

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Стручалин Глеб Игоревич

Адаптивные методы в квантовой томографии

1.3.19. Лазерная физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
Страупе Станислав Сергеевич

Москва — 2024

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Обзор литературы	13
1.1 Методы обработки данных	13
1.2 Оптимальная точность восстановления	18
1.3 Протоколы томографии состояний	20
1.3.1 Статические протоколы	20
1.3.2 Адаптивные протоколы	25
1.4 Приготовление перепутанных пар поляризационных кубитов	27
1.5 Формализм квантовых преобразований	32
1.6 Изоморфизм Чоя — Ямиолковского	36
1.7 Меры различия процессов	37
1.8 Стандартная томография процессов	39
Глава 2. Томография состояний	41
2.1 Описание метода	41
2.2 Априорное распределение	45
2.3 Генерация случайных блужданий	48
2.4 Блочные измерения	54
2.5 Эксперимент	58
2.5.1 Описание установки	58
2.5.2 Калибровка эффективностей детектирования	61
2.5.3 Факторы, влияющие на чистоту приготавливаемого состояния	64
2.5.4 Сходимость	69
2.5.5 Влияние шумов	70
2.6 Численные симуляции	75
2.6.1 Сходимость	75
2.6.2 Влияние априорного распределения	80
2.7 Выводы по главе	82
Глава 3. Томография процессов	84
3.1 Байесовское оценивание	84

	Стр.
3.1.1	Априорное распределение 85
3.1.2	Случайные блуждания 86
3.2	Адаптивность 87
3.3	Численные симуляции 89
3.3.1	Влияние инструментальных погрешностей 91
3.4	Эксперимент 95
3.4.1	Описание установки 95
3.4.2	Предельная точность 96
3.4.3	Сохраняющие след процессы 98
3.4.4	Несохраняющие след процессы 99
3.5	Выводы по главе 102
Глава 4.	Томография высокоразмерных двухкомпонентных систем . . 103
4.1	Теория точности восстановления состояний 105
4.2	Восстановление состояний при несовпадающих рангах 108
4.3	Ортогональные измерения 110
4.4	Факторизованные измерения 113
4.5	Описание протокола 115
4.6	Численные симуляции 118
4.6.1	Влияние ранга на точность оценок 124
4.6.2	Влияние размера блока на точность 127
4.7	Эксперимент 128
4.7.1	Предел точности из-за инструментальных погрешностей . . 134
4.8	Выводы по главе 136
Глава 5.	Теневая томография 138
5.1	Описание метода 138
5.2	Генерация случайных стабилизаторных состояний 141
5.3	Эксперимент 147
5.3.1	Компенсация фазы Гуи 148
5.4	Результаты 150
5.4.1	Анализ корреляций 150
5.4.2	Влияние медианной оценки 152
5.4.3	Оценка фиделити 155

	Стр.
5.4.4 Несмещённость оценки	158
5.5 Выводы по главе	161
Заключение	162
Список сокращений и условных обозначений	164
Список литературы	165
Список рисунков	176
Список таблиц	179

Введение

Квантовая томография является неотъемлемой процедурой во многих областях квантовой информации. Она позволяет отлаживать квантовые схемы и вентили, создаваемые экспериментально, определять параметры каналов передачи квантовой информации, характеристики присутствующего шума. Под квантовой томографией в широком смысле понимают процедуру определения неизвестных квантовых состояний, процессов или их отдельных свойств посредством многократных измерений. При томографии состояний измерения проводятся над ансамблем идентично приготовленных квантовых систем. При томографии процессов заданное состояние подаётся на вход неизвестного процесса, затем результирующее состояние измеряется. После измерения N копий состояния происходит процедура обработки полученных данных для нахождения оценки состояния, процесса или интересующей величины.

Одной из целей разработки протоколов томографии является повышение точности оценки при заданном N . Этого можно достичь, двигаясь по двум направлениям: во-первых, за счёт оптимального выбора измерений, а во-вторых, за счёт модификации алгоритма обработки данных — статистической оценки. Оба подхода дополняют друг друга и могут применяться совместно. Оптимальные измерения, вообще говоря, зависят от неизвестного томографируемого состояния, и поэтому на практике прибегают к адаптивным схемам измерений, в которых новые измерения периодически рассчитываются на основе уже полученных результатов. Метод статистической обработки данных тоже может сильно влиять на точность оценок. В частности подбор адекватного ранга матрицы плотности томографируемого состояния способен качественно изменить скорость сходимости точности алгоритма томографии от числа измерений N .

В диссертационной работе основной упор сделан на различные адаптивные стратегии выбора оптимальных измерений (главы 2–4). Совместное влияние адаптивных измерений и метода оценивания на точность томографии отчасти рассмотрено в главе 4.

Другое направление развития квантовой томографии заключается в уменьшении количества P различных измеряемых проекторов. При полной томографии величина P ограничена снизу числом степеней свободы у матрицы плотности состояния или матрицы процесса, и если размерность исследуемой системы велика,

то и P тоже. В стремлении уменьшить P интерес представляют методы неполной томографии, которые так или иначе используют априорную информацию о состоянии или процессе, например, ограничения на ранг матриц или их возможный функциональный вид. Также к неполной томографии можно отнести томографию отдельных свойств состояний, например, фиделити до заданного идеального состояния. Отсутствие необходимости восстанавливать полную матрицу плотности позволяет существенно уменьшить количество различных измерений P . Глава 5 посвящена экспериментальной проверке одного из таких методов, который был недавно предложен для определения средних значений массива наблюдаемых.

Актуальность работы обусловлена как фундаментальным интересом к разработке и экспериментальной проверке новых методов квантовой томографии, так и возможностью практического применения результатов работы при создании и отладке квантовых вычислительных устройств.

Степень разработанности темы можно оценить как высокую. Зарождение квантовой томографии как процедуры определения неизвестного квантового состояния можно усмотреть в задаче различения квантовых состояний, которая исследовалась Холево и Хельстромом (Helstrom) в 1973 и 1976 году. В 1981 году Иванович рассматривает задачу определения состояний. Исторически в начале были разработаны методы статической томографии. В 1988 Вуттерс (Wootters) доказывает оптимальность измерений во взаимно несмещённых базисах. В 2004 году Рехачеком (Řeháček) предложен минимальный по числу измерений протокол томографии кубита и рассмотрено влияние ориентации набора измерений относительно истинного состояния. Параллельно с этим развиваются методы построения статистических оценок. В 1996 году Храдил (Hradil) использовал метод максимального правдоподобия для оценки квантовых состояний. Фудзивара (Fujiwara) в 2006 году публикует одну из первых теоретических работ по адаптивной квантовой томографии. Позднее в 2012 году была проведена экспериментальная проверка этого метода. Значительный вклад в развитие протоколов адаптивной байесовской томографии внесли работы Хусара (Huszár), Блюма (Blume) и Ферри (Ferrie). Дальнейшее развитие квантовой томографии идёт по пути увеличения размерности исследуемых систем и отхода от традиционных методов полной томографии, где восстанавливается матрица плотности целиком. Сюда можно отнести самонаправляемую (self-guided) и теневую (shadow) томографию, сжатое считывание (compressive sensing), применение искусственных нейросетей для обучения модели квантового состояния.

Целью диссертационной работы является экспериментальная проверка и разработка протоколов адаптивной квантовой томографии с целью повышения точности восстановления неизвестного квантового состояния или процесса по сравнению с существующими подходами.

В рамках поставленной цели были сформулированы следующие **задачи**:

1. Расширить программную реализацию адаптивного байесовского протокола томографии со случая двумерных систем — кубитов — на случай состояний произвольной размерности.
2. Провести экспериментальную проверку адаптивной байесовской томографии состояний куквартов и однокубитовых процессов на примере поляризационных состояний бифотонов, получаемых в процессе спонтанного параметрического рассеяния.
3. Разработать протокол адаптивной томографии высокоразмерных двухкомпонентных систем, которому требуются только факторизованные измерения и который может работать с любыми точечными оценками матрицы плотности.
4. Выполнить проверку разработанного протокола адаптивной томографии высокоразмерных двухкомпонентных систем в эксперименте с пространственными состояниями бифотонов, сравнить протокол с уже имеющимися методами адаптивной томографии.
5. Экспериментально исследовать свойства метода теневой томографии и точность оценок наблюдаемых, получаемых с его помощью, в эксперименте с пространственными состояниями фотонов.

