin^4 \theta \sqrt{z \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}}{(1 + \cos \theta)^2} \left( 2 - 3 \cos \theta + \frac{\cos \theta}{z \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \right)$$

При

$$0 < z < \frac{1}{25}$$

регулярные прецессии тела будут устойчивы независимо от значений параметров  $x_1$  и  $y_1$  при

$$\theta \in \left( 0, \arccos \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1-25z}{1-z}} \right) \right) \cup \left( \arccos \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1-25z}{1-z}} \right), \pi \right).$$

А при

$$\theta \in \left[ \arccos \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1-25z}{1-z}} \right), \arccos \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1-25z}{1-z}} \right) \right]$$

регулярные прецессии будут устойчивы при значении параметра

$$x_1^2 > \frac{y \sin^4 \theta \sqrt{z \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}}{(1 + \cos \theta)^2} \left( 2 - 3 \cos \theta + \frac{\cos \theta}{z \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \right)$$

Таковы основные выводы об устойчивости регулярных прецессий динамически симметричного тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения, в потоке частиц.

## Глава 6. Случай Гесса в задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц

### 6.1 Введение

В первой главе данной работы были сформулированы условия, при выполнении которых уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц (10) допускают частный случай интегрируемости, аналогичный классическому случаю Гесса интегрируемости задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Этот случай существования частного дополнительного интеграла уравнений Эйлера – Пуассона задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой был открыт в 1890 году в работе В. Гесса [80], а затем переоткрыт в 1892 году в работе Г. Г. Аппельрота [5]. В том же 1892 году П. А. Некрасов показал [57, 58], что решение задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой при условиях Гесса сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Также П. А. Некрасовым было показано [57, 58], что если постоянная интеграла площадей равна нулю, то соответствующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка допускает общее решение, выражающееся через эллиптические функции.

В этой главе мы проверяем, какие выводы из работ П. А. Некрасова [57, 58], относящиеся к классической задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, будут справедливы и в задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц.

### 6.2 Постановка задачи

Рассмотрим задачу о движении твердого тела с неподвижной точкой в свободномолекулярном потоке частиц. Предположим, что твердое тело, находящееся в потоке частиц, ограничено осесимметричной поверхностью, еди-

ничный вектор оси симметрии которой в главных осях инерции с началом в неподвижной точке имеет компоненты  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ . Предположим также, что неподвижная точка лежит на оси симметрии поверхности. В этом случае уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц (10) переписываются в виде (см. Параграф 1.5 Главы 1):

$$\mathbb{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbb{J}\boldsymbol{\omega}] = -\rho v_0^2 S ((\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma})) \chi ((\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma})) [\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\alpha}], \quad (117)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}] = 0,$$

В скалярной форме уравнения (117) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2) \omega_2 \omega_3 &= \rho v_0^2 S ((\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma})) \chi ((\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma})) (\alpha_2 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_2), \\ A_2 \dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3) \omega_1 \omega_3 &= \rho v_0^2 S ((\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma})) \chi ((\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma})) (\alpha_3 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_3), \\ A_3 \dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1) \omega_1 \omega_2 &= \rho v_0^2 S ((\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma})) \chi ((\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma})) (\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1), \end{aligned} \quad (118)$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1 \gamma_3 - \omega_3 \gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2 \gamma_1 - \omega_1 \gamma_2.$$

Условия, при которых существует частный интеграл, аналогичный интегралу Гесса, имеют вид:

$$\alpha_3 = 0, \quad A_2 (A_3 - A_1) \alpha_2^2 = A_1 (A_2 - A_3) \alpha_1^2, \quad A_2 \geq A_3 \geq A_1. \quad (119)$$

С учетом условий (119) первые два уравнения системы (118) переписутся следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2) \omega_2 \omega_3 &= \rho v_0^2 S ((\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma})) \chi ((\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma})) \alpha_2 \gamma_3, \\ A_2 \dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3) \omega_1 \omega_3 &= -\rho v_0^2 S ((\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma})) \chi ((\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma})) \alpha_1 \gamma_3. \end{aligned} \quad (120)$$

Умножим первое уравнение системы (120) на  $\alpha_1$ , а второе — на  $\alpha_2$  и сложим. В результате получим соотношение:

$$A_1\dot{\omega}_1\alpha_1 + A_2\dot{\omega}_2\alpha_2 + (A_3 - A_2)\alpha_1\omega_2\omega_3 + (A_1 - A_3)\alpha_2\omega_1\omega_3 = 0,$$

откуда следует, что

$$A_1\dot{\omega}_1\alpha_1 + A_2\dot{\omega}_2\alpha_2 = (A_2 - A_3)\alpha_1\omega_2\omega_3 + (A_3 - A_1)\alpha_2\omega_1\omega_3.$$

С учетом условий Гесса (119) правая часть данного уравнения может быть представлена в виде:

$$A_1\dot{\omega}_1\alpha_1 + A_2\dot{\omega}_2\alpha_2 = \frac{\omega_3(A_2 - A_3)\alpha_1}{A_2\alpha_2}(A_1\omega_1\alpha_1 + A_2\omega_2\alpha_2). \quad (121)$$

Таким образом, из уравнения (121) следует вывод, что если в начальный момент времени справедливо условие

$$A_1\omega_1\alpha_1 + A_2\omega_2\alpha_2 = 0, \quad (122)$$

то это условие справедливо во все время движения твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц. Следовательно, система уравнений (118) при выполнении условий (119) допускает частный интеграл (122). Для изучения случая Гесса в рассматриваемой задаче запишем уравнения движения в специальной системе координат, предложенной П. В. Харламовым [69, 70].

