**ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук Майорова Петра
Александровича на тему: «Математическое моделирование
стратифицированных течений жидкости со свободной границей в
негидростатическом приближении»
по специальности 1.2.2 Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ**

Диссертационная работа Петра Александровича Майорова посвящена разработке методологически-технологического инструментария для моделирования динамики жидкости. Актуальность данной тематики и её важность не вызывает сомнений, поскольку достаточно большое количество отраслей науки и техники так или иначе связана с необходимостью получения разного рода информации о состоянии водной среды. Это необходимо как для целей народного хозяйства, так и для повышения уровня знаний о процессах, происходящих в природе и влияющих на состояние окружающей среды и, в частности, климатической системы. При этом данные натурных изменений, как правило, фрагментированы по пространству и времени. Одним из способов получения дополнительной информации о состоянии атмосферы и гидросферы является математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Именно этот подход позволяет оценить сложную трёхмерную структуру динамики жидкости, а вычислительные системы на основе комбинации моделирования и усвоения данных наблюдений дают наилучшие результаты.

Важным этапом при построении моделирующих систем является разработка качественных численных методов, которые позволяют решать с достаточной точностью систему уравнений в частных производных, описывающую поведение жидкости, и дают результаты, приближенные к реальным, обладая, с другой стороны, достаточным быстродействием для решения практических задач в тех условиях, в которых они возникают. Под условиями понимаются как пространственно-временные масштабы, учёт которых необходим при разработке конкретных методов для возможности учёта конкретных физических процессов, так и возможность получения с помощью разработанных технологий результатов требуемого качества за требуемое время.

Основное содержание диссертационной работы П.А. Майорова посвящено разработке эффективных и качественных алгоритмов решения задач динамики жидкости. Самыми трудными для решения до сих пор остаются задачи для процессов гиперболического типа: волн и, в особенности, переноса субстанции. Последнему посвящено множество работ, в которых приводятся попытки достичь целого спектра свойств, важных при моделировании адвекции: монотонности, низкой диссипативности, транспортивности и пр. В работе предлагается использовании алгоритма «Кабаре», разрабатываемого в течении многих лет в ИБРАЭ РАН и основанном на применении балансно-характеристического подхода. Данный алгоритм хорошо зарекомендовал себя при решении ряда задач динамики жидкостей и газов, и его распространение на масштабы геофизической гидродинамики, или хотя бы попытка сделать это, несомненно, заслуживает положительной оценки. Одними из характерных особенностей реализации, предложенных автором, являются использование гибридных Эйлерово-Лагранжевых координат, упрощающих применение балансно-характеристического подхода, приближение слабой сжимаемости, позволяющее достичь свойства гиперболичности решаемой задачи, и реализация явно-неявного алгоритма в вертикальном направлении, позволяющего повысить устойчивость задачи и использовать более высокий шаг по времени. Результаты тестовых расчётов для двумерного, а затем и трёхмерного случая, сравниваются с результатами лабораторных экспериментов, и, наконец, разработанные технологии применяются для расчёта циркуляции Чёрного и Азовского морей, результаты которого демонстрируют воспроизведение известных особенностей структуры морских течений данной акватории.

Основные замечания к тексту диссертационной работы следующие.

1. Как сказано во «Введении» (стр. 6), уравнения Навье-Стокса позволили заложить теоретическую основу для моделирования течений жидкости в водных системах, и это действительно так. Однако, в фактической основе моделей океана лежат не уравнения Навье-Стокса, как это утверждается во «Введении» и многократно в тексте. Уравнения Навье-Стокса описывают динамику жидкости относительно мелких масштабов с молекулярной вязкостью, уравнения же крупномасштабной гидродинамики для параметризации мелкомасштабной физики используют гипотезу турбулентного замыкания Рейнольдса, имя которого эти уравнения и носят.

2. Утверждается (стр. 7), что гидростатическое приближение не позволяет моделировать течения с сильным вертикальным перемешиванием. Это не совсем так. Большинство задач геофизической гидродинамики решается с использованием данного приближения, в том числе, с описанием сильного перемешивания, но косвенными методами, а не прямым возбуждением вертикальной скорости из-за гидростатической неустойчивости. Здесь речь скорее о пространственно-временных масштабах, которые можно описать в рамках гидростатики, но это можно отнести к неточности формулировки.

3. Скорее терминологический нюанс, но в геофизической гидродинамике понятие «конвекция» употребляется только к движению вод, обусловленное гидростатической неустойчивостью. Для обозначения процессов переноса течениями в целом используется более общий термин «адвекция».

4. В разделе 1.1 (стр. 17) следовало уточнить, что температура в данной системе уравнений используется не стандартная in situ, а потенциальная, по своему определению инвариантная относительно адиабатического сжатия воды, что позволяет её описывать как консервативную переменную. В противном случае, в уравнения необходимо включать члены, описывающие изменение температуры воды из-за изменения давления, что значительно усложнило бы задачу. В условиях морей и океанов, особенно при глубинах 1 км и более, сжатие воды играет существенную роль.

5. Пояснении к правым частям системы 1.1: с математической точки зрения, силы ветрового, а также придонного напряжений должны входить в систему уравнений через граничные условия, а не через правые части. При этом сила Кориолиса, как и донное трение, вообще не являются внешним воздействием, а представляют собой внутренние силы гидродинамической системы, поэтому, с формальной точки зрения, выносить инерционные слагаемые в правую часть не совсем корректно. Разумеется, при численном решении все источники в граничных условиях в итоге формулируются в терминах правых частей, а внутренние связи – в терминах коэффициентов, но данный раздел всё-таки посвящён дифференциальной постановке.