Объектом исследования являются протоколы квантовой томографии состояний и процессов. **Предметом исследования** являются способы повышения точности оценок квантовых состояний и процессов, получаемых в ходе томографии, при заданном объёме статистики, включая адаптивные критерии выбора измерений и процедуры обработки результатов измерений.

Научная новизна заключается в следующих положениях:

1. Протокол адаптивной байесовской томографии квантовых состояний на основе энтропийного критерия оптимальности измерений экспериментально реализован и проверен на примере томографии состояний поляризационных куквартов.

2. Предложен алгоритм случайного блуждания на множестве чистых состояний с заданными свойствами (изотропность по направлениям, управление размером шага).
3. Протокол адаптивной байесовской томографии на основе энтропийного критерия оптимальности измерений обобщён на случай томографии квантовых процессов (каналов). Выполнена проверка в численных симуляциях и эксперименте с поляризационными кубитами. Отдельно исследован случай процессов с потерями, для которого показана необходимость модификации критерия оптимальности измерений.
4. Разработан новый протокол адаптивной томографии высокоразмерных состояний двухкомпонентных систем, использующий только факторизованные измерения, а также обладающий вычислительной простотой нахождения оптимальных измерений.
5. Сформулированы условия на протоколы томографии с факторизованными измерениями, необходимые для достижения максимальной скорости сходимости.
6. Экспериментально подтверждено свойство несмещённости оценок проекторов ранга 1 и фиделити в методе теневой томографии.
7. Показано, что в методе теневой томографии эмпирическое среднее даёт точность наравне с медианной оценкой, если объём статистики велик.
8. Предложен алгоритм равновероятной выборки стабилизаторных состояний, хранимых в виде вектора комплексных амплитуд, с вычислительной сложностью $\mathcal{O}(n^3 2^n)$ от числа кубитов n .

Теоретическая и практическая значимость заключается в важности результатов работы как для фундаментальных исследований в области квантовой обработки информации, так и для практической реализации квантовых устройств и установок и их экспериментальной отладки.

Методология диссертационного исследования основана на широко используемых и испытанных методах выполнения эксперимента и численных расчётов. В протоколе адаптивной байесовской томографии для выбора оптимальных измерений использовалась энтропия Шеннона в качестве меры неопределённости знаний о системе. При вычислениях априорные и апостериорные распределения вероятностей аппроксимировались с помощью последовательной выборки по значимости. Для повторной выборки из распределений использовался алгоритм Метрополиса — Гастингса. Разработка адаптивного протокола томографии

высокоразмерных двухкомпонентных систем основывалась на универсальном распределении фиделити для оценок матриц плотности. Для нахождения адаптивных измерений применялся оптимизационный алгоритм Бройдена — Флетчера — Гольдфарба — Шанно. Оценка максимального правдоподобия вычислялась посредством метода ускоренного проективного градиентного подъёма. Качество оценок в теневой томографии характеризовалось коэффициентом корреляции Пирсона.

Поляризационные состояния пар фотонов, воплощающих собой два кубита, рождались в процессе спонтанного параметрического рассеяния (СПР) в нелинейных кристаллах. Для приготовления состояний одиночных фотонов также использовались СПР пары в схеме совпадений, где один фотон из пары служит для оповещения. Пространственные состояния фотонов создавались и преобразовывались с помощью голограмм, отображаемых на жидкокристаллических фазовых модуляторах света. Источником фотонов являлось либо ослабленное одномодовое лазерное излучение (в эксперименте по теневой томографии), либо СПР при накачке нелинейного кристалла лазерным излучением с определённым модовым составом (при томографии высокоразмерных двухкомпонентных состояний).

Положения, выносимые на защиту:

1. Адаптивный байесовский протокол квантовой томографии в эксперименте с поляризационными кубитами демонстрирует качественно лучшую зависимость точности $d_B^2(N)$ от числа зарегистрированных пар фотонов N , чем стратегия случайных измерений, при томографии чистых и близких к ним состояний. С уменьшением чистоты состояния преимущество от использования адаптивного протокола тоже снижается, но адаптивный протокол всегда не хуже случайных измерений.
2. Адаптивный байесовский протокол квантовой томографии процессов в эксперименте демонстрирует преимущество по точности $d_B^2(N)$ над стратегией случайных измерений для унитарных и близких к унитарным процессам, а также для не сохраняющих след процессов единичного ранга независимо от величины потерь.
3. Адаптивный байесовский протокол томографии состояний и процессов менее чувствителен к шумам по сравнению со стратегией случайных измерений, то есть позволяет достичь большей точности при наличии случайных инструментальных ошибок в экспериментальной установке.

- Достижение предельной точности, ограничиваемой шумами измерений, можно определить в эксперименте, отслеживая тестовую статистику χ^2 .
4. Для получения скорости сходимости $1 - F \propto 1/N$ в случае несовпадения ранга истинного состояния R_s и ранга оценки R_e протокол томографии состояний размерности D должен содержать $(R_e - R_s)(2D - R_e - R_s)$ независимых операторов измерений, каждый из которых ортогонален к проекторам на собственные векторы, отвечающие ненулевым собственным значениям истинного состояния.
 5. Теневая томография позволяет строить несмещённые оценки средних значений проекторов единичного ранга с высоким коэффициентом корреляции с непосредственным измерением даже в случае существенно неполного набора измерений и вне зависимости от размерности пространства состояний исследуемой системы.

Достоверность результатов эксперимента обеспечивается использованием современных оптических компонентов, приборов и измерительного оборудования. Достоверность численных симуляций опирается на применение распространённых и протестированных программных средств (компиляторов, библиотек алгоритмов). Наблюдается сходство результатов эксперимента и численных расчётов, а также согласие с аналитически ожидаемым поведением. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Личный вклад. Все результаты работы получены автором лично или при непосредственном участии. Автор принимал участие в постановке задач, разработке алгоритмов, обсуждении деталей программной реализации методов, выполнении экспериментов, представленных в диссертационной работе.

Апробация результатов работы проводилась на конференциях:

1. 23rd International Laser Physics Workshop (LPHYS'14), София, Болгария, 2014 год,
2. Quantum Information Processing and Communication (QIPC), Лидс, Англия, 2015 год,
3. 26th International Laser Physic Workshop (LPHYS'17), Казань, Россия, 2017 год,
4. International Workshop on Quantum Tomography (IWQT), Шанхай, Китай, 2018 год,

5. Международная конференция «Микро- и наноэлектроника – 2018» (ICMNE), Звенигород, Россия, 2018 год,
6. Международный форум «Микроэлектроника – 2020», Ялта, Россия, 2020 год,
7. Конференция по математическим методам квантовых технологий, Москва, Россия, 2020 год,

а также на семинарах кафедры квантовой электроники физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова. Из представленных конференций 6 являются международными.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 5 научных статьях, опубликованных в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в Перечне изданий МГУ:

1. Experimental adaptive quantum tomography of two-qubit states / G. I. Struchalin, I. A. Pogorelov, S. S. Straupe, K. S. Kravtsov, I. V. Radchenko, S. P. Kulik // *Phys. Rev. A.* — 2016. — Янв. — Т. 93, вып. 1. — С. 012103. — WoS JIF 2,9. Авторский вклад: создание экспериментальной установки, программная реализация алгоритмов томографии, проведение измерений и обработка результатов.
2. Experimental adaptive process tomography / I. A. Pogorelov, G. I. Struchalin, S. S. Straupe, I. V. Radchenko, K. S. Kravtsov, S. P. Kulik // *Phys. Rev. A.* — 2017. — Янв. — Т. 95, вып. 1. — С. 012302. — WoS JIF 2,9. Авторский вклад: создание экспериментальной установки, обобщение алгоритма томографии состояний на томографию процессов, обработка результатов измерений.
3. Adaptive quantum tomography of high-dimensional bipartite systems / G. I. Struchalin, E. V. Kovlakov, S. S. Straupe, S. P. Kulik // *Phys. Rev. A.* — 2018. — Сент. — Т. 98, вып. 3. — С. 032330. — WoS JIF 2,9. Авторский вклад: теоретическая разработка и программная реализация алгоритма томографии, выполнение численных симуляций, помощь в проведении измерений, обработка результатов.
4. Оценка свойств квантовых состояний с использованием «классических теней» / Г. И. Стручалин, Я. А. Загоровский, Е. В. Ковлаков, С. С. Страупе, С. П. Кулик // *Наноиндустрия.* Т. 13. S4 (99). — 2020. — С. 671–672. — РИНЦ Импакт-фактор 0,274. Авторский вклад: программ-

ная реализация алгоритма томографии, доказательство теорем, помощь в проведении измерений и обработке результатов.