### 6.3 Уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц в специальной системе координат

Поскольку компоненты вектора  $\boldsymbol{\alpha}$  удовлетворяют условию

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1,$$

и, кроме того, выполняются условия Гесса (119), следовательно, мы можем написать, что

$$\alpha_1 = \cos \delta, \quad \alpha_2 = \sin \delta.$$

Будем следовать подходу, изложенному в работах [9, 10, 50, 73]. Введем новые переменные  $L_1, L_2, L_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3$  по формулам

$$L_1 = A_1\omega_1 \cos \delta + A_2\omega_2 \sin \delta, \quad L_2 = A_2\omega_2 \cos \delta - A_1\omega_1 \sin \delta, \quad L_3 = A_3\omega_3,$$

$$\nu_1 = \gamma_1 \cos \delta + \gamma_2 \sin \delta, \quad \nu_2 = \gamma_2 \cos \delta - \gamma_1 \sin \delta, \quad \nu_3 = \gamma_3.$$

Переменные  $L_1, L_2, L_3$  являются компонентами кинетического момента тела, а переменные  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  — компонентами единичного вектора  $\boldsymbol{\gamma}$ , направленного вдоль потока частиц в проекции на оси специальной системы координат, впервые введенной в работах П. В. Харламова [69, 70]. В этих переменных уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой примут следующий вид:

$$\dot{L}_1 = -a_2 L_1 L_3,$$

$$\dot{L}_2 = (a_1 - a_3) L_1 L_2 + a_2 L_2 L_3 - \rho v_0^2 S(\nu_1) \chi(\nu_1) \nu_3,$$

$$\dot{L}_3 = -(a_1 - a_3) L_1 L_2 + a_2 L_1^2 - a_2 L_2^2 + \rho v_0^2 S(\nu_1) \chi(\nu_1) \nu_2,$$

(123)

$$\dot{\nu}_1 = a_3 L_3 \nu_2 - (a_3 L_2 + a_2 L_1) \nu_3,$$

$$\dot{\nu}_2 = -a_3 L_3 \nu_1 + (a_1 L_1 + a_2 L_2) \nu_3,$$

$$\dot{\nu}_3 = (a_2 L_1 + a_3 L_2) \nu_1 - (a_1 L_1 + a_2 L_2) \nu_2.$$

Здесь обозначено

$$a_1 = \frac{A_2 \alpha_1^2 + A_1 \alpha_2^2}{A_1 A_2}, \quad a_2 = \frac{(A_1 - A_2) \alpha_1 \alpha_2}{A_1 A_2}, \quad a_3 = \frac{1}{A_3}.$$

Чтобы обнаружить дополнительный первый интеграл, существующий в случае Гесса, достаточно рассмотреть только первое уравнение полученной системы (123)

$$\dot{L}_1 = -a_2 L_1 L_3.$$

В этом уравнении правая часть равна самой переменной  $L_1$ , умноженный на ограниченный по модулю коэффициент  $-a_2L_3$ . В связи с этим, если в начальный момент времени величина  $L_1 = 0$ , то и в любой момент времени окажется, что

$$L_1 \equiv 0. \quad (124)$$

Инвариантное многообразие (124) (или, в других обозначениях, (122)) вместе с условиями (119) и определяют случай Гесса. При выполнении всех этих условий уравнения (123) заметно упрощаются и принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot{L}_2 &= a_2L_2L_3 - \rho v_0^2 S(\nu_1) \chi(\nu_1) \nu_3, & \dot{L}_3 &= -a_2L_2^2 + \rho v_0^2 S(\nu_1) \chi(\nu_1) \nu_2, \\ \dot{\nu}_1 &= a_3(L_3\nu_2 - L_2\nu_3), & \dot{\nu}_2 &= -a_3L_3\nu_1 + a_2L_2\nu_3, & \dot{\nu}_3 &= a_3L_2\nu_1 - a_2L_2\nu_2. \end{aligned} \quad (125)$$

Система уравнений (125) допускает следующие первые интегралы:

$$\frac{a_3}{2} (L_2^2 + L_3^2) - \rho v_0^2 \int S(\nu_1) \chi(\nu_1) d\nu_1 = E; \quad (126)$$

$$L_2\nu_2 + L_3\nu_3 = k; \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1.$$

Заметим, что случай  $a_2 = 0$  соответствует интегрируемому случаю, аналогичному случаю Лагранжа в классической задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.

