

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА  
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*На правах рукописи*

**Широков Илья Евгеньевич**

**Автоматизация вычислений квантовых поправок в  
суперсимметричных теориях**

Специальность 1.3.3. — теоретическая физика

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физ-мат наук  
Степаньянц Константин Викторович

МОСКВА — 2022

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>4</b>
1.1	Обзор литературы, актуальность темы исследования . . .	4
1.1.1	Суперсимметрия в физике высоких энергий . . . . .	4
1.1.2	Квантовые свойства суперсимметричных теорий . .	7
1.1.3	Вычисление суперграфов на компьютере . . . . .	10
1.2	Цели и задачи работы . . . . .	13
1.3	Научная новизна . . . . .	13
1.4	Объект исследования . . . . .	14
1.5	Методы исследования . . . . .	14
1.6	Положения, выносимые на защиту . . . . .	14
1.7	Теоретическая и практическая значимость . . . . .	15
1.8	Достоверность и обоснованность результатов . . . . .	16
1.9	Личный вклад соискателя . . . . .	16
1.10	Апробация результатов . . . . .	17
1.11	Объем и структура диссертации . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Вычисления в формализме <math>\mathcal{N} = 1</math> суперполей</b>	<b>20</b>
2.1	Формализм $\mathcal{N} = 1$ суперпространства . . . . .	20
2.2	$\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная теория Янга-Миллса . . . . .	21
2.3	Вычисление вклада в аномальную размерность духов Фаддеева-Попова . . . . .	24
2.4	Явная проверка теоремы о неперенормировке тройной духово-калибровочной вершины . . . . .	28
2.5	Вычисление вклада в трёхпетлевую бета-функцию и про- верка части NSVZ-соотношения . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Программа для вычисления суперграфов</b>	<b>36</b>
3.1	Суперсимметричная “D-алгебра” . . . . .	36
3.2	Алгоритм, реализуемый программой . . . . .	37
3.3	Синтаксис программы . . . . .	40

3.4	$\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная электродинамика с $N_f$ ароматами	44
3.5	Примеры входного файла . . . . .	46
3.6	Результаты . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Вычисление трехпетлевой аномальной размерности и четырехпетлевой <math>\beta</math>-функции для <math>\mathcal{N} = 1</math> суперсимметричной квантовой электродинамики</b>	<b>54</b>
4.1	Ренормгрупповые функции в суперсимметричной электродинамике . . . . .	54
4.2	Трехпетлевая аномальная размерность и четырехпетлевая $\beta$ -функция, определенные в терминах голых констант связи	55
4.3	Трехпетлевая аномальная размерность, определенная в терминах перенормированных констант связи . . . . .	60
4.4	Четырехпетлевая $\beta$ -функция, определенная в терминах перенормированных констант связи . . . . .	63
4.5	NSVZ соотношение для РГФ, определенных в терминах перенормированной константы связи . . . . .	66
4.6	Устранение схемно-зависимых слагаемых конечной перенормировкой во всех петлях . . . . .	67
	<b>Заключение</b>	<b>73</b>
<b>A</b>	<b>Интегралы необходимые для вычисления трехпетлевой аномальной размерности</b>	<b>76</b>
A.1	Интегралы, которые не содержат $N_f$ . . . . .	76
A.2	Интегралы линейные по $N_f$ , содержащие вставку однопетлевого поляризационного оператора . . . . .	80
A.3	Интегралы линейные по $N_f$ , содержащие вставку двухпетлевого поляризационного оператора . . . . .	84
A.4	Интегралы, квадратичные по $N_f$ . . . . .	88
A.5	Результат . . . . .	90
	<b>Литература</b>	<b>92</b>

# Глава 1

## Введение

Диссертация основана на результатах работ [1–11] и посвящена вычислениям квантовых поправок в  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных теориях, в том числе с помощью созданного автором программного обеспечения.

### 1.1 Обзор литературы, актуальность темы исследования

#### 1.1.1 Суперсимметрия в физике высоких энергий

Суперсимметричные теории являются одними из самых многообещающих теорий в современной физике частиц. С момента своего открытия [12–14] принцип гипотетической симметрии между фермионными и бозонными степенями свободы находился под пристальным вниманием исследователей в области квантовой теории поля [15–17] и физики высоких энергий. В ходе развития теории [18–21] стало понятно, что на основе принципа суперсимметрии можно попытаться создать реальную физическую модель. Одной из самых перспективных моделей является так называемая Минимальная Суперсимметричная Стандартная модель (МССМ) [22], которая есть прямое суперсимметричное расширение Стандартной модели (СМ) элементарных частиц. Эта модель может претендовать на объяснение большинства физических явлений [22–25].

Хорошо известно [26], что константы связи полей Янга-Миллса из-за процедуры перенормировки меняются при изменении энергетического масштаба. Более того оказывается, что в СМ, которая содержит поля, лежащие в различных представлениях группы  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , три константы взаимодействия  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ , соответствующие группам  $SU(3)$ ,

$SU(2)$ ,  $U(1)$ , сходятся по энергии приблизительно в одну точку. Она лежит на уровне энергетического масштаба  $10^{15}$  ГэВ. Этот факт породил целый ряд теорий [27–33], называемых Теориями Великого Объединения (ТВО). В ТВО, как правило, пытаются, используя какую-либо простую группу (например  $SU(5)$  или  $SO(10)$ ), показать, как теория с одной константой связи переходит в результате некоего нарушения симметрии в СМ. Однако существует проблема. Дело в том, что с увеличением точности эксперимента стало понятно, что на самом деле константы сбегаются не в точку а лишь в некоторую область, как показано на Рис. 1.1 [34].

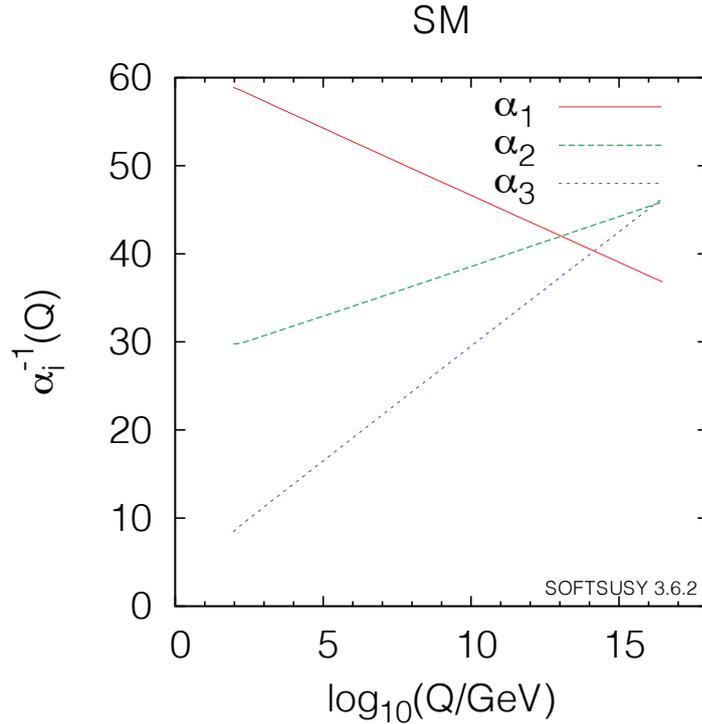


Рис. 1.1: Ренормгрупповое поведение бегущих констант связи в Стандартной модели

Удивительным образом эта проблема решается в рамках МССМ. Оказывается, что в суперсимметричных теориях возникает большое количество новых частиц — суперпартнеров. Их массы достаточно велики, и они пока не наблюдались экспериментально. Однако их наличие дает дополнительный вклад при вычислении констант связи, а поэтому немного меняет картину их сбегания. Если положить порог возникновения вкладов суперпартнеров равным примерно 2 ТэВ, то ренормгрупповое поведение имеет вид, представленный на Рис. 1.2 [34]. Видно, что константы связи действительно сходятся в точку со значительно лучшей точностью. Этот

факт косвенно подтверждает, что именно суперсимметричный вариант ТВО реализуется в природе.

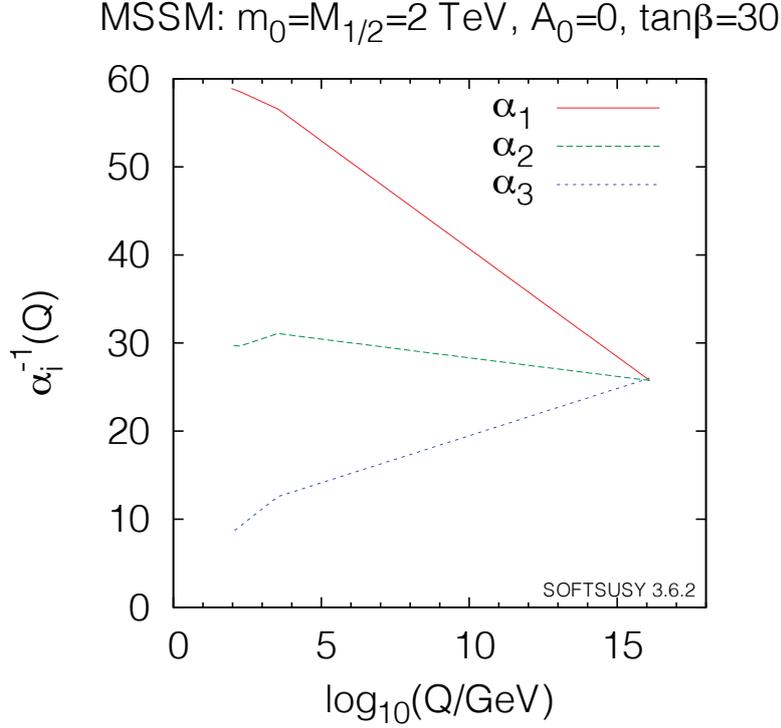


Рис. 1.2: Ренормгрупповое поведение бегущих констант связи в МССМ

ТВО также известны тем, что в них может нарушаться закон сохранения барионного числа. В этих теориях появляются новые по сравнению со СМ члены взаимодействия, которые могут приводить к распаду протона. Нередко рассматривают следующие две гипотетические моды распада протона [34].

$$p \rightarrow e^+ \pi^0, \quad p \rightarrow K^+ \bar{\nu} \quad (1.1)$$

Распад протона пока не наблюдался экспериментально. Один из самых известных экспериментов по его поиску— Супер-Камиокандэ, даёт следующие ограничения на время жизни протона [35, 36]:

$$\tau_p / \text{Br}(p \rightarrow e^+ \pi^0) > 1.67 \times 10^{34} \text{ лет}, \quad \tau_p / \text{Br}(p \rightarrow K^+ \bar{\nu}) > 6.61 \times 10^{33} \text{ лет} \quad (1.2)$$

Эти ограничения больше, чем те значения, которые получаются теоретически, исходя из обычных ТВО, которые однако уже практически не рассматриваются в силу того, что константы связи не сходятся в точку [34]. В суперсимметричных расширениях ТВО время жизни протона

оказывается пропорциональным четвертой степени масштаба Великого Объединения. Так как масштаб объединения в МССМ (см. Рис. 1.2) больше на порядок (то есть  $10^{16}$  ГэВ), то время жизни протона возрастает сразу на 4 порядка. Однако не во всех суперсимметричных теориях это так. Например, в  $SU(5)$  МССМ время жизни по каналу с Каоном (1.1) оказывается  $\approx 10^{31}$  лет, что меньше ограничения (1.2). Существуют различные другие ТВО, которые дают время жизни на порядок больше, чем позволяет увидеть эксперимент (1.2) (см. [34] и ссылки в ней). В будущем проекте Гипер-Камиокандэ [37] планируется достичь этого значения, и тогда более детальная проверка станет возможной.

Суперсимметрия также позволяет решить проблему с массой бозона Хиггса в СМ. Дело в том, что квантовые поправки к ней квадратично расходятся, что приводит к тому, что на больших энергиях эти поправки также становятся огромны. Можно подобрать параметры так, чтобы этого не случилось, однако это крайне неестественный прием. В МС-СМ эти квадратичные расходимости сокращаются, квантовые поправки к массе хиггсовского бозона делают её сравнимой с экспериментальным значением [39].

Наконец, ещё одним интересным свойством ряда суперсимметричных теорий, является закон сохранения  $R$ -четности. Этот закон приводит к тому, что при распаде любого суперпартнера среди продуктов распада обязательно должен быть суперпартнер. Таким образом легчайший суперпартнер (нейтралино) должен быть стабильным [40]. Это может стать объяснением природы тёмной материи в космологии.

Таким образом, нужно отметить, что несмотря на то, что суперсимметрия не была пока подтверждена в экспериментах на ЛНС, суперсимметричные теории дают очень простое и элегантное объяснение различным явлениям физики за пределами Стандартной Модели.

### 1.1.2 Квантовые свойства суперсимметричных теорий

Для изучения различных феноменологических свойств суперсимметричных теорий (например, для анализа ренормгруппового поведения констант связи) их, разумеется, нужно рассматривать на квантовом уровне. Для этого существует хорошо развитый аппарат квантовых вычислений [41]. Наиболее удобным и простым способом рассмотрения суперсимметричных теорий на квантовом уровне является применение

формализма суперполей и суперпространства [41]. Рассматривая суперсимметричные теории на квантовом уровне, можно убедиться, что они обладают очень хорошим поведением в области больших импульсов [41–44]. Так, например,  $\mathcal{N} = 4$  теория Янга-Миллса [45, 46] имеет равную нулю  $\beta$ -функцию [47–51], а  $\mathcal{N} = 2$  теории не имеют расходимостей за пределами одной петли [48, 51, 52]. В  $\mathcal{N} = 1$  теориях, в общем случае, расходимости присутствуют во всех петлях, однако, есть некоторые утверждения, связанные с конечностью определенных величин. Такие утверждения называются теоремами о перенормировке. Самая известная из них — это теорема о перенормировке суперпотенциала [53].

Одним из самых интересных утверждений такого рода является так называемое NSVZ-соотношение [54–57], которое связывает  $\beta$ -функцию и аномальную размерность суперполей материи. Оно имеет вид:

$$\frac{\beta(\alpha, \lambda)}{\alpha^2} = -\frac{3C_2 - T(R) + C(R)_i^j (\gamma_\phi)_j^i(\alpha, \lambda)/r}{2\pi(1 - C_2\alpha/2\pi)}, \quad (1.3)$$

где  $r \equiv \dim G$ ,  $C(R)_i^j \equiv (T^A T^A)_i^j$  и  $C_2 \equiv T(\text{Adj})$ .

Несмотря на то, что это соотношение было получено самыми различными способами [54–59], строгий его вывод долгое время был затруднен. Дело в том, что квантовые свойства суперсимметричных теорий очень чувствительны к схеме перенормировки которая, в частности, включает выбор регуляризации и способ устранения расходимостей. При этом, например, размерная регуляризация [60–63] явно нарушает суперсимметрию [64]. Размерная редукция [65] является математически противоречивой [66, 67] и в некоторых ситуациях также нарушает суперсимметрию [68–71]. Кроме того, ряд вычислений, [72–76] выполненных в размерной редукции со схемой минимальных вычитаний [77] ( $\overline{\text{DR}}$ -схема) показал, что в такой схеме формула (1.3) не справедлива. Однако все же с помощью наложения определенных условий на параметры перенормировки можно показать, что NSVZ-соотношение справедливо в 3 и 4 петлях [72–75]. Долгое время оставался открытым вопрос, как получить такую схему перенормировки, в которой это соотношение было бы справедливо в любой петле.

Решить эту проблему можно, применяя метод высших ковариантных производных [78, 79]. Этот метод регуляризации состоит в том, что к лагранжиану добавляются некоторые члены, содержащие высшие производные. При этом эту процедуру можно провести, работая в терминах

суперполей, что позволяет явно сохранить суперсимметрию [80, 81]. В качестве недостатка этого метода можно упомянуть, что он не работает в одной петле, поэтому теорию необходимо дополнить детерминантами Паули-Вилларса [82]. Вычисления, проводимые в рамках этого метода, позволили установить ряд интересных свойств суперсимметричных теорий. Во-первых, было установлено, что в суперсимметричной квантовой электродинамике (SQED) вклады в  $\beta$ -функцию можно представить, как интегралы от двойных полных производных [83, 84]. Этот факт даёт возможность снять интегрирование по одному из петлевых импульсов. Оказывается, что получившийся результат соотносится со вкладом в аномальную размерность в точности в соответствии с формулой NSVZ для электродинамики:

$$\beta(\alpha) = \frac{\alpha^2 N_f}{\pi} (1 - \gamma(\alpha)), \quad (1.4)$$

Кроме того, легко понять графическую интерпретацию этого факта. Вклад в  $\beta$ -функцию дается диаграммой, в которой две линии фонового калибровочного поля всеми различными способами присоединяются к определенному вакуумному суперграфу. Если рассмотреть подобный вакуумный суперграф, то процедуру снятия двойной полной производной можно представить как разрезание соответствующего пропагатора материи. Получившийся в итоге граф даёт определенный вклад в аномальную размерность полей материи. Используя эти наблюдения, в конечном счёте удалось доказать справедливость формулы (1.4) для ренормгрупповых функций (РГФ), определенных в терминах голой константы связи [85].

В суперсимметричной теории Янга-Миллса также наблюдается факторизация в двойные полные производные [86–91]. Однако прямой связи аномальной размерности в предыдущем порядке с  $\beta$ -функцией, как в SQED в формуле (1.3), не прослеживается. К счастью, в работе [92] было показано, что с помощью специальной теоремы о неперенормировке тройных духово-калибровочных вершин (явная проверка этой теоремы выполнялась в работах [4, 5], часть вычислений в них проводилась автором и рассматривается в данной диссертации) эту формулу можно переписать в другом виде:

$$\frac{\beta(\alpha, \lambda)}{\alpha^2} = -\frac{1}{2\pi} \left( 3C_2 - T(R) - 2C_2\gamma_c(\alpha, \lambda) - 2C_2\gamma_V(\alpha, \lambda) + \frac{1}{r} C(R)_{i^j}(\gamma_\phi)_j^i(\alpha, \lambda) \right), \quad (1.5)$$

где  $\gamma$  с различными индексами обозначают аномальные размерности калибровочного поля, духов Фаддеева–Попова и суперполей материи. Этот факт даёт возможность провести такой же всепетлевой анализ для неабелевых теорий, какой был проведён в электродинамике. Кроме того, графическая интерпретация действия двойных полных производных такая же, как и в электродинамике, их действие на какой-либо пропагатор будет давать вклад, связанный с вкладом в аномальную размерность "разрезанного" поля. При этом оказывается, что саму  $\beta$ -функцию можно вычислять некоторым новым способом [93]. Он состоит в том, что вычисляются вакуумные графы, а затем посредством действия на них специального дифференциального оператора из двойных полных производных, получаются вклады в  $\beta$ -функцию. Этот метод был применен для ряда вычислений как в неабелевой, так и в абелевой теории [2, 3, 93, 94], и всегда давал результат, согласованный с (1.5), а также с общими теоремами о калибровочной инвариантности  $\beta$ -функции [95–99]. Вычисления из работ [2, 3] рассматриваются в данном диссертационном исследовании. Наконец, переписанное в форме (1.5) NSVZ соотношение для неабелевых теорий было доказано во всех порядках теории возмущений при условии, что РГФ переписаны в терминах голых констант связи, а в качестве регуляризации применен метод высших производных [100].

### 1.1.3 Вычисление суперграфов на компьютере

Все упомянутые выше вычисления, некоторые из которых проводились непосредственно автором, отличаются высокой степенью сложности. В первую очередь, это связано с крайне непростым формализмом суперполей [41], в рамках которого проводились расчеты. Кроме того, возникает вопрос, связанный с генерацией диаграмм Фейнмана, который в данном случае также имеет свою специфику.

Попытки создать программное обеспечение для вычислений по теории возмущений в рамках квантовой теории поля предпринимаются уже более пятидесяти лет (см. например [101–104], а также обзор [105]). Разумеется, ранние программы были очень ограничены, как правило, рассматривалась только квантовая электродинамика. Во многом ограничением для развития таких программ была крайне низкая производительность машин того времени. Однако в 90-е годы началось бурное развитие такого рода программного обеспечения. Некоторые программы, созданные в то время, не потеряли актуальности до сих пор (например [106–109]).

Различные программы для вычислений в физике высоких энергий можно разделить на несколько групп. Во-первых, есть программы, созданные для вычисления различных процессов, как правило, в рамках СМ. Они обычно ограничены древесным (PHEGAS [110], O'Mega [111], MadEvent [112], FDC [113], CompHEP/CalcHEP [114, 115], WHIZARD [116], Herwig++ [117], SHERPA [118]) или в самом лучшем случае однопетлевым приближением (GoSam [119], aMC@NLO [120]). Некоторые из этих программ являются так называемыми генераторами событий [110, 112, 117, 118], которые могут симулировать результат эксперимента. Данные программы хороши тем, что, как правило, генерируют диаграммы, амплитуды и даже вычисляют фейнмановские интегралы, однако, они очень ограничены возможными теориями, числом петель (как правило не больше одной), а также областью применения (как правило, это сечения рассеяния, ширины распада и пр.).

Вторая группа программ связана с генерацией амплитуд в более общем случае. Одна из самых известных программ - это QGRAPH [106]. Эта программа известна около 30 лет, однако, до сих активно используется в различных исследованиях. Она генерирует все диаграммы в любом порядке теории возмущений, выводит их в некоем символьном виде, а также считает комбинаторный коэффициент. При этом она не генерирует амплитуды и не рисует диаграмм. Ещё одна известная программа такого плана это FeynArts [109, 121]. Она генерирует диаграммы и амплитуды для заданной теории. Также она изображает их графически с помощью специального пакета для L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. В качестве недостатка можно указать, что она ограничена приближением трёх петель.

Отдельно нужно отметить различные системы компьютерной алгебры. Аналитические вычисления диаграмм имеют свою специфику, поскольку помимо простых алгебраических действий (которые можно проводить с помощью хорошо известных систем, таких как Mathematica [122], Maple [123], Schoonschip [124], а также FORM [125]), необходимо производить анализ тензорных структур, вычислять следы гамма матриц и пр. Для этого существуют ряд пакетов и программ. Например GiNaC [126], Cadabra [127], RedBerry [128], FeynCalc [129].

Есть ряд программ, которые вычисляют фейнмановские импульсные интегралы в  $d$ -мерии, которые образуются после построения амплитуд. Как правило, реализуется следующий подход к их вычислению. Сначала тензорные интегралы стандартными способами сводятся к скалярным, а затем с помощью таких приемов, как интегрирование по частям в  $d$ -

мерии [130] и применение Лоренц-инвариантности, скалярные интегралы сводятся к небольшому числу типовых мастер-интегралов. Этот процесс реализован в программах AIR [131], FIRE [132], LiteRed [133], Reduze [134] и Kira [135]. Также хорошо известны программы по вычислению мастер-интегралов, такие как AMBRE [136], FIESTA [137] и SecDec [138]. Отдельно стоит отметить пакет для Schoonschip Mincer [139], впервые примененный для вычисления четырех-петлевой бета-функции с помощью размерной регуляризации [140].

Наконец, существуют пакеты программ, сочетающие в себе генерацию диаграмм и амплитуд, операции над ними и взятие интегралов. Например aTALC [141], FeynMaster [142], HepLib [143], tapir [144]. В основном все эти пакеты основаны на генерации диаграмм программой QGRAPH, а затем на анализе результатов другими упомянутыми выше программами.

Некоторые из упомянутых программ адаптированы в том числе и к работе с суперсимметричными теориями [113, 114, 118, 145]. Все они работают в рамках МССМ в терминах компонентных полей. Однако известны две программы для работы с суперполями в суперпространстве. Это программа SUSYCAL [146] написанная на языке PASCAL, а также пакет для Mathematica SusyMath [147]. Эти программы могут работать с выражениями в терминах суперпространства, которые генерируются суперграфами. В теории они могут их упрощать до импульсных интегралов, однако, эти проекты не развиваются и на данный момент недоступны для скачивания.

Таким образом, можно отметить, что, несмотря на существенный прогресс в этой области, замечен недостаток программного обеспечения для работы в рамках суперсимметричных теорий в терминах суперполей. Даже существующие программы нуждаются в интеграции с теми, которые генерируют диаграммы. Кроме того, сама генерация графов в суперсимметричном варианте имеет свою специфику, что будет подчеркнуто в этом диссертационном исследовании. Создание подобного программного обеспечения является важной и крайне актуальной задачей, которая была частично решена в рамках данной диссертации. Так, на данный момент программу можно использовать для вычислений аномальной размерности суперполей материи в  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной квантовой электродинамики, регуляризованной высшими ковариантными производными в четырех измерениях.

## 1.2 Цели и задачи работы

Целью диссертации является создание C++ программы для генерации суперграфов и сведению их к стандартным импульсным интегралам. При этом для создания алгоритмов программы автор глубоко ознакомился с техникой вычисления суперграфов, решая некоторые важные задачи ручным счётом. Таким образом, к целям работы можно также отнести следующие пункты:

1. Для  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных калибровочных теорий вычисление двухпетлевых диаграмм, дающих вклад в аномальную размерность духов Фаддеева-Попова и содержащих вставку однопетлевого поляризованного оператора.
2. В  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных калибровочных теориях вычисление вклада духов Фаддеева-Попова со вставкой поляризованного оператора в бета-функцию в трехпетлевом приближении, а также проверка части NSVZ-соотношения.
3. В  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной квантовой электродинамике, регуляризованной высшими производными, вычисление определенного вклада в бета-функцию в трехпетлевом приближении, а также проверка части NSVZ-соотношения.
4. В суперсимметричной теории Янга-Миллса вычисление некоторых вкладов в тройную духово-калибровочную вершину, с целью верификации известной теоремы о неперенормировке.

Кроме того, целью работы является вычисление аномальной размерности суперсимметричной квантовой электродинамики, регуляризованной высшими производными, в трёх петлях, с помощью которой легко получить бета-функцию в четырёх петлях.

## 1.3 Научная новизна

Все полученные результаты являются новыми. Ручные вычисления, проведенные автором ранее, в регуляризации высшими производными не проводились. Программа, созданная в рамках данного диссертационного исследования, также является абсолютно новой. Несмотря на наличие

схожих программ для генерации и анализа диаграмм Фейнмана, до настоящего времени не существовало программы, способной генерировать суперграфы и с помощью специальной техники сводить их к импульсным интегралам.

## 1.4 Объект исследования

В рамках данного диссертационного исследования рассматривались:

1.  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричные калибровочные теории, регуляризованные методом высших ковариантных производных.
2.  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричная квантовая электродинамика, регуляризованная методом высших ковариантных производных.

## 1.5 Методы исследования

Исследования проводились с использованием стандартных методов квантовой теории поля, обобщенных на теорию, построенную в терминах  $\mathcal{N} = 1$  суперполей в суперпространстве. Они включают в себя методы континуального интеграла, связанную с ним диаграммную технику, взятие интегралов, а также метод перенормировок и ренормгруппы. Кроме того, при создании программ применялись стандартные библиотеки языка C++, пакет для распараллеливания вычислений, а также некоторые хорошо известные алгоритмы, связанные с нахождением наибольшего общего делителя, генерации простых чисел и пр.

## 1.6 Положения, выносимые на защиту

1. Для  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных калибровочных теорий был вычислен вклад со вставкой поляризационного оператора в аномальную размерность духов Фаддеева-Попова в двух петлях. Затем, с помощью специального метода был вычислен вклад духов Фаддеева-Попова со вставкой поляризационного оператора в  $\beta$ -функцию в

трёх петлях. Было произведено сравнение этих вкладов, которое подтвердило справедливость NSVZ-соотношения.

2. В  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных калибровочных теориях были вычислены некоторые вклады, пропорциональные  $(C_2)^2$ , а также  $C_2 T(R)$  в тройную духово-калибровочную вершину. Результат не имеет ультрафиолетовых расходимостей, что подтверждает положения теоремы о перенормировке тройных духово-калибровочных вершин.
3. В  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной квантовой электродинамике был вычислен вклад со вставкой однопетлевого поляризационного оператора в бета-функцию в трехпетлевом приближении. После вычисления соответствующего вклада в двухпетлевую аномальную размерность была проверена справедливость NSVZ-соотношения.
4. Была создана программа для вычисления суперграфов. Программа была написана на языке C++ с некоторыми специальными библиотеками. Она способна генерировать, проводить операции в терминах суперпространства и, таким образом, сводить выражения к стандартным импульсным интегралам. Корректность работы программы была проверена на вычислениях в рамках  $\mathcal{N} = 1$  квантовой суперсимметричной электродинамики, регуляризованной высшими производными.
5. С помощью новой программы была полностью вычислена аномальная размерность  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной электродинамики в трех петлях. При этом с помощью NSVZ соотношения на основе этого результата был получен вклад в  $\beta$ -функцию в четырех петлях. Изначально полученные в терминах голых констант связи, эти величины были также пересчитаны в терминах перенормированных констант. Кроме того, как для этого частного случая, так и для всех петель было показано, что существует перенормировочное предписание, при котором в аномальной размерности и  $\beta$ -функции остаются только схемно-независимые части.

## 1.7 Теоретическая и практическая значимость

Все вычисления, описанные в данной диссертации, имеют высокую теоретическую ценность. Они подтверждают хорошо известные соотно-

шения, такие как NSVZ соотношение, а также теорема о неперенормировке тройных духово-калибровочных вершин. Кроме того, результаты для аномальной размерности в высших петлях, дают возможность изучить особенности выбора схемы перенормировки в исследуемых теориях. Программа, созданная в рамках данного исследования, имеет очень высокую практическую ценность. С её помощью уже были получены новые и интересные результаты. В будущем, после некоторой доработки, её также можно будет применять для вычислений в рамках феноменологически более интересных теорий, таких как, например,  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричная теория Янга-Миллса.

## 1.8 Достоверность и обоснованность результатов

Достоверность результатов подтверждается их соответствием с общими теоремами о неперенормировке. Результаты работы программы являются корректными поскольку:

1. Результат вычислений аномальной размерности в  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной квантовой электродинамике вплоть до трёх петель оказался калибровочно независимым.
2. При взятии интегралов получился конечный ответ для аномальной размерности.
3. Схемнонезависимая часть вычислений совпала с результатом вычислений в  $\overline{\text{DR}}$  схеме.

Таким образом, можно считать, что, по крайней мере, для случая  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной квантовой электродинамики результаты, получаемые программой, являются в достаточной степени достоверными, что говорит о возможности её дальнейшего использования в более сложных теориях.

## 1.9 Личный вклад соискателя

Все результаты, описанные в диссертации были получены автором лично. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами.

В работах [1–3] автором были вычислены суперграфы, содержащие вставку однопетлевого поляризационного оператора квантового калибровочного суперполя, при этом прочие вклады вычислялись другими соавторами.

В научных трудах [4, 5] автором вычислялись вклады в трехточечную духово-калибровочную функцию Грина, которые также содержат вставку однопетлевого поляризационного оператора. При этом в одну из вершин этой вставки (содержащей в одном случае петлю материи, а в другом петлю калибровочного поля) вставлена внешняя линия калибровочного поля. В случае вставки, содержащей петлю калибровочного поля, был вычислен вклад с определенной расстановкой суперсимметричных ковариантных производных по внутренним линиям диаграммы. Прочие вклады в данную трехточечную функцию были вычислены другими соавторами.