5. Experimental Estimation of Quantum State Properties from Classical Shadows / G. I. Struchalin, Ya. A. Zagorovskii, E. V. Kovlakov, S. S. Straupe, S. P. Kulik // PRX Quantum. — 2021. — Янв. — Т. 2, вып. 1. — С. 010307. — WoS JIF 9,7. Авторский вклад: программная реализация алгоритма томографии, доказательство теорем, помощь в проведении измерений и обработке результатов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 5 глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 179 страниц, включая 40 рисунков и 14 таблиц. Список литературы содержит 123 наименования.

Глава 1. Обзор литературы

Квантовая томография — процедура определения неизвестного квантового состояния, процесса или их отдельных характеристик, включающая в себя набор измерений и метод обработки полученных данных¹ [3]. Протоколы квантовой томографии можно разделить на статические и адаптивные. В статических процедурах набор измерений задан заранее и остаётся неизменным, а в адаптивных накопленные результаты влияют на выбор следующего измерения. Также протоколы можно классифицировать на полные и неполные [4]. В полных число различных операторов измерений достаточно, чтобы однозначно и целиком восстановить неизвестную матрицу плотности состояния или χ -матрицу процесса. Минимальное число измерений в полных протоколах томографии ограничено числом степеней свободы у соответствующей матрицы. Для неполных протоколов матрица либо неоднозначно определяется по результатам измерений, и тогда нужны дополнительные априорные сведения о системе, чтобы выбрать единственную оценку среди возможных, либо однозначно можно восстановить лишь часть матричных элементов или избранный набор функций от матрицы (например, средние значения набора наблюдаемых).

1.1 Методы обработки данных

Линейная инверсия. Наиболее простым методом обработки измеренных данных является *линейная инверсия*. Правило Борна гласит, что вероятность $p_{\alpha\gamma}$ наблюдения исхода γ при измерении α (определяемом конфигурацией экспериментальной установки, например, положением углов фазовых пластинок) над состоянием ρ равняется

$$p_{\alpha\gamma} = \mathbb{P}(\gamma|\alpha, \rho) = \text{Tr}(M_{\alpha\gamma}\rho), \quad (1.1)$$

¹Довольно часто под протоколом томографии подразумевается лишь набор измерений безотносительно к методу их обработки. В работе также будет использоваться это значение. Существует ещё третий смысл фразы «процедура томографии» (см., например, [1; 2]), всё реже встречающийся в настоящее время. Имеется в виду томографическая реконструкция (tomographic reconstruction) — метод обработки измеренных данных, основанный на обращении правила Борна (см. метод линейной инверсии далее по тексту). Однако, такое значение термина очень узкое и не согласуется со современным смыслом.

где $M_{\alpha\gamma}$ — POVM элемент измерения (например, проектор на состояние $|\alpha\gamma\rangle$: $M_{\alpha\gamma} = |\alpha\gamma\rangle\langle\alpha\gamma|$). По результатам измерений можно найти наблюдаемую частоту исхода $f_{\alpha\gamma} = n_{\alpha\gamma} / \sum_{\gamma} n_{\alpha\gamma}$, где $n_{\alpha\gamma}$ — количество раз, когда выпал исход γ . При линейной инверсии вероятность $p_{\alpha\gamma}$ заменяется на частоту $f_{\alpha\gamma}$: $f_{\alpha\gamma} \approx p_{\alpha\gamma}$. Таким образом выражение (1.1) переходит в систему линейных уравнений для различных α, γ относительно неизвестных матричных элементов ρ , которая затем решается. Достоинством метода является, несомненно, его простота. Основным недостатком процедуры заключается в том, что зачастую при томографии близких к чистым состояний, матрица плотности обладает отрицательными собственными значениями, что нарушает условие положительной определённости. Например, в работе [1], посвящённой экспериментальной томографии пар кубитов, отмечается, что отрицательные матрицы плотности получались приблизительно в 3/4 случаев.

Метод максимального правдоподобия. Следующим этапом стало применение к задаче квантовой томографии метода максимального правдоподобия (ММП), устраняющего упомянутое выше несовершенство линейной инверсии [5]. Данный подход весьма распространён в литературе (см., например, [1; 6—8]). Суть метода в том, что сначала необходимо определить функцию правдоподобия $\mathcal{L}(\rho, \mathcal{D})$, зависящую от набора измеренных данных \mathcal{D} , которая задаёт вероятность того, что наблюдаемая статистика измерений \mathcal{D} соответствует состоянию ρ :

$$\mathcal{L}(\rho, \mathcal{D}_N) = \mathbb{P}(\mathcal{D}_N | \rho) = \prod_{k=1}^N \mathbb{P}(\gamma_k | \rho, \alpha_k), \quad (1.2)$$

где k — номер измерения, N — полное число измерений в \mathcal{D}_N , γ_k — результат измерения на шаге k , α_k — конфигурация экспериментальной установки на шаге k . Далее находится матрица плотности, максимизирующая функцию правдоподобия. Проблема отрицательных собственных значений решается тем, что поиск максимума уже изначально ведётся на множестве физически разрешённых матриц плотности (эрмитовых, обладающих единичным следом и положительно определённых). Однако, метод максимального правдоподобия не лишён недостатков [2]. Например, найденная матрица плотности может иметь неполный ранг, то есть некоторые её собственные значения в точности равны нулю. Отсюда приходим к выводу, что в ансамбле систем, описываемых такой вырожденной матрицей

плотности, состояние с нулевым собственным значением имеет нулевую вероятность, то есть никогда не наблюдается. Но на основе конечного числа измерений нельзя достоверно утверждать, что какое-либо событие невозможно, следовательно, получаем противоречие.

Проблема возникновения состояния ρ_{MLE} с неполным рангом в методе максимального правдоподобия связана с получением матрицы ρ_{lin} по методу линейной инверсии с отрицательными собственными значениями. В работе [2] показано, что глобальный максимум $\mathcal{L}(\rho, \mathcal{D}_N)$, найденный без требования положительной определённости, достигается на ρ_{lin} . Так как ρ_{lin} не лежит в области разрешённых состояний, то условный максимум достигается на границе этой области — множестве состояний неполного ранга.

Байесовский подход. Для байесовских методов характерно использование распределения вероятностей $p(\rho)$, которое определяет вероятность того, что томографируемое состояние является данным ρ . На начальном этапе задаётся априорное распределение вероятностей $p(\rho)$, которое должно быть в некотором смысле не информативным. После получения совокупности результатов измерений \mathcal{D}_N апостериорное распределение $p(\rho|\mathcal{D}_N)$ вычисляется по формуле Байеса:

$$p(\rho|\mathcal{D}_N) = \mathcal{L}(\rho, \mathcal{D}_N)p(\rho)/p(\mathcal{D}_N), \quad (1.3)$$

где $\mathcal{L}(\rho, \mathcal{D}_N)$ — как и прежде, функция правдоподобия, а $p(\mathcal{D}_N)$ — нормировочная константа.