#### 6.4 Обезразмеривание уравнений. Дальнейшие преобразования

Приведем теперь систему уравнений (125) и первые интегралы (126) к безразмерному виду. Для этого сначала представим выражение  $\chi(\nu_1)$  в виде:

$$\chi(\nu_1) = l\mu(\nu_1),$$

вводя, тем самым, обезразмеренную длину вектора  $\mathbf{c}(\gamma)$ . Теперь введем безразмерные компоненты момента  $y, z$  и безразмерное время  $\tau$  по формулам

$$L_2 = \frac{v_0}{a_3 l} y, \quad L_3 = \frac{v_0}{a_3 l} z, \quad t = \frac{l}{v_0} \tau.$$

Введем также обезразмеренную площадь фигуры  $S_0$ , которую обозначим  $K_0(\nu_1)$ :

$$S(\nu_1) = \frac{K_0(\nu_1)}{\rho a_3 l^3},$$

безразмерный параметр

$$d_1 = \frac{a_2}{a_3},$$

и безразмерные постоянные первых интегралов энергии и площадей, которые обозначим  $h$  и  $k_1$  соответственно:

$$E = \frac{v_0^2}{a_3 l^2} h, \quad k = k_1 \frac{a_3 l}{v_0}.$$

В результате система уравнений (125) переписется в следующей безразмерной форме

$$\frac{dy}{d\tau} = d_1 y z - K_0(\nu_1) \mu(\nu_1) \nu_3, \quad \frac{dz}{d\tau} = -d_1 y^2 + K_0(\nu_1) \mu(\nu_1) \nu_2, \quad (127)$$

$$\frac{d\nu_1}{d\tau} = z\nu_2 - y\nu_3, \quad \frac{d\nu_2}{d\tau} = d_1 y\nu_3 - z\nu_1, \quad \frac{d\nu_3}{d\tau} = y\nu_1 - d_1 y\nu_2.$$

Система уравнений (127) допускает следующие первые интегралы:

$$\frac{y^2 + z^2}{2} - \int K_0(\nu_1) \mu(\nu_1) d\nu_1 = h, \quad y\nu_2 + z\nu_3 = k_1, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \quad (128)$$

Объектом дальнейшего исследования является система уравнений (127) совместно с первыми интегралами (128). Умножая первое уравнение системы (127) на  $y$ , а второе – на  $z$  и складывая их, получаем:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{y^2 + z^2}{2} \right) = K_0(\nu_1) \mu(\nu_1) (z\nu_2 - y\nu_3). \quad (129)$$

Используя тождество

$$(y^2 + z^2) (\nu_2^2 + \nu_3^2) = (y\nu_2 + z\nu_3)^2 + (y\nu_3 - z\nu_2)^2,$$

получаем

$$(y^2 + z^2) (1 - \nu_1^2) = k_1^2 + (y\nu_3 - z\nu_2)^2.$$

Перепишем первый из интегралов (128) в виде:

$$\frac{y^2 + z^2}{2} - U(\nu_1) = h, \quad (130)$$

тогда

$$K_0(\nu_1) \mu(\nu_1) = \frac{dU}{d\nu_1}.$$

Из интеграла (130), рассматривая его как уравнение относительно  $\nu_1$ , находим:

$$\nu_1 = U^{-1} \left( \frac{y^2 + z^2}{2} - h \right) = W \left( \frac{y^2 + z^2}{2} - h \right). \quad (131)$$

Отсюда

$$(z\nu_2 - y\nu_3)^2 = (y^2 + z^2) \left( 1 - W^2 \left( \frac{y^2 + z^2}{2} - h \right) \right) - k_1^2.$$

Будем считать, что

$$z\nu_2 - y\nu_3 = -\sqrt{(y^2 + z^2) \left( 1 - W^2 \left( \frac{y^2 + z^2}{2} - h \right) \right) - k_1^2} \quad (132)$$

(знак перед корнем выражения, стоящего в правой части равенства (132), может быть выбран любым). Результат подстановки соотношения (131) в функцию

$$\frac{dU}{d\nu_1}$$

будем обозначать индексом \*, то есть

$$\left( \frac{dU}{d\nu_1} \right)_* = K_0 \left( \frac{y^2 + z^2}{2} - h \right) \mu \left( \frac{y^2 + z^2}{2} - h \right).$$

Тогда уравнение (129) переписется в виде:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{y^2 + z^2}{2} \right) = - \left( \frac{dU}{d\nu_1} \right)_* \sqrt{(y^2 + z^2) \left( 1 - W^2 \left( \frac{y^2 + z^2}{2} - h \right) \right)} - k_1^2.$$

Умножим теперь первое уравнение системы (127) на  $z$ , а второе – на  $y$  и вычтем из второго уравнения первое. Получаем:

$$y \frac{dz}{d\tau} - z \frac{dy}{d\tau} = -d_1 y^3 + K_0(\nu_1) \mu(\nu_1) y \nu_2 - d_1 y z^2 + K_0(\nu_1) \mu(\nu_1) z \nu_3,$$