В работе [6] вклад автора был определяющим.

## 1.10 Апробация результатов

Результаты диссертационной работы были представлены в нескольких докладах на различных конференциях. При этом лично автором были сделаны доклады:

1. “Трехпетлевая аномальная размерность и четырехпетлевая бета-функция для  $\mathcal{N} = 1$  SQED с  $N_f$  ароматами в неминимальной калибровке”, XXIX Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов – 2022”, Москва, Россия, 11 – 22 апреля 2022.

2. “Multiloop calculations in  $\mathcal{N} = 1$  SQED with  $N_f$  flavours regularized by higher derivatives”, International Conference on Quantum Field Theory, High-Energy Physics, and Cosmology, Дубна, Россия, 18 – 21 июля 2022.

Кроме того автор является соавтором следующих докладов:

3. “Двухпетлевая перенормировка духов Фаддеева-Попова в  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных калибровочных теориях, регуляризованных высшими ковариантными производными”, XXV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов – 2018”, Москва, Россия, 9 – 13 апреля 2018.

4. “Two-loop anomalous dimension of the Faddeev-Popov ghosts in  $N=1$  supersymmetric theories”, 19th Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics, Москва, Россия, 22 — 28 августа 2019.

5. “Использование нового метода для вычисления вкладов духов Фаддеева-Попова в  $\beta$ -функцию  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных теорий Янга-Миллса в трехпетлевом приближении”, XXVII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов – 2020”, Москва, Россия, 10 — 27 ноября 2020.

6. “Трехпетлевая бета-функция для  $N = 1$  SQED в неминимальной калибровке”, XXVII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов – 2020”, Москва, Россия, 10 — 27 ноября 2020.

## 1.11 Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из 4 глав (включая введение), заключения, списка литературы и приложения. Общий объем диссертации 111 страниц. **Список литературы** содержит 182 ссылки.

В **Главе 2** описывается ряд вычислений, сделанных вручную, в которых принимал участие автор. Эти вычисления во многом помогли овладеть навыками, которые затем были применены для создания программы. Эти вычисления проводились в рамках  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных калибровочных теорий, которые описаны в первом разделе главы. Затем подробно описывается вычисления определенного вклада, содержащего вставку поляризованного оператора калибровочного поля, в аномальную размерность духов Фаддеева-Попова. Также в главе 2 описано вычисление вклада в трехточечную духово-калибровочную вершину. Это вычисление проводилось в рамках явной проверки теоремы о неперенормировке тройной духово-калибровочной вершины. В конце главы также приведено вычисление части вклада духов Фаддеева-Попова в  $\beta$ -функцию  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной теории Янга-Миллса. На основе этого результата и результата для духов Фаддеева-Попова выполнена проверка части NSVZ соотношения.

В **Главе 3** приводится описание новой программы для генерации суперграфов и проведения вычислений в терминах суперпространства. Описывается алгоритм, реализуемый программой, затем приводятся ос-

новы внутреннего синтаксиса программы. Затем описывается  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричная электродинамика с  $N_f$  ароматами, в рамках которой работает программа. Приводятся примеры входных файлов для вычисления двухточечной функции Грина суперполей материи в одной и двух петлях, в том числе с полями Паули-Вилларса в неминимальной калибровке. В конце главы приводятся результаты для заданных входных файлов, они сравниваются с соответствующими ручными вычислениями, а также приводится время работы для различных случаев использования программы.

В **Главе 4** описывается вычисление трехпетлевой аномальной размерности в  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной электродинамике с  $N_f$  ароматами. Приводится общее выражение для интегралов в импульсном пространстве, дающих вклад трехпетлевую аномальную размерность. Эти интегралы берутся в технике полиномов Чебышева. Подробно взятие этих интегралов описывается в **Приложении**. Приводится окончательный результат для трехпетлевой аномальной размерности в терминах голой константы связи. С помощью NSVZ-соотношения на основе этого результата вычисляется  $\beta$ -функция в четырех петлях, также определенная в терминах голых констант связи. Затем на основе этих выражений вычисляется соответствующие внутригрупповые функции, определенные в терминах перенормированных констант связи. Оказывается, что с помощью специальной конечной перенормировки эти функции можно переписать в виде, содержащем только схемно-независимые части. Такая схема вычитаний названа минимальной. В конце главы приводится общее доказательство того, что такая схема существует во всех петлях.

Краткие итоги исследований, лежащих в основе диссертации, подводятся в **Заключении**.

## Глава 2

# Вычисления в формализме $\mathcal{N} = 1$ суперполей

### 2.1 Формализм $\mathcal{N} = 1$ суперпространства

Будем рассматривать  $\mathcal{N} = 1$  суперпространство, координатами которого являются  $(x^\mu, \theta)$ , где  $\theta$  — майорановский спинор. При этом спинорные индексы обозначаются латинскими буквами, правые без точки, а левые с точкой. Индексы поднимаются и опускаются с помощью матриц зарядового сопряжения:

$$\theta^a \equiv \theta_b C^{ba}; \quad \theta_a = \theta^b C_{ab}. \quad (2.1)$$

Левые спиноры записываются с чертой. Их индексы поднимаются таким же образом:

$$\bar{\theta}^{\dot{a}} \equiv \bar{\theta}_{\dot{b}} C^{\dot{b}\dot{a}}; \quad \bar{\theta}_{\dot{a}} = \bar{\theta}^{\dot{b}} C_{\dot{a}\dot{b}}. \quad (2.2)$$

Суперсимметричная ковариантная производная обычно вводится следующим образом:

$$D_a = \frac{\partial}{\partial \theta^a} - i(\gamma^\mu)_a{}^b \bar{\theta}_{\dot{b}} \partial_\mu, \quad \bar{D}_{\dot{a}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{a}}} - i(\gamma^\mu)_{\dot{a}}{}^b \theta_b \partial_\mu. \quad (2.3)$$

Для квадратов производных справедливо:

$$D^2 = D^a D_a \quad \bar{D}^2 = \bar{D}^{\dot{a}} \bar{D}_{\dot{a}}. \quad (2.4)$$

Обычные поля в данном подходе являются компонентами суперполей. Так, калибровочное поле является компонентой вещественного поля  $V(x^\mu, \theta)$ , а спинорные и скалярные поля — компонентами кирального или антикирального полей  $(\phi(x^\mu, \theta)$  и  $\phi^*(x^\mu, \theta)$  соответственно). При этом по определению киральное суперполе удовлетворяет условиям

$$\bar{D}_{\dot{a}} \phi = 0, \quad D_a \phi^* = 0. \quad (2.5)$$

Кроме того, при построении суперсимметричных лагранжианов вводится “интегрирование” по переменным  $\theta$ . В наших обозначениях его можно определить следующим образом:

$$\int d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{2}\bar{D}^2, \quad \int d^2\theta = -\frac{1}{2}D^2, \quad \int d^4\theta = \int d^2\bar{\theta}d^2\theta \quad (2.6)$$

## 2.2 $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная теория Янга-Миллса

Рассмотрим  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричную теорию Янга-Миллса с полями материи. Действие, записанное в терминах  $\mathcal{N} = 1$  суперпространства, имеет вид:

$$S = \frac{1}{2e_0^2} \text{Re tr} \int d^4x d^2\theta W^a W_a + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^{*i} (e^{2V})^j_i \phi_j + \left\{ \int d^4x d^2\theta \left( \frac{1}{4} m_0^{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} \lambda_0^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \right) + c.c. \right\}, \quad (2.7)$$

где  $e_0$ ,  $m_0^{ij}$  и  $\lambda_0^{ijk}$  — голая константа связи, массовая матрица и юкавские константы соответственно,  $V$  — калибровочное суперполе,  $\phi_i$  — киральное поле материи. Напряжённость калибровочного поля определяется как

$$W_a = \frac{1}{8} \bar{D}^2 (e^{-2V} D_a e^{2V}). \quad (2.8)$$

Если массы и юкавские константы удовлетворяют следующим соотношениям

$$m_0^{ik} (T^A)_k^j + m_0^{kj} (T^A)_k^i = 0; \quad \lambda_0^{ijm} (T^A)_m^k + \lambda_0^{imk} (T^A)_m^j + \lambda_0^{mjk} (T^A)_m^i = 0, \quad (2.9)$$

то рассматриваемая теория инвариантна относительно калибровочных преобразований:

$$\phi \rightarrow e^A \phi; \quad e^{2V} \rightarrow e^{-A^+} e^{2V} e^{-A}, \quad (2.10)$$

где  $A = ie_0 A^B T^B$  — произвольное киральное суперполе ( $\in Adj$ ).

Удобно квантовать рассматриваемую теорию с использованием метода фонового поля [148–150]. При этом исходная калибровочная инвариантность дает две инвариантности — фоновую и квантовую. Определим суперполе  $\Omega$  как решение уравнения  $e^{2V} = e^{\Omega^+} e^\Omega$ . Введем фоновое суперполе  $\mathbf{\Omega}$ , выполнив замену  $e^\Omega \rightarrow e^{\mathbf{\Omega}} e^\Omega$ . При такой замене

$$e^{2V} \rightarrow e^{\mathbf{\Omega}^+} e^{2V} e^{\mathbf{\Omega}}, \quad (2.11)$$

причем в правой части в показателе экспоненты (2.11) уже стоит квантовое калибровочное суперполе  $V$ . Фоновое калибровочное суперполе  $\mathbf{V}$  будет определяться как

$$e^{2\mathbf{V}} = e^{\Omega^+} e^{\Omega}.$$

Метод фонового поля позволяет нам построить эффективное действие, инвариантное относительно фоновых калибровочных преобразований:

$$e^{\Omega} \rightarrow e^{iK} e^{\Omega} e^{-A}, \quad e^{\Omega} \rightarrow e^{\Omega} e^{-iK}, \quad V \rightarrow e^{iK} V e^{-iK}, \quad \phi \rightarrow e^A \phi,$$

где  $K$  – произвольное эрмитово суперполе. Квантовая калибровочная инвариантность нарушается в результате процедуры фиксации калибровки. Остающаяся при этом симметрия – БРСТ-инвариантность [151, 152].

В методе регуляризации высшими ковариантными производными к действию  $S$  добавляется член  $S_{\Lambda}$ , содержащий высшие степени ковариантных производных [78, 79]. В соответствии с [153] будем использовать следующий вид этого слагаемого:

$$\begin{aligned} S_{\Lambda} = & \frac{1}{2e_0^2} \text{Re tr} \int d^4x d^2\theta e^{\Omega} e^{\Omega} W^a e^{-\Omega} e^{-\Omega} \left[ R \left( -\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right) - 1 \right]_{Adj} \\ & \times e^{\Omega} e^{\Omega} W_a e^{-\Omega} e^{-\Omega} + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{\Omega^+} e^{\Omega^+} \left[ F \left( -\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right) - 1 \right] e^{\Omega} e^{\Omega} \phi, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где регуляторы  $R$  и  $F$  быстро растут на бесконечности, а суперсимметричные ковариантные производные имеют вид:

$$\nabla_a = e^{-\Omega^+} e^{-\Omega^+} D_a e^{\Omega^+} e^{\Omega^+}; \quad \bar{\nabla}_{\dot{a}} = e^{\Omega} e^{\Omega} \bar{D}_{\dot{a}} e^{-\Omega} e^{-\Omega}, \quad (2.13)$$

Такой выбор  $S_{\Lambda}$  сохраняет БРСТ-инвариантность.

Ещё необходимо добавить член, фиксирующий калибровку:

$$S_{gf} = -\frac{1}{16\xi_0 e_0^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \nabla^2 V K \left( -\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right) \bar{\nabla}^2 V, \quad (2.14)$$

а также духи Фаддева-Попова и Нильсена-Каллош [154, 155]:

$$\begin{aligned} S_{FP} = & \frac{1}{e_0^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta (e^{\Omega} \bar{c} e^{-\Omega} + e^{-\Omega^+} \bar{c}^+ e^{\Omega^+}) \\ & \times \left\{ \left( \frac{V}{1 - e^{2V}} \right)_{Adj} (e^{-\Omega^+} c^+ e^{\Omega^+}) + \left( \frac{V}{1 - e^{-2V}} \right)_{Adj} (e^{\Omega} c e^{-\Omega}) \right\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$S_{NK} = \frac{1}{2e_0^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta b^+ \left[ e^{\Omega^+} K \left( -\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right) e^{\Omega} \right]_{Adj} b. \quad (2.16)$$

Член (2.12) устраняет расходимости во всех порядках, кроме однопетлевого [17]. Для регуляризации в однопетлевом приближении нужно также добавить детерминанты Паули-Вилларса [82]:

$$\text{Det}(PV, M_{\Phi})^{-1} = \int D\Phi \exp(iS_{\Phi}); \quad \text{Det}(PV, M_{\varphi})^{-1} = \int D\varphi \exp(iS_{\varphi}), \quad (2.17)$$

где коммутирующее суперполе  $\Phi$  лежит в том представлении, что и поле  $\phi$ , а 3 коммутирующих поля  $\varphi_i$  лежат в присоединенном представлении калибровочной группы. Эти поля описываются действиями  $S_{\Phi}$  и  $S_{\varphi}$  соответственно

$$S_{\Phi} = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \Phi^{*i} \left[ e^{\Omega^+} e^{\Omega^+} F \left( -\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right) e^{\Omega} e^{\Omega} \right]_i^j \Phi_j + \left( \frac{1}{4} \int d^4x d^2\theta (M_{\Phi})^{ij} \Phi_i \Phi_j + c.c. \right), \quad (2.18)$$

$$S_{\varphi} = \frac{1}{2e_0^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \left( \varphi_1^+ \left[ e^{\Omega^+} e^{\Omega^+} R \left( -\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right) e^{\Omega} e^{\Omega} \right]_{Adj} \varphi_1 + \varphi_2^+ \left[ e^{\Omega^+} e^{2V} e^{\Omega} \right]_{Adj} \varphi_2 + \varphi_3^+ \left[ e^{\Omega^+} e^{2V} e^{\Omega} \right]_{Adj} \varphi_3 \right) + \frac{1}{2e_0^2} \text{tr} \left( \int d^4x d^2\theta M_{\varphi} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2) + c.c. \right). \quad (2.19)$$

Итоговое выражение для полного действия будет

$$S_{\text{полн}} = S + S_{\Lambda} + S_{gf} + S_{FP} + S_{NK}, \quad (2.20)$$

а действие для источников имеет вид

$$S_{\text{ист}} = \int d^4x d^2\theta \left( j_c^A c^A + \bar{j}_c^A \bar{c}^A + j^i \phi_i \right) + \int d^4x d^2\bar{\theta} \left( c^{*A} j_c^{*A} + \bar{c}^{*A} \bar{j}_c^{*A} + j_i^* \phi^{*i} \right) + \int d^4x d^4\theta V^A J^A. \quad (2.21)$$

Производящий функционал может быть записан в следующей форме

$$Z[V, \text{ист}] = \int D\mu (\text{Det}(PV, M_{\Phi}))^c \text{Det}(PV, M_{\varphi})^{-1} \exp(iS_{\text{полн}} + iS_{\text{ист}}), \quad (2.22)$$

где  $c = T(R)/T(R_{PV})$ . Производящий функционал связанных функций Грина определяется по нему как

$$W[V, \text{ист}] = -i \ln Z[V, \text{ист}], \quad (2.23)$$

а эффективное действие  $\Gamma[\mathbf{V}, \text{Поля}]$  получается из  $W[\mathbf{V}, \text{Источники}]$  преобразованием Лежандра:

$$\Gamma = W - S_{\text{ист}} \Big|_{\text{источники} \rightarrow \text{поля}},$$

## 2.3 Вычисление вклада в аномальную размерность духов Фаддеева-Попова

Для вычисления вклада в аномальную размерность можно воспользоваться формулой:

$$\gamma_c(\alpha_0, \lambda_0, \xi_0, y_0) \equiv - \frac{d \ln Z_c}{d \ln \Lambda} \Big|_{\alpha, \lambda, \xi, y = \text{const}} = \frac{d \ln G_c}{d \ln \Lambda} \Big|_{\alpha, \lambda, \xi, y = \text{const}; p=0} \quad (2.24)$$

При этом  $G_c$  определяются из вклада в эффективное действие:

$$\Gamma_c^{(2)} = \frac{1}{4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^4 \theta (c^{*A}(-p, \theta) \bar{c}^A(p, \theta) + \bar{c}^{*A}(-p, \theta) c^A(p, \theta)) G_c(\Lambda/p). \quad (2.25)$$

Таким образом, для подобных вычислений нужно вычислять вклад в эффективное действие. Оно, как известно, строится из (2.23) через преобразование Лежандра. По сути это означает, что из производящего функционала убираются вклады несвязных и одночастично-приводимых диаграмм. Таким образом, если мы рассмотрим производящий функционал, добавим в него вершины с внешними полями и умножим на коэффициент  $-i$ , то как раз получим вклад в эффективное действие:

$$\Gamma \sim -i Z \Big|_{\text{источники}=0} \quad (2.26)$$

При этом вспомним правила вычисления производящего функционала. Нам необходимо выделить свободную часть  $Z_0$  и часть с взаимодействием:

$$Z(j, J) = e^{iS_I(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j})} Z_0 \quad (2.27)$$

Пропгаторы определяются выражениями следующего вида

$$\frac{\delta}{\delta j_1} \frac{\delta}{\delta j_2} Z_0 \Big|_{\text{источники}=0} \quad (2.28)$$

Эти выражения будут определять пропагаторы.

Часть производящего функционала, соответствующая свободным калибровочным и духовым полям, равна:

$$Z_0(J, j) = \exp\left\{i \int d^8x J^A \left[ -\frac{1}{R\partial^2} + \frac{1}{16\partial^4}(D^2\bar{D}^2 + \bar{D}^2D^2) \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( \frac{\xi_0}{K} - \frac{1}{R} \right) \right] J^A \right\} \times \exp\left\{i \int d^8x \left( \bar{j}_c^A \frac{1}{\partial^2} j_c^{*A} + j_c^A \frac{1}{\partial^2} \bar{j}_c^{*A} \right) \right\}. \quad (2.29)$$

Также приведем вид необходимых для вычисления вершин:

1. Вершина  $cVc$ :

$$V \begin{array}{c} \nearrow c \\ \searrow \bar{c} \end{array} = \frac{ie_0}{4} \int d^8x f^{ABC} (\bar{c}^A V^B c^{*C} + \bar{c}^{*A} V^B c^C + \bar{c}^A V^B c^C + \bar{c}^{*A} V^B c^C)$$

2. Вершина  $cVVc$ :

$$V \begin{array}{c} \nearrow c \\ \searrow \bar{c} \end{array} = -\frac{e_0^2}{12} \int d^8x (\bar{c}^A + \bar{c}^{*A}) f^{ABC} V^B f^{CDE} V^D (-c^{*E} + c^E)$$

В рамках вычисления, проведенного лично автором, рассматривались диаграммы с однопетлевой вставкой калибровочного поля. Они приведены на Рис. 2.1.

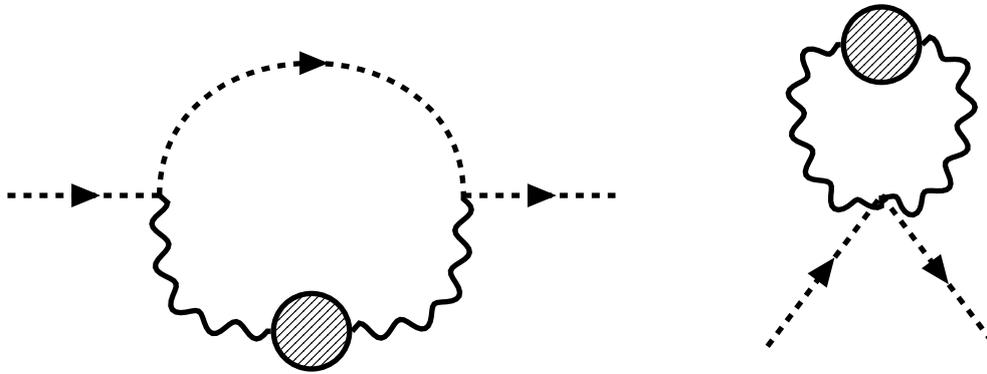


Рис. 2.1: Вклады в двухпетлевую аномальную размерность духов

При этом можно рассматривать вставку как эффективный пропагатор, определенный в [156]. Для произвольного  $\xi$  он имеет вид:

$$2i \left( \frac{1}{(R - \Pi)\partial^2} - \frac{1}{16\partial^4} (D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2) \left( \frac{\xi_0}{K} - \frac{1}{R - \Pi} \right) \right) \delta_{12}^8 \delta^{AB}, \quad (2.30)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi(\alpha_0, \lambda_0, \frac{k^2}{\Lambda^2}) &= 8\pi\alpha_0 \left( C_2 f(k/\Lambda) + C_2 g(\xi_0, k/\Lambda) + T(R)h(k/\Lambda) \right) \\ &+ O(\alpha_0^2, \alpha_0 \lambda_0^2) \end{aligned} \quad (2.31)$$

— поляризационный оператор квантового калибровочного суперполя. Явные выражения для функций  $f$ ,  $g$  и  $h$  приводятся в статье [156]. Для того, чтобы вычислить эти диаграммы, разложим (2.30) до первого порядка по  $\Pi$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned} &2i \left( \frac{1}{R\partial^2} - \frac{1}{16\partial^4} (D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2) \left( \frac{\xi_0}{K} - \frac{1}{R} \right) \right) \delta_{12}^8 \delta^{AB} \\ &+ 2i \left( \frac{\Pi}{R^2\partial^2} + \frac{1}{16\partial^4} (D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2) \frac{\Pi}{R^2} \right) \delta_{12}^8 \delta^{AB}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Первая половина — это обычный пропагатор, а вторая — это вклад вставки, которая нам и нужна. Введем  $\Pi_{1/2}$  — суперсимметричный поперечный проектор, который имеет вид

$$\Pi_{1/2} = -\frac{D^a \bar{D}^2 D_a}{8\partial^2} = -1 - \frac{D^2 \bar{D}^2}{16\partial^2} - \frac{\bar{D}^2 D^2}{16\partial^2} \quad (2.33)$$

Если ввести проекторы  $\Pi_i = (\Pi_{0+}, \Pi_{1/2}, \Pi_{0-})$ ,  $i = 1, 2, 3$ , где

$$\begin{aligned} \Pi_{0+} &= \frac{\bar{D}^2 D^2}{16\partial^2}, & \Pi_{0-} &= \frac{D^2 \bar{D}^2}{16\partial^2}, \\ \Pi_0 &= \Pi_{0+} + \Pi_{0-}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

, то можно записать хорошо известные соотношения для продольных и поперечных проекторов [41]:

$$\sum_{i=1}^3 \Pi_i = -1, \quad \Pi_i \Pi_j = \delta_{ij} \Pi_j \quad (2.35)$$

Тогда можно переписать вклад вставки следующим образом:

$$2i \frac{\Pi}{R^2} \left( \frac{1}{\partial^2} + \frac{1}{16\partial^4} (D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2) \right) \delta_{12}^8 \delta^{AB} = -2i \frac{\Pi}{R^2 \partial^4} \partial^2 \Pi_{1/2} \delta_{12}^8 \delta^{AB} \quad (2.36)$$

При этом необходимы также выражения для пропагаторов духовых полей. Используя (2.29), получим:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta}{\delta \bar{j}_{c2}^{*B}} \frac{\delta}{\delta j_{c1}^A} Z_0 \right|_{\text{ист.}=0} &= i \frac{\bar{D}_1^2 D_2^2}{4\partial^2} \delta_{12}^8 \delta_{AB}, \\ \left. \frac{\delta}{\delta j_{c2}^{*B}} \frac{\delta}{\delta \bar{j}_{c1}^A} Z_0 \right|_{\text{ист.}=0} &= i \frac{\bar{D}_1^2 D_2^2}{4\partial^2} \delta_{12}^8 \delta_{AB}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Теперь рассмотрим первую диаграмму с Рис. 2.1. Вспомним, что мы, фактически, действуем экспонентами с полями и производными по источникам на функционал  $Z_0$ . То есть, получаем:

$$\Gamma \sim -ie^{iS_1} e^{iS_2} Z_0. \quad (2.38)$$

Все вершины здесь будут разными. Для нашего порядка разложения имеем следующее:

$$\Gamma \sim iS_1 S_2 Z_0. \quad (2.39)$$

Нужно отметить, что в точках 1 и 2 есть внешние линии, поэтому мы должны заменить все поля в вершинах на производные по источникам, но при этом необходимо оставить по одному полю на внешней линии в этих двух точках.

Теперь распишем это выражение для нашей диаграммы, используя вид вершин

$$\begin{aligned} \Gamma &\sim i \frac{ie_0}{4} \int d^8 x_2 f^{ABC} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{j}_{c2}^A} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_2^B} c_2^C \\ &\times \frac{ie_0}{4} \int d^8 x_1 f^{DEF} \left( -\frac{1}{i} \right) \frac{\delta}{\delta j_{c1}^{*F}} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_1^E} \bar{c}_1^{*D} Z_0(J, j)|_{J=0}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Теперь спариваем производные по источникам и, с учётом вида пропагатора и вставки, получаем:

$$i \frac{e_0^2}{16} \int d^8 x_1 d^8 x_2 f^{ABC} f^{DBA} i \frac{\bar{D}_2^2 D_1^2}{4\partial^2} \delta_{12}^8 \times (-2i) \frac{\Pi}{R^2 \partial^4} \partial^2 \Pi_{1/2} \delta_{12}^8 c_2^C \bar{c}_1^{*D}. \quad (2.41)$$

Теперь используем метод интегрирования по частям [41]. В соответствии с определением интегрирования по суперпространству (2.6), можно переносить суперсимметричные ковариантные производные с одного множителя на другой. При этом поверхностные члены будут равны нулю. С учётом того, что внешние импульсы мы кладем равными нулю, перебрасываем производные с первой дельта функции на вторую, при этом с учётом (2.35) получается, что это выражение равно нулю.

Рассмотрим теперь вторую диаграмму:

$$\Gamma \sim -ie^{iS_1} Z_0 \sim S_1 Z_0 \quad (2.42)$$

$$\Gamma \sim \left( -\frac{e_0^2}{12} \right) \int d^8 x_1 f^{DEF} f^{FGH} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_1^E} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_1^G} \bar{c}_1^{*D} c_1^H. \quad (2.43)$$

С учётом вида вставки:

$$\Gamma \sim \frac{e_0^2}{12} \int d^8 x_1 f^{DEF} f^{FEH} (-2i) \frac{\Pi}{R^2 \partial^4} \partial^2 \Pi_{1/2} \delta_{11}^8 \bar{c}_1^{*D} c_1^H. \quad (2.44)$$

С учётом

$$\delta_{12}^8 D^\alpha \delta_{12}^8 = 0, \quad \text{если } \alpha \leq 3 \quad (2.45)$$

а также  $f^{DEF} f^{HEF} = C_2 \delta_{DH}$  получим:

$$\Gamma \sim \frac{e_0^2 C_2}{12} \int d^4 \theta \frac{d^4 K}{2\pi^4} \frac{\Pi}{R_K^2 K^4} \bar{c}_1^{*A} c_1^A. \quad (2.46)$$

Здесь мы также учли поворот Вика и перешли к евклидовым координатам. С учётом (2.25) и (2.31) получим:

$$\Delta G_c = \frac{2e_0^4 C_2}{3} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^4 R_K^2} (C_2 f(K/\Lambda) + C_2 g(\xi_0, K/\Lambda) + T(R) h(K/\Lambda)) \quad (2.47)$$

Отсюда можно легко найти вклад в аномальную размерность (2.24). Прочие вклады вычислялись другими соавторами, полный ответ можно найти в работе [1].

## 2.4 Явная проверка теоремы о неперенормировке тройной духово-калибровочной вершины

Рассмотрим квантовые поправки к вершине 1 на стр. 25. Вклад в эффективное действие вершин  $\bar{c}^+ V c$  и  $\bar{c}^+ V c^+$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma_{\bar{c}^+ V c} = & \frac{ie_0}{4} f^{ABC} \int d^4 \theta \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \bar{c}^{+A}(p+q, \theta) \left( \mathcal{S}(p, q) V^B(-p, \theta) \right. \\ & \left. + \mathcal{S}_\mu(p, q) (\gamma^\mu)_{\dot{a}}{}^b D_b \bar{D}^{\dot{a}} V^B(-p, \theta) + s(p, q) \partial^2 \Pi_{1/2} V^B(-p, \theta) \right) c^C(-q, \theta); \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma_{\bar{c}^+Vc^+} &= \frac{ie_0}{4} f^{ABC} \int d^4\theta \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \bar{c}^{+A}(p+q, \theta) \tilde{\mathcal{S}}(p, q) \\ &\times V^B(-p, \theta) c^{+C}(-q, \theta). \end{aligned} \quad (2.49)$$

В соответствии с теоремой о перенормировке, доказанной в [92], тройная духово-калибровочная вершина должна быть конечна во всех порядках теории возмущений.

Эта теорема приводит к определенным ограничениям на константы перенормировки. В наших обозначениях константы перенормировки  $Z_\alpha$ ,  $Z_c$ , и  $Z_V$  для калибровочной константы связи  $\alpha = e^2/4\pi$ , духов Фаддеева-Попова, и квантового калибровочного поля соответственно, определяются следующим образом:

$$\frac{1}{\alpha_0} = \frac{Z_\alpha}{\alpha}; \quad \bar{c}^A c^B = Z_c \bar{c}_R^A c_R^B; \quad V^A = Z_V V_R^A, \quad (2.50)$$

где индекс  $R$  обозначает перенормированные поля. Все тройные духово-калибровочные вершины будут иметь одинаковую константу перенормировки  $Z_\alpha^{-1/2} Z_c Z_V$ , поэтому их конечность будет вести к соотношению:

$$\frac{d}{d \ln \Lambda} \left( Z_\alpha^{-1/2} Z_c Z_V \right) = 0. \quad (2.51)$$

Поэтому становится возможным выбрать такую схему перенормировки, что

$$Z_\alpha^{-1/2} Z_c Z_V = 1. \quad (2.52)$$

Однопетлевой вклад в функции  $s$ ,  $\mathcal{S}_\mu$ ,  $\mathcal{S}$ , и  $\tilde{\mathcal{S}}$  был вычислен в [92]. Результат является конечным в ультрафиолетовой области. Чтобы это проверить, достаточно вычислить  $\bar{c}^+Vc$  вершину, которая даётся формулой (2.48), поскольку константы перенормировки для всех этих вкладов совпадают. При этом функции  $s$  и  $\mathcal{S}_\mu$  имеют степени расходимости  $-2$  и  $-1$  в единицах массы, соответственно. Поэтому поверхностная расходимость в них отсутствуют, а подрасходимости можно устранить переопределением констант и полей.