В работах [2; 9] исследуются особенности байесовского подхода и свойства получаемых с его помощью оценок томографируемого состояния. Байесовское распределение наиболее точно передаёт наше знание о томографируемом состоянии по прошествии серии из N измерений. Хорошей оценкой истинного состояния является среднее по распределению:

$$\hat{\rho} = \mathbb{E}_{p(\rho|\mathcal{D}_N)}[\rho]. \quad (1.4)$$

Показано, что матрица плотности $\hat{\rho}$ обладает полным рангом для подавляющего большинства априорных распределений. В частности это справедливо для распределений, чья плотность вероятности не обращается в ноль на гладкой поверхности, по крайней мере имеющей вещественную размерность $(D - 1)^2$ (в то время как всё пространство характеризуется $D^2 - 1$ вещественными параметрами).

Также оценка (1.4) является оптимальной оценкой в том смысле, что в среднем по априорному распределению она даёт наилучшую точность восстановления истинного состояния, если точность восстановления считать с помощью класса мер, названных автором работы [2] операциональными расходимостями (operational divergences). Оптимальность достигается не только в пределе большого количества измерений N , но и для любого конечного их числа. Операциональные расходимости включают в себя такие распространённые меры, как: квадрат расстояния Гильберта — Шмидта

$$d_{HS}^2(\rho, \hat{\rho}) = \text{Tr}[(\rho - \hat{\rho})^2], \quad (1.5)$$

а также относительную энтропию или расходимость Кульбака — Лейблера (Kullback — Leibler divergence)

$$d_{KL}(\rho, \hat{\rho}) = \text{Tr}[\rho(\log \rho - \log \hat{\rho})]. \quad (1.6)$$

Тем не менее операциональные расходимости не содержат метрик, основанных на степени совпадения фиделити (fidelity) [10]:

$$F(\rho, \hat{\rho}) = \left(\text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho} \hat{\rho} \sqrt{\rho}} \right)^2, \quad (1.7)$$

как, например, метрика Бюреса [11]:

$$d_B^2(\rho, \hat{\rho}) = 2 - 2\sqrt{F(\rho, \hat{\rho})} \approx 1 - F(\rho, \hat{\rho}) \text{ при } 1 - F \ll 1. \quad (1.8)$$

Погрешность восстановления состояния можно оценить, как средний размер распределения \bar{d} :

$$\bar{d} = \sqrt{\mathbb{E}_{p(\rho|\mathcal{D})}[d^2(\rho, \hat{\rho})]}, \quad (1.9)$$

где $d(\rho, \hat{\rho})$ — некоторая мера близости двух состояний ρ и $\hat{\rho}$. При необходимости можно найти также любые другие величины, связанные с байесовским распределением.

Несмотря на преимущества байесовского подхода, он менее распространён в литературе по сравнению с методом максимального правдоподобия. В частности это объясняется более трудоёмкой реализацией и вычислительной сложностью, так как, например, выражения (1.4) и (1.9) подразумевают интегрирование в многомерном пространстве матриц плотности (уже для куквартов вещественная размерность Гильбертова пространства равна $4^2 - 1 = 15$). Обычно для практических расчётов прибегают к алгоритмам из семейства методов Монте — Карло. Тем не менее на основе байесовского подхода довольно часто строятся адаптивные схемы измерений [12—16]).

Неполная томография. Первые два рассмотренных метода (линейная инверсия и ММП) относятся к алгоритмам полной квантовой томографии. Байесовский подход довольно гибок и вдобавок позволяет находить оценки $\hat{\rho}$ интересующих величин от матрицы плотности ρ без построения её точечной оценки $\hat{\rho}$. Сценарий неполной байесовской томографии реализуется, если размер апостериорного распределения \bar{d} (1.9) не стремится к нулю при бесконечном увеличении объёма статистики $N \rightarrow \infty$, но погрешности оценок $\hat{\rho}$ становятся пренебрежимо малы.

Подсчитывая число степеней свободы у произвольной матрицы плотности полного ранга для системы размерности D , найдём, что число измерений (различных проекторов) для полной томографии должно быть как минимум равно D^2 [17]. Зная априорно ранг состояния R и применяя методы сжатого считывания (compressive sensing), число измерений сокращается до $O(RD \log^2 D)$ [18]. Для томографии чистых состояний ($R = 1$) известен протокол, который находит оценку за $5D$ измерений [19].

Комбинация метода максимального правдоподобия с максимизацией энтропии оценки [20] устраняет неоднозначность в нахождении решения $\hat{\rho}$ даже при неполном наборе измерений. Адаптивные измерения также применяются в неполной томографии [21; 22]. Идея заключается в выборе нового измерения так, чтобы для выпуклого множества всех оценок, совместимых с текущими результатами измерений, максимально уменьшался его ожидаемый объём.

В любом случае восстановление полной матрицы плотности системы из n кубитов требует экспоненциально большого числа измерений, так как размерность системы $D = 2^n$. С проблемой экспоненциальной сложности можно бороться, ограничивая класс возможных состояний, допускающих компактное представление. Сюда, например, относятся представление в виде свёртки тензоров низкого ранга (представление тензорным поездом — tensor train) [23; 24] или модели состояния на базе искусственных нейросетей [25—27]. В общем случае, однако, нет гарантий, что заданное состояние можно эффективно описать подобным образом.

Теневая томография. Для некоторых задач знание экспоненциально большого количества информации о полной матрице плотности n -кубитной системы может быть избыточно. Обычно интерес представляет ограниченное множество свойств матрицы плотности как, например, фиделити до заданного состояния или

средние значения ряда наблюдаемых. Этот факт лёг в основу альтернативного подхода в квантовой томографии, называемого *теневого томографией* (shadow tomography) [28]. В пионерской работе [28] была доказана теорема, согласно которой экспоненциально большой набор значений линейных функций от матрицы плотности ρ томографируемой системы можно оценить, имея полиномиальное количество копий ρ . Однако, для реализации процедуры томографии из работы [28] необходимы коллективные измерения над всеми копиями ρ . Поэтому, несмотря на значительный прогресс экспериментальной техники [29], прямое воплощение изначального метода теневой томографии находится за пределами текущих возможностей эксперимента.

К счастью, авторы работы [30] ослабили требования к измерениям, используя только сепарабельные измерения над каждой копией состояния ρ . При этом всё ещё сохраняется возможность оценивания экспоненциально большого числа линейных функций от ρ , принадлежащих достаточно широкому классу (но не любых, в отличие от изначальной теневой томографии). Отметим, что сам метод позволяет оценивать не только линейные функции от матричных элементов ρ , но и полиномы более высокого порядка. Однако, в диссертационной работе будет рассмотрен только линейный случай (см. раздел 5.1).

1.2 Оптимальная точность восстановления

Квантовое измерение изменяет исходное состояние, а результат наблюдения носит вероятностный характер, поэтому для получения удовлетворительной точности восстановления квантового состояния необходимо многократно повторить процесс измерения над частицами в одном и том же состоянии. Формально имеется N частиц в состоянии ρ , а состояние совокупности всех частиц даётся тензорным произведением $\rho^{\otimes N}$. Предположим, что каждая частица составная и содержит две подсистемы A и B . В зависимости от типа измерений, производимых над такой группой частиц, разделим протоколы томографии на:

1. коллективные и сепарабельные (collective and separable),
2. перепутанные и факторизованные (entangled and factorized).

Коллективные протоколы предполагают однократное измерение самого общего вида над всей совокупностью N частиц. Такие схемы на настоящий момент

невозможно экспериментально реализовать, так как обычно $N \gg 1$. Данные протоколы представляют теоретический интерес, ибо с их помощью возможно достичь наилучшей точности восстановления. Они дают ту опорную точку, с которой можно сравнить качество остальных протоколов. В сепарабельных протоколах производится N измерений над каждой частицей в отдельности. Если же ещё провести измерения только над отдельными подсистемами составной частицы, то получим факторизованный протокол, в противном случае перепутанный. Интересен вопрос о том, как тип измерения влияет на максимально достижимую точность восстановления.