или

$$y \frac{dz}{d\tau} - z \frac{dy}{d\tau} = -d_1 y (y^2 + z^2) + \left( \frac{dU}{d\nu_1} \right)_* k_1.$$

Введем теперь полярные координаты  $x$  и  $\varphi$  по формулам:

$$y = x \cos \varphi, \quad z = x \sin \varphi.$$

Тогда для определения величин  $x$  и  $\varphi$  мы получаем следующую систему двух дифференциальных уравнений

$$x \frac{dx}{d\tau} = - \left( \frac{dU}{d\nu_1} \right)_* \sqrt{x^2 \left[ 1 - W^2 \left( \frac{x^2}{2} - h \right) \right]} - k_1^2, \quad (133)$$

$$x^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = -d_1 x^3 \cos \varphi + \left( \frac{dU}{d\nu_1} \right)_* k_1.$$

Из этой системы находим зависимость  $\varphi = \varphi(x)$ , которая определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d_1 x^3 \cos \varphi - \left( \frac{dU}{d\nu_1} \right)_* k_1}{x \left( \frac{dU}{d\nu_1} \right)_* \sqrt{x^2 \left( 1 - W^2 \left( \frac{x^2}{2} - h \right) \right)} - k_1^2}. \quad (134)$$

При помощи замены

$$V = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

уравнение (134) приводится к уравнению Риккати:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} = & - \frac{\left( d_1 x^3 + \left( \frac{dU}{d\nu_1} \right)_* k_1 \right)}{2x \left( \frac{dU}{d\nu_1} \right)_* \sqrt{x^2 \left( 1 - W^2 \left( \frac{x^2}{2} - h \right) \right)} - k_1^2} V^2 + \\ & + \frac{d_1 x^3 - \left( \frac{dU}{d\nu_1} \right)_* k_1}{2x \left( \frac{dU}{d\nu_1} \right)_* \sqrt{x^2 \left( 1 - W^2 \left( \frac{x^2}{2} - h \right) \right)} - k_1^2}. \end{aligned} \quad (135)$$

Слегка преобразуем полученное уравнение (135). Из первого интеграла (130) следует, что

$$\frac{x^2}{2} = h + U(\nu_1)$$

и поэтому

$$x \frac{dx}{d\nu_1} = \frac{dU}{d\nu_1}. \quad (136)$$

С другой стороны, поскольку

$$\nu_1 = W \left( \frac{x^2}{2} - h \right),$$

то

$$\frac{d\nu_1}{dx} = \frac{dW}{dx}.$$

Подставляя данное соотношение в уравнение (136), находим, что

$$\frac{dU}{d\nu_1} = \frac{x}{\frac{dW}{dx}}.$$

Таким образом, уравнение (135) может быть представлено в виде:

$$\frac{dV}{dx} = - \frac{d_1 x^2 \frac{dW}{dx} + k_1}{2x \sqrt{x^2 (1 - W^2)} - k_1^2} V^2 + \frac{d_1 x^2 \frac{dW}{dx} - k_1}{2x \sqrt{x^2 (1 - W^2)} - k_1^2}, \quad (137)$$

где функция  $W$  является функцией аргумента

$$W = W\left(\frac{x^2}{2} - h\right)$$

и определяется формулой (131).

Из общей теории дифференциальных уравнений известно (см. [25]), что если общее уравнение Риккати имеет вид:

$$\frac{dV}{dx} = f_2(x)V^2 + f_1(x)V + f_0(x),$$

то замена переменных вида

$$u(x) = \exp\left(-\int f_2(x)V(x)dx\right)$$

приводит общее уравнение Риккати к линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$f_2 \frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{df_2}{dx} + f_1 f_2\right) \frac{du}{dx} + f_0 f_2^2 u = 0$$

или, если разделить на  $f_2$ :

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{1}{f_2} \frac{df_2}{dx} + f_1\right) \frac{du}{dx} + f_0 f_2 u = 0. \quad (138)$$

В нашем случае

$$f_2 = -\frac{d_1 x^2 \frac{dW}{dx} + k_1}{2x \sqrt{x^2(1-W^2) - k_1^2}}, \quad f_0 = \frac{d_1 x^2 \frac{dW}{dx} - k_1}{2x \sqrt{x^2(1-W^2) - k_1^2}},$$

$$f_1 = 0.$$

Таким образом, исследование интегрируемого случая Гесса в задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц приводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка (138). Линейное дифференциальное уравнение второго порядка, к ин-

тегрированию которого приводится решение классической задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, получается из уравнения (138), если положить в нем

$$W = h - \frac{x^2}{2}, \quad \text{то есть} \quad \frac{dW}{dx} = -x.$$

Теперь предположим, что начальные условия для системы уравнений (127) выбраны таким образом, что постоянная интеграла площадей  $k_1$  равна нулю. В таком случае она будет оставаться нулевой во всё время движения. При условии  $k_1 = 0$  система уравнений (133) принимает вид:

$$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{x}{\frac{dW}{dx}} \sqrt{1 - W^2}, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = -d_1 x \cos \varphi. \quad (139)$$