Можно извлечь вклад  $\mathcal{S}$ , из супердиаграмм, дающих вклад  $\bar{c}^+Vc$  путем замены внешнего поля на  $\bar{D}^2 H$ , где  $H$  — эрмитово суперполе,

$$V \rightarrow \bar{D}^2 H. \quad (2.53)$$

Эта замена — формальная. Соответствующая часть вершины (2.48) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma_{\bar{c}^+Vc}\Big|_{V\rightarrow\bar{D}^2H} &= \frac{ie_0}{4} f^{ABC} \int d^4\theta \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \bar{c}^{+A}(p+q, \theta) \\ &\times \mathcal{S}(p, q) \bar{D}^2 H^B(-p, \theta) c^C(-q, \theta) \end{aligned} \quad (2.54)$$

и содержит только функцию  $\mathcal{S}$ . Чтобы упростить выражение, его удобно исследовать в пределе внешних импульсов равных нулю. Это возможно, потому что члены, пропорциональные внешнему импульсу, будут пропорциональны обратным степеням  $\Lambda$ . Поэтому нулевой результат в пределах внешнего импульса, равного нулю, обеспечивает конечность в ультрафиолетовой области.

Рассмотрим следующий двухпетлевой вклад пропорциональный  $(C_2)^2$ , а именно, вклад приведенный на Рис. 2.2.

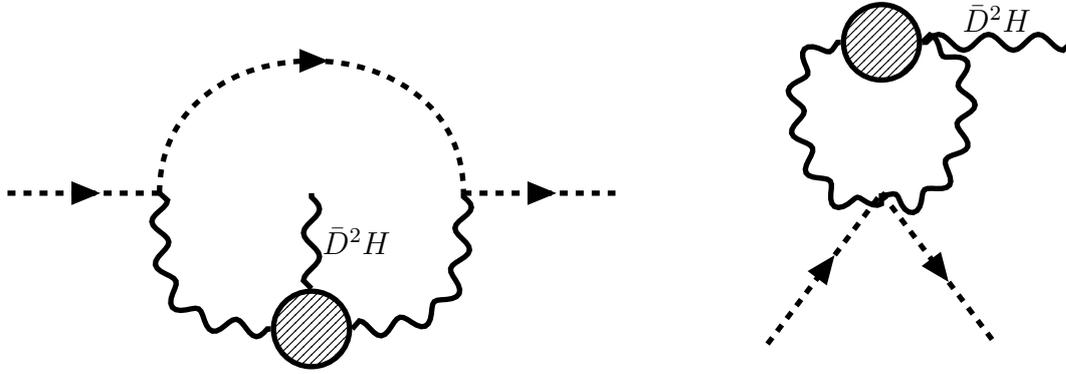


Рис. 2.2: Вклады в трехточечную функцию

Во вставке есть различные вклады как калибровочного поля, так и духов Фаддеева-Попова. Автором вычислялся вклад в эту вставку с Рис. 2.3.

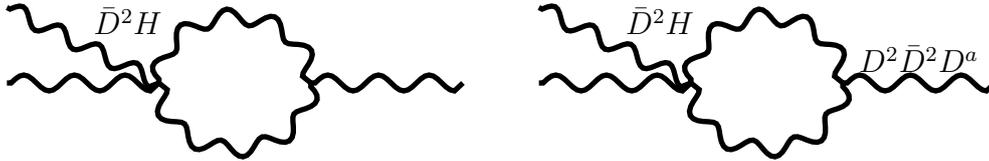


Рис. 2.3: Вклады в вставку, вычисляемые автором

В выражении нужно учесть, что правая тройная вершина калибровочного поля в теории, регуляризованной высшими производными, равна

$$\begin{aligned} &\frac{ie_0}{16} \int d^8x f^{ABC} \bar{D}^2 D^a R V^A V^B D_a V^C - \frac{ie_0}{128\Lambda^2} \int d^8x \sum_{n=1}^{\infty} r_n \sum_{k=0}^{n-1} f^{ABC} \\ &\times \left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right)^k \bar{D}^2 D^a V^A V^B \left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right)^{n-k-1} D^2 \bar{D}^2 D_a V^C, \end{aligned} \quad (2.55)$$

где

$$R(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n x^n. \quad (2.56)$$

Можно заметить, что некоторое количество операторов действует на поля в вершине. Таким образом, если мы будем рассматривать эту вершину в диаграмме, то нужно будет учитывать возможные перестановки местами полей (пропагаторов) с разными операторами вершины. Автором рассматривался вклад двух типов вершин из (2.55) в правую вершину на двух графах с Рис. 2.3. При этом вычислялись вклады, в которых  $V^B$  из первой вершины и  $D^2 \bar{D}^2 D_a V^C$  из второй находились на внешней линии. Оказалось, что, например, весь вклад второй части вершины оказался пропорционален:

$$f^{ABC} \partial^2 \Pi_{1/2} V_1^A \bar{D}^2 H^B V_1^C. \quad (2.57)$$

В силу антисимметрии структурных констант такие вклады равны нулю. Аналогично равны 0 и вклады, пропорциональные

$$f^{ABC} V_1^A \bar{D}^2 \alpha^B V_1^C. \quad (2.58)$$

В силу вышесказанного, нетривиальный вклад дает только первая часть тройной вершины. При этом он равен

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma = & \frac{e_0^3 C_2}{16} \int \frac{d^4 k}{(2\pi^4)} \left[ \frac{1}{k^2 (k+p)^2} + \frac{R_{k+p}}{k^4} \left( \frac{\xi_0}{K_k} - \frac{1}{R_k} \right) \right] \\ & \times (\gamma^\mu)_{\dot{a}b} k_\mu f^{ABC} V^A(p) \bar{D}^2 \alpha^B \bar{D}^{\dot{a}} D^b V^C(-p). \end{aligned} \quad (2.59)$$

В статье [5] приведен полный результат для вкладов пропорциональных  $(C_2)^2$ , в котором также учтены вклады, посчитанные другими соавторами. Например, все вклады вставок типа, приведенного на Рис. 2.2, в сумме с (2.59) дают ноль. Суммарный результат с другими графами оказался конечен, что и следует из общей теоремы.

Кроме того, необходимо отметить, что автор проверял на конечность также некоторые графы, пропорциональные  $C_2 T(R)$ , а именно исследовалась диаграмма где таким же образом, как и на Рис. 2.3 внешняя калибровочная линия вставлялась в петлю материи. Полный результат от суммы графов, пропорциональных  $C_2 T(R)$ , можно найти в статье [4]. Результат также получился конечен, что является явной проверкой конечности тройной духово-калибровочной вершины в двух петлях.

## 2.5 Вычисление вклада в трёхпетлевую бета-функцию и проверка части NSVZ-соотношения

Рассмотрим вычисление вклада духов Фаддеева-Попова в бета-функцию в трёх петлях. Обычно для вычисления бета-функции необходимо вводить фоновое калибровочное поле и вычислять графы с двумя внешними линиями этого фонового поля. Однако в статье [93] был описан новый метод, который состоит в том, что для того, чтобы провести вычисление в нужном порядке теории возмущения, нужно рассчитать только специально модифицированные вакуумные суперграфы вместо гораздо большего числа супердиаграмм с двумя внешними линиями фонового калибровочного суперполя. Некоторые вычисления высших порядков, выполненные с помощью этого метода в [2, 3, 157, 158], показали, что он работает правильно и совпадает со всеми известными результатами. С помощью этого метода, можно получить выражение для функции

$$\frac{\beta(\alpha_0, \lambda_0, Y_0)}{\alpha_0^2} = \frac{\beta_{1\text{-loop}}(\alpha_0)}{\alpha_0^2}, \quad (2.60)$$

где

$$\beta_{1\text{-loop}}(\alpha_0) = -\frac{\alpha_0^2}{2\pi} (3C_2 - T(R)) \quad (2.61)$$

— однопетлевая  $\beta$ -функция, которая при использовании регуляризации высшими ковариантными производными была вычислена в работе [153].

Следуя [2, 93], для вычисления бета-функции необходимо:

1. Рассмотреть вакуумный суперграф с  $L$  петлями и построить для него выражение, руководствуясь стандартными правилами.
2. Вставить выражение  $\theta^4(v^B)^2$  в какую-либо точку суперграфа, которая интегрируется по полному суперпространству.  $v^B$  — медленно убывает при  $R \rightarrow \infty$ .
3. Вычислить получившийся граф, в итоге получится выражение содержащее:

$$\mathcal{V}_4 \equiv \int d^4x (v^B)^2 \rightarrow \infty. \quad (2.62)$$

4. Для  $L$  пропагаторов с импульсами  $Q_i^\mu$ , где  $i = 1, \dots, L$ , заменить  $\prod_{i=1}^L \delta_{a_i}^{b_i}$  (где  $a_i$  и  $b_i$  — индексы калибровочной группы) на

$$\sum_{k,l=1}^L \left( \prod_{i \neq k,l} \delta_{a_i}^{b_i} \right) (T^A)_{a_k}^{b_k} (T^A)_{a_l}^{b_l} \frac{\partial^2}{\partial Q_k^\mu \partial Q_l^\mu}. \quad (2.63)$$

5. Подействовать на выражение следующим оператором:

$$-\frac{2\pi}{r\mathcal{V}_4} \cdot \frac{d}{d \ln \Lambda}. \quad (2.64)$$

В результате получается вклад в бета-функцию. При этом результат даётся интегралом от двойных полных производных. Обычно такие интегралы равны нулю, однако, при действии на обратный квадрат импульса возникают следующие выражения:

$$\frac{\partial^2}{\partial Q_\mu \partial Q_\mu} \left( \frac{1}{Q^2} \right) = -4\pi^2 \delta^4(Q). \quad (2.65)$$

Отметим, что при вычислении интегралов от двойных полных производных мы должны брать эти сингулярные вклады с противоположным знаком. Действительно, если  $f(Q^2)$  — невырожденная функция, которая быстро стремится к 0 на бесконечности, то

$$\int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu \partial Q_\mu} \left( \frac{f(Q^2)}{Q^2} \right) = \frac{1}{4\pi^2} f(0) = \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} f(Q^2) \cdot 4\pi^2 \delta^4(Q). \quad (2.66)$$

Если производные действуют на  $Q^{-4}$ , то выражение будет плохо определено, поэтому такие выражения должны всегда сокращаться. Это утверждение было подтверждено некоторыми явными двух- и трехпетлевыми вычислениями в работах [91, 157].

Кроме того, процедура снятия двойной полной производной (2.65) имеет следующую графическую интерпретацию. Как известно [92],  $\beta$ -функция в случае регуляризации высшими производными связана с аномальными размерностями соотношением (1.5). Поэтому действие на какой-либо пропагатор калибровочного поля, поля материи или духов Фаддеева-Попова можно интерпретировать как разрезание соответствующей линии. Полученный таким разрезанием граф будет представлять собой вклад в аномальную размерность поля, линию которого разрезали.

При этом тут стоит отметить, что, например, в случае калибровочного поля не всегда удастся определить вклад в аномальную размерность от отдельного графа, поскольку в силу тождеств Славнова-Тейлора сумма диаграмм является поперечной,

$$\Gamma_V^{(2)} - S_{\text{gf}}^{(2)} = -\frac{1}{2e_0^2} \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^4 \theta V(-p, \theta) \partial^2 \Pi_{1/2} V(p, \theta) G_V(\alpha_0, \lambda_0, Y_0, \Lambda/p), \quad (2.67)$$

тогда как вклады от отдельных графов также могут содержать и продольную часть:

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma_V^{(2)} = & -\frac{1}{2e_0^2} \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^4 \theta \left( V(-p, \theta) \partial^2 \Pi_{1/2} V(p, \theta) \right. \\ & \left. \times \Delta G_V(\alpha_0, \lambda_0, Y_0, \Lambda/p) + V(-p, \theta) V(p, \theta) \Delta \tilde{G}_V(\alpha_0, \lambda_0, Y_0, \Lambda/p) \right). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Для  $\gamma_c$  и  $(\gamma_\phi)_j^i$  таких проблем не возникает, и можно работать с каждым графом по отдельности.

Автором вычислялись некоторые графы, дающие вклад в  $\beta$ -функцию. Они приведены на Рис. 2.4.

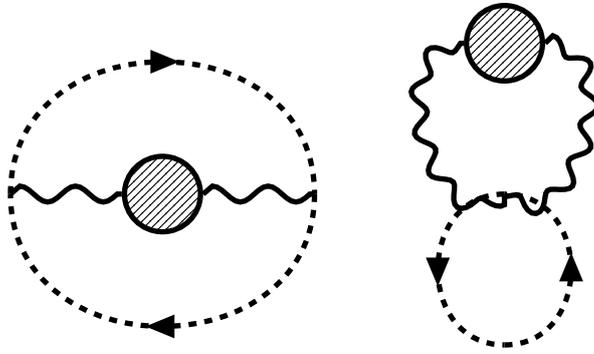


Рис. 2.4: Вклады в трехпетлевую  $\beta$ -функцию, вычисляемые автором

При этом вставка, как и прежде, определяется формулой (2.30). Очевидно, что в данном случае двойные полные производные смогут разрезать линии духов внутри и вне вставки, а также линию материи во вставке. При этом при разрезании внешних линий духов должен получаться вклад, получающийся из диаграмм с Рис. 2.1. При разрезании линий материи будет возникать вклады в аномальную размерность материи, получающиеся из графов с Рис. 2.5.

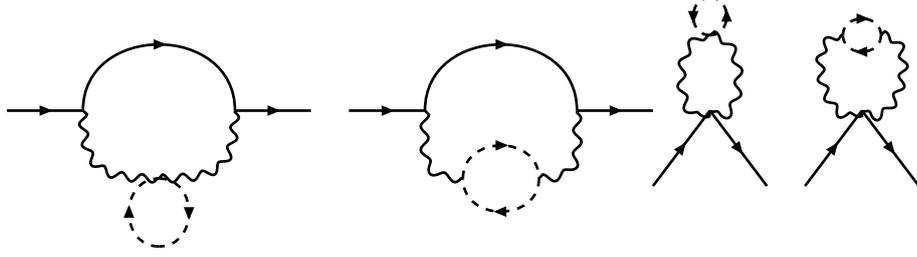


Рис. 2.5: Вклады в двухпетлевую аномальную размерность материи, соответствующие разрезанию линий материи

Вид полного вклада в  $\beta$ -функцию от графов с Рис. 4.57 имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) &= 2\pi C_2 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \left[ C_2^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2} - \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu \partial K^\mu} \right) \frac{e_0^4}{R_K^2 K^4} \right. \\ &\times \left\{ \frac{K^2}{(\mathbf{K} + \mathbf{Q})^2 Q^2} + \frac{1}{3Q^2} - \frac{1}{(\mathbf{Q} + \mathbf{K})^2} \right\} \left( f(K, L) + g(\xi_0, K, L) \right) \\ &+ \left\{ C_2 T(R) \left( \frac{\partial^2}{\partial K_\mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2} - \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu \partial K^\mu} - \frac{\partial^2}{\partial L_\mu \partial K^\mu} \right) + \frac{1}{r} \text{tr} [C(R)^2] \frac{\partial^2}{\partial L_\mu^2} \right\} \\ &\times \frac{e_0^4}{R_K^2 K^4} \left\{ \frac{K^2}{(\mathbf{K} + \mathbf{Q})^2 Q^2} + \frac{1}{3Q^2} - \frac{1}{(\mathbf{Q} + \mathbf{K})^2} \right\} h(K, L) \Big] \end{aligned}$$

+ члены дающие разрезание только калибровочных полей. (2.69)

При этом импульсы в пропагаторах материи и калибровочного поля выделены жирным шрифтом. С другой стороны, вклад от диаграмм, дающих аномальную размерность материи, имеет вид:

$$(\Delta G_\phi)_j^i = C_2 C(R)_j^i \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4}{R_K^2} \left( \frac{2}{3L^2 K^6} - \frac{1}{(\mathbf{K} + \mathbf{L})^2 L^2 K^4} \right). \quad (2.70)$$

Если применить формулу (2.65) к (2.69) и сравнить полученное выражение с (2.70) и (2.47), то не трудно убедиться, что:

$$\Delta\left(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\right) = \frac{C_2}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \Delta G_c + \dots \right) \Big|_{Q=0} - \frac{1}{2\pi r} C(R)_i^j \frac{d}{d \ln \Lambda} (\Delta G_\phi)_j^i \Big|_{Q=0}, \quad (2.71)$$

где точки означают вклады идущие от разрезания внутренних калибровочных линий. Это подтверждает часть выражения для новой формы NSVZ-соотношения (1.5). Полное вычисление духового вклада в  $\beta$ -функцию проводилось в работе [2]. Остальные вклады вычислялись другими соавторами. Полный результат также полностью соответствует NSVZ-соотношению, что, в частности, подтверждает правильность нового метода вычисления  $\beta$ -функции.

## Глава 3

# Программа для вычисления суперграфов

### 3.1 Суперсимметричная “D-алгебра”

Перейдем теперь к описанию работы программы [159], созданной автором. В разделе 2.3 Главы 2 была описана стандартная процедура построения выражения для диаграммы, определенной в терминах суперпространства. Видно (см. например формулу (2.41)), что конкретное выражение для диаграммы Фейнмана будет содержать какое-то количество суперпространственных дельта-функций  $\delta_{12}^8$ , на которые действуют суперсимметричные ковариантные производные, а все выражение будет интегрироваться по суперпространству. Типичное такое выражение имеет вид:

$$\int d^8 x_1 \dots d^8 x_n D\bar{D} \dots D\delta_{12}^8 \times \dots \times D\bar{D} \dots D\delta_{nm}^8 \quad (3.1)$$

При этом, в соответствии с [41], можно определить следующий алгоритм работы с этим выражением:

1. Производим “интегрирование по частям”. Используя (2.6), можно переносить внешнюю  $D$ -производную с любого элемента на другой, относящийся к той же точке. Таким образом, можно очистить суперпространственную дельта-функцию от производных и проинтегрировать её в соответствии со следующими правилами:

$$\int d^4 \theta_1 \delta_{12}^4(\theta) = 1; \quad \int d^4 \theta_1 f(\theta_1) \delta_{12}^4(\theta) = f(\theta_2) \quad (3.2)$$

2. Также можно переставлять производные между собой в соответствии с правилами суперсимметричной “D-алгебры” в четырех из-

мерениях:

$$\{D_a, \bar{D}_b\} = 2i(\gamma^\mu)_{ab}\partial_\mu, \quad (3.3)$$

$$\{D_a, D_b\} = 0, \quad (3.4)$$

$$\{\bar{D}_a, \bar{D}_b\} = 0, \quad (3.5)$$

$$[D_a, \bar{D}^2] = 4i(\gamma^\mu)_a{}^b \bar{D}_b \partial_\mu, \quad (3.6)$$

$$[D_a, D^2] = 0, \quad (3.7)$$

$$[\bar{D}^2, D^2] = 4i(\gamma^\mu)^{ba} [D_a, \bar{D}_b] \partial_\mu, \quad (3.8)$$

$$\bar{D}^2 D^2 \bar{D}^2 = -16\partial^2 \bar{D}^2, \quad (3.9)$$

$$D^2 \bar{D}^2 D^2 = -16\partial^2 D^2. \quad (3.10)$$

Эти тождества помогают уменьшить количество действующих производных.

3. Если в выражении есть несколько одинаковых суперпространственных дельта-функций, то следует применять следующие тождества:

$$\delta_{12}^8 D^\alpha \delta_{12}^8 = 0, \quad \text{если } \alpha \leq 3 \quad (3.11)$$

$$\delta_{12}^8 D^2 \bar{D}^2 \delta_{12}^8 = 4\delta_{12}^8 \delta^4(x_1 - x_2) \quad (3.12)$$

В результате этих действий можно снять большую часть интегрирований и убрать суперпространственные дельта-функции. После этого могут остаться ковариантные производные, действующие на внешние поля. Также останется некоторое количество следов гамма-матриц, которые раскрываются стандартными способами. Получившиеся выражения приобретают вид обычных импульсных интегралов.

## 3.2 Алгоритм, реализуемый программой

Кратко опишем алгоритм работы программы. Мы вычисляем вклад в эффективное действие (2.24). Для этого можно использовать производящий функционал (для теории Янга-Миллса например он представлен в формуле (2.22)), если исключить из него все одночастично-приводимые и несвязные диаграммы, а также добавить члены взаимодействия с внешними полями. В соответствии с вышесказанным, программа действует следующим образом.

1. В производящем функционале экспонента с вершинами взаимодействия разлагается до нужного порядка теории возмущений. При этом предварительно в неё добавляются вклады, где производные по источникам всеми возможными способами заменяются на внешние суперполя.
2. Далее во всех получившихся вкладах мы пытаемся спарить производные по источникам, что дает пропагаторы теории, как, например, в формуле (2.28). Если в итоге это не удастся, то вариант отбрасывается, если получилось — создается новое выражение, в котором производные по источникам сгруппированы парами.
3. Проверяем получившиеся графы на одночастичную приводимость. Для этого используем функцию, которая убирает по очереди каждый из пропагаторов, после чего проверяет связность. После каждой проверки либо убираем граф, либо оставляем.
4. На этом этапе переходим в импульсное представление, генерируем список петлевых импульсов, исходя из порядка разложения. Далее каждому пропагатору присваиваем импульс, исходя из закона сохранения в вершинах диаграммы, и заменяем спаренные производные по источникам на конкретное выражение для пропагатора, которое содержит оператор, действующий на суперпространственную дельта-функцию (также он может содержать импульсы и константы). После этого каждый граф также проверяется на соблюдение закона сохранения в каждой точке, и если что-то сгенерировалось неправильно, программа выдаёт ошибку.
5. Теперь выражения готовы для работы с  $D$ -алгеброй. Каждое выражение обрабатывается отдельно. Мы рассматриваем каждый оператор и выбираем тот, у которого меньше всего ковариантных производных, начинаем перебрасывать с него интегрированием по частям все операторы, пока полностью не очистим суперпространственную дельта-функцию, на которую он действует. При этом получается множество новых выражений, каждое из которых мы затем также отдельно обрабатываем. Когда суперпространственная дельта-функция очищена, мы ищем такую же и, если находим, то применяем правила (3.3)—(3.10), чтобы уменьшить число производных, а затем (3.11) и (3.12), чтобы устранить суперпространственную дельта-функцию. Если такой суперпространственной дельта-функции нет,

интегрирование просто снимается. Действуем так, пока не устраним все суперпространственные дельта-функции. Затем, если внешние импульсы не равны нулю, проделываем тоже самое для суперполей материи, учитывая их киральность. Формально программа допускает наличие и внешних калибровочных линий, но работа с ними на данный момент до конца не реализована.

6. Теперь мы имеем выражения с внешними полями, импульсами и прочими структурами, а также гамма-матрицами, дельта-символами и матрицами зарядового сопряжения. На этом шаге мы сворачиваем все индексы с дельта-символов и матриц зарядового сопряжения, а затем берем след гамма-матриц. Вообще в наших обозначениях это не совсем чистый след  $\gamma^\mu$ , в нем также есть  $\gamma_5$ , что может приводить к структурам, содержащим антисимметричный тензор  $\epsilon_{\mu\nu\lambda\delta}$ . Однако он всегда будет сворачиваться с петлевыми импульсами и, следовательно, не будет давать вклад, вплоть до пятиточечных функций Грина, которые мы пока не рассматриваем. Нужно отметить, что в отличие от вычислений в d-мерии [160], мы работаем в четырех измерениях и поэтому все стандартные соотношения для  $\gamma$ -матриц справедливы в нашем случае.
7. В результате мы получаем вклады в виде квадратов и скалярных произведений импульсов. При этом проще работать с полными квадратами, выделяя их из общего выражения. В качестве примера рассмотрим следующее выражение:

$$\begin{aligned} (q+k+l)^\mu (q+k)_\mu &= (q+k)^2 + l^\mu (q+k)_\mu \\ &= (q+k)^2 + \frac{1}{2}(q+k+l)^2 - \frac{1}{2}l^2 - \frac{1}{2}(q+k)^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

В конце для каждого отдельного графа пытаемся привести подобные.

8. На последнем этапе мы пытаемся привести подобные между разными графами. При этом также используем некоторые возможные замены переменных, поскольку все итоговые выражения предполагаются проинтегрированными по петлевым импульсам. Реализованы замены такого типа:

$$k \rightarrow k+l, \quad k \rightarrow k+l+q \quad \text{и т.д.} \quad (3.14)$$

а также все возможные перестановки импульсов:

$$k \leftrightarrow l, \quad k \leftrightarrow q \quad \text{и т.д.} \quad (3.15)$$

Мы действуем следующим образом. Пробуем совершить все возможные замены этих двух классов, при этом каждой замене ставим в соответствие некий вес (который представляет сумму значений всех импульсов) и выбираем такую замену, у которой вес наименьший. В общем случае этот минимум не единственный, но в большинстве ситуаций это так. Потом проводим прямое сравнение всех выражений и приводим подобные, что достаточно сильно упрощает выражение.

Следует также сделать несколько общих замечаний. Почти на всех этапах проводится приведение подобных в текущих на тот момент структурах. Обычно это делается прямым почленным сравнением выражения. На первом этапе, где происходит спаривание производных по источникам, приведение подобных производится путем перестановки точек и дальнейшего сравнения, пока не перебраны все перестановки. Это ускоряет работу программы на порядки. Кроме того стоит отметить, что программа выводит выражение в виде евклидовых интегралов, если все входные выражения также писать в виде евклидовых импульсов. Изменение меры в результате поворота Вика и прочие преобразования программа делает автоматически. Также на этапе генерации и непосредственной обработки каждого графа программа разделяется на потоки с помощью библиотеки OpenMP [161].

### 3.3 Синтаксис программы

Рассмотрим теперь синтаксис программы. Самым важным элементом программы является выражение типа (2.41). Оно содержит множество различных элементов. Все элементы должны быть связаны друг с другом символом умножения  $*$ . Опишем, какие элементы может содержать выражение, и как они будут записываться. Начнем с суперпространственной дельта-функции. Она записывается в виде:

$$\delta_{ab}^g(\text{Импульс})$$
$$d_{\{\text{Импульс}\}\{ab\}}$$

Тут под буквами подразумеваются цифры, обозначающие точку в суперпространстве. На текущий момент особенность программы состоит

в том, что цифры должны писаться подряд, соответственно, она принимает значения точек от 1 до 9. Однако, как будет видно далее, при заполнении входного файла большие значения будут не нужны. Вторая важная особенность - это форма записи импульса. При этом импульс задается не строкой, а числом. Это сделано для удобства работы с ним, можно применять стандартные алгоритмы нахождения наибольшего общего делителя и прочее. Каждый импульс задается простым числом, а сумма их произведением, таким образом каждое число однозначно задает сумму. Например: у нас есть импульс  $k$ ,  $l$  и  $q$ . Припишем  $k$ -число 2,  $l$ -число 3,  $q$ -число 5. Тогда, например,  $k + l$  будет 6, а  $k + l + q$  - 30. Как правило, при построении диаграмм всем линиям можно приписать именно сумму импульсов. Надо иметь ввиду, что программа работает таким образом, что сводит все операторы перед дельта-функцией к первой точке. То есть, если в эту точку входит импульс, то надо ставить перед выражением импульса знак минус. Примеры:

Выражение	Код
$\delta_{13}^8(k)$	d_{2}{13}
$\delta_{93}^8(p + k + l)$	d_{30}{93}
$\delta_{23}^8(-k)$	d_{-2}{23}

Здесь в последнем примере подразумевается, что импульс  $k$  выходит из точки 3 и входит в точку 2.

В программе есть (анти)киральные поля  $\phi$  и вещественные поля  $V$ :

$$\begin{array}{lll}
 \phi_a^i(\text{Импульс}) & \phi_a^{*i}(\text{Импульс}) & \tilde{\phi}_a^i(\text{Импульс}) \\
 F_a^i\{\text{Импульс}\} & F\#_a^i\{\text{Импульс}\} & F1_a^i\{\text{Импульс}\}, \\
 & V_a^A(\text{Импульс}) & \\
 & V_a^A\{\text{Импульс}\} & 
 \end{array}$$

под буквой  $a$  тут подразумевается номер точки суперпространства. Индексы  $A$  и  $i$  зарезервированы под калибровочные индексы, чтобы в дальнейшем применять программу для теории Янга-Миллса, в дальнейшем будем всегда класть этот индекс равным единице и не учитывать его. Также сохраняется правило для импульсов: входящий с минусом, выходящий с плюсом. Кроме того, в случае киральных полей также вводится сопряжение, которое обозначается решеткой, а также тип поля, который обозначается цифрой сразу за буквой  $F$ . Например, этот тип может обозначать  $\tilde{\phi}$  в суперсимметричной квантовой электродинамике или например массивное поле Паули-Вилларса. Примеры:

Выражение	Код
$\tilde{\phi}_1^*(k)$	F1#_1^1{2}
$\phi_9(p)$	F_9^1{5}
$V_3(-(k+p))$	V_3^1{-10}

Самая сложная часть программы - это операторы. Синтаксис здесь следующий: сначала идёт сам оператор, а затем в скобках его аргумент. Он всегда должен быть один. Тогда, обозначив под  $A$  некий аргумент, имеем:

$$D_b^a A \quad D_{ba} A \quad D_b^2 A$$

$$D\_b\{^a\}(A) \quad D\_b\{_a\}(A) \quad D\_b(A)$$

$$\bar{D}_b^a A \quad \bar{D}_{ba} A \quad \bar{D}_b^2 A$$

$$D\#\_b\{^a\}(A) \quad D\#\_b\{_a\}(A) \quad D\#\_b(A)$$

Здесь под индексом  $b$  понимается номер точки суперпространства, а под индексом  $a$  - спинорный индекс. Важно отметить, что программа считывает спинорный индекс, и его пунктирность определяется наличием или отсутствием сопряжения (обозначается решеткой) у оператора. Ещё одно важное замечание касается формы индексов. Спинорный индекс программа также считывает в виде числа. То есть, если в аналитическом выражении присутствует индекс, например,  $a$ , то для программы его следует заменить, например, цифрой 1 и тогда все остальные  $a$ , с которыми он сворачивается, также нужно будет заменить именно на 1. При этом если индекса нет, то подразумевается квадрат ковариантной производной. Особенностью использования операторов является тот факт, что операторы, действуя друг на друга, должны всегда открывать после себя скобки. Примеры:

Выражение	Код
$\bar{D}_1^a D_1^2 \bar{D}_{a1} \delta_{13}^8(k)$	D#_1{^1}(D_1(D#_1{_1}(d_{2}{13})))
$D_1^2 \bar{D}_2^2 \delta_{12}^8(k+l+p)$	D_1(D#_2(d_{30}{12}))

Также важными элементами являются импульсы и константы. Они определяются следующим образом:

$$\text{Импульс}^a \quad \text{Импульс}_a \quad K a^b(\text{Импульс})$$

$$I\{\text{Импульс}^a\} \quad I\{\text{Импульс}_a\} \quad K a^b\{\text{Импульс}\},$$

Тут импульс может иметь степень (со значком  $\hat{\quad}$  как в первом случае), или лоренцев индекс (с  $\_$  как во втором). При этом мы не различаем, поднят или опущен лоренцев индекс, он задается числом. Константа обозначается буквой  $K$ , следом идет число (это её тип), а потом степень, если она есть. Кроме того, константа может быть функцией импульса, тогда его нужно также написать. Примеры:

Выражение	Код
$k^2$	I{2^2}
$l_\mu$	I{3_1}
$1/R_k$	K5{2}

Тут и далее, например, функцию-регулятор  $1/R_k$  будем обозначать константой типа 5, а, например,  $\xi_0/K_k$  константой типа 4. Также необходимо отметить возможность строить сложные константы, для этого нужно открывать квадратные скобки  $[[$ , и внутри них писать, чередуя их знаками - плюс или минус, константы и импульсы. Также стоит отметить, что у программы есть возможность считывать такие элементы, как  $\gamma$ -матрицы и некоторые объекты с калибровочными индексами, но в рамках данного рассмотрения эти объекты на вход программы, как правило, не подаются.