В случае кубитов известны асимптотические границы достижимого фиделити $F(\rho, \hat{\rho})$ между истинным состоянием ρ и его оценкой $\hat{\rho}$ для оптимальных коллективных измерений при $N \rightarrow \infty$. Если кубиты находятся в чистом состоянии, то справедлива *граница Массара — Попеску* (Massar — Popescu) [31]:

$$1 - F = \frac{1}{N + 2}. \quad (1.10)$$

Для смешанных состояний предельная точность немного ухудшается [32; 33]:

$$1 - F = \left(\frac{3}{4} + \frac{4}{3\pi} \right) \frac{1}{N} \approx \frac{1,17}{N}. \quad (1.11)$$

Максимально достижимая точность восстановления для коллективных протоколов строго лучше, чем для сепарабельных [34]. Обозначим за ρ истинное состояние, а за $\hat{\rho}$ состояние, восстановленное на основе результатов эксперимента \mathcal{D}_N . Для степени совпадения $\langle F \rangle = \langle F(\rho, \hat{\rho}) \rangle_{\mathcal{D}_N}$, усреднённой по результатам, имеет место соотношение:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N(1 - \langle F_{\text{sep}} \rangle) \geq \frac{\nu^2}{4} > \lim_{N \rightarrow \infty} N(1 - \langle F_{\text{col}} \rangle), \quad (1.12)$$

где F_{sep} , F_{col} — фиделити для сепарабельных и коллективных протоколов соответственно, а ν — число степеней свободы у матрицы плотности. В работе [34] доказательство приведено для случая восстановления смешанного состояния кубита ($\nu = 3$) и томографии состояний, лежащих в экваториальной плоскости шара Блоха ($\nu = 2$).

Для сепарабельных измерений при $N \rightarrow \infty$ применима нижняя *граница Гилла — Массара* (Gill — Massar) [35; 36]:

$$1 - F = \frac{\nu^2}{4N(D - 1)}, \quad \nu = 2RD - R^2 - 1, \quad (1.13)$$

где ν — число степеней свободы у матрицы плотности ранга R состояния системы размерности D . Для однокубитовых систем ($D = 2$) в работе [35] представлен адаптивный протокол томографии, точность оценок которого достигает этой границы. Насколько известно автору, для произвольной размерности $D > 2$ строгое доказательство достижимости границы Гилла — Массара отсутствует.

1.3 Протоколы томографии состояний

1.3.1 Статические протоколы

С математической точки зрения измерения общего вида описываются набором POVM-элементов $\{M_i\}$. POVM-элементы являются положительно определёнными операторами ($M_i > 0$) и образуют разложение единицы ($\sum_i M_i = 1$). В эксперименте зачастую используются проекционные измерения, в которых все POVM-элементы представляют собой проекторы на некие вектора $|i\rangle$: $M_i = |i\rangle\langle i|$. Однако, это не умаляет общности: имея возможность осуществлять произвольные унитарные преобразования над состоянием и выполнять проективные измерения, можно проводить измерения общего вида (доказательство см. [37, подразд. 2.2.8]).

В работе [1] предложена схема статической томографии состояний куквартов. Разложим матрицу плотности по базису $\{\Gamma_\nu\}$ ($\text{Tr}(\Gamma_\nu\Gamma_\mu) = \delta_{\nu\mu}$):

$$\rho = \sum_{\nu=1}^{16} \Gamma_\nu r_\nu, \quad (1.14)$$

$$r_\nu = \text{Tr}(\Gamma_\nu\rho).$$

Если в качестве Γ_ν взять комбинации $\sigma_i \otimes \sigma_j$ ($i, j = 0, 1, 2, 3, \sigma_0 = 1$), то получим многомерный аналог представления матрицы плотности через вектор Блоха. Для определения компонент вектора Блоха r_ν проведём проекционные измерения на некий набор из 16 состояний $\{|\psi_\mu\rangle\}$. Средняя частота исхода f_μ в этих измерениях равняется

$$f_\mu = \langle \psi_\mu | \rho | \psi_\mu \rangle, \quad (1.15)$$

Подставив (1.14) в (1.15), найдём:

$$f_\mu = \sum_{\nu=1}^{16} B_{\mu\nu} r_\nu, \quad (1.16)$$

где элементы матрицы B размера 16×16 даются выражением:

$$B_{\mu\nu} = \langle \psi_\mu | \Gamma_\nu | \psi_\mu \rangle. \quad (1.17)$$

Отсюда сразу же следует необходимое и достаточное условие полноты набора $\{|\psi_\mu\rangle\}$: матрица B должна быть невырожденной. Если данное условие выполнено, то возможно обратить соотношение (1.16) и провести томографическую реконструкцию параметров r_ν , зная частоты f_μ .

В рассматриваемой работе экспериментальная проверка проведена для куэвартов, реализованных на поляризационных степенях свободы пар фотонов, рождающихся в процессе спонтанного параметрического рассеяния (СПР). Набор измерений $\{|\psi_\mu\rangle\}$ состоял из 16 факторизованных векторов, которые были составлены из однокубитовых состояний $|H\rangle$, $|V\rangle$, $|D\rangle = (|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}$, $|R\rangle = (|H\rangle + i|V\rangle)/\sqrt{2}$, $|L\rangle = (|H\rangle - i|V\rangle)/\sqrt{2}$.

Представлены результаты восстановления белловского состояния $|\psi\rangle = (|HH\rangle + |VV\rangle)/\sqrt{2}$. Сравнивались две процедуры обработки наблюдаемых результатов: линейная инверсия и метод максимального правдоподобия. Собственные значения матрицы, полученной линейной инверсией, оказались равными $\lambda = \{1.022, 0.068, -0.065, -0.024\}$ ($\text{Tr } \rho^2 = 1.053$). Как видно, два из них отрицательны. Чтобы удовлетворить требованию положительной определённости в методе максимального правдоподобия использовалась подстановка:

$$\rho = \frac{T^\dagger T}{\text{Tr } T^\dagger T}, \quad (1.18)$$

где матрица T имела нижнетреугольный вид (все элементы выше главной диагонали равны нулю). Матрица плотности, найденная этим способом, имела собственные значения, два из которых в точности равны нулю: $\lambda = \{0.986, 0.014, 0, 0\}$ ($\text{Tr } \rho^2 = 0.972$). Здесь мы находим подтверждение ранее упомянутому факту: метод максимального правдоподобия выдаёт состояния неполного ранга, если матрица в методе линейной инверсии не является положительно определённой. Также в работе проведён анализ ошибок, связанных с пуассоновской статистикой отсчётов и погрешностью в установке углов фазовых пластинок.

Взаимно несмещённые базисы. Понятие о взаимно несмещённых базисах (mutually unbiased bases — MUB) введено в работе [38]. Дадим определение: базисы $\{|e_i^{(j)}\rangle\}_{i=1,\dots,D}$, где $j = 1, \dots, J$ — индекс нумерующий базисы, D — размерность Гильбертова пространства, называются взаимно несмещёнными, если выполняется соотношение

$$\forall j \neq j', \forall i, i' : |\langle e_i^{(j)} | e_{i'}^{(j')} \rangle|^2 = \frac{1}{D}. \quad (1.19)$$

Определение допускает следующую интерпретацию: если состояние системы совпадает с одним из ортов базиса, то результаты проекционных измерений на состояния любого другого базиса возникают с одинаковой вероятностью.

Число взаимно несмещённых базисов, необходимое для однозначного восстановления матрицы плотности, равно $D + 1$. Действительно, матрица плотности D -мерной квантовой системы характеризуется $D^2 - 1$ вещественными параметрами; каждый базис содержит D векторов, что даёт $D - 1$ независимую вероятность исхода эксперимента. Таким образом число базисов равно $(D^2 - 1)/(D - 1) = D + 1$.