Учитывая, что функция  $W$  зависит от  $x$ , первое уравнение системы (139) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, интегрируя которое, можно найти зависимость

$$x = x(\tau).$$

С учетом найденного решения первого уравнения, второе уравнение также принимает вид уравнения с разделяющимися переменными, интегрирование которого дает зависимость

$$\varphi = \varphi(\tau).$$

Отсюда получаются выражения для компонент момента  $y$  и  $z$  в зависимости от  $\tau$ :

$$y = y(\tau), \quad z = z(\tau),$$

а также выражение для компоненты  $\nu_1$  в зависимости от  $\tau$ :

$$\nu_1 = W \left( \frac{x(\tau)^2}{2} - h \right) = \nu_1(\tau).$$

Из условия равенства нулю постоянной интеграла площадей и третьего уравнения системы (127) получаем:

$$y\nu_2 + z\nu_3 = 0, \quad z\nu_2 - y\nu_3 = \frac{d\nu_1(\tau)}{d\tau},$$

откуда следует, что

$$y = -\frac{\nu_3}{1 - \nu_1^2} \frac{d\nu_1}{d\tau}, \quad z = \frac{\nu_2}{1 - \nu_1^2} \frac{d\nu_1}{d\tau}. \quad (140)$$

Из системы уравнений (140) определяются зависимости

$$\nu_2 = \nu_2(\tau) \quad \text{и} \quad \nu_3 = \nu_3(\tau).$$

Таким образом, при нулевой постоянной интеграла площадей мы можем решить систему уравнений (127) и получить зависимости всех неизвестных функций от безразмерного времени  $\tau$ .

Окончательно, можно сделать следующие выводы. Исследование интегрируемого случая Гесса в задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц сводится к решению линейного дифференциального уравнения второго порядка, так же, как и в интегрируемом случае Гесса в классической задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Как и в классической задаче, на нулевом уровне интеграла площадей возможно проинтегрировать в квадратурах дифференциальные уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц в интегрируемом случае Гесса.

## Заключение

Кратко сформулируем основные результаты диссертации.

1. Канонические уравнения движения в потоке частиц динамически несимметричного твердого тела, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения, с неподвижной точкой, лежащей на оси геометрической симметрии, не имеют третьего аналитического и аналитически зависящего от малого параметра интеграла, независимого от классических и находящегося в инволюции с интегралом площадей.

2. В задаче о движении динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения, в потоке частиц не существует случая интегрируемости, аналогичного случаю Ковалевской в классической задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.

3. Найдены значения параметров системы и констант первых интегралов, при которых регулярные прецессии динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения, с неподвижной точкой, находящейся на оси динамической и геометрической симметрии, устойчивы. Построены бифуркационные диаграммы Пуанкаре – Четаева.

4. Поиск решения системы уравнений движения для интегрируемого случая, аналогичного случаю Гесса, в задаче о движении твёрдого тела, ограниченного осесимметричной поверхностью, с неподвижной точкой в потоке частиц сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. В случае, когда постоянная интеграла площадей равна нулю, общее решение соответствующего уравнения второго порядка записывается в явном виде.

## Список литературы

- [1] *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д.* Эволюция вращений спутника, близкого к динамически сферическому, под действием моментов сил светового давления // Известия РАН. Механика твердого тела. 1996. № 2. С. 3–12.
- [2] *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Суксова С.Г., Тимошенко И.А.* Движение спутника относительно центра масс под действием гравитационных и световых моментов // Механика твердого тела. Межведомственный сборник научных трудов. 2004. Вып. 34. С. 95–105.
- [3] *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Суксова С.Г., Тимошенко И.А.* Эволюция вращений трехосного спутника, близкого к динамически сферическому, под действием гравитационных и световых моментов // Известия РАН. Механика твердого тела. 2006. № 4. С. 97–107.
- [4] *Александров П.С.* Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука. 1968. 912 с.
- [5] *Аппельрот Г. Г.* По поводу §1 мемуара С. В. Ковалевской "Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe" // Математический сборник. 1892. Т. 16. Вып. 3. С. 483–507.
- [6] *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука. 1977. 328 с.
- [7] *Баранцев Р.Г.* Взаимодействие разреженного газа с обтекаемыми поверхностями. М.: Наука. 1975. 344 с.
- [8] *Баранцев Р.Г., Цзжэнь-юй У.* Силы и моменты, действующие на тела вращения в свободномолекулярном потоке // Вестник Ленинградского университета. 1961. Вып. 13. С. 79–92.