6. В формулах 1.2, вероятно, допущены технические ошибки в диффузионных операторах для температуры и солёности, которые не должны содержать компонентов скоростей. Кроме того, используемая запись операторов вязкости является простым обобщением оператора диффузии для скалярных величин на компоненты вектора, что, хоть и гарантирует свойство диссипативности оператора в терминах кинетической энергии, не обеспечивает отсутствие вязких сил в случае твердотельного вращения жидкости (за исключением случая постоянного по пространству коэффициента вязкости).

7. При приведении в подобного рода документах системы уравнений, описывающей некоторую динамическую систему, крайне полезным бывает формулировка закона сохранения её полной энергии, которому удовлетворяет данная система. Перед реализацией численных алгоритмов важно понимать, что, как минимум, в дифференциальной постановке задачи при отсутствии внешних сил и внутренней диссипации обеспечивается сохранение энергии в определённых смыслах и нормах.

8. Замечание, аналогичное тому, где сказано о потенциальной температуре. В системе 1.1 плотность в уравнении состояния не зависит от давления, что некритично для мелкой воды, но существенно при глубинах от 1 км и более.

9. Если речь идёт о математической постановке задачи (раздел 1.1), то встаёт вопрос о том, в какой области рассматривается система уравнений, какими границами ограничена эта область, и какие условия ставятся на этих границах для всех переменных, для которых эти условия требуются. Так, не приводятся условия для температуры и солёности на поверхности и дне, а на боковой границе условия не приводятся вообще, если, конечно, эта граница вообще предусмотрена в данной постановке.

10. В граничном условии на дне (1.4) ошибочно используются модули компонентов скорости, в то время как сила придонного трения является вектором, направление которого противоположно направлению придонной скорости, составляющие которой могут быть разных знаков.

11. При реализации неявных алгоритмов особенно важно знать свойства оператора задачи. В уравнениях математической физики, операторы, как правило, либо кососимметричные, либо положительно определённые, которые являются неотрицательными в квадратичной норме. При выделении задачи по отдельному направлению (в данном случае, по вертикали) важно, чтобы свойства исходного оператора не ухудшались, иначе устойчивость решения не гарантирована. Если положительно определённый диффузионный оператор остаётся диссипативным для каждого направления и при расщеплении по координатам, то кососимметричные адвективный или волновой операторы, будучи энергетически нейтральными в трёхмерном случае, требуют (как минимум, в конечноразностной постановке) записи в особом виде (полусуммы Лагранжевой и Эйлеровой форм), в противном случае (при использовании чисто градиентной или чисто дивергентной форм) в дискретном представлении оператора есть диагональный член от дивергенции компонента скорости по данному направлению, что в случае положительного частичного баланса объёма делает оператор неустойчивым, а в случае отрицательного – диссипативным. Поэтому важно проверить, что выделенный оператор в вертикальном направлении при неявных переменных удовлетворяет свойству неотрицательности. В целом, при численном

моделировании важно обоснование устойчивости всех используемых алгоритмов вообще.

12. В задаче по расчёту циркуляции Чёрного моря не указано, с каким шагом по времени считалась задача. Эта информация важна для оценки вычислительной эффективности разработанного автором алгоритма по сравнению с уже существующими моделями данной акватории.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования и вызваны лишь тем, что в ней излишне подробно говорится про постановку задачи циркуляции морей и океанов. Очевидно, что для автора, основное направление деятельности которого связано с разработкой численных методов решения системы уравнений для динамики жидкости, область геофизической гидродинамики является относительно новой. Поэтому при её детальном освещении в тексте работы неизбежны неточные или неверные формулировки ряда аспектов, осознание которых возможно лишь при наличии достаточного опыта работы в данной области. Излишнее уделение внимания деталям в (пока ещё) малознакомой области может в некоторой степени отвлекать от заслуг соискателя в хорошо знакомой ему области, причём эти заслуги существенны. Работа как показатель уровня квалификации, без сомнения, выполнена на высоком научном уровне и располагает к дальнейшему, уже более глубокому знакомству диссертанта с областью моделирования океанов и морей и эффективному внедрению разработанных им технологий для решения больших научных и практических задач.

Исходя из вышесказанного, считаю, что диссертация П.А. Майорова отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Положения, выносимые на защиту, научные выводы и рекомендации обоснованы в достаточной степени. Содержание диссертации соответствует специальности 1.2.2 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (по физико-математическим наукам), а также критериям, определённым пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении учёных степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель Майоров Петр Александрович заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Официальный оппонент:

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук

ГУСЕВ Анатолий Владимирович [redacted]

21 марта 2025 г.

Контактные данные:

тел.: +7(903)246-71-87, e-mail: anatoly.v.gusev@gmail.com
Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:
05.13.18 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Адрес места работы:

119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук
Тел.: +7(495)984-81-20; e-mail: director@inm.ras.ru

Подпись сотрудника ИВМ РАН А.В. Гусева удостов[redacted]

Учёный секретарь ИВМ РАН [redacted] В.П. Шутяев

21 марта 2025 [redacted]