Важным также является задание умножения на некое число. Причем оно может быть не только рациональным, но и содержать мнимую единицу:

$$-i\frac{a}{b}$$

$$-a/b*i$$

Единственное, что нужно заметить: мнимую единицу следует писать отдельно от самого рационального числа. Знак минус же следует ставить перед рациональным числом именно так, как в примере.

Наконец в выражение можно также вставить константу связи в некоторой степени:

$$e^a$$

Она даёт представление о порядке каждого выражения при генерации графов. Примеры полного выражения будут представлены в следующих разделах.

### 3.4 $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная электродинамика с $N_f$ ароматами

Программа на данный момент работает в рамках  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной электродинамики [41, 42, 44], регуляризованной высшими производными [78–81]. Регуляризация проводится в четырёх измерениях. Действие исходной теории в безмассовом случае имеет вид:

$$S = \frac{1}{4e_0^2} \text{Re} \int d^4x d^2\theta W^a W_a + \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^{N_f} \int d^4x d^4\theta \left( \phi_\alpha^* e^{2V} \phi_\alpha + \tilde{\phi}_\alpha^* e^{-2V} \tilde{\phi}_\alpha \right), \quad (3.16)$$

где  $e_0$  – голая константа связи,  $V$  – калибровочное суперполе,  $\phi_\alpha$  –  $N_f$  киральных суперполей материи,  $\tilde{\phi}_\alpha$  – киральные поля с противоположным  $U(1)$  зарядом. Для того, чтобы регуляризовать теорию, необходимо добавить в действие регуляризационную функцию  $R(\frac{\partial^2}{\Lambda^2})$ , на которую накладываются следующие условия:

$$R(0) = 1, \quad R(\infty) = \infty. \quad (3.17)$$

Тогда регуляризованное действие теории примет вид:

$$S = \frac{1}{4e_0^2} \text{Re} \int d^4x d^2\theta W^a R\left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right) W_a + \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^{N_f} \int d^4x d^4\theta \left( \phi_\alpha^* e^{2V} \phi_\alpha + \tilde{\phi}_\alpha^* e^{-2V} \tilde{\phi}_\alpha \right). \quad (3.18)$$

Также необходимо добавить член, фиксирующий калибровку,

$$S_{\text{gf}} = -\frac{1}{32e_0^2\xi_0} \int d^4x d^4\theta D^2 V K \left( \partial^2 / \Lambda^2 \right) \bar{D}^2 V. \quad (3.19)$$

При этом калибровке Фейнмана будет соответствовать  $\xi_0 = 1$  и  $K = R$ . Впрочем в дальнейшем вычисления будут проводиться в произвольной калибровке.

Для регуляризации в однопетлевом приближении нужно добавить также детерминанты Паули-Вилларса [82]. Они могут быть представлены в виде континуальных интегралов по соответствующим киральным суперполям  $\Phi$  и  $\tilde{\Phi}$ :

$$(\det(PV, M))^{-1} = \int D\Phi D\tilde{\Phi} \exp(iS_{PV}), \quad (3.20)$$

где действие для суперполей Паули-Вилларса определяется выражением:

$$S_{PV} = -\frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\Phi^* e^{2V} \Phi + \tilde{\Phi}^* e^{-2V} \tilde{\Phi}) + \frac{1}{2} \int d^4x d^2\theta (M \Phi \tilde{\Phi} + c.c.), \quad (3.21)$$

а  $M = a\Lambda$  - масса суперполей Паули-Вилларса. При этом константа  $a$  не зависит от константы связи.

Итоговое выражения для действия имеет вид:

$$S_{\text{полн}} = S + S_{\text{source}} + S_{\text{reg}} + S_{\text{gf}}. \quad (3.22)$$

Производящий функционал может быть записан в следующей форме:

$$Z[J, j, \tilde{j}] = \int DV D\phi D\tilde{\phi} (\det(PV, M))^{N_f} \times \exp(iS + iS_{\text{reg}} + iS_{\text{source}} + iS_{\text{gf}}), \quad (3.23)$$

где  $J, j, \tilde{j}$  - источники. Исходя из этого можно получить, что пропагаторы в такой теории для обычных полей и (массивных) полей Паули-Вилларса имеют вид:

$$\begin{aligned} P(\phi_{\alpha,x}, \phi_{\beta,y}^*) &= P(\tilde{\phi}_{\alpha,x}, \tilde{\phi}_{\beta,y}^*) = \delta_{\alpha\beta} \frac{\bar{D}_x^2 D_y^2}{4\partial^2} \delta_{xy}^8; \\ P(\Phi_x, \tilde{\Phi}_y) &= \frac{M\bar{D}^2}{\partial^2 + M^2} \delta_{xy}^8; \\ P(\Phi_x^*, \tilde{\Phi}_y^*) &= \frac{MD^2}{\partial^2 + M^2} \delta_{xy}^8; \\ P(\Phi_x, \Phi_y^*) &= P(\tilde{\Phi}_x, \tilde{\Phi}_y^*) = \frac{\bar{D}_x^2 D_y^2}{4(\partial^2 + M^2)} \delta_{xy}^8. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Пропагатор же калибровочного поля выглядит следующим образом:

$$P(V_x, V_y) = 2e_0^2 \left[ -\frac{1}{R\partial^2} + \frac{1}{16\partial^4} \left( \frac{\xi_0}{K} - \frac{1}{R} \right) \times (\bar{D}^2 D^2 + D^2 \bar{D}^2) \right] \delta_{xy}^8. \quad (3.25)$$

Вершины в данном случае могут быть легко построены прямым разложением действия теории.

### 3.5 Примеры входного файла

Программа на данный момент представляет собой консольное приложение, данные считываются из текстового файла. На вход программы необходимо отправить:

1. Тип вычисления: какой именно вклад в эффективное действие мы считаем.
2. Различные опции, например пометка, что мы работаем с суперсимметричной квантовой электродинамикой с  $N_f$  ароматами.
3. Порядок разложения и число петель.
4. Список пропагаторов и вершин теории

Рассмотрим пример входного файла для вычисления в одной петле:

```
Type:
F#_1^-1}*F_1^1{1}
Option:
SQED
Nf^0
Loops:
1
Order:
2
Propagators:
V_1^1{1}*V_2^1{1}
-1/4*i*e^0*[K4{1}-K5{1}]*I{1^-4}*D#_1^1(D_1(D#_1{1}(d_{1}{12})))
2*i*e^0*I{1^-2}*K4{1}*d_{1}{12}
F#_1^1{1}*F_2^1{1}
-1/4*i*e^0*I{1^-2}*D_1(D#_2(d_{1}{12}))
Vertexes:
1/2*i*e*F#_1^1{6}*V_1^1{-3}*F_1_1{-2}
1/2*i*e^2*F#_1^1{30}*V_1^1{-3}*V_1^1{-5}*F_1_1{-2}
```

Нужно отметить, что в приведенном примере имеются все описанные в разделе с синтаксисом объекты. Сами выражения построены в соответствии с заданной теорией. При этом в пропагаторах, как видно, введены затравочные импульсы равные нулю (единице в обозначениях программы). Сами пропагаторы идут следом за выражением, определяющим их тип. В вершинах импульсы расставлены так, чтобы соблюсти закон сохранения импульса в вершине. При этом не трудно заметить, что

пропагатор калибровочного поля представлен в виде:

$$P(V_x, V_y) = 2e_0^2 \left[ -\frac{\xi_0}{K\partial^2} + \frac{1}{\partial^4} \left( \frac{\xi_0}{K} - \frac{1}{R} \right) \partial^2 \Pi_{1/2} \right] \delta_{xy}^8, \quad (3.26)$$

где  $\partial^2 \Pi_{1/2}$  расписано по определению (2.33). Такое представление выбрано, потому что очень важно уменьшить количество обрабатываемых выражений, поскольку каждое выражение обрабатывается с точки зрения D-алгебры по отдельности. При этом индексы ароматов опустим, в программе пропорциональность вклада  $N_f$  определяется числом замкнутых петель материи. Из вершин имеет смысл оставить два вклада до порядка разложения  $e_0^2$ , поскольку в рассматриваемом примере одной петле соответствует второй порядок по  $e_0$ . В качестве опции написано  $N_f^0$ , то есть рассматриваются только вклады, пропорциональные  $N_f^0$ , впрочем в одной петле другие отсутствуют.

Теперь рассмотрим вид входного файла для случая двух петель:

```
Type:
F#_1^1{-1}*F_1^1{1}
Option:
SQED
Loops:
2
Order:
4
Propagators:
V_1^1{1}*V_2^1{1}
-1/4*i*e^0*[K4{1}-K5{1}]*I{1^-4}*D#_1{^1}(D_1(D#_1{1}(d_{1}{12})))
2*i*e^0*I{1^-2}*K4{1}*d_{1}{12}
F#_1^1{1}*F_2^1{1}
-1/4*i*e^0*I{1^-2}*D_1(D#_2(d_{1}{12}))
F1#_1^1{1}*F1_2^1{1}
-1/4*i*e^0*I{1^-2}*D_1(D#_2(d_{1}{12}))
F2#_1^1{1}*F2_2^1{1}
-1/4*i*e^0*K2{1}*D_1(D#_2(d_{1}{12}))
F3#_1^1{1}*F3_2^1{1}
-1/4*i*e^0*K2{1}*D_1(D#_2(d_{1}{12}))
F2_1^1{1}*F3_2^1{1}
-1*i*e^0*K3{1}*D#_1(d_{1}{12})
F2#_1^1{1}*F3#_2^1{1}
-1*i*e^0*K3{1}*D_1(d_{1}{12})
Vertexes:
1/2*i*e*F#_1^1{6}*V_1^1{-3}*F_1_1{-2}
1/2*i*e^2*F#_1^1{30}*V_1^1{-3}*V_1^1{-5}*F_1_1{-2}
1/3*i*e^3*F#_1^1{210}*V_1^1{-3}*V_1^1{-5}*V_1^1{-7}*F_1_1{-2}
1/6*i*e^4*F#_1^1{1890}*V_1^1{-3}*V_1^1{-5}*V_1^1{-7}*V_1^1{-9}*F_1_1{-2}
```

$-1/2*i*e^{F1\#_1^{-1}\{6\}}*V_1^{-1}\{-3\}*F1_{1_1}\{-2\}$   
 $1/2*i*e^{2*F1\#_1^{-1}\{30\}}*V_1^{-1}\{-3\}*V_1^{-1}\{-5\}*F1_{1_1}\{-2\}$   
 $-1/3*i*e^{3*F1\#_1^{-1}\{210\}}*V_1^{-1}\{-3\}*V_1^{-1}\{-5\}*V_1^{-1}\{-7\}*F1_{1_1}\{-2\}$   
 $1/6*i*e^{4*F1\#_1^{-1}\{1890\}}*V_1^{-1}\{-3\}*V_1^{-1}\{-5\}*V_1^{-1}\{-7\}*V_1^{-1}\{-9\}*F1_{1_1}\{-2\}$   
 $1/2*i*e^{F2\#_1^{-1}\{6\}}*V_1^{-1}\{-3\}*F2_{1_1}\{-2\}$   
 $1/2*i*e^{2*F2\#_1^{-1}\{30\}}*V_1^{-1}\{-3\}*V_1^{-1}\{-5\}*F2_{1_1}\{-2\}$   
 $1/3*i*e^{3*F2\#_1^{-1}\{210\}}*V_1^{-1}\{-3\}*V_1^{-1}\{-5\}*V_1^{-1}\{-7\}*F2_{1_1}\{-2\}$   
 $1/6*i*e^{4*F2\#_1^{-1}\{1890\}}*V_1^{-1}\{-3\}*V_1^{-1}\{-5\}*V_1^{-1}\{-7\}*V_1^{-1}\{-9\}*F2_{1_1}\{-2\}$   
 $-1/2*i*e^{F3\#_1^{-1}\{6\}}*V_1^{-1}\{-3\}*F3_{1_1}\{-2\}$   
 $1/2*i*e^{2*F3\#_1^{-1}\{30\}}*V_1^{-1}\{-3\}*V_1^{-1}\{-5\}*F3_{1_1}\{-2\}$   
 $-1/3*i*e^{3*F3\#_1^{-1}\{210\}}*V_1^{-1}\{-3\}*V_1^{-1}\{-5\}*V_1^{-1}\{-7\}*F3_{1_1}\{-2\}$   
 $1/6*i*e^{4*F3\#_1^{-1}\{1890\}}*V_1^{-1}\{-3\}*V_1^{-1}\{-5\}*V_1^{-1}\{-7\}*V_1^{-1}\{-9\}*F3_{1_1}\{-2\}$

Тут мы рассматриваем все вклады, в том числе и пропорциональные  $N_f$ . При этом тут введены также поля  $\tilde{\phi} — F1$ ,  $\tilde{\Phi} — F2$ ,  $\tilde{\tilde{\Phi}} — F3$ . При этом в пропагаторах полей Паули-Вилларса введены следующие обозначения:

$$\frac{M}{k^2 + M^2} \quad \frac{1}{k^2 + M^2}$$

$K3\{2\} \quad K2\{2\}$

### 3.6 Результаты

Рассмотрим вывод для 1-го примера из предыдущего раздела, а именно для вычисления в одной петле в неминимальной калибровке:

```

Файл считан корректно
Идет генерация 1-петлевых диаграмм
Завершено100%
Диаграммы созданы, идет расстановка импульсов...
Генерация диаграмм завершена
Генерация диаграмм заняла 0.031 сек
Идет вычисление диаграмм...
0
-1*e^2*F#_1^{-1}\{1\}*F_1_2\{1\}*d_{2}\{11\}*K4\{2\}*I{2^-2}
1
1/8*e^2*F#_1^{-1}\{1\}*F_1_2\{1\}*D#_1^2(D_1(D#_1\{2\}
(d_{2}\{11\}))*I{2^-4}*[K4\{2\}-K5^-1\{2\}]
2
-1/8*e^2*F#_1^{-1}\{1\}*F_2_2\{1\}*d_{-2}\{12\}
*D_2(D#_1(d_{2}\{12\}))*K4\{2\}*I{2^-2}*I{2^-2}
3
1/64*e^2*F#_1^{-1}\{1\}*F_2_2\{1\}*D#_1^2
(D_1(D#_1\{2\}(d_{-2}\{12\}))*D_2(D#_1(d_{2}\{12\})))
*I{2^-4}*[K4\{2\}-K5^-1\{2\}]*I{2^-2}

```

Вычисление диаграмм завершено  
 Вычисление диаграмм заняло 0.038 сек  
 Идет приведение подобных...  
 Приведение подобных завершено  
 Результат:  
 $-1/2 * e^2 * F_{-1} * F_{1,2} * I_{2^{-4}} * K_{5^{-1}}^2$   
 Общее время работы 0.067 сек

Каждый шаг работы программы поясняется, в процессе генерации выводится процент от сделанного на данный момент. Затем выводится время, которое потребовалось для генерации. Когда идет вычисление диаграмм, то для каждой диаграммы выводится её номер (начиная с 0) и выражение для неё. В данном случае вклады с номерами 0 и 1 отвечают правому графу на Рис. 3.1, а с номерами 2 и 3 второму.

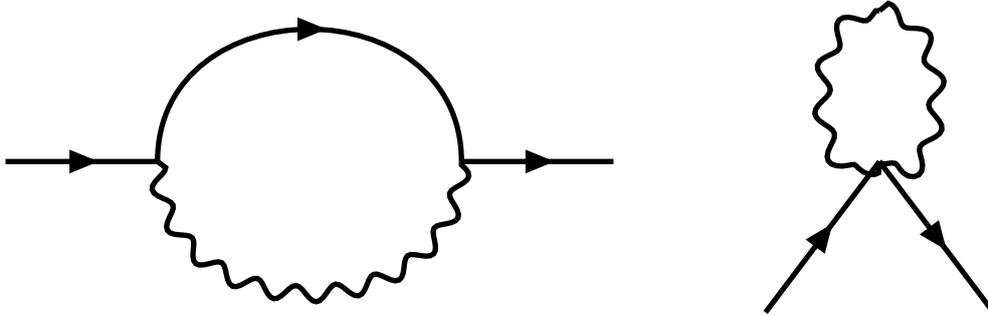


Рис. 3.1: Вклады в однопетлевую аномальную размерность суперполей материи

Все вклады от этих выражений программа сама суммирует, в том числе с учётом возможных замен. В конце выводится результат. Нужно отметить, что он зависит только от константы 5-го типа, то есть  $1/R_k$ , таким образом выражение является калибровочно-независимым. В данном случае это выражение переводится на аналитический язык следующим образом:

$$-\frac{1}{2} e_0^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d^4 \theta \phi_\alpha^*(0, \theta) \phi_\alpha(0, \theta) \frac{1}{R_k k^4}. \quad (3.27)$$

Вообще, все вводные выражения предполагаются проинтегрированными по полному суперпространству, а выводные по  $d^4 \theta$  и по всем петлевым импульсам. Внешние импульсы в данном случае положены равными нулю, но если это не так, то интегрирование предполагается и по ним. Поскольку связь эффективного действия с двухточечной функцией Грина

выражается формулой

$$\Gamma^{(2)} \sim \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^{N_f} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} d^4 \theta (\phi_\alpha^*(-q, \theta) \phi_\alpha(q, \theta) + \tilde{\phi}_\alpha^*(-q, \theta) \tilde{\phi}_\alpha(q, \theta)) G(\alpha_0, \Lambda/q), \quad (3.28)$$

то вклад в функцию Грина (в которой внешний импульс положен равным нулю) имеет вид

$$\Delta G^1|_{q=0} = -2e_0^2 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^4 R_K}. \quad (3.29)$$

Теперь перейдем к результатам второго входного файла из предыдущего раздела, а именно к вычислению в двух петлях, в том числе, с учётом полей Паули-Вилларса. Вкладов от графов получается достаточно много, поэтому приведем лишь финальный результат:

Результат:

$$\begin{aligned} & e^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} d^4 \theta \phi_\alpha^*(0, \theta) \phi_\alpha(0, \theta) \frac{1}{R_k^2 k^4 (k+l)^2 l^2}; \\ & -2e^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} d^4 \theta \phi_\alpha^*(0, \theta) \phi_\alpha(0, \theta) \frac{M^2}{R_k^2 k^6 ((k+l)^2 + M^2)(l^2 + M^2)}; \\ & -2e^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} d^4 \theta \phi_\alpha^*(0, \theta) \phi_\alpha(0, \theta) \frac{l^2}{R_k^2 k^6 ((k+l)^2 + M^2)(l^2 + M^2)}; \\ & e^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} d^4 \theta \phi_\alpha^*(0, \theta) \phi_\alpha(0, \theta) \frac{1}{R_k^2 k^4 ((k+l)^2 + M^2)(l^2 + M^2)}; \\ & 2e^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} d^4 \theta \phi_\alpha^*(0, \theta) \phi_\alpha(0, \theta) \frac{1}{R_k^2 k^6 (l^2 + M^2)}; \end{aligned}$$

Переведем эти вклады на аналитический язык:

$$e_0^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} d^4 \theta \phi_\alpha^*(0, \theta) \phi_\alpha(0, \theta) \frac{1}{R_k^2 k^4 (k+l)^2 l^2}; \quad (3.30)$$

$$-2e_0^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} d^4 \theta \phi_\alpha^*(0, \theta) \phi_\alpha(0, \theta) \frac{M^2}{R_k^2 k^6 ((k+l)^2 + M^2)(l^2 + M^2)}; \quad (3.31)$$

$$-2e_0^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} d^4 \theta \phi_\alpha^*(0, \theta) \phi_\alpha(0, \theta) \frac{l^2}{R_k^2 k^6 ((k+l)^2 + M^2)(l^2 + M^2)}; \quad (3.32)$$

$$e_0^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} d^4 \theta \phi_\alpha^*(0, \theta) \phi_\alpha(0, \theta) \frac{1}{R_k^2 k^4 ((k+l)^2 + M^2)(l^2 + M^2)}; \quad (3.33)$$

$$2e_0^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} d^4 \theta \phi_\alpha^*(0, \theta) \phi_\alpha(0, \theta) \frac{1}{R_k^2 k^6 (l^2 + M^2)}; \quad (3.34)$$

$$e_0^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} d^4 \theta \phi_\alpha^*(0, \theta) \phi_\alpha(0, \theta) \frac{1}{R_k R_l l^2 k^4 (k+l)^2}. \quad (3.35)$$

Сразу можно отметить, что результат оказался калибровочно-независимым. Кроме того, можно заметить, что если сложить вклады (3.31), (3.32) и (3.34), то получим:

$$2e_0^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} d^4 \theta \phi_\alpha^*(0, \theta) \phi_\alpha(0, \theta) \frac{1}{R_k^2 k^6} \left( \frac{1}{l^2 + M^2} - \frac{1}{(k+l)^2 + M^2} \right). \quad (3.36)$$

При этом, если в первом слагаемом сделать замену  $l \rightarrow k+l$ , то легко видеть, что это выражение равно нулю. Таким образом, остаются вклады (3.30), (3.33) и (3.35). А, поскольку мы рассматривали просто массивные поля в дополнении к обычным, то, чтобы они стали полями Паули-Вилларса, их надо взять с противоположным знаком. Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta G^2|_{q=0} &= 4e_0^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{R_k R_l l^2 k^4 (k+l)^2} \\ &+ 4e_0^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{R_k^2 k^4} \left( \frac{1}{(k+l)^2 l^2} - \frac{1}{((k+l)^2 + M^2)(l^2 + M^2)} \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

При этом, аналогично формуле (2.24), аномальная размерность определяется следующим образом:

$$\gamma(\alpha_0) = \left. \frac{d \ln G}{d \ln \Lambda} \right|_{\alpha, \xi; p=0}, \quad (3.38)$$

так что

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha_0) &= \left. \frac{d \ln G}{d \ln \Lambda} \right|_{q=0} = -\frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{2e_0^2}{K^4 R_K^2} \left\{ R_K \right. \\ &- 2e_0^2 N_f \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{L^2(L+K)^2} - \frac{1}{(L^2 + M^2)((L+K)^2 + M^2)} \right) \left. \right\} \\ &+ \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4}{R_K R_L} \left( \frac{4}{K^2 L^4 (K+L)^2} - \frac{2}{K^4 L^4} \right) + O(e_0^6). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Этот результат полностью совпадает с результатом из статьи [3]. Стоит отметить, что автор также принимал непосредственное участие в ручных вычислениях статьи [3]. Им вычислялся ряд вкладов в  $\beta$ -функцию и аномальную размерность.

Программа использовалась для вычислений вплоть до трёх петель. Результаты трёхпетлевого вычисления подробно будут обсуждаться в следующей главе.

В конце приведем время, которое заняли различные вычисления данной программой. Вычисления проводились на следующей конфигурации:

*Операционная система: Windows 10 x64*  
*Процессор: AMD Ryzen 5 1600 Six-Core Processor 3.20 GHz*  
*Оперативная память: 8 Гб*  
*Компилятор: GNU GCC Compiler*  
*Опции компиляции: -march=native, -O3*

Условно разделим их на три части в зависимости от степени числа ароматов. При этом поскольку эта степень определяется числом замкнутых петель материи, то некоторые вклады существуют только в определенном порядке. Кроме того, будем рассматривать также случаи минимальной ( $\xi_0 = 1$ ) и неминимальной ( $\xi_0 \neq 1$ ) калибровок, а также отсутствие или наличие массивных полей в теории ( $m = 0$  или  $m \neq 0$ ). Время работы приведено в табл. 3.1,3.2,3.3.

	1 петля	2 петли	3 петли
$\xi_0 = 1$	0.052 сек	0.14 сек	2.6 сек
$\xi_0 \neq 1$	0.067 сек	0.57 сек	2 мин 27 сек

Таблица 3.1: Время работы, вклад  $N_f^0$

	2 петли	3 петли
$\xi_0 = 1, m = 0$	0.16 сек	6.6 сек
$\xi_0 \neq 1, m = 0$	0.52 сек	13 мин 49 сек
$\xi_0 = 1, m \neq 0$	0.41 сек	41.5 сек
$\xi_0 \neq 1, m \neq 0$	1.23 сек	3 ч 54 мин

Таблица 3.2: Время работы, вклад  $N_f^1$

При этом нужно отметить, что эти вычисления проводились в минимальной допустимой для каждого случая конфигурации входного файла, это означает, что при рассмотрении, например, случая ( $\xi_0 = 1$ ) рассматривались вершины, в которых число внешних линий калибровочного поля не превышает число петель, диаграммы, в которых это не так, равны

	3 петли
$\xi_0 = 1, m = 0$	4.2 сек
$\xi_0 \neq 1, m = 0$	6.6 сек
$\xi_0 = 1, m \neq 0$	35 сек
$\xi_0 \neq 1, m \neq 0$	2 мин 58 сек

Таблица 3.3: Время работы, вклад  $N_f^2$

нулю в такой калибровке в соответствии с (3.11). Это немного уменьшало время работы.

## Глава 4

# Вычисление трехпетлевой аномальной размерности и четырехпетлевой $\beta$ -функции для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики

Перейдем к вычислению трехпетлевой аномальной размерности и четырехпетлевой  $\beta$ -функции для  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной квантовой электродинамики, регуляризованной высшими производными. Результаты этого вычисления приведены в работе [6]. В этой главе кратко опишем основные методы и результаты данного исследования.

### 4.1 Ренормгрупповые функции в суперсимметричной электродинамике

Будем рассматривать квантовую суперсимметричную электродинамику, описанную в разделе 3.4 главы 3. Эта теория является перенормируемой, поэтому все расходимости могут быть устранены переопределением константы связи, а также киральных полей  $\phi_\alpha$  и  $\tilde{\phi}_\alpha$ . Заметим, что все киральные поля имеют одну константу перенормировки  $Z$ , такую что  $\phi_{\alpha,R} = \sqrt{Z}\phi_\alpha$ ,  $\tilde{\phi}_{\alpha,R} = \sqrt{Z}\tilde{\phi}_\alpha$  для всех  $\alpha = 1, \dots, N_f$ .

Удобно задавать расходимости с помощью ренормгрупповых функций (РГФ). В соответствии с работой [162] необходимо различать РГФ определенные в терминах голых констант связи,

$$\beta(\alpha_0) = \left. \frac{d\alpha_0}{d \ln \Lambda} \right|_{\alpha=\text{const}} ; \quad \gamma(\alpha_0) = - \left. \frac{d \ln Z}{d \ln \Lambda} \right|_{\alpha=\text{const}}, \quad (4.1)$$

и РГФ определенные в терминах перенормированных констант связи

$$\tilde{\beta}(\alpha) = \left. \frac{d\alpha}{d \ln \mu} \right|_{\alpha_0 = \text{const}} ; \quad \tilde{\gamma}(\alpha) = \left. \frac{d \ln Z}{d \ln \mu} \right|_{\alpha_0 = \text{const}}, \quad (4.2)$$

где  $\mu$  — точка перенормировки.

РГФ (4.1) не зависят от перенормировочного предписания, но зависят от регуляризации. В соответствии с [85, 163] в случае использования регуляризации высшими производными, они будут удовлетворять NSVZ-соотношению [164, 165]

$$\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} = \frac{N_f}{\pi} (1 - \gamma(\alpha_0)) \quad (4.3)$$

во всех петлях при любом перенормировочном предписании.

В тоже время РГФ, определенные уравнением (4.2) зависят и от регуляризации, и от схемы перенормировки. Для них уравнение, аналогичное (4.3), справедливо для определенного класса схем, которые называются “NSVZ схемами”. Некоторые из них даются HD+MSL предписанием [162, 166, 167], когда теория регуляризуется высшими производными, а расходимости устраняются минимальным вычитанием логарифмов [168, 169].

## 4.2 Трехпетлевая аномальная размерность и четырехпетлевая $\beta$ -функция, определенные в терминах голых констант связи

Вычисляя суперграфы с двумя внешними линиями материи, можно получить функцию  $G$ , которая связана с вкладом в эффективное действие посредством формулы (3.28). Если функция  $G$  известна, то аномальную размерность, определенную в терминах голых констант связи, можно получить из формулы (3.38).

Все диаграммы, дающие вклады в аномальную размерность в трех петлях, были получены с помощью программы, описанной в Главе 3. Результат, полученный непосредственно, является достаточно громоздким, поэтому приведем здесь результат, полученный после его ручной дора-

ботки,

$$\begin{aligned}
\gamma(\alpha_0) &= \left. \frac{d \ln G}{d \ln \Lambda} \right|_{P=0} = -\frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{2e_0^2}{K^4 R_K} \\
&+ \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4}{R_K R_L} \left( \frac{4}{K^2 L^4 (K+L)^2} - \frac{2}{K^4 L^4} \right) \\
&+ N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{4e_0^4}{R_K^2 K^4} \left( \frac{1}{L^2 (L+K)^2} - \frac{1}{L^2 + M^2} \right. \\
&\times \left. \frac{1}{(L+K)^2 + M^2} \right) + \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{8e_0^6}{R_K R_L R_Q} \\
&\times \left[ -\frac{1}{3K^4 L^4 Q^4} + \frac{1}{K^4 L^2 Q^4 (Q+L)^2} + \frac{1}{K^2 L^4 (K+L)^2 (Q+K+L)^2} \right. \\
&\times \left. \left( \frac{1}{Q^2} - \frac{2}{(Q+L)^2} \right) \right] + N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{16e_0^6 K_\mu L^\mu}{R_K^2 R_L K^4 L^4} \\
&\times \frac{1}{(K+L)^2} \left( \frac{1}{Q^2 (Q+K)^2} - \frac{1}{(Q^2 + M^2)((Q+K)^2 + M^2)} \right) + N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \\
&\times \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{8e_0^6}{R_K^2 R_L K^4 L^2} \left( \frac{2(Q+K+L)^2 - K^2 - L^2}{Q^2 (Q+K)^2 (Q+L)^2 (Q+K+L)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2(Q+K+L)^2 - K^2 - L^2}{(Q^2 + M^2)((Q+K)^2 + M^2)((Q+L)^2 + M^2)((Q+K+L)^2 + M^2)} \right) \\
&+ \frac{4M^2}{(Q^2 + M^2)^2 ((Q+K)^2 + M^2)((Q+L)^2 + M^2)} \left) - (N_f)^2 \frac{d}{d \ln \Lambda} \\
&\times \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{8e_0^6}{R_K^3 K^4} \left( \frac{1}{Q^2 (Q+K)^2} - \frac{1}{(Q+K)^2 + M^2} \right. \\
&\times \left. \frac{1}{Q^2 + M^2} \right) \left( \frac{1}{L^2 (L+K)^2} - \frac{1}{(L^2 + M^2)((L+K)^2 + M^2)} \right) + O(e_0^8), (4.4)
\end{aligned}$$

где  $R_K \equiv R(K^2/\Lambda^2)$ . Нужно отметить, что вычисления проводились при произвольном параметре  $\xi_0$ , но калибровочная зависимость исчезла в соответствии с общими теоремами, смотри работу [99] и ссылки в ней. Этот факт является важной проверкой корректности вычисления.

