

ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации А. Н. Калинина
«Связь задач Монжа и Канторовича»,
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико–математических наук
по специальности 1.1.1 – вещественный, комплексный
и функциональный анализ

Представленная работа А. Н. Калинина является исследованием в области теории меры и функционального анализа. Ее цель — изучение связей между задачами оптимальной транспортировки мер в формах Монжа и Канторовича. Тематика диссертации относится к интенсивно развивающемуся сейчас направлению функционального анализа на стыке с теорией меры, теорией экстремальных задач и стохастическим анализом.

Актуальность исследования задач оптимальной транспортировки мер в бесконечномерных пространствах обусловлена расширяющимся применением математических методов анализа распределения ресурсов и транспортных потоков с большим числом параметров и степеней свободы, что во многих ситуациях ведет к целесообразности рассмотрения таких систем как бесконечномерных. Исследования в близких к диссертации направлениях проводятся в ведущих научных центрах мира, по этой тематике регулярно выходят публикации в центральных математических журналах.

Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 7 параграфов, заключения и списка цитируемой литературы. Во введении дан обзор по теме работы и сформулированы ее основные результаты. Задачи Монжа и Канторовича имеют одни и те же исходные данные, а именно радоновские вероятностные меры μ и ν на вполне регулярных топологических пространствах X и Y соответственно, а также ограниченную непрерывную функцию стоимости h на $X \times Y$. Задача Монжа состоит в минимизации интеграла от функции $h(x, T(x))$ по мере μ на классе всех борелевских отображений, переводящих μ в ν . В задаче Канторовича минимизируется интеграл от функции h по радоновским вероятностным мерам σ на $X \times Y$ с проекциями μ и ν на сомножители (такие меры называются планами). Эта задача линейна, причем в ней достигается минимум, в то время как в задаче Монжа минимума может не быть, а есть лишь инфимум. Всякое отображение T меры μ в меру ν порождает некоторый план σ , а именно образ μ на графике T . Поэтому минимум Канторовича не меньше инфимума Монжа. Как было показано А. Прателли для метрических пространств и А. А. Липчюсом для суслинских пространств, в случае безатомической меры μ имеет место равенство минимума Канторовича и инфимума Монжа. Естественно возник вопрос об условиях на пространства и меры, при которых для всех ограниченных непрерывных функций стоимости выполнено такое равенство. Диссертация А. Н. Калинина посвящена решению этой проблемы.

Первая глава посвящена построению примера безатомических радоновских вероятностных мер на компактах, первую из которых можно отобразить на вторую, но для некоторой непрерывной функции стоимости значения в задачах Монжа и Канторовича различны.

Вторая глава посвящена нахождению достаточных условий для равенства значений в задачах Монжа и Канторовича с непрерывной функцией стоимости. Основной ее результат дает в определенном смысле неулучшаемое условие равенства, из которого вытекает простое и эффективное для приложений достаточное условие: обе меры сепарабельны, причем первая не имеет атомов. Ввиду примера из первой главы это дает исчерпывающее решение проблемы.

Третья глава посвящена задачам так называемой теории локализации, которая тесно связана с задачами Монжа и Канторовича и имеет множество приложений в геометрических задачах теории меры. Большой интерес здесь представляют локализация гиперболических мер и описание крайних точек семейств некоторых классов вогнутых мер. В этой главе дано обобщение локализационной теории и усилены результаты известных специалистов, в том числе С. Г. Бобкова. Первый основной результат главы — описание крайних точек семейства вогнутых мер, для которых интегралы от заданного конечного набора полунепрерывных снизу функций положительны. Второй основной результат касается метода нахождения локализующей меры. Ранее известный метод бисекций для нахождения локализующей меры на пространстве Фреше с борелевской вероятностной мерой и положительными интегралами от двух заданных полунепрерывных снизу функций обобщен на случай произвольного конечного числа функций.

Основные результаты диссертации состоят в следующем.

1. Получены достаточные условия равенства значений в задачах Монжа и Канторовича на бесконечномерных вполне регулярных топологических пространствах с радоновскими вероятностными мерами для непрерывной функцией стоимости. В частности, достаточно, чтобы меры были сепарабельными безатомическими.

2. Построен пример компактного пространства с безатомическими вероятностными мерами и непрерывной функцией стоимости, для которых значения в задачах Монжа и Канторовича не совпадают, причем в обеих задачах достигается минимум.

3. Получено описание крайних точек семейств логарифмически вогнутых мер на бесконечномерных пространствах с произвольным конечным числом ограничений.

4. Построено обобщение метода локализации гиперболических мер на пространствах Фреше на случай произвольного конечного числа ограничивающих функций.

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и обоснованы в виде строгих математических доказательств.

По теме диссертации опубликованы 3 статьи в журналах из баз данных WoS и Scopus.

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались на научно-исследовательском семинаре «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В. И. Богачева, Н. А. Толмачева, С. В. Шапошникова (2017–2022 г.), международном научно-исследовательском семинаре “Infinite-dimensional stochastic analysis” в университете г. Билефельда, Германия (2018, 2019 г.). Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, МГУ, 2018, 2019, 2020 г.), Международной конференции “Infinite-dimensional analysis” (Казальмаджоре, Италия (2016 г.), Международной конференции “Infinite-dimensional analysis and mathematical physics” (Москва, МГУ, 2019 г.), Международной конференции “Recent advances in mass transportation” (Москва НИУ ВШЭ, 2019 г.),

Третьей Санкт-Петербургской зимней молодежной конференции по теории вероятностей и математической физике (Санкт-Петербург, ПОМИ РАН, 2019 г.) и Международная конференции “New frontiers in high-dimensional probability and applications to machine learning” (Сочи, Сириус, 2021 г.).

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных вопросах теории меры, функционального анализа, нелинейного анализа и стохастического анализа. Результаты и методы работы А. Н. Калинина будут востребованы в исследованиях, проводимых в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН, НИУ «Высшая школа экономики», Институте проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Санкт-Петербургском государственном университете, Новосибирском государственном университете, Институте динамики систем и теории управления СО РАН.

Таким образом, в диссертационной работе А. Н. Калинина «Связь задач Монжа и Канторовича» решен ряд актуальных и трудных задач теории меры и функционального анализа. Эта работа удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» и рекомендуется к защите в диссертационном совете МГУ.011.3.

Доктор физико-математических наук, член-корр. РАН,
профессор кафедры теории функций и функционального анализа
механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова,
(119991, Ленинские горы, 1, МГУ, Главное здание,
механико-математический факультет,
тел. +74959391244, факс +74959392090
email: mmmf@mech.math.msu.su, сайт <http://www.math.msu.su/>)
доктор физико-математических наук, профессор
(тел. +74959393680, email: vibogach@mail.ru)

В. И. Богачев

Подпись профессора В. И. Богачева удостоверяю
Декан механико-математического факультета МГУ,
член-корр. РАН, профессор

А. И. Шафаревич