- [9] *Бардин Б.С., Кулешов А.С.* Алгоритм Ковачича и его применение в задачах классической механики. М.: Изд-во МАИ. 2020.
- [10] *Бардин Б.С., Кулешов А.С.* Применение алгоритма Ковачича для исследования случая Гесса в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // *Динамические системы.* 2020. Т. 10. № 2. С. 197–204.
- [11] *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука. 1965.
- [12] *Белецкий В.В., Грушевский А.В., Старостин Е.Л.* Управление вращением космического аппарата с помощью давления солнечного излучения // *Известия РАН. Техническая кибернетика.* 1993. № 1. С. 32–38.
- [13] *Белецкий В.В., Яншин А.М.* Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наукова думка. 1984.
- [14] *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика. 2001.
- [15] *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: ГИТТЛ. 1955.
- [16] *Буров А.А.* Несуществование дополнительного интеграла в задаче о плоском тяжелом двойном маятнике // *Прикладная математика и механика.* 1986. Т. 50. Вып. 1. С. 168–171.
- [17] *Буров А.А., Карапетян А.В.* О движении твердого тела в потоке частиц // *Прикладная математика и механика.* 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 77–81.
- [18] *Буров А.А., Нечаев А.Н.* О неинтегрируемости в задаче о движении тяжелого двойного маятника // *Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения.* М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН. 2002. С. 128–135.

- [19] *Васильев Л.А.* Определение давления света на космические летательные аппараты. М.: Машиностроение. 1985. 206 с.
- [20] *Гусева Н.А., Кулешов А.С.* О применении теоремы В.В. Козлова для доказательства несуществования аналитических интегралов в некоторых задачах механики // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН. 2009. С. 84–109.
- [21] *Депри А.* Изучение свободного вращения твердого тела около неподвижной точки с помощью фазовой плоскости // Сборник переводов "Механика". 1968. Вып. 2. С. 3–9.
- [22] *Довбыш С.А.* Пересечение асимптотических поверхностей возмущенной задачи Эйлера – Пуансо // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. Вып. 3. С. 363–370.
- [23] *Довбыш С.А.* Некоторые новые динамические эффекты в возмущенной задаче Эйлера – Пуансо, связанные с расщеплением сепаратрис // Прикладная математика и механика. 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 215–225.
- [24] *Докшевич А.И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера – Пуассона. Киев: Наукова думка. 1992.
- [25] *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит. 2001.
- [26] *Зиглин С.Л.* Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела // Труды Московского математического общества. 1980. Т. 41. С. 287–303.
- [27] *Зиглин С.Л.* Ветвление решений и несуществование дополнительного первого интеграла в задаче о движении несимметричного тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Доклады АН СССР. 1980. Т. 251. № 4. С. 786–790.

- [28] *Зиглин С.Л.* Самопересечение комплексных сепаратрис и несуществование интегралов в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы // Прикладная математика и механика. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 564–566.
- [29] *Зиглин С.Л.* Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике I // Функциональный анализ и его приложения. 1982. Т. 16. Вып. 3. С. 30–41.
- [30] *Зиглин С.Л.* Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике II // Функциональный анализ и его приложения. 1983. Т. 17. Вып. 1. С. 8–23.
- [31] *Зиглин С.Л.* Расщепление сепаратрис и несуществование первых интегралов в системах дифференциальных уравнений типа гамильтоновых с двумя степенями свободы // Известия АН СССР. Математика. 1987. Т. 51. № 1. С. 1088–1103.
- [32] *Ивочкин М.Ю.* Необходимые условия существования дополнительного интеграла в задаче о движении тяжелого эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 75. Вып. 5. С. 858–866.
- [33] *Карапетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал URSS. 1998.
- [34] *Карапетян А.В.* Устойчивость и бифуркация движений. М.: Издательство Московского университета. 2020.
- [35] *Карымов А.А.* Определение сил и моментов сил светового давления, действующих на тело при движении в космическом пространстве // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26. Вып. 5. С. 867–876.
- [36] *Карымов А.А.* Устойчивость вращательного движения геометрически симметричного искусственного спутника в поле сил светового давления // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. Вып. 5. С. 923–930.

- [37] *Кирхгоф Г.* Механика. Лекции по математической физике. М.: АН СССР. 1962. *Kirchhoff G. R.* Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. Leipzig. 1874.
- [38] *Коган А.Ю., Кирсанова Т.С.* Вращение закрученного КА в световом потоке // Космические исследования. 1994. Т. 32. № 3. С. 74–87.
- [39] *Козлов В.В.* О несуществовании аналитических интегралов канонических систем, близких к интегрируемым // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1974. № 2. С. 77–82.
- [40] *Козлов В.В.* Геометрия переменных "действие – угол" в задаче Эйлера – Пуансо // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1974. № 5. С. 74–79.
- [41] *Козлов В.В.* Несуществование дополнительного аналитического интеграла в задаче о движении несимметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1975. № 1. С. 105–110.
- [42] *Козлов В.В.* Новые периодические решения в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 407–414.
- [43] *Козлов В.В.* Несуществование аналитических интегралов вблизи положений равновесия гамильтоновых систем // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1976. № 1. С. 110–115.
- [44] *Козлов В.В.* Расщепление сепаратрис возмущенной задачи Эйлера – Пуансо // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1976. № 6. С. 99–104.
- [45] *Козлов В.В.* Несуществование однозначных интегралов и ветвление решений в динамике твердого тела // Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 400–406.