Вычисляя выражение (4.4), необходимо выразить голые константы связи через перенормированные и только потом брать производную по  $\ln \Lambda$ , что обязательно нужно делать перед интегрированием. В низших порядках голая и перенормированные константы ( $\alpha_0 = e_0^2/4\pi$  и  $\alpha = e^2/4\pi$ , соответственно) связаны следующим соотношением (смотри например [3]):

$$\frac{1}{\alpha_0} = \frac{1}{\alpha} - \frac{N_f}{\pi} \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{1,0} \right) - \frac{\alpha N_f}{\pi^2} \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{2,0} \right) + O(\alpha^2), \quad (4.5)$$

где  $b_{1,0}$  и  $b_{2,0}$  — конечные константы которые частично определяют схему вычитаний в одной и двух петлях соответственно. Нужно отметить, что похожие конечные константы возникают и в константе перенормировки кирального суперполя материи. Например, в низшем приближении

$$\ln Z = \frac{\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_{1,0} \right) + O(\alpha^2). \quad (4.6)$$

Интегралы, представленные в (4.4) (переписанные в терминах перенормированных констант с помощью (4.5)), вычисляются в Приложении А при помощи метода полиномов Чебышева [170]. Полиномы Чебышева определяются следующим образом

$$C_n(\cos \theta) \equiv \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} \quad (4.7)$$

и (для  $t < 1$ ) удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{1-2tz+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n C_n(z). \quad (4.8)$$

Соответственно, функция  $(K-L)^{-2} = (K^2 - 2KL \cos \theta + L^2)^{-1}$ , где  $\theta$  — угол между четырех-векторами  $K_\mu$  и  $L_\mu$ , может быть представлена в виде:

$$\frac{1}{(K-L)^2} = \begin{cases} \frac{1}{K^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{L}{K}\right)^n C_n(\cos \theta), & \text{если } K > L; \\ \frac{1}{L^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{K}{L}\right)^n C_n(\cos \theta), & \text{если } L > K. \end{cases} \quad (4.9)$$

Тогда угловые части петлевых интегралов могут быть вычислены с помощью соотношений

$$\int \frac{d\Omega_Q}{2\pi^2} C_m \left( \frac{K_\mu Q^\mu}{KQ} \right) C_n \left( \frac{Q_\nu L^\nu}{QL} \right) = \frac{1}{n+1} \delta_{mn} C_n \left( \frac{K_\mu L^\mu}{KL} \right); \quad (4.10)$$

$$\int \frac{d\Omega}{2\pi^2} C_m(\cos \theta) C_n(\cos \theta) = \delta_{mn}, \quad (4.11)$$

где  $d\Omega$  — телесный угол на сфере  $S^3$  в импульсном пространстве. (Индекс  $Q$  обозначает, что сфера находится в пространстве с координатами  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ .)

Вычисления интегралов в уравнении (4.4) описано в Приложении А. Результат для аномальной размерности, определенной в терминах голых констант связи, имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha_0) = & -\frac{\alpha_0}{\pi} + \frac{\alpha_0^2}{2\pi^2} + \frac{\alpha_0^2 N_f}{\pi^2} \left( \ln a + 1 + \frac{A_1}{2} \right) - \frac{\alpha_0^3}{2\pi^3} - \frac{\alpha_0^3 N_f}{\pi^3} \left( \ln a \right. \\ & \left. + \frac{3}{4} + C \right) - \frac{\alpha_0^3 (N_f)^2}{\pi^3} \left( (\ln a + 1)^2 - \frac{A_2}{4} + D_1 \ln a + D_2 \right) + O(\alpha_0^4), \end{aligned} \quad (4.12)$$

где  $A_1, A_2, C, D_1,$  и  $D_2$  численные параметры зависящий от регулятора  $R(x)$ . Они определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv \int_0^\infty dx \ln x \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{R(x)} \right); & A_2 &\equiv \int_0^\infty dx \ln^2 x \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{R(x)} \right); \\ C &\equiv \int_0^1 dx \int_0^\infty dy x \ln y \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{R(y)R(x^2y)} \right); & D_1 &\equiv \int_0^\infty dx \ln x \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{R^2(x)} \right); \\ D_2 &\equiv \int_0^\infty dx \ln x \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{R^2(x)} \left[ -\frac{1}{2} (1 - R(x)) \ln x \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{1 + \frac{4a^2}{x}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{x}{x + 4a^2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Заметим, что (4.12) зависит только от параметров регуляризации, но не зависит от параметров перенормировки, которые фиксируют схему вычитаний в рассматриваемом приближении. Это происходит, потому что мы рассматриваем аномальную размерность, определенную в терминах голой константы связи, которая схемнонезависима при фиксированной регуляризации [162].

В частном случае  $R(x) = 1 + x^n$ , некоторые параметры могут быть вычислены аналитически,

$$\begin{aligned}
A_1 \Big|_{R(x)=1+x^n} &= 0; & A_2 \Big|_{R(x)=1+x^n} &= -\frac{\pi^2}{3n^2}; \\
C \Big|_{R(x)=1+x^n} &= \frac{1}{2n^2} \psi' \left( \frac{n+1}{n} \right); & D_1 \Big|_{R(x)=1+x^n} &= \frac{1}{n},
\end{aligned} \tag{4.14}$$

где  $\psi(z)$  — логарифмическая производная гамма-функции  $\Gamma(z)$ ,

$$\psi(z) \equiv \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz}. \tag{4.15}$$

Для  $n = 1, 2$  выражение для  $C$  можно упростить,

$$C \Big|_{R(x)=1+x} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}; \quad C \Big|_{R(x)=1+x^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}. \tag{4.16}$$

К сожалению не получается найти аналитическое выражение для  $D_2$  даже при  $R(x) = 1 + x^n$  хотя в этом случае

$$\int_0^\infty dx \ln x \frac{d}{dx} \left( \frac{x^n \ln x}{2(1+x^n)^2} \right) = 0. \tag{4.17}$$

Однако, эта константа легко может быть вычислена численно,

$$D_2 \Big|_{R(x)=1+x; a=1} \approx 0.93; \quad D_2 \Big|_{R(x)=1+x^2; a=1} \approx 0.44. \tag{4.18}$$

Чтобы найти  $\beta$ -функцию, определенную в терминах голых констант связи, мы подставляем выражение (4.12) в NSVZ соотношение (4.3). Следуя [85, 163], для РГФ, определенных в терминах голых констант связи, оно справедливо во всех петлях для произвольного перенормировочного предписания, если используется регуляризация высшими производными. Поэтому четырехпетлевая  $\beta$ -функция принимает вид

$$\begin{aligned}
\beta(\alpha_0) &= \frac{\alpha_0^2 N_f}{\pi} + \frac{\alpha_0^3 N_f}{\pi^2} - \frac{\alpha_0^4 N_f}{2\pi^3} - \frac{\alpha_0^4 (N_f)^2}{\pi^3} \left( \ln a + 1 + \frac{A_1}{2} \right) \\
&+ \frac{\alpha_0^5 N_f}{2\pi^4} + \frac{\alpha_0^5 (N_f)^2}{\pi^4} \left( \ln a + \frac{3}{4} + C \right) \\
&+ \frac{\alpha_0^5 (N_f)^3}{\pi^4} \left( (\ln a + 1)^2 - \frac{A_2}{4} + D_1 \ln a + D_2 \right) + O(\alpha_0^6).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Разумеется, как и любая РГФ, определенная в терминах голых констант связи, это выражение зависит только от параметров регуляризации, но не зависит от параметров, определяющих схему вычитаний.

### 4.3 Трехпетлевая аномальная размерность, определенная в терминах перенормированных констант связи

В начале опишем алгоритм построения РГФ, определенных в терминах перенормированной константы связи.

1. Используя выражения для  $\alpha(\alpha_0)$  и  $\ln Z$  в предыдущих порядках, функции  $\beta(\alpha_0)$  и  $\gamma(\alpha_0)$  должны быть переписаны в терминах перенормированной константы связи  $\alpha$ . Результат подставляется в левую часть уравнений (4.1).
2. Интегрируя уравнения (4.1), получаем  $\alpha_0(\alpha, \ln \Lambda/\mu)$  и  $\ln Z(\alpha, \ln \Lambda/\mu)$ . Они будут содержать несколько постоянных интегрирования, которые фиксируют схему вычитаний в рассматриваемом приближении.
3. Затем необходимо построить функции  $\alpha(\alpha_0, \Lambda/\mu)$  и  $\ln Z(\alpha_0, \ln \Lambda/\mu) \equiv \ln Z(\alpha(\alpha_0, \ln \Lambda/\mu), \ln \Lambda/\mu)$ .
4. Функции  $\alpha(\alpha_0, \Lambda/\mu)$  и  $\ln Z(\alpha_0, \Lambda/\mu)$  подставляются в уравнения (4.2).
5. Полученные РГФ должны быть записаны в терминах перенормированных констант связи. После этого все  $\ln \Lambda/\mu$  должны сократить друг друга, что является подтверждением правильности вычисления.

Применим эту процедуру для построения аномальной размерности. После интегрирования уравнения

$$\left. \frac{d \ln Z}{d \ln \Lambda} \right|_{\alpha=\text{const}} = -\gamma(\alpha_0) \quad (4.20)$$

получаем выражение для  $\ln Z$ , записанной в терминах перенормированной константы связи,

$$\begin{aligned}
\ln Z = & \frac{\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_{1,0} \right) - \frac{\alpha^2}{2\pi^2} \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_{2,0} + N_f g_{2,1} \right) - \frac{\alpha^2 N_f}{\pi^2} \left( \ln a + 1 \right. \\
& + \frac{A_1}{2} - b_{1,0} \left. \right) \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{\alpha^2 N_f}{2\pi^2} \ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{\alpha^3}{2\pi^3} \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_{3,0} + N_f g_{3,1} + (N_f)^2 g_{3,2} \right) \\
& + \frac{\alpha^3 N_f}{\pi^3} \left( \ln a + \frac{3}{4} + C + b_{2,0} - b_{1,0} \right) \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{\alpha^3 (N_f)^2}{\pi^3} \left( \frac{1}{3} \ln^3 \frac{\Lambda}{\mu} + b_{1,0} \ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} \right. \\
& + (b_{1,0})^2 \ln \frac{\Lambda}{\mu} \left. \right) - \frac{\alpha^3 (N_f)^2}{\pi^3} \left( \ln a + 1 + \frac{A_1}{2} \right) \left( \ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + 2b_{1,0} \ln \frac{\Lambda}{\mu} \right) \\
& + \frac{\alpha^3 (N_f)^2}{\pi^3} \left( (\ln a + 1)^2 - \frac{A_2}{4} + D_1 \ln a + D_2 \right) \ln \frac{\Lambda}{\mu} + O(\alpha^4). \quad (4.21)
\end{aligned}$$

Нужно отметить, что в этом выражении конечные константы, задающие схему вычитаний, введены таким образом, что члены, содержащие их, будут многочленами по степеням  $N_f$  с той же максимальной степенью, что и квантовые поправки в рассматриваемом приближении. Это означает, что перенормировочное подписание совместимо с структурой квантовых поправок. Переписывая  $\ln Z$  в терминах голых констант связи и дифференцируя результат по  $\ln \mu$ , построим аномальную размерность, определенную в терминах перенормированных констант связи,

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}(\alpha) = & -\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha^2}{2\pi^2} + \frac{\alpha^2 N_f}{\pi^2} \left( \ln a + 1 + \frac{A_1}{2} + g_{1,0} - b_{1,0} \right) - \frac{\alpha^3}{2\pi^3} \\
& + \frac{\alpha^3 N_f}{\pi^3} \left( -\ln a - \frac{3}{4} - C - b_{2,0} + b_{1,0} - g_{2,0} + g_{1,0} \right) + \frac{\alpha^3 (N_f)^2}{\pi^3} \left\{ \frac{A_2}{4} \right. \\
& \left. - D_1 \ln a - D_2 + b_{1,0} A_1 - \left( \ln a + 1 - b_{1,0} \right)^2 - g_{2,1} \right\} + O(\alpha^4). \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Для следующих значений конечных постоянных

$$\begin{aligned}
g_{1,0} &= -\ln a - \frac{1}{2} - \frac{A_1}{2} + b_{1,0}; \\
g_{2,0} &= -\ln a - C + g_{1,0} + b_{1,0} - b_{2,0} - \frac{7}{4} + \frac{3}{2}\zeta(3); \\
g_{2,1} &= -\left( \ln a + 1 - b_{1,0} \right)^2 + \frac{1}{4}(A_2 - 1) - D_1 \ln a - D_2 + b_{1,0} A_1 \quad (4.23)
\end{aligned}$$

выражение (4.22) совпадает с результатом в  $\overline{\text{DR}}$  схеме,

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_{\text{DR}}(\alpha) &= -\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha^2}{2\pi^2} + \frac{\alpha^2 N_f}{2\pi^2} - \frac{\alpha^3}{2\pi^3} \\ &+ \frac{\alpha^3 N_f}{\pi^3} \left(1 - \frac{3}{2}\zeta(3)\right) + \frac{\alpha^3 (N_f)^2}{4\pi^3} + O(\alpha^4),\end{aligned}\quad (4.24)$$

который был получен в статье [171]. Заметим, что члены, которые не содержат  $N_f$ , являются схемно-независимыми и должны быть одинаковыми во всех схемах перенормировки [166]. Совпадение этих членов в (4.22) и (4.24) может считаться хорошей проверкой правильности вычислений.

Другое интересное наблюдение состоит в том, что конечные постоянные, которые определяют перенормировку суперполей материи, могут быть выбраны так, что все схемно-зависимые члены (которые пропорциональны  $(N_f)^k$  с  $k \geq 1$ ) будут равны 0. Действительно, если

$$\begin{aligned}g_{1,0} &= -\ln a - 1 - \frac{A_1}{2} + b_{1,0}; \\ g_{2,0} &= -\ln a - \frac{3}{4} - C + g_{1,0} + b_{1,0} - b_{2,0}; \\ g_{2,1} &= -\left(\ln a + 1 - b_{1,0}\right)^2 + \frac{A_2}{4} - D_1 \ln a - D_2 + b_{1,0}A_1,\end{aligned}\quad (4.25)$$

то все схемно-зависимые члены исчезают и аномальная размерность суперполей материи принимает самый простой вид:

$$\tilde{\gamma}(\alpha) = -\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha^2}{2\pi^2} - \frac{\alpha^3}{2\pi^3} + O(\alpha^4).\quad (4.26)$$

В дальнейшем будем называть эту схему перенормировки “минимальной схемой”. По сути, если пользоваться терминологией статьи [172], специальной подстройкой перенормировочного предписания был получен результат, совпадающий с так называемым “пределом конформной симметрии”. Однако вместо того, чтобы отбрасывать некоторые суперграфы, соответствующие вклады были занулены выбором постоянных, фиксирующих схему вычитаний.

Нужно также отметить, что можно выбрать конечную перенормировку так, что все вклады в аномальную размерность за пределами одной петли исчезают. Этот выбор соответствует так называемой “схеме т’Хофта” [173, 174], смотри также работу [175] и ссылки в ней. Например, двух и трехпетлевые вклады в аномальную размерность могут быть положены равными 0, если мы выберем

$$\begin{aligned}
g_{1,0} &= -\frac{1}{2N_f} - \ln a - 1 - \frac{A_1}{2} + b_{1,0}; \\
g_{2,0} + N_f g_{2,1} &= -\frac{1}{2N_f} - \ln a - \frac{3}{4} - C + g_{1,0} + b_{1,0} - b_{2,0} \\
&+ N_f \left\{ - \left( \ln a + 1 - b_{1,0} \right)^2 + \frac{A_2}{4} - D_1 \ln a - D_2 + b_{1,0} A_1 \right\}. \quad (4.27)
\end{aligned}$$

Присутствие членов, пропорциональных  $(N_f)^{-1}$ , говорит о том, что конечная перенормировка, которая дает схему т'Хофта не совместима со структурой квантовых поправок, поскольку такая зависимость от  $N_f$  не может возникнуть ни в одном графе, дающем вклад в рассматриваемые РГФ.

Поэтому выражение (4.26) является самым простым выражением для аномальной размерности среди тех, которые получаются после конечной перенормировки, совместимой со структурой квантовых поправок.

#### 4.4 Четырехпетлевая $\beta$ -функция, определенная в терминах перенормированных констант связи

Чтобы получить четырехпетлевую  $\beta$ -функцию, определенную в терминах перенормированных констант связи, нужно сначала проинтегрировать уравнение

$$\left. \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{\alpha_0} \right) \right|_{\alpha=\text{const}} = -\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2}. \quad (4.28)$$

В качестве результата получаем зависимость  $\alpha_0(\alpha)$ , которая вновь содержит некоторые конечные постоянные, задающие схему вычитаний в рассматриваемом приближении,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha_0} = & \frac{1}{\alpha} - \frac{N_f}{\pi} \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{1,0} \right) - \frac{\alpha N_f}{\pi^2} \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{2,0} \right) + \frac{\alpha^2 N_f}{2\pi^3} \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \right. \\
& + b_{3,0} + N_f b_{3,1} \left. \right) + \frac{\alpha^2 (N_f)^2}{\pi^3} \left( \ln a + 1 + \frac{A_1}{2} - b_{1,0} \right) \ln \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{\alpha^2 (N_f)^2}{2\pi^3} \ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} \\
& - \frac{\alpha^3 N_f}{2\pi^4} \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{4,0} + N_f b_{4,1} + (N_f)^2 b_{4,2} \right) - \frac{\alpha^3 (N_f)^2}{\pi^4} \left( \ln a + \frac{3}{4} \right. \\
& + C + b_{2,0} - b_{1,0} \left. \right) \ln \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{\alpha^3 (N_f)^3}{\pi^4} \left( \frac{1}{3} \ln^3 \frac{\Lambda}{\mu} + b_{1,0} \ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + (b_{1,0})^2 \ln \frac{\Lambda}{\mu} \right) \\
& + \frac{\alpha^3 (N_f)^3}{\pi^4} \left( \ln a + 1 + \frac{A_1}{2} \right) \left( \ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + 2b_{1,0} \ln \frac{\Lambda}{\mu} \right) - \frac{\alpha^3 (N_f)^3}{\pi^4} \left( (\ln a + 1)^2 \right. \\
& \left. - \frac{A_2}{4} + D_1 \ln a + D_2 \right) \ln \frac{\Lambda}{\mu} + O(\alpha^4). \tag{4.29}
\end{aligned}$$

Решая это уравнение относительно  $1/\alpha$  и дифференцируя результат по  $\ln \mu$ , строим искомую  $\beta$ -функцию,

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{\beta}(\alpha)}{\alpha^2} = & - \frac{d}{d \ln \mu} \left( \frac{1}{\alpha} \right) \Big|_{\alpha_0 = \text{const}} = \frac{N_f}{\pi} + \frac{\alpha N_f}{\pi^2} - \frac{\alpha^2 N_f}{2\pi^3} - \frac{\alpha^2 (N_f)^2}{\pi^3} \left( \ln a \right. \\
& + 1 + \frac{A_1}{2} + b_{2,0} - b_{1,0} \left. \right) + \frac{\alpha^3 N_f}{2\pi^4} + \frac{\alpha^3 (N_f)^2}{\pi^4} \left( \ln a + \frac{3}{4} + C + b_{3,0} - b_{1,0} \right) \\
& + \frac{\alpha^3 (N_f)^3}{\pi^4} \left\{ \left( \ln a + 1 - b_{1,0} \right)^2 - b_{1,0} A_1 + b_{3,1} - \frac{A_2}{4} \right. \\
& \left. + D_1 \ln a + D_2 \right\} + O(\alpha^4). \tag{4.30}
\end{aligned}$$

Результат в  $\overline{\text{DR}}$  схеме [73]

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{\beta}_{\overline{\text{DR}}}(\alpha)}{\alpha^2} = & \frac{N_f}{\pi} + \frac{\alpha N_f}{\pi^2} - \frac{\alpha^2 N_f}{2\pi^3} - \frac{3\alpha^2 (N_f)^2}{4\pi^3} \\
& + \frac{\alpha^3 N_f}{2\pi^4} + \frac{\alpha^3 (N_f)^2}{\pi^4} \left( -\frac{5}{6} + \frac{3}{2} \zeta(3) \right) + \frac{\alpha^3 (N_f)^3}{12\pi^4} + O(\alpha^4) \tag{4.31}
\end{aligned}$$

получается из этого выражения, если конечные постоянные, определяющие схему вычитаний, выбирается следующим образом:

$$\begin{aligned}
b_{2,0} &= -\ln a - \frac{1}{4} - \frac{A_1}{2} + b_{1,0}; \\
b_{3,0} &= -\ln a - C + b_{1,0} - \frac{19}{12} + \frac{3}{2}\zeta(3); \\
b_{3,1} &= -\left(\ln a + 1 - b_{1,0}\right)^2 + b_{1,0}A_1 + \frac{A_2}{4} - D_1 \ln a - D_2 + \frac{1}{12}. \quad (4.32)
\end{aligned}$$

Можно заметить, что все схемно-независимые члены в (4.30) и (4.31) совпадают. Это достаточно очевидный факт, поскольку эти члены совпадали в выражениях для аномальной размерности. Действительно, схемно-независимые вклады в  $L$ -петлевой  $\beta$ -функции и  $(L-1)$ -петлевой аномальной размерности связаны посредством NSVZ-соотношения. В некоторых схемах NSVZ-соотношение имеет место в соответствии с результатами статей [85, 162]. Поэтому оно должно выполняться для членов, не зависящих от перенормировочного предписания. Также можно заметить, что все схемно-зависимые вклады можно положить равными нулю, если конечные постоянные выбраны следующим образом:

$$\begin{aligned}
b_{2,0} &= -\ln a - 1 - \frac{A_1}{2} + b_{1,0}; \\
b_{3,0} &= -\ln a - \frac{3}{4} - C + b_{1,0}; \\
b_{3,1} &= -\left(\ln a + 1 - b_{1,0}\right)^2 + b_{1,0}A_1 + \frac{A_2}{4} - D_1 \ln a - D_2. \quad (4.33)
\end{aligned}$$

В этой минимальной схеме  $\beta$ -функция (определенная в терминах перенормированной константы связи) принимает простейший вид

$$\tilde{\beta}(\alpha) = \frac{\alpha^2 N_f}{\pi} + \frac{\alpha^3 N_f}{\pi^2} - \frac{\alpha^4 N_f}{2\pi^3} + \frac{\alpha^5 N_f}{2\pi^4} + O(\alpha^6). \quad (4.34)$$

Очевидно, что минимальная схема является NSVZ-схемой. В рассматриваемом приближении это можно увидеть из (4.26) и (4.34). Это также справедливо и во всех петлях, поскольку из-за существования всепетлевых NSVZ-схем (они были построены в работах [162, 176]) существуют схемно-независимые следствия NSVZ-соотношения [166].

Для полноты также приведем конечную перенормировку для схемы т'Хофта (в которой все члены в  $\beta$ -функции, начиная с трех петель, равны 0) в рассматриваемом приближении,

$$\begin{aligned}
N_f b_{2,0} &= -\frac{1}{2} + N_f \left( -\ln a - 1 - \frac{A_1}{2} + b_{1,0} \right); \\
N_f b_{3,0} + (N_f)^2 b_{3,1} &= -\frac{1}{2} + N_f \left( -\ln a - \frac{3}{4} - C + b_{1,0} \right) \\
&+ (N_f)^2 \left\{ - \left( \ln a + 1 - b_{1,0} \right)^2 + b_{1,0} A_1 + \frac{A_2}{4} - D_1 \ln a - D_2 \right\}. \quad (4.35)
\end{aligned}$$

Разумеется, из-за присутствия членов, которые не содержат  $N_f$ , эта конечная перенормировка не совместима со структурой квантовых поправок, поскольку любой суперграф, дающий вклад в  $\beta$ -функцию рассматриваемой теории, пропорционален  $N_f$ . Поэтому самый простой вид  $\beta$ -функции в четырехпетлевом приближении дается выражением (4.34).

## 4.5 NSVZ соотношение для РГФ, определенных в терминах перенормированной константы связи

Схемно-зависимые РГФ, определенные в терминах перенормированной константы связи, удовлетворяют NSVZ соотношению

$$\tilde{\beta}(\alpha) = \frac{\alpha^2 N_f}{\pi} \left( 1 - \tilde{\gamma}(\alpha) \right) \quad (4.36)$$

только в определенных схемах, которые называются “NSVZ схемами”. Следуя работе [177] (см. также [178–180] для обобщения на неабелев случай), эти схемы образуют бесконечное множество и связаны конечной перенормировкой  $\alpha' = \alpha'(\alpha)$ ,  $Z' = z(\alpha)Z$ , которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\alpha'(\alpha)} - \frac{1}{\alpha} - \frac{N_f}{\pi} \ln z(\alpha) = B, \quad (4.37)$$

где  $B$  — конечная постоянная.

Сравнивая четырехпетлевую  $\beta$ -функцию (4.30) и трехпетлевую аномальную размерность (4.22), мы видим, что NSVZ соотношение (4.36) выполняется тогда и только тогда, когда конечные константы  $b_i$  и  $g_i$  удовлетворяют соотношениям

$$b_{2,0} = g_{1,0}; \quad b_{3,0} = g_{2,0}; \quad b_{3,1} = g_{2,1}. \quad (4.38)$$

Легко видеть, что эти равенства следуют из (4.37). Действительно в HD+MSL схеме все конечные постоянные исчезают, и РГФ, определенные в терминах голых констант связи, совпадают с теми, которые определены в терминах перенормированных констант после формальной замены  $\alpha_0 \rightarrow \alpha$ . (в рассматриваемом приближении это может быть проверено явно сравнением соответствующих выражений). Разумеется, HD+MSL схема является NSVZ-схемой. Это следует из общего результата статьи [162], который базируется на утверждении, что РГФ, определенные в терминах голых констант удовлетворяют NSVZ соотношению во всех петлях в случае регуляризации высшими производными. Схема, определенная уравнениями (4.21) и (4.29), может быть получена из HD+MSL схемы как результат конечной перенормировки

$$\frac{1}{\alpha'(\alpha)} = \frac{1}{\alpha} + \frac{N_f}{\pi} b_{1,0} + \frac{\alpha N_f}{\pi^2} b_{2,0} - \frac{\alpha^2 N_f}{2\pi^3} (b_{3,0} + N_f b_{3,1} + 2N_f b_{1,0} b_{2,0}) + O(\alpha^3); \quad (4.39)$$

$$\ln z = \frac{\alpha}{\pi} g_{1,0} - \frac{\alpha^2}{2\pi^2} (g_{2,0} + N_f g_{2,1} + 2N_f b_{1,0} g_{1,0}) + O(\alpha^3). \quad (4.40)$$

(Здесь константа связи и константа перенормировки суперполей материи в HD+MSL схеме равны  $\alpha$  и  $Z$ , соответственно.) Отметим, что в целях упрощения были записаны только члены, которые содержат конечные постоянные, входящие в выражения для РГФ в рассматриваемом приближении. Подставляя эти выражения в (4.37), можно получить соотношения (4.38) вместе с уравнением  $B = N_f b_{1,0}/\pi$ .

## 4.6 Устранение схемно-зависимых слагаемых конечной перенормировкой во всех петлях

В предыдущем разделе было показано, что все трехпетлевые вклады в аномальную размерность, пропорциональные  $(N_f)^k$  при  $k \geq 1$ , и все четырехпетлевые вклады в  $\beta$ -функцию, пропорциональные  $(N_f)^k$  при  $k \geq 2$ , могут быть положены 0 посредством выбора специальной схемы вычитаний. Таким образом, существует некая конечная перенормировка  $\alpha \rightarrow \alpha'(\alpha)$ ;  $Z \rightarrow Z' = z(\alpha)Z$ , которая убирает такие члены. Очень важно то, что вид этой конечной перенормировки совместен с структурой

квантовых поправок. В суперсимметричной квантовой электродинамике с  $N_f$  ароматами это означает, что

$$\frac{1}{\alpha'(\alpha)} = \frac{1}{\alpha} + O(N_f); \quad z(\alpha) = O(1). \quad (4.41)$$

(второе условие означает, что  $z(\alpha)$  не должно содержать члены с отрицательными степенями по  $N_f$ .) Теперь продемонстрируем, что это утверждение справедливо не только в рассматриваемом приближении, но и во всех петлях.

В начале разобьем РГФ на части, пропорциональные разным степеням  $N_f$ ,

$$\tilde{\beta}(\alpha) \equiv N_f \tilde{\beta}_1(\alpha) + (N_f)^2 \tilde{\beta}_2(\alpha) + (N_f)^3 \tilde{\beta}_3(\alpha) + \dots; \quad (4.42)$$

$$\tilde{\gamma}(\alpha) \equiv \tilde{\gamma}_0(\alpha) + N_f \tilde{\gamma}_1(\alpha) + (N_f)^2 \tilde{\gamma}_2(\alpha) + \dots \quad (4.43)$$

Уравнения, которые описывают, как РГФ преобразуются под действием конечной перенормировки, были построены в статьях [181, 182] и выглядят следующим образом

$$\tilde{\beta}'(\alpha') = \frac{d\alpha'}{d\alpha} \tilde{\beta}(\alpha); \quad (4.44)$$

$$\tilde{\gamma}'(\alpha') = \frac{d \ln z}{d\alpha} \tilde{\beta}(\alpha) + \tilde{\gamma}(\alpha). \quad (4.45)$$

В соответствии с работой [166], функции  $\tilde{\beta}_1(\alpha)$  и  $\tilde{\gamma}_0(\alpha)$  являются схемно-независимыми и остаются инвариантными при конечных перенормировках. Более того, в суперсимметричном случае они удовлетворяют равенству

$$\frac{\tilde{\beta}_1(\alpha)}{\alpha^2} = \frac{1}{\pi} \left( 1 - \tilde{\gamma}_0(\alpha) \right), \quad (4.46)$$

которое следует из NSVZ соотношения и является его схемно-независимым следствием. Ниже будет построена схема перенормировки, в которой все схемно-зависимые члены в РГФ, определенных в терминах перенормированных констант, равны 0. Для  $\beta$ -функции это означает что

$$\tilde{\beta}'(\alpha') = N_f \tilde{\beta}_1(\alpha'). \quad (4.47)$$

В этом случае из уравнения (4.44) получим функцию  $\alpha'(\alpha)$  в форме

$$\int \frac{d\alpha'}{\tilde{\beta}_1(\alpha')} = N_f \int \frac{d\alpha}{\tilde{\beta}(\alpha)}. \quad (4.48)$$

Очень важно, что разница  $1/\alpha' - 1/\alpha$  должна быть пропорциональна  $N_f$ , потому что только в этом случае рассматриваемая конечная перенормировка совместна со структурой квантовых поправок. Чтобы увидеть это, отметим, что  $\tilde{\beta}(\alpha) = N_f \tilde{\beta}_1(\alpha) + O(\alpha^4(N_f)^2)$ . Поэтому уравнение (4.48) (для рассматриваемой теории) может быть эквивалентно переписан в форме

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int \frac{d\alpha'}{\tilde{\beta}_1(\alpha')} - \frac{1}{\pi} \int \frac{d\alpha}{\tilde{\beta}_1(\alpha)} &= \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha'} + \frac{N_f}{\pi} b_{1,0} \\ -\frac{1}{\pi} \ln \frac{\alpha'}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\alpha'^k - \alpha^k) &= \frac{N_f}{\pi} \int \frac{d\alpha}{\tilde{\beta}(\alpha)} - \frac{1}{\pi} \int \frac{d\alpha}{\tilde{\beta}_1(\alpha)} \\ &= -\frac{N_f}{\pi} \int d\alpha \left( \frac{\tilde{\beta}_2(\alpha)}{\tilde{\beta}_1(\alpha)^2} + \dots \right) = O(\alpha N_f), \end{aligned} \quad (4.49)$$

где  $c_k$  — постоянные, которые не зависят от  $N_f$ . Постоянная интегрирования в (4.49) была обозначена как  $N_f b_{1,0}/\pi$ , чтобы уравнение (4.39) было справедливо в низшем порядке. Из (4.49) видно, что разница  $1/\alpha' - 1/\alpha$  пропорциональна  $N_f$ , так, что конечная перенормировка, определенная (4.48), действительно совместима со структурой квантовых поправок. В дальнейшем это общее утверждение будет показано с помощью явного вычисления.