Взаимно несмещённые базисы как бы дополняют друг друга в том смысле, что измерения в одном базисе не дают какой-либо информации об измерениях в другом базисе. Поэтому такие измерения дают максимум информации о системе, и восстановленное состояние получится наиболее точным. Это интуитивное рассуждение обосновано в работе [38]. Показано, что статистическая ошибка восстановленного состояния минимальна при измерениях во взаимно несмещённых базисах. В упомянутой работе авторами показано, что максимальное число базисов не превосходит $D + 1$. Для случая, когда размерность пространства является степенью простого числа, то есть $D = p^m$, где p — некоторое простое число, m — целое, доказано, что достигается граничное значение $D + 1$, также найден метод явного построения взаимно несмещённых базисов. Несколько первых значений D , для которых нарушается условие $D = p^m$: 6, 10, 12, 14, 15, ...

В двумерном гильбертовом пространстве существует три взаимно несмещённых базиса, которые образованы шестью стандартными состояниями:

$$\{|H\rangle, |V\rangle\}, \quad \{|D\rangle, |A\rangle\}, \quad \{|R\rangle, |L\rangle\}. \quad (1.20)$$

На сфере Блоха это соответствует векторам, направленным из центра сферы нормально к граням вписанного куба. Мы ещё вернёмся к такой геометрической иллюстрации для случая других правильных многогранников (например, тетраэдра или октаэдра) в конце настоящего раздела.

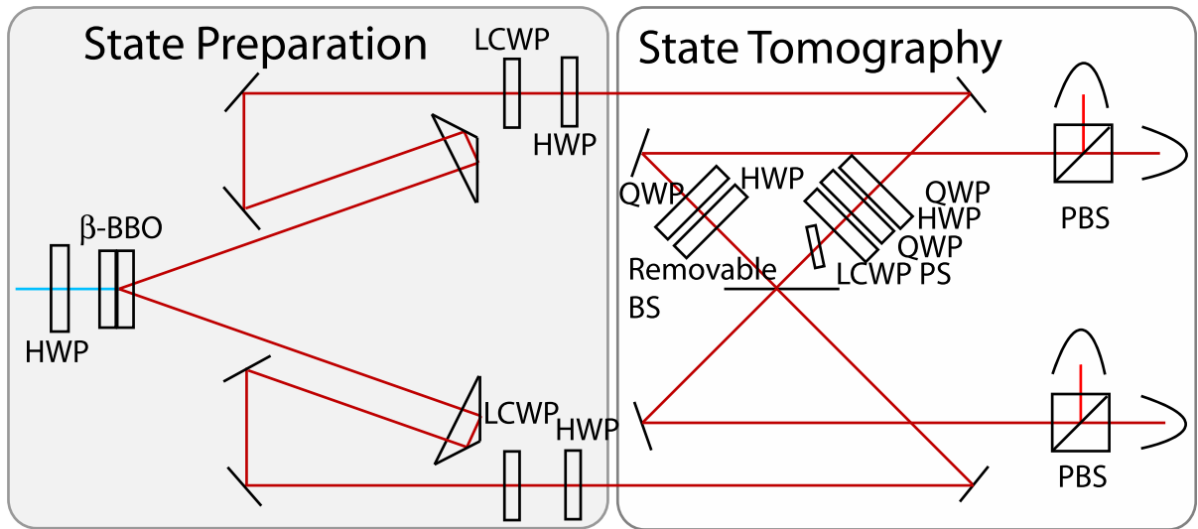


Рисунок 1.1 — Схема установки для проведения измерений во взаимно несмещённых базисах над поляризационными куквартами, использованная в работе [39].

Взаимно несмещённые базисы в пространствах с размерностью отличной от двух состоят из перепутанных состояний, поэтому проекционные измерения становятся затруднительными с экспериментальной точки зрения. Однако, в работе [39] продемонстрирована статическая томография с применением взаимно несмещённых базисов. Схема экспериментальной установки изображена на рисунке 1.1. Пары фотонов рождались в процессе СПР типа-I на двух кристаллах ВВО, вырезанных под неколлинеарный режим с углом вылета 3° . Поворот поляризации накачки позволял изменять степень перепутывания получаемого состояния. Поляризация бифотона управлялась с помощью полуволновых HWP и жидкокристаллических LCWP фазовых пластинок. Внося случайную фазу посредством ЖК пластинок, можно было получить полностью смешанное состояние. Проекция на перепутанное состояние осуществлялась с помощью двухфотонной интерференции на светоделителе BS. При факторизованных измерениях светоделитель убирался.

Измерения во взаимно несмещённых базисах сравнивались со стандартной стратегией, включающей в себя проекции только лишь на факторизованные состояния (см. таблицу 1). Восстановление матрицы плотности проводилось методом максимального правдоподобия. Произведена томография нескольких типов состояний: белловского $(|HH\rangle + |VV\rangle)/\sqrt{2}$, факторизованного $|HV\rangle$ и максимально смешанного. Для всех томографируемых состояний приведены зависимости $1 - F(N)$, где F — степень совпадения между восстановленным и

Таблица 1 — Два набора измерений, применяемых в работе [39].

Факторизованный	Взаимно несмещённый
HH, HV, VH, VV	HH, HV, VH, VV
HD, HA, VD, VA	RD, RA, LD, LA
HR, HL, VR, VL	DR, DL, AR, AL
DH, DV, AH, AV	$(RL + iLR)/\sqrt{2}, (RL - iLR)/\sqrt{2}$
DD, DA, AD, AA	$(RR + iLL)/\sqrt{2}, (RR - iLL)/\sqrt{2}$
DR, DL, AR, AL	$(RV + iLH)/\sqrt{2}, (RV - iLH)/\sqrt{2}$
RH, RV, LH, LV	$(RH + iLV)/\sqrt{2}, (RH - iLV)/\sqrt{2}$
RD, RA, LD, LA	
RR, RL, LR, LL	

«истинным» состояниями, а N — число зарегистрированных совпадений. Все данные зависимости имеют вид, хорошо описываемый степенной функцией cN^a .

Значение a при факторизованных и MUB измерениях одинаково и близко к $-1/2$, но константы c различаются. Максимальный выигрыш достигается при томографии белловского состояния. Величина $1 - F$ уменьшается в 1.84 ± 0.06 раза, независимо от числа зарегистрированных событий. Для максимально смешанного состояния также наблюдается улучшение качества томографии в 1.49 ± 0.05 раз. И только при восстановлении чистого факторизованного состояния прирост точности практически отсутствует (1.09 ± 0.05). Полученные результаты позволяют говорить, что томография со взаимно несмещёнными базисами не хуже, чем измерения на факторизованные состояния, хотя последние и используют большее число измерений (36 против 20).

Переполненные наборы. Количество измерений в наборе, равное 4^k , при томографии системы, состоящей из k кубитов, является нижней границей. Встаёт задача о том, как качество восстановления изменяется при переходе к «переполненным» наборам, в которых число элементов больше 4^k .

Рассмотрим семейство протоколов, основанное на правильных многогранниках. Для случая кубитов набор измерений изобразится на сфере Блоха векторами, направленными из центра перпендикулярно к граням вписанного многогранника. Каждый многогранник задаёт свой набор векторов. Образовав всевозможные тензорные произведения однокубитовых векторов, получим

соответствующие наборы для томографии состояния кубарта. В работе [7] посредством численного моделирования проведено сравнение данных протоколов. Рассмотрены так называемые платоновы тела с числом граней, соответственно: 4 — для тетраэдра, 6 — для куба², 8 — для октаэдра, 12 — для додекаэдра, 20 — для икосаэдра. К этому ряду был добавлен набор $\{H, V, D, R\}$ (назовём его J4) и $\{HH, HV, VV, VH, RH, RV, DV, DH, DR, DD, RD, HD, VD, VL, HL, RL\}$ (J16) из упомянутой ранее работы [1] для томографии состояния одного и пары кубитов соответственно. Отметим, что протоколы на основе тетраэдра, J4 и J16 можно выполнить не на всех экспериментальных платформах. Например, одиночное измерение *атомного* кубита всегда происходит в некотором ортогональном базисе, а, допустим, протокол J4 не включает состояния A , ортогонального к D .