- [46] *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // *Успехи математических наук.* 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
- [47] *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Издательство Удмуртского государственного университета. 1995. 430 с.
- [48] *Козлов В.В., Онищенко Д.А.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // *Доклады академии наук СССР.* 1982. Т. 266. № 6. С. 1298–1300.
- [49] *Комаров М.М., Сазонов В.В.* Расчет сил и моментов сил светового давления, действующих на астероид произвольной формы // *Астрономический вестник.* 1994. Т. 28. № 1. С. 21–30.
- [50] *Кулешов А.С.* Применение алгоритма Ковачича для исследования движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса // *Итоги науки и техники. Серия "Современная математика и её приложения. Тематические обзоры".* 2021. Т. 202. С. 10–42.
- [51] *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. Т. I. М.-Л.: Гостехиздат. 1950.
- [52] *Лещенко Д.Д.* Эволюция вращений трехосного тела под действием момента сил светового давления // *Известия РАН. Механика твердого тела.* 1997. № 6. С. 17–26.
- [53] *Лещенко Д.Д., Шамаев А.С.* О движении спутника относительно центра масс под действием моментов сил светового давления // *Известия АН СССР. Механика твердого тела.* 1985. № 1. С. 14–21.
- [54] *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука. 1966.
- [55] *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". 2001.
- [56] *Моауро В., Негрини П.* Хаотические траектории двойного математического маятника // *Прикладная математика и механика.* 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 892–895.

- [57] *Некрасов П. А.* К задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Математический сборник. 1892. Т. 16. Вып. 2. С. 508–517.
- [58] *Некрасов П. А.* Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Математический сборник. 1896. Т. 18. Вып. 2. С. 161–274.
- [59] *Онищенко Д.А.* Приведение к нормальной форме уравнений канонической системы, зависящей от параметра // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1982. № 3. С. 78–81.
- [60] *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики // Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 1. М.: Наука. 1971.
- [61] *Пуанкаре А.* О проблеме трех тел и об уравнениях динамики // Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 2. М.: Наука. 1972.
- [62] *Рыбникова Т.А., Трещев Д.В.* Существование инвариантных торов в задаче о движении спутника с солнечным парусом // Космические исследования. 1990. Т. 28. № 2. С. 309–312.
- [63] *Садов Ю. А.* Переменные действие – угол в задаче Эйлера – Пуансо // Прикладная математика и механика. 1970. Т. 34. Вып. 5. С. 962–964.
- [64] *Сазонов В.В.* Об одном механизме потери устойчивости режима гравитационной ориентации спутника // Институт прикладной математики АН СССР. 1988. Препринт № 107. 23 с.
- [65] *Сазонов В.В.* Движение астероида относительно центра масс под действием момента сил светового давления // Астрономический вестник. 1994. Т. 28. № 2. С. 95–107.
- [66] *Сидоренко В.В.* О вращательном движении космического аппарата с солнечным стабилизатором // Космические исследования. 1992. Т. 30. № 6. С. 780–790.

- [67] *Смейл С.* Топология и механика // Успехи математических наук. 1972. Т. 27. Вып. 2. С. 77–133.
- [68] *Татаринов Я.В.* Лекции по классической динамике. М.: Издательство Московского университета. 1984.
- [69] *Харламов П. В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 502–507.
- [70] *Харламов П. В.* Лекции по динамике твердого тела. Новосибирск: Изд-во Новосибирского ун-та. 1965.
- [71] *Чаплыгин С.А.* Новое частное решение задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1904. Т. 12. Вып. 1. С. 1–4.
- [72] *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука. 1990.
- [73] *Bardin B.S., Kuleshov A.S.* Application of the Kovacic algorithm for the investigation of motion of a heavy rigid body with a fixed point in the Hess case // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2022. V. 102. № 11.
- [74] *Brun F.* Rotation kring fix punkt. Öfversight at Kongl. Svenska Vetenskaps Akad. Förhadl. Stockholm. 1893. V. 7. P. 455–468.
- [75] *Cicalo S., Scheeres D.J.* Averaged Rotational Dynamics of an Asteroid in Tumbling Rotation under the YORP Torgue // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2010. V. 106. P. 301–337.
- [76] *Clebsch A.* Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit // Mathematische Annalen. 1871. Bd. 3. S. 238–262.
- [77] *Dullin H.R.* Melnikov's method applied to the double pendulum // Zeitschrift für Physik B - Condensed Matter. 1994. V. 93. P. 521–528.