Аналогично, если положить равными нулю все схемно-зависимые члены в аномальной размерности, то

$$\tilde{\gamma}'(\alpha') = \tilde{\gamma}_0(\alpha'), \quad (4.50)$$

и из (4.45) получается необходимая конечная перенормировка суперполей материи,

$$\ln z(\alpha) = - \int \frac{d\alpha}{\tilde{\beta}(\alpha)} \left[ \tilde{\gamma}(\alpha) - \tilde{\gamma}_0(\alpha'(\alpha)) \right]. \quad (4.51)$$

Очевидно, что и числитель, и знаменатель в подынтегральном выражении пропорциональны  $\alpha^2 N_f$ . Принимая во внимание, что в одной петле  $\tilde{\beta}(\alpha) = \alpha^2 N_f/\pi$ , можно увидеть, что правая часть (4.51) может быть

представлена как ряд по  $\alpha$ , в котором коэффициенты не содержат отрицательных степеней по  $N_f$ , так что

$$z(\alpha) = 1 + z_0(\alpha) + N_f z_1(\alpha) + (N_f)^2 z_2(\alpha) + \dots \quad (4.52)$$

Итак, можно сделать вывод, что при использовании конечной перенормировки совместимой со структурой квантовых поправок возможно выбрать такую схему вычитаний, что в любом порядке

$$\tilde{\gamma}'(\alpha) = \tilde{\gamma}_0(\alpha); \quad \tilde{\beta}'(\alpha) = N_f \tilde{\beta}_1(\alpha). \quad (4.53)$$

Теперь продемонстрируем это общее утверждение на конкретном примере. А именно, необходимо построить такую конечную перенормировку, которая переводила бы HD+MSL схему в минимальную схему и сравнить результат с (4.25) и (4.33). В HD+MSL схеме все конечные константы  $g_i$  и  $b_i$  равны 0, так что РГФ в этой схеме даются выражениями

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(\alpha) = & -\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha^2}{2\pi^2} + \frac{\alpha^2 N_f}{\pi^2} \left( \ln a + 1 + \frac{A_1}{2} \right) - \frac{\alpha^3}{2\pi^3} + \frac{\alpha^3 N_f}{\pi^3} \left( -\ln a - \frac{3}{4} \right. \\ & \left. - C \right) + \frac{\alpha^3 (N_f)^2}{\pi^3} \left\{ -(\ln a + 1)^2 + \frac{A_2}{4} - D_1 \ln a - D_2 \right\} + O(\alpha^4); \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(\alpha) = & \frac{\alpha^2 N_f}{\pi} + \frac{\alpha^3 N_f}{\pi^2} - \frac{\alpha^4 N_f}{2\pi^3} - \frac{\alpha^4 (N_f)^2}{\pi^3} \left( \ln a + 1 + \frac{A_1}{2} \right) + \frac{\alpha^5 N_f}{2\pi^4} \\ & + \frac{\alpha^5 (N_f)^2}{\pi^4} \left( \ln a + \frac{3}{4} + C \right) + \frac{\alpha^5 (N_f)^3}{\pi^4} \left\{ (\ln a + 1)^2 - \frac{A_2}{4} + D_1 \ln a \right. \\ & \left. + D_2 \right\} + O(\alpha^6). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Схема, в которой аномальная размерность и  $\beta$ -функция даются формулами (4.22) и (4.30), получается из HD+MSL схемы после конечной перенормировки, дающей формулами (4.39) и (4.40). В данном случае цель — найти значения конечных постоянных  $g_i$  и  $b_i$ , которые бы соответствовали минимальной схеме, используя метод, описанный выше. Другими словами, новая трехпетлевая аномальная размерность и четырехпетлевая  $\beta$ -функция должны даваться выражениями

$$\tilde{\gamma}'(\alpha') = \tilde{\gamma}_0(\alpha') = -\frac{\alpha'}{\pi} + \frac{\alpha'^2}{2\pi^2} - \frac{\alpha'^3}{2\pi^3} + O(\alpha'^4); \quad (4.56)$$

$$\tilde{\beta}'(\alpha') = N_f \tilde{\beta}_1(\alpha') = \frac{\alpha'^2 N_f}{\pi} + \frac{\alpha'^3 N_f}{\pi^2} - \frac{\alpha'^4 N_f}{2\pi^3} + \frac{\alpha'^5 N_f}{2\pi^4} + O(\alpha'^6), \quad (4.57)$$

где  $\alpha'$  определена формулой (4.39).

Подставляя выражения (4.55) и (4.57) в (4.48) и интегрируя два получившихся ряда, получим

$$\begin{aligned}
& \frac{N_f}{\pi} b_{1,0} - \frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{\pi} \ln \alpha' + \frac{3\alpha'}{2\pi^2} - \frac{5\alpha'^2}{4\pi^3} + O(\alpha'^3) = \frac{1}{\pi} \int \frac{d\alpha'}{\tilde{\beta}_1(\alpha')} \\
& = \frac{N_f}{\pi} \int \frac{d\alpha}{\tilde{\beta}(\alpha)} = -\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\pi} \ln \alpha + \frac{3\alpha}{2\pi^2} + \frac{\alpha N_f}{\pi^2} \left( \ln a + 1 + \frac{A_1}{2} \right) \\
& - \frac{5\alpha^2}{4\pi^3} - \frac{\alpha^2 N_f}{\pi^3} \left( \frac{3}{2} \ln a + \frac{11}{8} + \frac{C}{2} + \frac{A_1}{2} \right) - \frac{\alpha^2 (N_f)^2}{2\pi^3} \left[ (\ln a + 1)^2 \right. \\
& \left. - \frac{A_2}{4} + D_1 \ln a + D_2 \right] + O(\alpha^3). \tag{4.58}
\end{aligned}$$

Константа связи  $\alpha'$  в левой части должна быть выражена через  $\alpha$  с помощью (4.39). После этого, сравнивая коэффициенты при разных степенях  $\alpha$ , находим значения для величин  $b_i$ ,

$$\begin{aligned}
b_{2,0} &= -\ln a - 1 - \frac{A_1}{2} + b_{1,0}; \\
b_{3,0} &= -\ln a - \frac{3}{4} - C + b_{1,0} - 2 \left( b_{2,0} + \ln a + 1 + \frac{A_1}{2} - b_{1,0} \right); \\
b_{3,1} &= -(\ln a + 1)^2 + \frac{A_2}{4} - D_1 \ln a - D_2 - 2b_{1,0}b_{2,0} + (b_{1,0})^2, \tag{4.59}
\end{aligned}$$

что совпадает с (4.33).

Аналогично, подставляя (4.54), (4.55), и (4.56) в (4.51), после некоторых преобразований построим выражение для  $\ln z(\alpha)$  в рассматриваемом приближении,

$$\begin{aligned}
\ln z(\alpha) &= - \int \frac{d\alpha}{\tilde{\beta}(\alpha)} \left[ \tilde{\gamma}(\alpha) - \tilde{\gamma}_0(\alpha'(\alpha)) \right] \\
&= -\frac{\alpha}{\pi} \left( \ln a + 1 + \frac{A_1}{2} - b_{1,0} \right) - \frac{\alpha^2}{2\pi^2} \left( -2 \ln a - \frac{7}{4} - \frac{A_1}{2} - C - b_{2,0} + 2b_{1,0} \right) \\
&- \frac{\alpha^2 N_f}{2\pi^2} \left\{ -(\ln a + 1)^2 + \frac{A_2}{4} - D_1 \ln a - D_2 + (b_{1,0})^2 \right\} + O(\alpha^3). \tag{4.60}
\end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с (4.40), получим значения конечных постоянных, соответствующих минимальной схеме для аномальной размерности суперполей материи,

$$\begin{aligned}
g_{1,0} &= -\ln a - 1 - \frac{A_1}{2} + b_{1,0}; \\
g_{2,0} &= -2\ln a - \frac{7}{4} - \frac{A_1}{2} - C - b_{2,0} + 2b_{1,0}; \\
g_{2,1} &= -(\ln a + 1)^2 + \frac{A_2}{4} - D_1 \ln a - D_2 + (b_{1,0})^2 - 2b_{1,0}g_{1,0}. \quad (4.61)
\end{aligned}$$

Снова легко видеть, что эта система уравнений эквивалентна (4.25), которая была получена напрямую из этого требования. Поэтому общее утверждение, представленное в этом разделе, действительно работает и воспроизводит результаты в низших порядках.

# Заключение

Основное достижение автора, описанное в данном диссертационном исследовании, состоит в создании новой программы [159], способной генерировать суперграфы и проводить с ними различные манипуляции, работая при этом в суперпространстве в 4 измерениях.

Несмотря на то, что различные программы и пакеты к компьютерно-алгебраическим системам для вычислений в рамках квантовой теории поля существуют много лет, лишь малое количество из них способны работать в терминах суперполей в суперпространстве. Даже существующие программы является весьма недоработанными и, кроме того, данные проекты не развиваются на данный момент. При этом многие недавние вычисления в рамках этого подхода (в которых в частности принимал участие автор) показали, что ручной счет является весьма затруднительным и, как правило, требует участие нескольких человек для вычислений [1–5, 7–10].

Созданная программа является достаточно комплексным инструментом для работы в рамках упомянутого подхода. Программа способна генерировать суперграфы путем прямого разложения производящего функционала. Этот подход дает возможность корректно генерировать диаграммы, даже в теориях, регуляризованных высшими производными. При этом программа не только генерирует, но и доводит результат до интегралов, определенных в импульсном пространстве, что является достаточно трудоемкой процедурой с учетом наличия большого количества суперсимметричных ковариантных производных. Кроме того, нужно подчеркнуть, что программа работает в 4 измерениях, что позволяет избежать проблем, связанных с определением  $\gamma_5$  и  $\varepsilon$ -символа. На данный момент программа способна вычислять двухточечную функцию Грина в  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной электродинамике с  $N_f$  ароматами, регуляризованной высшими производными.

На основе созданной программы уже был получен новый результат,

а именно в  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной электродинамике с  $N_f$  ароматами была вычислена трехпетлевая аномальная размерность полей материи [6, 11]. Результат оказался калибровочно-независимым, что и должно быть в соответствии с [53], и является хорошей проверкой правильности. Полученные интегралы были взяты с помощью техники полиномов Чебышева [170]. Результат для схемно-независимой части (которая не содержит  $N_f$ ) совпал с ранее полученным в  $\overline{\text{DR}}$  схеме [171].

На основе этого результата с помощью NSVZ-соотношения была получена  $\beta$ -функция, определенная в терминах голых констант связи. Были найдены также РГФ, определенные в терминах перенормированной константы связи. При определенной схеме вычитаний ответ совпал с полученным в  $\overline{\text{DR}}$  схеме. Также оказалось, что определенным выбором перенормировочного предписания можно положить равными нулю все схемно-зависимые вклады, которые содержат  $(N_f)^k$  при  $k \geq 1$  для аномальной размерности и  $(N_f)^k$  при  $k \geq 2$  для  $\beta$ -функции. Было также продемонстрировано, что подобное утверждение справедливо во всех петлях. Для  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной электродинамики такая минимальная схема также является NSVZ схемой во всех порядках и в ней остаются только схемно-независимые вклады.

# Благодарности

Я хотел бы выразить благодарность своему научному руководителю К.В. Степаньянцу за огромную помощь в освоении методов с помощью которых, были получены описанные результаты, и ценные замечания к тексту этого диссертационного исследования, а также за теплую обстановку и доброе отношение. Кроме того, я выражаю признательность своим коллегам и соавторам Н.П. Мещерякову, М.Д. Кузьмичеву и С.В. Новгородцеву. Также я хотел бы поблагодарить и всех прочих своих соавторов, а также коллектив кафедры теоретической физики, благодаря которому мне удалось освоить многие сложные разделы квантовой теории поля. Отдельную благодарность я хотел бы выразить С.В. Морозову за огромную помощь и ценные советы при создании программы, описанной в диссертации. Кроме того, я хочу выразить признательность А.Л.Катаеву за ценные советы при работе над некоторыми статьями. Также я благодарю своего научного руководителя в аспирантуре П.И. Пронина. Наконец, я благодарен своей семье, и, в особенности, жене В.Ю. Широковой (которая является также одним из моих соавторов) за поддержку и помощь при проведении исследований и написании этой работы.

# Приложение А

## Интегралы необходимые для вычисления трехпетлевой аномальной размерности

### А.1 Интегралы, которые не содержат $N_f$

Сначала вычислим вклад в аномальную размерность, не содержащий  $N_f$ . Важно, что все части, идущие от перенормировки константы связи в предыдущем порядке, содержат  $N_f$  или  $(N_f)^2$ . Поэтому рассматриваемый вклад примет вид

$$I_0 \equiv e^6 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{8}{R_K R_L R_Q} \left[ \frac{1}{K^4 L^2 Q^4 (Q+L)^2} - \frac{1}{3K^4 L^4 Q^4} + \frac{1}{K^2 L^4 (K+L)^2 (Q+K+L)^2} \left( \frac{1}{Q^2} - \frac{2}{(Q+L)^2} \right) \right], \quad (\text{A.1})$$

где было учтено, что разница между  $e_0^6$  и  $e^6$  имеет порядок  $e^8$  и может быть опущена.

Делая в последних двух слагаемых замену  $K_\mu \rightarrow K_\mu - L_\mu$ ;  $L_\mu \rightarrow -L_\mu$  и  $Q_\mu \rightarrow Q_\mu - L_\mu$ , можно представить этот вклад в виде

$$e^6 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{8}{K^2 L^4 Q^2 (K+L)^2 (Q+K)^2} \times \left( \frac{1}{R_{K+L} R_L R_Q} - \frac{2}{R_K R_L R_{Q-L}} \right). \quad (\text{A.2})$$

Чтобы упростить это выражение, учтем, что

$$\frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^2 L^4 Q^2 (K+L)^2 (Q+K)^2 R_L R_Q} \times \left( \frac{1}{R_{K+L}} - \frac{1}{R_K} \right) = 0; \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^2 L^4 Q^2 (K+L)^2 (Q+K)^2 R_K R_L} \times \left( \frac{1}{R_Q} - \frac{1}{R_{Q-L}} \right) = 0, \quad (\text{A.4})$$

поскольку оба интеграла (без производной по  $\ln \Lambda$ ) конечны в инфракрасной и ультрафиолетовой области. Поэтому они не зависят от  $\Lambda$  и исчезают после дифференцирования по  $\ln \Lambda$ .

С помощью выражений (A.3) и (A.4) рассматриваемый вклад в аномальную размерность может быть представлен в виде

$$I_0 \equiv 8e^6 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K R_L R_Q} \right) \left( -\frac{1}{3K^4 L^4 Q^4} + \frac{1}{K^4 L^2 Q^4 (Q+L)^2} - \frac{1}{K^2 L^4 Q^2 (K+L)^2 (Q+K)^2} \right). \quad (\text{A.5})$$

В первом слагаемом интегрирование по углам тривиально, поэтому его можно переписать как

$$-\frac{8e^6}{3(8\pi^2)^3} \int_0^\infty \frac{dK}{K} \int_0^\infty \frac{dL}{L} \int_0^\infty \frac{dQ}{Q} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K R_L R_Q} \right). \quad (\text{A.6})$$

Удобно разбить область интегрирования на 6 областей, заданных неравенствами  $Q > K > L$ ,  $Q > L > K$ ,  $K > Q > L$ ,  $K > L > Q$ ,  $L > K > Q$ ,  $L > Q > K$ . Очевидно в силу симметрии подынтегрального выражения, все эти области дают одинаковый результат, так что выражение (A.6) можно представить в виде

$$-\frac{2\alpha^3}{\pi^3} \int_0^\infty \frac{dK}{K} \int_0^K \frac{dL}{L} \int_0^L \frac{dQ}{Q} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K R_L R_Q} \right). \quad (\text{A.7})$$

Второй член выражения (A.5) может быть вычислен с использованием техники полиномов Чебышева. А именно, используя формулу (4.9) (для  $(Q+L)^{-2}$ ) и (4.11), он может быть представлен в виде

$$\begin{aligned}
& 8e^6 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K R_L R_Q} \right) \frac{1}{K^4 L^2 Q^4 (Q+L)^2} \\
&= \frac{\alpha^3}{\pi^3} \int_0^\infty \frac{dK}{K} \int_0^\infty \frac{dQ}{Q} \left( \int_0^Q \frac{dL L}{Q^2} + \int_Q^\infty \frac{dL}{L} \right) \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K R_L R_Q} \right). \quad (\text{A.8})
\end{aligned}$$

В первом слагаемом  $Q > L$  и поэтому область интегрирования состоит из трех частей:  $K > Q > L$ ,  $Q > K > L$ , и  $Q > L > K$ . Аналогично, во втором слагаемом  $L > Q$  и область интегрирования состоит из частей  $K > L > Q$ ,  $L > K > Q$ , и  $L > Q > K$ . Разбивая область интегрирования на сумму интегралов по этим областям, изменяя порядок интегрирования и переименовывая переменные интегрирования, можно переписать выражение (A.8) в виде

$$\frac{\alpha^3}{\pi^3} \int_0^\infty dK \int_0^K dL \int_0^L dQ \left( \frac{Q}{KL^3} + \frac{Q}{LK^3} + \frac{L}{QK^3} + \frac{3}{KLQ} \right) \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K R_L R_Q} \right). \quad (\text{A.9})$$

Третье слагаемое выражения (A.5) также может быть переписано с использованием полиномов Чебышева. Используя (4.9), (4.10), и (4.11), оно может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
& -8e^6 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K R_L R_Q} \right) \frac{1}{K^2 L^4 Q^2 (K+L)^2 (Q+K)^2} \\
&= -\frac{\alpha^3}{\pi^3} \int_0^\infty \frac{dK}{K} \left( \int_0^K \frac{dL}{LK^2} + \int_K^\infty \frac{dL}{L^3} \right) \left( \int_0^K dQ Q + \int_K^\infty \frac{dQ K^2}{Q} \right) \\
&\times \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K R_L R_Q} \right) = -\frac{\alpha^3}{\pi^3} \int_0^\infty dK \int_0^K dL \int_0^L dQ \left( \frac{3Q}{LK^3} + \frac{L}{QK^3} + \frac{1}{KLQ} \right. \\
&\left. + \frac{Q}{KL^3} \right) \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K R_L R_Q} \right). \quad (\text{A.10})
\end{aligned}$$

Суммируя интегралы (A.7), (A.9), и (A.10), получаем, что рассматриваемый вклад в трехпетлевую аномальную размерность дается выражением

$$I_0 = -\frac{2\alpha^3}{\pi^3} \int_0^\infty dK \int_0^K dL \int_0^L dQ \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K R_L R_Q} \right) \frac{Q}{LK^3}. \quad (\text{A.11})$$

После замены  $Q = xL$  он может быть переписан как

$$I_0 = -\frac{2\alpha^3}{\pi^3} \int_0^\infty dK \int_0^K dL \int_0^1 dx \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K R_L R_{xL}} \right) \frac{xL}{K^3}. \quad (\text{A.12})$$

В этом выражении мы снова делаем замену  $L = yK$ . Результат имеет вид

$$I_0 = -\frac{2\alpha^3}{\pi^3} \int_0^\infty dK \int_0^1 dy \int_0^1 dx \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K R_{yK} R_{xyK}} \right) \frac{xy}{K}. \quad (\text{A.13})$$

Все функции регулятора  $R$  в этом выражении зависят от  $K$  и  $\Lambda$  только в комбинации  $K/\Lambda$ . Поэтому производная  $\ln \Lambda$  может быть выражена в терминах производной по  $\ln K$ ,

$$\frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K R_{yK} R_{xyK}} \right) = -\frac{d}{d \ln K} \left( \frac{1}{R_K R_{yK} R_{xyK}} \right), \quad (\text{A.14})$$

и интеграл по  $K$  оказывается интегралом от полной производной,

$$I_0 = \frac{2\alpha^3}{\pi^3} \int_0^\infty dK \int_0^1 dy \int_0^1 dx \frac{d}{dK} \left( \frac{1}{R_K R_{yK} R_{xyK}} \right) xy. \quad (\text{A.15})$$

Если учесть, что функция  $R(x)$  равна 1 при  $x = 0$  и быстро возрастает на бесконечности, можно получить окончательное выражение для части трехпетлевой аномальной размерности, которая не зависит от  $N_f$ ,

$$I_0 = -\frac{2\alpha^3}{\pi^3} \int_0^1 dy \int_0^1 dx xy = -\frac{\alpha^3}{2\pi^3}. \quad (\text{A.16})$$

В соответствии с работой [166], этот вклад является схемно-независимым и поэтому должен совпадать с полученным в  $\overline{\text{DR}}$  схеме. Это действительно имеет место, что является нетривиальной проверкой правильности вычисления.

## А.2 Интегралы линейные по $N_f$ , содержащие вставку однопетлевого поляризационного оператора

Теперь рассмотрим часть вклада, пропорционального  $(N_f)^1$ , которая идет от суперграфов, содержащих вставку однопетлевого поляризационного оператора. Отметим, что в данном случае необходимо учитывать перенормировку константы связи в однопетлевом приближении. Соответствующий вклад получается, когда в двухпетлевом вкладе голая константа связи выражается в терминах перенормированной с помощью формулы (4.5). Тогда получающееся выражение для рассматриваемого вклада в аномальную размерность может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
 I_{1,1} &\equiv 16N_f e^6 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{K_\mu L^\mu}{R_K^2 R_L K^4 L^4 (K+L)^2} \\
 &\times \left\{ \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{Q^2(Q+K)^2} - \frac{1}{(Q^2+M^2)((Q+K)^2+M^2)} \right) \right. \\
 &\left. - \frac{1}{8\pi^2} R_K \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{1,0} \right) \right\}. \tag{A.17}
 \end{aligned}$$

Удобно ввести функцию

$$\begin{aligned}
 p(K) &\equiv \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{Q^2(Q+K)^2} - \frac{1}{(Q^2+M^2)((Q+K)^2+M^2)} \right) \\
 &- \frac{1}{8\pi^2} R_K \ln \frac{\Lambda}{K} = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ (1-R_K) \ln \frac{\Lambda}{K} + \ln a \right. \\
 &\left. + \sqrt{1 + \frac{4M^2}{K^2}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{K^2}{K^2 + 4M^2}} \right\}. \tag{A.18}
 \end{aligned}$$

Из ее явного вида легко видеть, что

$$p(0) = \frac{1}{8\pi^2} (\ln a + 1). \tag{A.19}$$

Перепишем выражение (A.17) в виде

$$\begin{aligned}
I_{1,1} &= 16N_f e^6 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{K_\mu L^\mu}{R_K^2 R_L K^4 L^4 (K+L)^2} p(K) \\
&+ \frac{2N_f e^6}{\pi^2} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{K_\mu L^\mu}{K^4 L^4 (K+L)^2} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K R_L} \right) \ln \frac{\Lambda}{K} \\
&- \frac{2N_f e^6}{\pi^2} \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{1,0} \right) \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{K_\mu L^\mu}{R_K R_L K^4 L^4 (K+L)^2} \quad (\text{A.20})
\end{aligned}$$

и вычислим интегралы входящие в него.

Сначала, используя технику полиномов Чебышева, представим интеграл

$$\begin{aligned}
I_{1,1,1} &\equiv \frac{2N_f e^6}{\pi^2} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{K_\mu L^\mu}{R_K R_L K^4 L^4 (K+L)^2} = \frac{2N_f e^6}{\pi^2} \\
&\times \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K R_L} \right) \left( \frac{1}{2K^4 L^4} - \frac{1}{K^2 L^4 (K+L)^2} \right) \quad (\text{A.21})
\end{aligned}$$

в виде

$$I_{1,1,1} = -\frac{2N_f \alpha^3}{\pi^3} \int_0^\infty dK \int_K^\infty dL \frac{K}{L^3} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K R_L} \right). \quad (\text{A.22})$$

Делая замену переменных  $L \equiv xK$  и, принимая во внимание, что функция  $(R_K R_{xK})^{-1}$  зависит от  $K$  и  $\Lambda$  только в комбинации  $K/\Lambda$ , можно вычислить этот интеграл для произвольного  $R$ ,

$$I_{1,1,1} = \frac{2N_f \alpha^3}{\pi^3} \int_0^\infty dK \int_1^\infty dx \frac{1}{x^3} \frac{d}{dK} \left( \frac{1}{R_K R_{xK}} \right) = -\frac{2N_f \alpha^3}{\pi^3} \int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = -\frac{N_f \alpha^3}{\pi^3}. \quad (\text{A.23})$$

Затем, рассмотрим интеграл

$$I_{1,1,2} \equiv 16N_f e^6 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{K_\mu L^\mu}{R_K^2 R_L K^4 L^4 (K+L)^2} p(K) \quad (\text{A.24})$$

и вычислим угловую часть с помощью полиномов Чебышева. После некоторых преобразований он может быть записан в виде

$$I_{1,1,2} = -\frac{2N_f e^6}{(4\pi^2)^2} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int_0^\infty dK \int_0^K dL \frac{1}{R_K R_L} \left( \frac{L p(K)}{R_K K^3} + \frac{L p(L)}{R_L K^3} \right). \quad (\text{A.25})$$

После замены  $L \equiv xK$  этот интеграл можно свести к интегралу от полной производной по  $K$ ,

$$\begin{aligned} I_{1,1,2} &= -\frac{8N_f \alpha^3}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int_0^1 dx \int_0^\infty dK \frac{1}{R_K R_{xK}} \left( \frac{x p(K)}{R_K K} + \frac{x p(xK)}{R_{xK} K} \right) \\ &= \frac{8N_f \alpha^3}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^\infty dK \frac{d}{dK} \left( \frac{x p(K)}{R_K^2 R_{xK}} + \frac{x p(xK)}{R_K R_{xK}^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Вычисляя его и учитывая (A.19), получим

$$I_{1,1,2} = -\frac{16N_f \alpha^3}{\pi} \int_0^1 dx x p(0) = -\frac{N_f \alpha^3}{\pi^3} (\ln a + 1). \quad (\text{A.27})$$

Оставшийся интеграл в формуле (A.20),

$$I_{1,1,3} \equiv \frac{2N_f e^6}{\pi^2} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{K_\mu L^\mu}{K^4 L^4 (K+L)^2} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K R_L} \right) \ln \frac{\Lambda}{K}, \quad (\text{A.28})$$

после интегрирования по телесному углу с помощью полиномов Чебышева принимает вид

$$\begin{aligned} I_{1,1,3} &= -\frac{N_f \alpha^3}{\pi^3} \int_0^\infty dK \int_0^K dL \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K R_L} \right) \frac{L}{K^3} \left( \ln \frac{\Lambda}{K} + \ln \frac{\Lambda}{L} \right) \\ &= \frac{N_f \alpha^3}{\pi^3} \int_0^1 dx x \int_0^\infty dK \frac{d}{dK} \left( \frac{1}{R_K R_{xK}} \right) \left( 2 \ln \frac{\Lambda}{K} - \ln x \right). \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Часть выражения, содержащая  $\ln x$ , может быть вычислена для произвольной функции  $R$ ,

$$-\frac{N_f \alpha^3}{\pi^3} \int_0^1 dx x \ln x \int_0^\infty dK \frac{d}{dK} \left( \frac{1}{R_K R_{xK}} \right) = \frac{N_f \alpha^3}{\pi^3} \int_0^1 dx x \ln x = -\frac{N_f \alpha^3}{4\pi^3}. \quad (\text{A.30})$$

Однако, к сожалению, для оставшегося вклада это сделать не удастся. После замены  $y = K^2/\Lambda^2$  он может быть сведен к выражению, пропорциональному константе  $C$ , определенной выражением (4.13),

$$\begin{aligned} I_{1,1,3} &= -\frac{N_f \alpha^3}{\pi^3} \left( \int_0^1 dx \int_0^\infty dy x \ln y \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{R(y)R(x^2y)} \right) + \frac{1}{4} \right) \\ &= -\frac{N_f \alpha^3}{\pi^3} \left( C + \frac{1}{4} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Для функции регулятора  $R(x) = 1 + x^n$  выражение для константы  $C$  может быть выражено в терминах логарифмической производной от гамма-функции. С этой целью сначала надо вычислить интеграл по  $y$ ,

$$\begin{aligned} C \Big|_{R(x)=1+x^n} &= \int_0^1 dx \int_0^\infty dy x \ln y \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{(1+y^n)(1+x^{2n}y^n)} \right) \\ &= 2 \int_0^1 dx x^{2n+1} \frac{\ln x}{x^{2n}-1}, \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

а потом сделать подстановку  $t = x^{2n}$ , после которой выражение принимает вид

$$C \Big|_{R(x)=1+x^n} = -\frac{1}{2n^2} \int_0^1 dt t^{1/n} \frac{\ln t}{1-t} = \frac{1}{2n^2} \psi' \left( \frac{n+1}{n} \right). \quad (\text{A.33})$$

Для  $n = 1$  и  $n = 2$  это выражение дается (4.16).