Из всех рассмотренных протоколов J4 и J16 обладают минимальной точностью. Имеющие то же количество измерений протоколы, основанные на тетраэдре, являются более предпочтительными. Затем по качеству восстановления идут протоколы, основанные на кубе. Протоколы с бóльшим числом измерений дают на практике лишь незначительное увеличение точности. Эти выводы экспериментально подтверждены в работе [40] для протоколов J4, тетраэдр, куб и V36 на примере восстановления состояний поляризационных кубитов. Протокол V36 включает в себя 36 измерений, получаемых поворотом лишь одной фазовой пластинки, что ведёт к простоте реализации.

1.3.2 Адаптивные протоколы

Адаптивная стратегия подразумевает, что следующее измерение зависит от результатов, полученных на предыдущих этапах работы алгоритма. В данном разделе мы ограничимся рассмотрением адаптивных протоколов для кубитов. Однако, это позволяет понять общие закономерности и свойства адаптивных протоколов.

Протокол на основе тетраэдра изначально предложен и детально исследован в работе [6]. Показано, что среди всех протоколов с числом измерений, равным 4, он обладает наибольшей точностью. Для восстановления матрицы плотности по результатам измерений используется метод максимального правдоподобия.

²Этот протокол совпадает с измерениями во взаимно несмещённых базисах для одного кубита.

Приведённый в статье анализ показывает, что скорость сходимости степени совпадения (фиделити) зависит от ориентации тетраэдра и достигает максимального значения, если один из векторов измерительного базиса сонаправлен с вектором истинного состояния или ортогонален ему. Поэтому за счёт подстройки тетраэдра под текущую оценку томографируемого состояния, можно добиться улучшения скорости сходимости. Примечательно, что если оценивать точность восстановления в метрике Гильберта — Шмидта, то сходимость алгоритма не зависит от ориентации тетраэдра.

В работе [8] реализована схема адаптивной томографии кубитов, основанная на измерении MUB. Экспериментальная реализация выполнена для поляризационных кубитов. Приведённые рассуждения показывают, что наиболее оптимальное измерение — измерение в собственном базисе истинного состояния. Адаптивность заключается в том, что исходный ансамбль N кубитов разбивается на две части. Первая половина измеряется стандартным статическим методом, а затем измерительный базис выравнивается по текущей оценке томографируемого состояния. Такой алгоритм с одним шагом адаптивности позволяет качественно улучшить скорость сходимости степени совпадения ($1/\sqrt{N} \rightarrow 1/N$). Исследовано влияние экспериментальных погрешностей на результаты томографии. Рассмотрено несколько моделей ошибок, например, при каждом измерении фазовые пластинки случайно отклоняются от требуемых положений или же ошибка установки фазовых пластинок фиксирована во всех измерениях (систематическая погрешность). Продемонстрировано, что состояние, восстановленное адаптивным методом, менее подвержено влиянию неточностей в экспериментальной установке. Также из-за погрешностей скорость сходимости отличается от идеального случая $1/N$.

На основе работ [6; 8; 15] можно сформулировать следующие выводы:

1. При томографии смешанного состояния и статическая, и адаптивная стратегии ведут себя качественно одинаково. Скорость сходимости $1 - F \propto 1/N$.
2. Преимущества адаптивного подхода наиболее сильно проявляются при восстановлении чистых состояний. В общем случае статическая схема обеспечивает скорость сходимости $\propto 1/\sqrt{N}$, в то время, как для адаптивного метода $\propto 1/N$.
3. Однако, если при томографии чистого состояния априорно пытаться восстанавливать его только как чистое, то для любой стратегии наблю-

дается высокая скорость сходимости $\propto 1/N$. Проблема не в определении направления собственных векторов, а в различении нулевых и малых собственных значений ($\lambda = 0$ и $\lambda \propto 1/\sqrt{N}$).

4. Для статических протоколов при томографии близких к чистым состояний возможен переход скорости сходимости $1/\sqrt{N} \rightarrow 1/N$, как только установлено, что минимальное собственное значение всё же отлично от нуля, то есть $\lambda_{\min} \gtrsim 1/\sqrt{N}$.
5. Если оценивать качество восстановления состояния в метрике Гильберта — Шмидта, то может оказаться, что адаптивный и статический протокол ведут себя качество одинаково. При использовании фиделити этого не возникает, так как оно весьма чувствительно к точности определения малых собственных значений.
6. Одни из лучших измерений — измерения в собственном базисе истинного состояния. На практике истинное состояние, естественно, не известно. Хорошей стратегией будет выравнивание измерительного базиса в соответствии с текущей оценкой томографируемого состояния. Даже единичный акт выравнивания позволяет качественно улучшить скорость сходимости ($1/\sqrt{N} \rightarrow 1/N$).
7. Адаптивная процедура менее подвержена влиянию погрешностей эксперимента, связанных, например, с неточностью выставления углов фазовых пластинок.

1.4 Приготовление перепутанных пар поляризационных кубитов

Работа с поляризационными степенями свободы фотонов является довольно удобной с экспериментальной точки зрения, ввиду своей простоты, так как, например, для осуществления преобразований достаточно использовать линейные оптические элементы типа фазовых пластинок и поляризационных светоделителей. В то же время поляризационное состояние одного фотона представляет собой кубит — квантовую систему минимальной размерности, из комбинации которых можно образовать системы более высокой размерности. Так, взяв пару фотонов, рождаемых в процессе спонтанного параметрического рассеяния, получим поляризационный кукварт. В общем случае протокол томографии должен

быть способным восстанавливать произвольное состояние, поэтому важно уметь приготавливать любое наперёд заданное состояние для проверки алгоритма.

Произвольное чистое состояние кукварта $|\psi\rangle$ имеет вид:

$$|\psi\rangle = c_1|HH\rangle + c_2|HV\rangle + c_3|VH\rangle + c_4|VV\rangle. \quad (1.21)$$

В процессе СПР типа-I можно получить базисные состояния $|HH\rangle$ или $|VV\rangle$, при СПР типа-II испускаются бифотоны в состояниях $|HV\rangle$ или $|VH\rangle$. На первый взгляд может показаться, что необходимо четыре нелинейных кристалла, каждому из которых соответствует своё базисное состояние. Оказывается, что достаточно использовать два [41] или же вовсе один кристалл [42]. Последняя схема, однако, требует интерферометрической стабильности.

Схема с одним кристаллом. Произвольное чистое состояние кукварта можно получить в два этапа. Сначала генерируется «затравочное» состояние, степень перепутывания которого поддаётся регулировке. Затем с помощью локальных унитарных преобразований, затрагивающих каждый составляющий кубит в отдельности, «затравочное» состояние преобразуется в требуемое.

Пусть имеется «затравочное» состояние вида:

$$|\chi\rangle = x|HH\rangle + \sqrt{1-x^2}|VV\rangle. \quad (1.22)$$

Требуется найти такие локальные унитарные преобразования U и W , что

$$|\psi\rangle = U \otimes W |\chi\rangle, \quad (1.23)$$

где $|\psi\rangle$ — желаемое состояние кукварта. Для этого образуем матрицу Ψ , соответствующую состоянию (1.21):

$$\Psi = c_1|H\rangle\langle H| + c_2|H\rangle\langle V| + c_3|V\rangle\langle H| + c_4|V\rangle\langle V|. \quad (1.24)$$

Полученная матрица удовлетворяет соотношению:

$$|\psi\rangle = (\Psi \otimes I)(|HH\rangle + |VV\rangle). \quad (1.25)$$

Подвергнем Ψ разложению по сингулярным числам:

$$\Psi = UDW^\dagger, \quad (1.26)$$

где U и W — унитарные матрицы, а D — диагональная. Элементы на диагонали называют сингулярными числами. Подставляя разложение (1.26) в (1.25), найдём:

$$|\psi\rangle = (U \otimes W)(d_1|HH\rangle + d_2|VV\rangle), \quad (1.27)$$

что эквивалентно (1.23). Здесь $d_{1,2}$ — сингулярные числа матрицы Ψ .