- [78] *Enolskii V.Z., Pronine M., Richter P.H.* Double Pendulum and  $\theta$ -divisor // Journal of Nonlinear Science. 2003. V. 13. P. 157–174.
- [79] *Euler L.* De minimis oscillationibus corporum tam rigidorum quam flexilium methodus nova et facilis // Commentarii Academiae scientiarum imperiales Petropolitanae. 1734–1735 (1740). T. 7. P. 99–122.
- [80] *Hess W.* Ueber die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // Mathematische Annalen. 1890. Bd. 37. Heft 2. S. 153–181.
- [81] *Grioli G.* Moto attorno al baricentro un giroscopio soggetto a forze potenza nulla // Rend. di Math. e dilla sue appl. Univ. Roma. Ist Naz. Alta Math., 1947. № 5–6.
- [82] *Grioli G.* Sul moto di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze potenza nulla // Rend. del Sem. Math. Univ. de Padova. 1957. P. 27.
- [83] *Ivanov A.V.* Study of the double mathematical pendulum: I. Numerical investigation of homoclinic transversal intersections // Regular and Chaotic Dynamics. 1999. V. 4. № 1. P. 104–116.
- [84] *Ivanov A.V.* Study of the double mathematical pendulum: III. Melnikov's method applied to the system in the limit of small ratio of pendulums masses // Regular and Chaotic Dynamics. 2000. V. 5. № 3. P. 329–343.
- [85] *Ivanov A.V.* Study of the double mathematical pendulum: II. Investigation of exponentially small homoclinic intersections // Journal of Physics A: Mathematical and General. 2001. V. 34. Issue 49. P. 11011–11031.
- [86] *Ivanov A.V.* Study of the double mathematical pendulum: IV. Quantitative bounds on values of the system parameters when the homoclinic transversal intersections exist // Regular and Chaotic Dynamics. 2001. V. 6. № 1. P. 53–94.

- [87] *Karapetyan A. V.* On construction of the effective potential in singular cases // Regular and Chaotic Dynamics. 2000. V. 5. № 2. P. 219–224.
- [88] *Karapetyan A. V., Kuleshov A. S.* Steady Motions of Nonholonomic Systems // Regular and Chaotic Dynamics. 2002. V. 7. № 1. P. 81–117.
- [89] *Kowalevski S.* Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta Mathematica. 1889. V. 12. № 1. P. 177–232.
- [90] *Kowalevski S.* Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta Mathematica. 1890. V. 14. № 1. P. 81–93.
- [91] *Plakhov A. and Gouveia P.* Problems of maximal mean resistance on the plane // Nonlinearity. 2007. V. 20, P. 2271–2287.
- [92] *Plakhov A. and Tchemisova T.* Force acting on a spinning rough disk in a flow of noninteracting particles // Dokl. Math. 2009. V. 79, P. 132–135.
- [93] *Poinsot L.* Theorie nouvelle de la rotation des corps // Journal de Mathématique pures et appliquées. 1851. T. 16. P. 9–130.
- [94] *Salvadori L.* Un osservazione su di un criteria di stabilita del Routh // Accad. sci. fis. math. Napoli (4). 1953. V. 20. P. 267–272.
- [95] *Scheeres D. J. and Mirrahimi S.* Rotational Dynamics of a Solar System Body under Solar Radiation Torques // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2008. V. 101. P. 69–103.
- [96] *Кулешов А. С., Гаджиев М. М.* Задача о движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XXI Международной конференции (Нижний Новгород, 22–26 ноября 2021 г.). Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета. 2021. С. 191–196.
- [97] *Кулешов А. С., Гаджиев М. М.* Задача о движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц // Вестник Санкт-Петербургского уни-

- верситета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 3. С. 550–560.
- [98] *Гаджиев М.М., Кулешов А.С.* О движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2022. № 3. С. 58–68.
- [99] *Гаджиев М. М., Кулешов А. С.* Задача о движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого). Материалы XVI Международной конференции. 1–3 июня 2022 г, Москва. М.: ИПУ РАН. 2022. С. 111–114.
- [100] *Гаджиев М.М., Кулешов А.С.* Необходимые условия существования дополнительного интеграла в задаче о движении в потоке частиц твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2023. № 2. С. 40–46.
- [101] *Гаджиев М.М., Кулешов А.С.* Об устойчивости стационарных движений тела с неподвижной точкой в потоке частиц // Труды МАИ. 2023. № 129. С. 1–20.
- [102] *Gadzhiev M.M., Kuleshov A.S.* Nonintegrability of the Problem of the Motion of an Ellipsoidal Body with a Fixed Point in a Flow of Particles // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2022. V. 18. № 4. P. 629–637.
- [103] *Gadzhiev M.M., Kuleshov A.S.* The Problem of Motion of a Rigid Body with a Fixed Point in a Flow of Particles // 16th International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems"(Pyatnitskiy's Conference), Moscow, Russian Federation. IEEE. 2022. P. 1–4.
- [104] *Kuleshov A. S., Gadzhiev M. M.* Nonintegrability of the Problem of Motion of an Ellipsoidal Body with a Fixed Point in a Flow of Particles // Balandin, D., Barkalov, K., Meyerov, I. (eds) Mathematical Modeling and

Supercomputer Technologies. MMST 2022. Communications in Computer and Information Science. 2022. V. 1750. P. 1–12. Springer: Cham.