Подставляя выражения (A.23), (A.27) и (A.31) в (A.20), получим результат для рассматриваемого вклада в трехпетлевую аномальную размерность

$$\begin{aligned}
I_{1,1} &= -\left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{1,0}\right) I_{1,1,1} + I_{1,1,2} + I_{1,1,3} \\
&= \frac{N_f \alpha^3}{\pi^3} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{1,0}\right) - \frac{N_f \alpha^3}{\pi^3} \left(\ln a + C + \frac{5}{4}\right). \quad (\text{A.34})
\end{aligned}$$

### А.3 Интегралы линейные по $N_f$ , содержащие вставку двухпетлевого поляризованного оператора

Вторая часть вклада в трехпетлевую аномальную размерность, пропорционального  $(N_f)^1$ , идет от вставки двухпетлевого поляризованного оператора квантового калибровочного суперполя. Для вычисления также нужно учесть соответствующий член в перенормировке константы связи. Тогда соответствующий вклад принимает вид

$$\begin{aligned}
I_{1,2} &\equiv 8N_f e^6 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{R_K^2 K^4} \left\{ \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{R_L L^2} \right. \\
&\times \left( \frac{2(Q+K+L)^2 - K^2 - L^2}{Q^2(Q+K)^2(Q+L)^2(Q+K+L)^2} - \frac{2(Q+K+L)^2 - K^2 - L^2}{(Q+K+L)^2 + M^2} \right. \\
&\times \frac{1}{((Q+L)^2 + M^2)(Q^2 + M^2)((Q+K)^2 + M^2)} + \frac{4M^2}{(Q+L)^2 + M^2} \\
&\times \left. \left. \frac{1}{(Q^2 + M^2)^2((Q+K)^2 + M^2)} \right) - \frac{1}{(8\pi^2)^2} R_K \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{2,0}\right) \right\}. \quad (\text{A.35})
\end{aligned}$$

Удобно ввести функцию

$$\begin{aligned}
q(K) &\equiv \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{R_L L^2} \left( \frac{2(Q+K+L)^2 - K^2 - L^2}{Q^2(Q+K)^2(Q+L)^2(Q+K+L)^2} \right. \\
&- \frac{2(Q+K+L)^2 - K^2 - L^2}{((Q+K)^2 + M^2)((Q+L)^2 + M^2)((Q+K+L)^2 + M^2)} \\
&\times \frac{1}{Q^2 + M^2} + \frac{4M^2}{(Q^2 + M^2)^2((Q+K)^2 + M^2)((Q+L)^2 + M^2)} \left. \right) \\
&- \frac{1}{(8\pi^2)^2} R_K \ln \frac{\Lambda}{K}. \quad (\text{A.36})
\end{aligned}$$

Тогда выражение (A.35) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
I_{1,2} &= -\frac{8N_f e^6}{(8\pi^2)^2} \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{2,0} \right) \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{R_K K^4} \\
&+ 8N_f e^6 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{q(K)}{R_K^2 K^4} \\
&+ \frac{8N_f e^6}{(8\pi^2)^2} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K} \right) \ln \frac{\Lambda}{K}. \tag{A.37}
\end{aligned}$$

Чтобы вычислить интегралы в этой формуле, воспользуемся тождеством

$$\frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{f(K/\Lambda)}{K^4} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty dK \frac{df(K/\Lambda)}{dK} = \frac{1}{8\pi^2} f(0), \tag{A.38}$$

которое справедливо для функции  $f(K/\Lambda)$ , достаточно быстро убывающей на бесконечности. С помощью (A.38) мы получаем, что

$$\begin{aligned}
I_{1,2,1} &\equiv \frac{8N_f e^6}{(8\pi^2)^2} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{R_K K^4} = \frac{8N_f e^6}{(8\pi^2)^3} = \frac{N_f \alpha^3}{\pi^3}; \\
I_{1,2,2} &\equiv 8N_f e^6 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{q(K)}{R_K^2 K^4} = \frac{N_f e^6}{\pi^2} q(0) = \frac{N_f \alpha^3}{\pi^3} (8\pi^2)^2 q(0). \tag{A.39}
\end{aligned}$$

Оставшийся интеграл

$$\begin{aligned}
I_{1,2,3} &\equiv \frac{8N_f e^6}{(8\pi^2)^2} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K} \right) \ln \frac{\Lambda}{K} \\
&= \frac{4N_f e^6}{(8\pi^2)^3} \int_0^\infty \frac{dK}{K} \frac{d}{d \ln K} \left( \frac{1}{R_K} \right) \ln \frac{K^2}{\Lambda^2} \tag{A.40}
\end{aligned}$$

сводится к константе  $A_1$  (определенной в (4.13)) после замены переменной интегрирования  $x = K^2/\Lambda^2$ ,

$$I_{1,2,3} = \frac{N_f \alpha^3}{2\pi^3} \int_0^\infty dx \ln x \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{R(x)} \right) = \frac{N_f \alpha^3}{2\pi^3} A_1. \tag{A.41}$$

Для регулятора  $R(x) = 1 + x^n$  эта константа оказывается равной 0.

Осталось вычислить только  $q(0)$ . С этой целью представим  $q(K)$  как сумму

$$q(K) = q_1(K) + q_2(K), \quad (\text{A.42})$$

где функции  $q_1(K)$  и  $q_2(K)$  определены формулами

$$q_1(K) \equiv \int \frac{d^4L}{(2\pi)^4} \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{R_L L^2} \left( \frac{2(Q+K+L)^2 - K^2 - L^2}{Q^2(Q+K)^2(Q+L)^2(Q+K+L)^2} \right. \\ \left. - \frac{2(Q+K+L)^2 - K^2 - L^2}{(Q^2+M^2)((Q+K)^2+M^2)((Q+L)^2+M^2)} \right. \\ \left. \times \frac{1}{(Q+K+L)^2+M^2} + \frac{4M^2}{(Q^2+M^2)^2((Q+K)^2+M^2)((Q+L)^2+M^2)} \right. \\ \left. - \frac{2L_\mu(Q+L)^\mu}{L^2 Q^2 (Q+L)^2 (Q+K+L)^2} \right); \quad (\text{A.43})$$

$$q_2(K) \equiv \int \frac{d^4L}{(2\pi)^4} \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \frac{2L_\mu(Q+L)^\mu}{R_L L^4 Q^2 (Q+L)^2 (Q+K+L)^2} \\ - \frac{1}{(8\pi^2)^2} R_K \ln \frac{\Lambda}{K}. \quad (\text{A.44})$$

В пределе  $K \rightarrow 0$  получается, что значение  $q_1(0)$  может быть записано как равный нулю интеграл

$$q_1(0) = \int \frac{d^4L}{(2\pi)^4} \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\partial}{\partial Q_\mu} \left( - \frac{Q_\mu}{R_L L^4 Q^2 (Q+L)^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{Q_\mu}{R_L L^2 Q^4 (Q+L)^2} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu \partial Q^\mu} \left( \frac{1}{R_L L^2 (Q^2+M^2)((Q+L)^2+M^2)} \right) \right\} = 0. \quad (\text{A.45})$$

Член с массами Паули-Вилларса равен 0 из-за отсутствия сингулярных вкладов, в то время как первые два слагаемых сокращают друг друга. (Первое из них сводится к интегралу по бесконечной большой поверхности  $S_\infty^3$ , в то время как второе сводится к интегралу по бесконечно малой сфере  $S_\varepsilon^3$ , окружающей точку  $Q_\mu = 0$ .)

Итак, чтобы получить  $q(0)$ , осталось вычислить  $q_2(0)$ . После замен переменных интегрирования  $Q_\mu \rightarrow Q_\mu - L_\mu$ ,  $L_\mu \rightarrow -L_\mu$  это выражение можно представить в виде

$$q(0) = q_2(0) = \lim_{K \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{(8\pi^2)^2} \ln \frac{\Lambda}{K} - \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{R_L L^2 (Q+K)^2} \right. \\ \left. \times \left( \frac{1}{L^2 Q^2} - \frac{1}{Q^2 (Q+L)^2} - \frac{1}{L^2 (Q+L)^2} \right) \right\}. \quad (\text{A.46})$$

Интегрирования по телесному углу, как и прежде, делаем в технике полиномов Чебышева. После некоторых преобразований, результат принимает вид

$$q(0) = \frac{1}{(8\pi^2)^2} \lim_{K \rightarrow 0} \left\{ -\ln \frac{\Lambda}{K} + \int_K^\infty \frac{dL L}{R_L} \int_L^\infty \frac{dQ}{Q^3} + \int_K^\infty \frac{dL}{R_L L^3} \int_K^L dQ Q \right. \\ \left. + \int_K^\infty \frac{dQ}{Q^3} \int_0^K \frac{dL L}{R_L} + \int_0^K \frac{dL L}{R_L K^2} \int_L^K \frac{dQ}{Q} \right. \\ \left. + \int_0^K \frac{dQ Q^3}{K^2} \int_Q^K \frac{dL}{R_L L^3} + \int_K^\infty \frac{dL}{R_L L^3} \int_0^K \frac{dQ Q^3}{K^2} \right\}. \quad (\text{A.47})$$

Интегралы в этом выражении можно взять. (В некоторых из них необходимо учесть, что  $\lim_{K \rightarrow 0} R(K^2/\Lambda^2) = 1$ .) Тогда рассматриваемое выражение запишется в виде

$$q(0) = \frac{1}{(8\pi^2)^2} \lim_{K \rightarrow 0} \left\{ -\ln \frac{\Lambda}{K} + \frac{5}{8} + \int_K^\infty \frac{dL}{R_L L} - \frac{K^2}{4} \int_K^\infty \frac{dL}{R_L L^3} \right\}. \quad (\text{A.48})$$

В пределе  $K \rightarrow 0$  последний интеграл можно вычислить, делая замену  $L = xK$ ,

$$\lim_{K \rightarrow 0} \int_K^\infty \frac{dL K^2}{R_L L^3} = \lim_{K \rightarrow 0} \int_1^\infty dx \frac{1}{x^3 R(x^2 K^2/\Lambda^2)} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2}. \quad (\text{A.49})$$

Константа  $A_1$  может быть представлена в виде

$$A_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\infty dx \ln x \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{R(x)} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln x}{R(x)} \Big|_\varepsilon^\infty - \int_\varepsilon^\infty \frac{dx}{x R(x)} \right\} \\ = \lim_{K \rightarrow 0} \left\{ 2 \ln \frac{\Lambda}{K} - 2 \int_K^\infty \frac{dL}{R_L L} \right\}, \quad (\text{A.50})$$

где была сделана замена переменной  $x = L^2/\Lambda^2$  и  $\varepsilon = K^2/\Lambda^2$ . Используя формулы (A.49) и (A.50), получим

$$q(0) = \frac{1}{(8\pi^2)^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{A_1}{2} \right), \quad (\text{A.51})$$

так что

$$I_{1,2,2} = \frac{N_f \alpha^3}{\pi^3} \left( \frac{1}{2} - \frac{A_1}{2} \right). \quad (\text{A.52})$$

Поэтому рассматриваемый вклад в аномальную размерность принимает вид

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= - \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{2,0} \right) I_{1,2,1} + I_{1,2,2} + I_{1,2,3} \\ &= - \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{2,0} \right) \frac{N_f \alpha^3}{\pi^3} + \frac{N_f \alpha^3}{2\pi^3}. \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

## A.4 Интегралы, квадратичные по $N_f$

Теперь перейдем к вычислению оставшегося вклада, пропорционального  $(N_f)^2$ . Он возникает от диаграмм с двумя вставками однопетлевого поляризованного оператора. Слагаемые, пропорциональные  $(N_f)^2$ , идут от перенормировки констант связи в одной петле и двух петлях. Сумма этих выражений имеет вид

$$\begin{aligned} I_2 \equiv & -8e^6 (N_f)^2 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{R_K^3 K^4} \left\{ \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{Q^2(Q+K)^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{(Q^2+M^2)((Q+K)^2+M^2)} \right) - \frac{1}{8\pi^2} R_K \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{1,0} \right) \right\}^2. \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Удобно переписать это выражение в терминах функции  $p(K)$ , определенной в формуле (A.18). После некоторых преобразований оно может быть представлено как

$$\begin{aligned}
I_2 = & \frac{e^6}{8\pi^4} (N_f)^2 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^4} \left\{ - \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{1,0} \right)^2 \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K} \right) \right. \\
& + 2 \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{1,0} \right) \ln \frac{\Lambda}{K} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K} \right) + 16\pi^2 \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{1,0} \right) \\
& \times \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{p(K)}{R_K^2} \right) - \ln^2 \frac{\Lambda}{K} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K} \right) - (8\pi^2)^2 \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{p^2(K)}{R_K^3} \right) \\
& \left. - 16\pi^2 \ln \frac{\Lambda}{K} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{p(K)}{R_K^2} \right) \right\}. \tag{A.55}
\end{aligned}$$

Некоторые интегралы можно взять, используя технику, описанную ранее:

$$I_{2,1} \equiv \frac{e^6}{8\pi^4} (N_f)^2 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K} \right) = \frac{\alpha^3 (N_f)^2}{\pi^3}; \tag{A.56}$$

$$I_{2,2} \equiv \frac{e^6}{4\pi^4} (N_f)^2 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^4} \ln \frac{\Lambda}{K} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K} \right) = \frac{\alpha^3 (N_f)^2}{\pi^3} A_1; \tag{A.57}$$

$$\begin{aligned}
I_{2,3} \equiv & \frac{2e^6}{\pi^2} (N_f)^2 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{p(K)}{R_K^2} \right) \\
& = \frac{2\alpha^3 (N_f)^2}{\pi^3} 8\pi^2 p(0) = \frac{2\alpha^3 (N_f)^2}{\pi^3} (\ln a + 1); \tag{A.58}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{2,4} \equiv & 8e^6 (N_f)^2 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{p^2(K)}{R_K^3} \right) \\
& = \frac{\alpha^3 (N_f)^2}{\pi^3} (8\pi^2 p(0))^2 = \frac{\alpha^3 (N_f)^2}{\pi^3} (\ln a + 1)^2. \tag{A.59}
\end{aligned}$$

Ещё один интеграл, после вычисления угловой части и замены  $x = K^2/\Lambda^2$ , сводится к константе  $A_2$  определенной в формуле (4.13),

$$\begin{aligned}
I_{2,5} \equiv & \frac{e^6}{8\pi^4} (N_f)^2 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^4} \ln^2 \frac{\Lambda}{K} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{1}{R_K} \right) \\
& = -\frac{\alpha^3}{4\pi^3} (N_f)^2 \int_0^\infty dx \ln^2 x \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{R(x)} \right) = -\frac{\alpha^3}{4\pi^3} (N_f)^2 A_2. \tag{A.60}
\end{aligned}$$

Для регулятора  $R(x) = 1 + x^n$  интеграл, который определяет константу  $A_2$ , может быть вычислен, см. (4.14).

В оставшемся интеграле  $I_{2,6}$  сделаем такую же замену, после которой он сводится к выражению

$$\begin{aligned}
I_{2,6} &\equiv \frac{2e^6}{\pi^2} (N_f)^2 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^4} \ln \frac{\Lambda}{K} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left( \frac{p(K)}{R_K^2} \right) \\
&= \frac{\alpha^3}{\pi^3} (N_f)^2 \int_0^\infty dx \ln x \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{R^2(x)} \left[ -\frac{1}{2} (1 - R(x)) \ln x \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \ln a + \sqrt{1 + \frac{4a^2}{x}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{x}{x + 4a^2}} \right] \right\}. \tag{A.61}
\end{aligned}$$

Разумно выделить часть, содержащую  $\ln a$ , так, чтобы результат принял вид

$$I_{2,6} = \frac{\alpha^3}{\pi^3} (N_f)^2 (D_1 \ln a + D_2), \tag{A.62}$$

где константы  $D_1$  и  $D_2$  определены в (4.13). Для регулятора  $R(x) = 1+x^n$  постоянная  $D_1$  может быть вычислена аналитически и дается формулой (4.14). К сожалению, даже для этого регулятора не удастся найти аналитически величину  $D_2$ . Однако эта константа может быть легко вычислена численно. Для  $a = 1$  и регуляторов  $R(x) = 1+x$  и  $R(x) = 1+x^2$  значение этой константы дается формулой (4.18).

Используя выражения для приведенных выше интегралов, можно получить результат для части трехпетлевой аномальной размерности, пропорциональной  $(N_f)^2$ ,

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{1,0} \right)^2 I_{2,1} + \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{1,0} \right) (I_{2,2} + I_{2,3}) \\
&\quad - I_{2,4} - I_{2,5} - I_{2,6} = -\frac{\alpha^3 (N_f)^2}{\pi^3} \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{1,0} \right)^2 \\
&\quad + \frac{2\alpha^3 (N_f)^2}{\pi^3} \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{1,0} \right) \left( \ln a + 1 + \frac{A_1}{2} \right) \\
&\quad - \frac{\alpha^3 (N_f)^2}{\pi^3} \left( (\ln a + 1)^2 - \frac{A_2}{4} + D_1 \ln a + D_2 \right). \tag{A.63}
\end{aligned}$$

## A.5 Результат

Суммируя результат для двухпетлевой аномальной размерности (см. работу [3]) и трехпетлевые вклады (A.16), (A.34), (A.53) и (A.63), полу-

чаем выражение для трехпетлевой аномальной размерности суперполей материи, определенной в терминах голой константы связи,

$$\begin{aligned}
\gamma(\alpha_0) = & -\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha^2}{2\pi^2} + \frac{\alpha^2 N_f}{\pi^2} \left( \ln a + 1 + \frac{A_1}{2} \right) - \frac{\alpha^2 N_f}{\pi^2} \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{1,0} \right) \\
& - \frac{\alpha^3}{2\pi^3} - \frac{\alpha^3 N_f}{\pi^3} \left( \ln a + \frac{3}{4} + C \right) + \frac{\alpha^3 N_f}{\pi^3} \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{1,0} \right) - \frac{\alpha^3 N_f}{\pi^3} \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} \right. \\
& \left. + b_{2,0} \right) - \frac{\alpha^3 (N_f)^2}{\pi^3} \left( (\ln a + 1)^2 - \frac{A_2}{4} + D_1 \ln a + D_2 \right) + \frac{2\alpha^3 (N_f)^2}{\pi^3} \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} \right. \\
& \left. + b_{1,0} \right) \left( \ln a + 1 + \frac{A_1}{2} \right) - \frac{\alpha^3 (N_f)^2}{\pi^3} \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{1,0} \right)^2 + O(\alpha^4). \quad (\text{A.64})
\end{aligned}$$

Отметим, что правая часть этого выражения записана в терминах перенормированной константы  $\alpha$ . Разумеется, необходимо выразить её терминах  $\alpha_0$  с помощью формулы (4.5). После этого все слагаемые, содержащие  $\ln \Lambda/\mu$ , должны сократиться. Этот факт может рассматриваться как проверка правильности проведенного вычисления. Это действительно имеет место, и конечной результат для аномальной размерности, определенной в терминах голой константы связи, дается выражением (4.12), которое также приведено здесь, в целях полноты изложения,

$$\begin{aligned}
\gamma(\alpha_0) = & -\frac{\alpha_0}{\pi} + \frac{\alpha_0^2}{2\pi^2} + \frac{\alpha_0^2 N_f}{\pi^2} \left( \ln a + 1 + \frac{A_1}{2} \right) - \frac{\alpha_0^3}{2\pi^3} - \frac{\alpha_0^3 N_f}{\pi^3} \left( \ln a \right. \\
& \left. + \frac{3}{4} + C \right) - \frac{\alpha_0^3 (N_f)^2}{\pi^3} \left( (\ln a + 1)^2 - \frac{A_2}{4} + D_1 \ln a + D_2 \right) + O(\alpha_0^4). \quad (\text{A.65})
\end{aligned}$$

Как и должно быть [162], это выражение не зависит от констант  $b_{1,0}$  и  $b_{2,0}$ , которые (частично) определяют схему вычитаний в низшем порядке.

# Литература

**ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ  
в рецензируемых научных журналах, индексируемых в  
международных базах данных Web of Science, SCOPUS,  
RSCI, ВАК**

- [1] Kazantsev A. E., Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shirokov I. E., Skoptsov M. B. and Stepanyantz K. V. Two-loop renormalization of the Faddeev-Popov ghosts in  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetric gauge theories regularized by higher derivatives. // JHEP. — 2018. — Vol. 1806. — P. 020.
- [2] Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shirokov I. E. and Stepanyantz K. V. Three-loop contribution of the Faddeev–Popov ghosts to the  $\beta$ -function of  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetric gauge theories and the NSVZ relation. // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Vol. 79. — P. 809.
- [3] Aleshin S. S., Durandina I. S., Kolupaev D. S., Korneev D. S., Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Petrov I. A., Shatalova V. V. and Shirokov I. E., *et al.* Three-loop verification of a new algorithm for the calculation of a  $\beta$ -function in supersymmetric theories regularized by higher derivatives for the case of  $\mathcal{N} = 1$  SQED.// Nucl. Phys. B. — 2020. — Vol. 956. — P. 115020.
- [4] Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shirokov I. E. and Stepanyantz K. V. Finiteness of the two-loop matter contribution to the triple gauge-ghost vertices in  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetric gauge theories regularized by higher derivatives.// Phys. Rev. D. — 2021. — Vol. 104. — P. 025008.
- [5] Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shatalova V. V., Shirokov I. E. and Stepanyantz K. V. Finiteness of the triple

gauge-ghost vertices in  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetric gauge theories: the two-loop verification. // Eur. Phys. J. C. — 2022. — Vol. 82. — P. 69.

- [6] Shirokov I. E. and Stepanyantz K. V. The three-loop anomalous dimension and the four-loop  $\beta$ -function for  $\mathcal{N} = 1$  SQED regularized by higher derivatives // JHEP. — 2022. — Vol. 2204. — P. 108.

**Иные публикации автора, в том числе публикации  
в материалах конференций и рабочих совещаний**

- [7] Казанцев А. Е., Кузьмичев М. Д., Мещеряков Н. П., Новгородцев С. В., Скопцов М. Б., Широков И. Е., Двухпетлевая перенормировка духов Фаддеева-Попова в  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных калибровочных теориях, регуляризованных высшими ковариантными производными // Материалы Международного молодежного научного форума Ломоносов—2018 / Под ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. — Москва: Москва, 2018. — С. 182–184.
- [8] Кузьмичев М. Д., Мещеряков Н. П., Новгородцев С. В., Широков И. Е., Использование нового метода для вычисления вкладов духов Фаддеева-Попова в  $\beta$ -функцию  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных теорий Янга-Миллса в трехпетлевом приближении // Материалы Международного молодежного научного форума Ломоносов—2020 / Под ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. — Москва: Москва, 2020.
- [9] Дурандина И. С., Кузьмичев М. Д., Мещеряков Н. П., Новгородцев С. В., Петров И. А., Шаталова В. В., Широков И. Е., Трехпетлевая бета-функция для  $\mathcal{N} = 1$  SQED в неминимальной калибровке // Материалы Международного молодежного научного форума Ломоносов—2020 / Под ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. — Москва: Москва, 2020.
- [10] Kazantsev A. E., Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shirokov I. E., Skoptsov M. B. and Stepanyantz K. V. Two-loop anomalous dimension of the Faddeev-Popov ghosts in  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetric theories. // Particle Physics at the Year of 150th Anniversary of the Mendeleev’s Periodic Table of Chemical Elements, / Ed. by Studenikin A. I. — *Proceedings, 19th Lomonosov Conference on*

*Elementary Particle Physics: Moscow, Russia, August 22 – 28, 2019.*  
— World Scientific Pub. Singapore, 2021. — P. 544.

- [11] Широков И. Е., Трехпетлевая аномальная размерность и четырехпетлевая бета-функция для  $\mathcal{N} = 1$  SQED с  $N_f$  ароматами в неминимальной калибровке // Материалы Международного молодежного научного форума Ломоносов—2022 / Под ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. — Москва: Москва, 2022.

## ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [12] Гольфанд Ю. А. и Лихтман Е. П. Расширение алгебры генераторов группы и нарушение р инвариантности. // Письма ЖЭТФ. — 1971. — Т. 13. — С. 452;  
Golfand Y. A. and Likhtman E. P. Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of p Invariance. // JETP Lett. — 1971. — Vol. 13. — P. 323.
- [13] Волков Д. В. и Акулов В. П. Возможное универсальное взаимодействие нейтрино. // Письма ЖЭТФ. — 1972. — Т. 16. — С. 621;  
Volkov D. V. and Akulov V. P. Possible universal neutrino interaction. // JETP Lett. — 1972. — Vol. 16. — P. 438.
- [14] Volkov D. V. and Akulov V. P. Is the Neutrino a Goldstone Particle? // Phys. Lett. B. — 1973. — Vol. 46. — P. 109.
- [15] Боголюбов Н. Н. и Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. // М.: Наука, 1973. — 416 с.;  
Bogolyubov N. N. and Shirkov D. V. Introduction To The Theory Of Quantized Fields. // Intersci. Monogr. Phys. Astron. — 1959. — Vol. 3. — P. 1.
- [16] Ициксон К. и Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля. т.1,2. // Пер. с англ. — Москва, Мир, 1984. — 848 с.;  
Itzykson C. and Zuber J. B. Quantum Field Theory. // New York, Usa: Mcgraw-hill, 1980. — 705 p.

- [17] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. // М.: Наука, 1988. — 272 с.;  
Faddeev L. D. and Slavnov A. A. Gauge Fields. Introduction To Quantum Theory. // Front. Phys. — 1980. — Vol. 50. — P. 1. [Front. Phys. — 1991. — Vol. 83. — P. 1].
- [18] Wess J. and Zumino B. A Lagrangian Model Invariant Under Supergauge Transformations. // Phys. Lett. B. — 1974. — Vol. 49. — P. 52.
- [19] Wess J. and Zumino B. Supergauge Invariant Extension of Quantum Electrodynamics. // Nucl. Phys. B. — 1974. — Vol. 78. — P. 1.
- [20] Wess J. and Zumino B. Supergauge Transformations in Four-Dimensions. // Nucl. Phys. B. — 1974. — Vol. 70. — P. 39.
- [21] Ferrara S., Wess J. and Zumino B. Supergauge Multiplets and Superfields. // Phys. Lett. B. — 1974. — Vol. 51. — P. 239.
- [22] Mohapatra R. N. Unification And Supersymmetry. The Frontiers Of Quark - Lepton Physics : The Frontiers Of Quark-lepton Physics. // New York, USA: Springer, 2003. — 421 p.
- [23] Емельянов В. М. Стандартная модель и ее расширения. // М.: Физматлит, 2007. — 584 с.
- [24] Raby S. Supersymmetric Grand Unified Theories : From Quarks to Strings via SUSY GUTs. // Lect. Notes Phys. — 2017. — Vol. 939. — P. 1.
- [25] Казаков Д. И. Перспективы физики элементарных частиц. // УФН. — 2019. — Т. 62. — N 4. — С. 364;  
Kazakov D. I. Prospects of elementary particle physics. // Usp. Fiz. Nauk. — 2019. — Vol. 189. — No.4. — P. 387
- [26] Пескин М. и Шредер Д. Введение в квантовую теорию поля. // Пер. с англ. — Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. — 784 с.;  
Peskin M. E. and Schroeder D. V. An Introduction to quantum field theory. // CRC Press, 2019. — 866 p.

- [27] Ellis J. R., Kelley S. and Nanopoulos D. V. Probing the desert using gauge coupling unification. // *Phys. Lett. B.* — 1991. — Vol. 260. — P. 131.
- [28] Amaldi U., de Boer W. and Furstenau H. Comparison of grand unified theories with electroweak and strong coupling constants measured at LEP. // *Phys. Lett. B.* — 1991. — Vol. 260. — P. 447.
- [29] Langacker P. and Luo M. X. Implications of precision electroweak experiments for  $M_t$ ,  $\rho_0$ ,  $\sin^2 \theta_W$  and grand unification. // *Phys. Rev. D.* — 1991. — Vol. 44. — P. 817.
- [30] Georgi H. and Glashow S. L. Unity of All Elementary Particle Forces. // *Phys. Rev. Lett.* — 1974. — Vol. 32. — P. 438.
- [31] Georgi H. The state of the Art – Gauge theories. // In *Particles and Fields* / ed. Carlson C. E. *AIP Conference Proceedings*. New York: American Institute of Physics. — 1975. — Vol. 23. — P. 575.
- [32] Fritzsche H. and Minkowski P. Unified Interactions of Leptons and Hadrons. // *Annals Phys.* — 1975. — Vol. 93. — P. 193.
- [33] Gursay F., Ramond P. and Sikivie P. A Universal Gauge Theory Model Based on E6. // *Phys. Lett. B.* — 1976. — Vol. 60. — P. 177.
- [34] Zyla P. A. *et al.* [Particle Data Group]. Review of Particle Physics. // *PTEP.* — 2020. — Vol. 2020 and 2021 update. — P. 083C01.
- [35] Abe K. *et al.* [Super-Kamiokande]. Search for proton decay via  $p \rightarrow e^+ \pi^0$  and  $p \rightarrow \mu^+ \pi^0$  in 0.31 megaton·years exposure of the Super-Kamiokande water Cherenkov detector. // *Phys. Rev. D* — 2017. — Vol. 95. — P. 012004.
- [36] Mine S. *et al.* [Super-Kamiokande]. Recent nucleon decay results from Super Kamiokande. // *Phys.: Conf. Ser.* — 2016. — Vol. 718. — P. 062044.
- [37] Abe K. *et al.* [Hyper-Kamiokande], Hyper-Kamiokande Design Report. [arXiv:1805.04163 [physics.ins-det]].
- [38] Ченг Т.-П. и Ли Л.-Ф. Калибровочные теории в физике элементарных частиц. // Пер. с англ. — М.: Мир, 1987 — 624 с.;  
Cheng T. P. and Li L. F. Gauge Theory Of Elementary Particle Physics. // Oxford, Uk: Clarendon, 1984. — 536 p.

- [39] Martin S. P. A Supersymmetry primer. // Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. — 1998. — Vol. 18. — P. 1.
- [40] Вайнберг С. Пер. с англ. — Квантовая теория поля. Том 3: Суперсимметрия. // Москва, Физматлит (2018), 456 с.;  
Weinberg S. The quantum theory of fields. Vol. 3: Supersymmetry. // Cambridge, Cambridge University Press, 2005. — 442 p.
- [41] Уэст П. Введение в суперсимметрию и супергравитацию. // Пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 328 с.;  
West P. C. Introduction to supersymmetry and supergravity. // Singapore: World Scientific, 1990 — 425 p.
- [42] Gates S. J., Grisaru M. T., Rocek M. and Siegel W. Superspace Or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry. // Front. Phys. — 1983. — Vol. 58. — P. 1.
- [43] Весс Ю. и Беггер Дж. Суперсимметрия и супергравитация. // Пер. с англ. — ИО НФМИ, Новокузнецк, 1998 — 178 с.;  
Wess. J. and Bagger J. Supersymmetry and supergravity. // Princeton, Princeton University Press, 1992. — 272 p.
- [44] Buchbinder I. L. and Kuzenko S. M. Ideas and methods of supersymmetry and supergravity: Or a walk through superspace. // Bristol, UK: IOP, 1998. — 656 p.
- [45] Brink L., Schwarz J. H. and Scherk J. Supersymmetric Yang-Mills Theories. // Nucl. Phys. B. — 1977. — Vol. 121. — 77.
- [46] Gliozzi F., Scherk J. and Olive D. I. Supersymmetry, Supergravity Theories and the Dual Spinor Model. // Nucl. Phys. B. — 1977. — Vol. 122. — P. 253.
- [47] Sohnius M. F. and West P. C. Conformal Invariance in N=4 Supersymmetric Yang-Mills Theory. // Phys. Lett. B. — 1981. — Vol. 100. — P. 245.
- [48] Grisaru M. T. and Siegel W. Supergravity. 2. Manifestly Covariant Rules and Higher Loop Finiteness. // Nucl. Phys. B. — 1982. — Vol. 201. — 292 [Erratum-ibid. B. — 1982. — Vol. 206. — P. 496].

- [49] Mandelstam S. Light Cone Superspace and the Ultraviolet Finiteness of the  $\mathcal{N} = 4$  Model. // Nucl. Phys. B. — 1983. — Vol. 213. — P. 149.
- [50] Brink L., Lindgren O. and Nilsson B. E. W.  $\mathcal{N} = 4$  Yang-Mills Theory on the Light Cone. // Nucl. Phys. B. — 1983. — Vol. 212. — P. 401.
- [51] Howe P. S., Stelle K. S. and Townsend P. K. Miraculous Ultraviolet Cancellations in Supersymmetry Made Manifest. // Nucl. Phys. B. — 1984. — Vol. 236. — P. 125.
- [52] Buchbinder I. L., Kuzenko S. M. and Ovrut B. A. On the  $D = 4$ ,  $\mathcal{N} = 2$  nonrenormalization theorem. // Phys. Lett. B. — 1998. — Vol. 433. — P. 335.
- [53] Grisaru M. T., Siegel W. and Rocek M. Improved Methods for Supergraphs. // Nucl. Phys. B. — 1979. — Vol. 159. — P. 429.
- [54] Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I. and Zakharov V. I. Exact Gell-Mann-Low Function of Supersymmetric Yang-Mills Theories from Instanton Calculus. // Nucl. Phys. B. — 1983. — Vol. 229. — P. 381.
- [55] Jones D. R. T. More on the Axial Anomaly in Supersymmetric Yang-Mills Theory. // Phys. Lett. B. — 1983. — Vol. 123. — P. 45.
- [56] Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I. and Zakharov V. I. Beta Function in Supersymmetric Gauge Theories: Instantons Versus Traditional Approach. // Phys. Lett. B. — 1986. — Vol. 166. — P. 329;  
Вайштейн А. И., Захаров В. И., Новиков В. А. и Шифман М. А. Ядерная Физика. — 1986. — Т. 43. — С. 459.
- [57] Shifman M. A. and Vainshtein A. I. Solution of the Anomaly Puzzle in SUSY Gauge Theories and the Wilson Operator Expansion. // Nucl. Phys. B. — 1986. — Vol. 277. — P. 456;  
Solution of the problem of anomalies in supersymmetric gauge theories, and the operator expansion. // ЖЭТФ. — 1986. — Т. 91. — С. 723;  
J. Exp. Theor. Phys. — 1986. — Vol. 64. — No. 3. — P. 428.
- [58] Arkani-Hamed N. and Murayama H. Holomorphy, rescaling anomalies and exact beta functions in supersymmetric gauge theories. // JHEP. — 2000. — Vol. 0006. — P. 030.

- [59] Kraus E., Rupp C. and Sibold K. Supersymmetric Yang-Mills theories with local coupling: The Supersymmetric gauge. // Nucl. Phys. B. — 2003. — Vol. 661. — P. 83.
- [60] 't Hooft G. and Veltman M. J. G. Regularization and Renormalization of Gauge Fields. // Nucl. Phys. B. — 1972. — Vol. 44. — P. 189.
- [61] Bollini C. G. and Giambiagi J. J. Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter. // Nuovo Cim. B. — 1972. — Vol. 12. — P. 20.
- [62] Ashmore J. F. A Method of Gauge Invariant Regularization. // Lett. Nuovo Cim. — 1972. — Vol. 4. — P. 289.
- [63] Cicuta G. M. and Montaldi E. Analytic renormalization via continuous space dimension. // Lett. Nuovo Cim. — 1972. — Vol. 4. — P. 329.
- [64] Delbourgo R. and Prasad V. B. Supersymmetry in the Four-Dimensional Limit. // J. Phys. G. — 1975. — Vol. 1. — P. 377.
- [65] Siegel W. Supersymmetric Dimensional Regularization via Dimensional Reduction. // Phys. Lett. B. — 1979. — Vol. 84. — P. 193.
- [66] Siegel W. Inconsistency of Supersymmetric Dimensional Regularization. // Phys. Lett. B. — 1980. — Vol. 94. — P. 37.
- [67] Jack I. and Jones D. R. T. Regularization of supersymmetric theories. // Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. — 2010. — Vol. 21. — P. 494.
- [68] Avdeev L. V., Chochia G. A. and Vladimirov A. A. On The Scope Of Supersymmetric Dimensional Regularization. // Phys. Lett. B. — 1981. — Vol. 105. — P. 272.
- [69] Avdeev L. V. and Vladimirov A. A. Dimensional Regularization And Supersymmetry. // Nucl. Phys. B. — 1983. — Vol. 219. — P. 262.
- [70] Avdeev L. V. Noninvariance Of Regularization By Dimensional Reduction: An Explicit Example Of Supersymmetry Breaking. // Phys. Lett. B. — 1982. — Vol. 117. — P. 317.
- [71] Velizhanin V. N. Three-loop renormalization of the  $\mathcal{N} = 1$ ,  $\mathcal{N} = 2$ ,  $\mathcal{N} = 4$  supersymmetric Yang-Mills theories. // Nucl. Phys. B. — 2009. — Vol. 818. — P. 95.

- [72] Jack I., Jones D. R. T. and North C. G.  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetry and the three loop gauge Beta function. // Phys. Lett. B. — 1996. — Vol. 386. — P. 138.
- [73] Jack I., Jones D. R. T. and North C. G. Scheme dependence and the NSVZ Beta function. // Nucl. Phys. B. — 1997. — Vol. 486. — P. 479.
- [74] Jack I., Jones D. R. T. and Pickering A. The Connection between DRED and NSVZ. // Phys. Lett. B. — 1998. — Vol. 435. — P. 61.
- [75] Harlander R. V., Jones D. R. T., Kant P., Mihaila L. and Steinhauser M. Four-loop beta function and mass anomalous dimension in dimensional reduction. // JHEP. — 2006. — Vol. 0612. — P. 024.
- [76] Mihaila L. Precision Calculations in Supersymmetric Theories. // Adv. High Energy Phys. — 2013. — Vol. 2013. — P. 607807.
- [77] Bardeen W. A., Buras A. J., Duke D. W. and Muta T. Deep Inelastic Scattering Beyond the Leading Order in Asymptotically Free Gauge Theories. // Phys. Rev. D. — 1978. — Vol. 18. — P. 3998.
- [78] Slavnov A. A. Invariant regularization of nonlinear chiral theories. // Nucl. Phys. B. — 1971. — Vol. 31. — P. 301.
- [79] Славнов А. А. Инвариантная регуляризация калибровочных теорий. // ТМФ. — 1972. — Т. 13. — С. 174;  
Slavnov A. A. Invariant regularization of gauge theories. // Theor.Math.Phys. — 1972. — Vol. 13. — P. 1064.
- [80] Кривошеков В. К. Инвариантная регуляризация для суперсимметричных калибровочных теорий. // ТМФ. — 1978. — Т. 36. — С. 291;  
Krivoshchekov V. K. Invariant Regularizations for Supersymmetric Gauge Theories. // Theor. Math. Phys. — 1978. — Vol. 36. — P. 745.
- [81] West P. C. Higher Derivative Regulation Of Supersymmetric Theories. // Nucl. Phys. B. — 1986. — Vol. 268. — P. 113.
- [82] Славнов А. А. Регуляризация Паули–Вилларса для неабелевых калибровочных групп. // ТМФ. — 1977. — Т. 33. — С. 210;  
Slavnov A. A. The Pauli-Villars Regularization for Nonabelian Gauge Theories. // Theor. Math. Phys. — 1977. — Vol. 33. — P. 977.

- [83] Солошенко А. А. и Степаньянц К. В. Трехпетлевая  $\beta$ -функция  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной электродинамики, регуляризованной высшими производными. // ТМФ. — 2004. — Т. 140. — С. 437;  
Soloshenko A. A. and Stepanyantz K. V. Three loop beta function for  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetric electrodynamics, regularized by higher derivatives. // Theor. Math. Phys. — 2004. — Vol. 140. — P. 1264.
- [84] Smilga A. V. and Vainshtein A. Background field calculations and nonrenormalization theorems in 4d supersymmetric gauge theories and their low-dimensional descendants. // Nucl. Phys. B. — 2005. — Vol. 704. — P. 445.
- [85] Stepanyantz K. V. Derivation of the exact NSVZ  $\beta$ -function in  $\mathcal{N} = 1$  SQED, regularized by higher derivatives, by direct summation of Feynman diagrams. // Nucl. Phys. B. — 2011. — Vol. 852. — P. 71.
- [86] Степаньянц К. В. и Шевцова Е. С. Структура двухточечной функции Грина калибровочного поля в  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной теории Янга-Миллса, регуляризованной высшими ковариантными производными. // Вестник МГУ. Серия 3: Физика, астрономия. — 2009. — N 5. — С. 13;  
Shevtsova E. S. and Stepanyantz K. V. Structure of the two-point green function of the gauge field for  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetric Yang-Mills theory regularized by higher covariant derivatives. // Moscow University Physics Bulletin. — 2009. — Vol. 64. — No. 5. — P. 485.
- [87] Pimenov A. B., Shevtsova E. S. and Stepanyantz K. V. Calculation of two-loop beta-function for general  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetric Yang-Mills theory with the higher covariant derivative regularization. // Phys. Lett. B. — 2010. — Vol. 686. — P. 293.
- [88] Stepanyantz K. V. Quantum corrections in  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetric theories with cubic superpotential, regularized by higher covariant derivatives. // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2011. — Vol. 8. — P. 321.
- [89] Stepanyantz K. V. Multiloop calculations in supersymmetric theories with the higher covariant derivative regularization. // J. Phys. Conf. Ser. — 2012. — Vol. 368. — P. 012052.
- [90] Shakhmanov V. Y. and Stepanyantz K. V. Three-loop NSVZ relation for terms quartic in the Yukawa couplings with the higher covariant

- derivative regularization. // Nucl. Phys. B. — 2017. — Vol. 920. — P. 345.
- [91] Kazantsev A. E., Shakhmanov V. Y. and Stepanyantz K. V. New form of the exact NSVZ  $\beta$ -function: the three-loop verification for terms containing Yukawa couplings. // JHEP. — 2018. — Vol. 1804. — P. 130.
- [92] Stepanyantz K. V. Non-renormalization of the  $V\bar{c}c$ -vertices in  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetric theories. // Nucl. Phys. B. — 2016. — Vol. 909. — P. 316.
- [93] Stepanyantz K. V. The  $\beta$ -function of  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetric gauge theories regularized by higher covariant derivatives as an integral of double total derivatives. // JHEP. — 2019. — Vol. 1910. — P. 011.
- [94] Степаньянц К. В. Регуляризация высшими ковариантными производными как средство для выявления структуры квантовых поправок в суперсимметричных калибровочных теориях. // Труды Математического института им. В.А.Стеклова РАН. — 2020. — Т. 309. — С. 304;  
 Stepanyantz K. The higher covariant derivative regularization as a tool for revealing the structure of quantum corrections in supersymmetric gauge theories. // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2020. — Vol. 309. — P. 284.
- [95] Лавров П. М. и Тютин И. В. О структуре перенормировок в калибровочных теориях. // Ядерная Физика. — 1981. — Т. 34. — С. 277.
- [96] Лавров П. М. и Тютин И. В. О производящем функционале вершинных функций в теориях Янга–Миллса. // Ядерная Физика. — 1981. — Т. 34. — С. 850.
- [97] Воронов Б. Л., Лавров П. М. и Тютин И. В. Канонические преобразования и зависимость от калибровки в калибровочных теориях общего вида. // Ядерная Физика. — 1982. — Т. 36. — С. 498.
- [98] Barnich G. and Grassi P. A. Gauge dependence of effective action and renormalization group functions in effective gauge theories. // Phys. Rev. D. — 2000. — Vol. 62. — P. 105010.

- [99] Batalin I. A., Lavrov P. M. and Tyutin I. V. Gauge dependence and multiplicative renormalization of Yang-Mills theory with matter fields. // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Vol. 79. — P. 628.
- [100] Stepanyantz K. The all-loop perturbative derivation of the NSVZ  $\beta$ -function and the NSVZ scheme in the non-Abelian case by summing singular contributions. // Eur. Phys. J. C. — 2020. — Vol. 80. — P. 911.
- [101] Campbell J. A. and Hearn A. C. Symbolic analysis of feynman diagrams by computer // J. Comput. Phys., 1970, Vol. 5, P. 280.
- [102] Calmet J. and Perrottet M. An attempt to evaluate renormalized radiative corrections by computer. // J. Comput. Phys. — 1971. — Vol. 7. — P. 191.
- [103] Sasaki T. Automatic Generation of Feynman Graphs in QED. // J. Comput. Phys. — 1976. — Vol. 22. — P. 189.
- [104] Kaneko T., Kawabata S. and Shimizu Y. Automatic Generation of Feynman Graphs and Amplitudes in QED. // Comput. Phys. Commun. — 1987. — Vol. 43. — P. 279.
- [105] Гердт В. П., Тарасов О. В. и Ширков Д. В. Аналитические вычисления на ЭВМ в приложении к физике и математике // УФН, 1980, т. 130, с. 113–147.
- [106] Nogueira P. Automatic Feynman graph generation // J. Comput. Phys., 1993, Vol. 105, pp. 279-289.
- [107] Boos E. E., Dubinin M. N., Edneral V. F., Ilyin V. A., Kryukov A. P., Pukhov A. E., Rodionov A. Y., Savrin V. I., Slavnov D. A. and Taranov A. Y. COMPHEP: COMPUTER SYSTEM FOR CALCULATIONS OF PARTICLE COLLISION CHARACTERISTICS AT HIGH-ENERGIES // MGU-89-63/140.
- [108] Murayama H., Watanabe I. and Hagiwara K. HELAS: HELicity amplitude subroutines for Feynman diagram evaluations // KEK-91-11.
- [109] Kublbeck J., Bohm M. and Denner A. Feyn Arts: Computer Algebraic Generation of Feynman Graphs and Amplitudes // Comput. Phys. Commun., 1990, Vol. 60, pp. 165-180.

- [110] Papadopoulos C. G. PHEGAS: A Phase space generator for automatic cross-section computation // *Comput. Phys. Commun.*, 2001, Vol. 137, pp. 247-254.
- [111] Moretti M., Ohl T. and Reuter J. O'Mega: An Optimizing matrix element generator // [arXiv:hep-ph/0102195 [hep-ph]].
- [112] Maltoni F. and Stelzer T. MadEvent: Automatic event generation with MadGraph // *JHEP*, 2003, Vol. 02, P. 027.
- [113] Wang J. X. Progress in FDC project // *Nucl. Instrum. Meth. A*, 2004, Vol. 534, pp. 241-245.
- [114] Boos E. E. *et al.* [CompHEP] CompHEP 4.4: Automatic computations from Lagrangians to events // *Nucl. Instrum. Meth. A*, 2004, Vol. 534, pp. 250-259.
- [115] Belyaev A., Christensen N. D. and Pukhov A. CalcHEP 3.4 for collider physics within and beyond the Standard Model // *Comput. Phys. Commun.*, 2013, Vol. 184, pp. 1729-1769.
- [116] Kilian W., Ohl T. and Reuter J. WHIZARD: Simulating Multi-Particle Processes at LHC and ILC // *Eur. Phys. J. C*, 2011, Vol. 71, P. 1742.
- [117] Bahr M., Gieseke S., Gigg M. A., Grellscheid D., Hamilton K., Latunde-Dada O., Platzer S., Richardson P., Seymour M. H. and Sherstnev A., *et al.* Herwig++ Physics and Manual // *Eur. Phys. J. C*, 2008, Vol. 58, pp. 639-707.
- [118] Gleisberg T., Hoeche S., Krauss F., Schonherr M., Schumann S., Siegert F. and Winter J. Event generation with SHERPA 1.1 // *JHEP*, 2009, Vol. 02, P. 007.
- [119] Cullen G., van Deurzen H., Greiner N., Heinrich G., Luisoni G., Mastrolia P., Mirabella E., Ossola G., Peraro T. and Schlenk J., *et al.* GOSAM-2.0: a tool for automated one-loop calculations within the Standard Model and beyond // *Eur. Phys. J. C*, 2014, Vol. 74, no.8, P. 3001.
- [120] Alwall J., Frederix R., Frixione S., Hirschi V., Maltoni F., Mattelaer O., Shao H. S., Stelzer T., Torrielli P. and Zaro M. The automated computation of tree-level and next-to-leading order differential cross

- sections, and their matching to parton shower simulations // JHEP, 2014, Vol. 07, P. 079.
- [121] Hahn T. Generating Feynman diagrams and amplitudes with FeynArts 3 // Comput. Phys. Commun., 2001, Vol. 140, pp. 418-431.
- [122] *Wolfram* Wolfram Mathematica, 2022. <https://www.wolfram.com/mathematica/>
- [123] Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc. Maple // 2022. <https://www.maplesoft.com/products/maple/>
- [124] Veltman M. J. G. and Williams D. N. Schoonschip '91 // [arXiv:hep-ph/9306228 [hep-ph]].
- [125] Ruijl B., Ueda T. and Vermaseren J. FORM version 4.2 // [arXiv:1707.06453 [hep-ph]].
- [126] Vollinga J. GiNaC: Symbolic computation with C++ // Nucl. Instrum. Meth. A, 2006, Vol. 559, pp. 282-284.
- [127] Peeters K. A Field-theory motivated approach to symbolic computer algebra // Comput. Phys. Commun., 2007, Vol. 176, pp. 550-558.
- [128] Bolotin D. A. and Poslavsky S. V. Introduction to Redberry: a computer algebra system designed for tensor manipulation // [arXiv:1302.1219 [cs.SC]].
- [129] Shtabovenko V., Mertig R. and Orellana F. FeynCalc 9.3: New features and improvements // Comput. Phys. Commun., 2020, Vol. 256, P. 107478.
- [130] Chetyrkin K. G. and Tkachov F. V. Integration by Parts: The Algorithm to Calculate beta Functions in 4 Loops // Nucl. Phys. B, 1981, Vol. 192, pp. 159-204.
- [131] Anastasiou C. and Lazopoulos A. Automatic integral reduction for higher order perturbative calculations // JHEP, 2004, Vol. 07, P. 046.
- [132] Smirnov A. V. and Chuharev F. S. FIRE6: Feynman Integral REduction with Modular Arithmetic // Comput. Phys. Commun., 2020, Vol. 247, P. 106877.
- [133] Lee R. N. LiteRed 1.4: a powerful tool for reduction of multiloop integrals // J. Phys. Conf. Ser., 2014, Vol. 523, P. 012059.

- [134] Studerus C. Reduze-Feynman Integral Reduction in C++ // *Comput. Phys. Commun.*, 2010, Vol. 181, pp. 1293-1300.
- [135] Maierhöfer P., Usovitsch J. and Uwer P. Kira—A Feynman integral reduction program // *Comput. Phys. Commun.*, 2018, Vol. 230, pp. 99-112.
- [136] Dubovyk I., Gluza J., Riemann T. and Usovitsch J. Numerical integration of massive two-loop Mellin-Barnes integrals in Minkowskian regions // *PoS*, 2016, Vol. LL2016, P. 034.
- [137] Smirnov A. V. FIESTA4: Optimized Feynman integral calculations with GPU support // *Comput. Phys. Commun.*, 2016, Vol. 204, pp. 189-199.
- [138] Borowka S., Heinrich G., Jones S. P., Kerner M., Schlenk J. and Zirke T. SecDec-3.0: numerical evaluation of multi-scale integrals beyond one loop // *Comput. Phys. Commun.*, 2015, Vol. 196, pp. 470-491.
- [139] Gorishnii S. G., Larin S. A., Surguladze L. R. and Tkachov F. V. Mincer: Program for Multiloop Calculations in Quantum Field Theory for the Schoonschip System // *Comput. Phys. Commun.*, 1989, Vol. 55, pp. 381-408.
- [140] Gorishnii S. G., Kataev A. L., Larin S. A. and Surguladze L. R. The Analytical four loop corrections to the QED Beta function in the MS scheme and to the QED psi function: Total reevaluation // *Phys. Lett. B*, 1991, Vol. 256, pp. 81-86.
- [141] Lorca A. and Riemann T. Automated calculations for massive fermion production with aITALC // *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, 2004, Vol. 135, pp. 328-332.
- [142] Fontes D. and Romão J. C. FeynMaster: a plethora of Feynman tools // *Comput. Phys. Commun.*, 2020, Vol 256, P. 107311.
- [143] Feng F., Xie Y. F., Zhou Q. C. and Tang S. R. HepLib: A C++ library for high energy physics // *Comput. Phys. Commun.*, 2021, Vol 265, P. 107982.
- [144] Gerlach M., Herren F. and Lang M. `tapir`: A tool for topologies, amplitudes, partial fraction decomposition and input for reductions // [arXiv:2201.05618 [hep-ph]].

- [145] Hahn T. and Schappacher C. The Implementation of the minimal supersymmetric standard model in FeynArts and FormCalc // Comput. Phys. Commun., 2002, Vol. 143, pp. 54-68.
- [146] Kreuzberger T., Kummer W. and Schweda M. SUSYCAL: A PROGRAM FOR SYMBOLIC COMPUTATIONS IN SUPERSYMMETRIC THEORIES // Comput. Phys. Commun., 1990, Vol. 58, pp. 89-104.
- [147] Ferrari A. F. SusyMath: A Mathematica package for quantum superfield calculations // Comput. Phys. Commun., 2007, Vol. 176, pp. 334-346.
- [148] Abbott L. F. The Background Field Method Beyond One Loop. // Nucl. Phys. B. — 1981. — Vol. 185. — P. 189.
- [149] Abbott L. F. Introduction to the Background Field Method. // Acta Phys. Polon. B. — 1982. — Vol. 13. — P. 33.
- [150] Деви́тт Б. С. Пер. с англ. — Динамическая теория групп и полей. // Москва, Наука, — 1987. — 288 с.;
- DeWitt B. S. Dynamical Theory of Groups and Fields. // New York, Gordon and Breach, — 1965. — 258 p.
- [151] Becchi C., Rouet A. and Stora R. Renormalization of the Abelian Higgs-Kibble Model. // Commun. Math. Phys. — 1975. — Vol. 42. — P. 127.
- [152] Тютин И.В. Калибровочная инвариантность в теории поля и статистической физике в операторной формулировке. // Препринт ФИАН СССР No. 39, М.: ФИАН СССР, 1975;
- Tyutin I. V. Gauge Invariance in Field Theory and Statistical Physics in Operator Formalism. // Lebedev Institute preprint No. 39. — 1975. — <https://arxiv.org/abs/0812.0580>.
- [153] Aleshin S. S., Kazantsev A. E., Skoptsov M. B. and Stepanyantz K. V. One-loop divergences in non-Abelian supersymmetric theories regularized by BRST-invariant version of the higher derivative regularization. // JHEP. — 2016. — Vol. 1605. — P. 014.
- [154] Kallosh R. E. Modified Feynman Rules in Supergravity. // Nucl. Phys. B. — 1978. — Vol. 141. — P. 141.

- [155] Nielsen N. K. Ghost Counting in Supergravity. // Nucl. Phys. B. — 1978. — Vol. 140. — P. 499.
- [156] Kazantsev A. E., Skoptsov M. B. and Stepanyantz K. V. One-loop polarization operator of the quantum gauge superfield for  $\mathcal{N} = 1$  SYM regularized by higher derivatives. // Mod. Phys. Lett. A. — 2017. — Vol. 32. — P. 1750194.
- [157] Степаньянц К. В. Регуляризация высшими ковариантными производными как средство для выявления структуры квантовых поправок в суперсимметричных калибровочных теориях. // Труды Математического института им. В.А.Стеклова РАН. — 2020. — Т. 309. — С. 304;  
 Stepanyantz K. The higher covariant derivative regularization as a tool for revealing the structure of quantum corrections in supersymmetric gauge theories. // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2020. — Vol. 309. — P. 284.
- [158] Степаньянц К. В. NSVZ-соотношение и NSVZ-схема в  $\mathcal{N} = 1$  неабелевых суперсимметричных калибровочных теориях. // ЭЧАЯ. — 2020. — Т. 51. — N 4. — С. 687.  
 Stepanyantz K. V. NSVZ Relation and NSVZ Scheme in  $\mathcal{N} = 1$  Non-Abelian Supersymmetric Gauge Theories. // Phys. Part. Nucl. — 2020. — Vol. 51. — No.4. — P. 599.
- [159] Shirokov I., Computer algebra calculations in supersymmetric electrodynamics // [arXiv:2209.05295 [hep-th]], принята к публикации в журнале "Программирование".
- [160] Tarasov O. V. and Vladimirov A. A. Three Loop Calculations in Non-Abelian Gauge Theories // Phys. Part. Nucl., 2013, Vol. 44, pp. 791-802.
- [161] OpenMP ARB OpenMP 5.2 Reference Guide, // 2021. <https://www.openmp.org/wp-content/uploads/OpenMPRefCard-5-2-web.pdf>
- [162] Kataev A. L. and Stepanyantz K. V. NSVZ scheme with the higher derivative regularization for  $\mathcal{N} = 1$  SQED. // Nucl. Phys. B. — 2013. — Vol. 875. — P. 459.

- [163] Stepanyantz K. V. The NSVZ  $\beta$ -function and the Schwinger-Dyson equations for  $\mathcal{N} = 1$  SQED with  $N_f$  flavors, regularized by higher derivatives. // *JHEP*. — 2014. — Vol. 1408. — P. 096.
- [164] Вайнштейн А. И., Захаров В. И. и Шифман М. А. Точная функция Гелл-Манна-Лоу в суперсимметричной электродинамике. // *Письма ЖЭТФ*. — 1985. — Т. 42. — С. 182;  
Vainshtein A. I., Zakharov V. I. and Shifman M. A. Gell-mann-low Function In Supersymmetric Electrodynamics. // *JETP Lett*. — 1985. — Vol. 42. — P. 224.
- [165] Shifman M. A., Vainshtein A. I. and Zakharov V. I. Exact Gell-mann-low Function In Supersymmetric Electrodynamics. // *Phys. Lett. B*. — 1986. — Vol. 166. — P. 334.
- [166] Kataev A. L. and Stepanyantz K. V. Scheme independent consequence of the NSVZ relation for  $\mathcal{N} = 1$  SQED with  $N_f$  flavors. // *Phys. Lett. B*. — 2014. — Vol. 730. — P. 184.
- [167] Катаев А. Л. и Степаньянц К. В. Бета-функция Новикова-Шифмана-Вайнштейна-Захарова в суперсимметричных теориях при различных регуляризациях и перенормировочных предписаниях. // *ТМФ*. — 2014. — Т. 181. — С. 475;  
Kataev A. L. and Stepanyantz K. V. The NSVZ beta-function in supersymmetric theories with different regularizations and renormalization prescriptions. // *Theor. Math. Phys.* — 2014. — Vol. 181. — P. 1531.
- [168] Shakhmanov V. Y. and Stepanyantz K. V. New form of the NSVZ relation at the two-loop level. // *Phys. Lett. B*. — 2018. — Vol. 776. — P. 417.
- [169] Stepanyantz K. V. Structure of Quantum Corrections in  $\mathcal{N} = 1$  Supersymmetric Gauge Theories. // *Proceedings to the 20th Workshop What Comes Beyond the Standard Models, Bled, Slovenia, July 9 – 20, 2017*. Bled Workshops Phys. — 2017. — Vol. 18. — No.2. — P. 197.
- [170] Rosner J. L. Higher-order contributions to the divergent part of  $Z(3)$  in a model quantum electrodynamics. // *Annals Phys.* — 1967. — Vol. 44. — P. 11.

- [171] Jack I., Jones D. R. T. and North C. G.  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetry and the three loop anomalous dimension for the chiral superfield. // Nucl. Phys. B. — 1996. — Vol. 473. — P. 308.
- [172] Kataev A. L. Conformal symmetry limit of QED and QCD and identities between perturbative contributions to deep-inelastic scattering sum rules. // JHEP — 2014. — Vol. 1402. — P. 092.
- [173] 't Hooft G. Some Observations on Quantum Chromodynamics. // Stud. Nat. Sci. — 1977. — Vol. 12. — P. 699.
- [174] 't Hooft G. Can We Make Sense Out of Quantum Chromodynamics? // Subnucl. Ser. — 1979. — Vol. 15. — P. 943.
- [175] Garkusha A. V. and Kataev A. L. The absence of QCD  $\beta$ -function factorization property of the generalized Crewther relation in the 't Hooft  $\overline{MS}$ -based scheme. // Phys. Lett. B — 2011. — Vol. 705. — P. 400.
- [176] Kataev A. L., Kazantsev A. E. and Stepanyantz K. V. On-shell renormalization scheme for  $\mathcal{N} = 1$  SQED and the NSVZ relation. // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Vol. 79. — P. 477.
- [177] Goriachuk I. O., Kataev A. L. and Stepanyantz K. V. A class of the NSVZ renormalization schemes for  $\mathcal{N} = 1$  SQED. // Phys. Lett. B. — 2018. — Vol. 785. — P. 561.
- [178] Горячук И. О., Класс NSVZ схем в суперсимметричных калибровочных теориях // Материалы Международного молодежного научного форума Ломоносов—2019 / Под ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. — Москва: Москва, 2019.
- [179] Горячук И. О. и Катаев А. Л. Точная  $\beta$ -функция в абелевых и неабелевых  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных калибровочных моделях и ее аналогия с  $\beta$ -функцией КХД в C-схеме. // Письма ЖЭТФ. — 2020. — Т. 111. — N 12. — С. 789;  
Goriachuk I. O. and Kataev A. L. Exact  $\beta$ -Function in Abelian and non-Abelian  $\mathcal{N} = 1$  Supersymmetric Gauge Models and Its Analogy with the QCD  $\beta$ -Function in the C-scheme. // JETP Lett. — 2020. — Vol. 111. — No. 12. — P. 663.

- [180] Korneev D. S., Plotnikov D. V., Stepanyantz K. V. and Tereshina N. A. The NSVZ relations for  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetric theories with multiple gauge couplings. // JHEP. — 2021. — Vol. 10. — P. 046.
- [181] Владимиров А. А. и Ширков Д. В. Ренормализационная группа и ультрафиолетовые асимптотики. // УФН. — 1979. — Т. 129. — N 3. — С. 407;  
Vladimirov A. A. and Shirkov D. V. The Renormalization Group And Ultraviolet Asymptotics. // Sov. Phys. Usp. — 1979. — Vol. 22. — P. 860.
- [182] Владимиров А. А. Unambiguity of Renormalization Group Calculations in QCD. // Ядерная Физика. — 1980. — Т. 31. — С. 1083;  
Vladimirov A. A. Unambiguity of Renormalization Group Calculations in QCD. // Sov. J. Nucl. Phys. — 1980. — Vol. 31. — P. 558.