Экспериментальная реализация данной методики осуществлена в работе [42]. Схема установки изображена на рисунке 1.2. «Затравочное» состояние получается в результате двойного прохождения нелинейного кристалла ВВО, вырезанного под неколлинеарный частотно-вырожденный синхронизм типа-I. Пусть для определённости накачка имеет вертикальную поляризацию $|V\rangle$. При первом проходе в левую сторону испускается пара фотонов в состоянии $|HH\rangle$, которая затем отражается обратно сферическим зеркалом M . Между зеркалом и кристаллом находится четвертьволновая пластинка $\lambda/4$, которая при двойном прохождении преобразует горизонтальную поляризацию в вертикальную. Излучение накачки, прошедшее через кристалл, также отражается зеркалом, и рождает бифотоны, распространяющиеся вправо. Таким образом, на выходе получаем затравочное состояние (1.22), которое легко подвергнуть локальным преобразованиям U и W . Величину x можно менять, если перед вторым проходом кристалла, повернуть поляризацию накачки на некий угол посредством пластинки $\lambda_p/4$. Относительная фаза между компонентами $|HH\rangle$ и $|VV\rangle$ определяется положением зеркала по отношению к кристаллу, поэтому для поддержания постоянной фазы требуется интерферометрическая стабильность.

Схема с двумя кристаллами. В работе [41] для генерации перепутанных пар кубитов использовался частотно-вырожденный неколлинеарный процесс СПР типа-I в двух кристаллах со взаимно перпендикулярными осями. Схема приготовления состояния изображена на рисунке 1.3. Размеры кристаллов ВВО составляли $8.0 \times 8.0 \times 0.59$ мм. Накачкой служило излучение аргонового лазера с длиной волны 351.1 нм. Поляризация накачки задавалась с помощью поляризационно светоделивателя PBS и полуволновой пластинки HWP. Наклоняемая пластинка QWP позволяла управлять разностью фаз между $|H\rangle$ и $|V\rangle$ компонентами. На выходе из кристаллов находилась система регистрации, состоящая из полуволновых пластинок HWP, анализаторов PBS и счётных фотоприёмников, с установленными перед ними двухлинзовыми объективами. Выделение нужных пространственных мод осуществлялось диафрагмами, расположенными на расстоянии около 1 м от

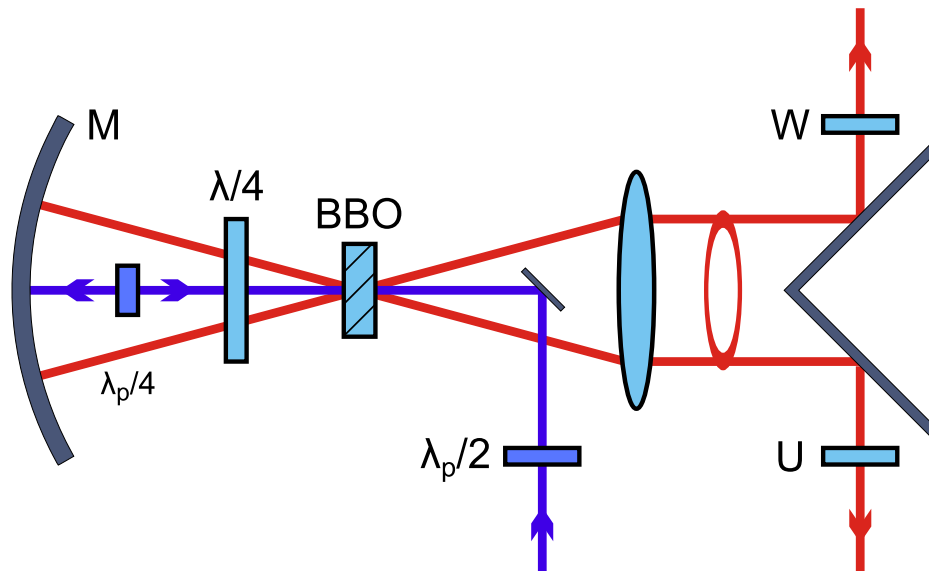


Рисунок 1.2 — Схема на основе одного кристалла для приготовления произвольного состояния кукварта, предложенная в работе [42].

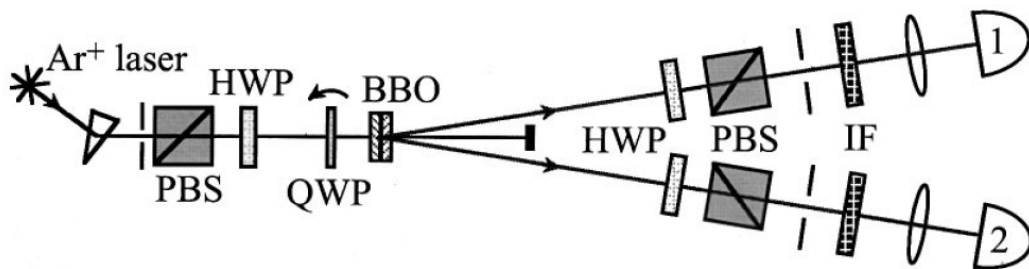


Рисунок 1.3 — Схема установки на основе двух кристаллов со взаимно перпендикулярными осями, использованная в работе [41].

кристаллов. Регистрируемая частота фотонов задавалась интерференционными фильтрами с центральной длиной волны 702 нм и шириной на полувысоте 5 нм.

Система из двух близко расположенных кристаллов с перпендикулярными осями работает по следующему принципу. Предположим, что первый кристалл имеет горизонтальную ось, второй, следовательно, вертикальную, а накачка поляризована под углом θ . Пусть также коэффициент параметрического усиления достаточно мал, чтобы вероятностью одновременной генерации двух и более пар фотонов можно было пренебречь. Тогда в результате СПР типа-I каждый кристалл будет генерировать пары фотонов в состояниях $|HH\rangle$ и $|VV\rangle$ соответственно. Интенсивность генерации бифотонов зависит от интенсивности компоненты накачки, поляризованной вдоль оси кристалла. Если кристаллы достаточно тонкие и близко расположены друг к другу, то это приведёт к тому, что амплитуды бифотонов от первого и второго кристаллов складываются когерентно (при условии,

конечно, что длина когерентности накачки много больше расстояния между кристаллами):

$$|\psi\rangle = \cos \theta |HH\rangle + \sin \theta e^{i\varphi} |VV\rangle, \quad (1.28)$$

где относительная фаза φ зависит от толщин кристаллов, а также от наклона пластинки QWP. Меняя угол поляризации накачки θ , можно получать состояния с разной степенью перепутывания: при $\theta = 0$ — факторизованное, а при $\theta = 45^\circ$ — белловское состояние, обладающее максимальным перепутыванием.

Рассматриваемая схема, помимо степени перепутывания, позволяет управлять чистотой приготавливаемого состояния. Чистота состояния зависит от числа регистрируемых пространственных мод, количество которых можно изменять посредством диафрагм. Чем меньше апертура, тем более чистым получится состояние. Более подробное объяснение будет приведено в разделе 2.5.3.

Чтобы продемонстрировать высокую чистоту и степень перепутывания приготовленного состояния авторы произвели проекционное измерение на состояние $|DD\rangle$. Рассмотрим два предельных случая. Пусть входное состояние имеет вид (1.28), и $\theta = 45^\circ$. Тогда найдём, что скорость счёта совпадений p равняется:

$$p = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle DD | (|HH\rangle + e^{i\varphi} |VV\rangle) \right|^2 = \frac{1}{4} (1 + \cos(\varphi)). \quad (1.29)$$

Видность функции $p(\varphi)$, $V = (p_{\max} - p_{\min}) / (p_{\max} + p_{\min})$, в данном случае равняется единице $V = 1$. Если состояние на входе будет полностью смешанным или факторизованным, то зависимость от φ пропадает, и видность $V = 0$. В работе приведены графики изменения видности от размера диафрагм. При угловой апертуре 0.10° наблюдается практически идеальная видность $V = 98.8 \pm 0.2\%$. При раскрытии диафрагм до апертуры 0.69° видность падает до $V \approx 70\%$.

Приготовление произвольных состояний куквартов в процессе СПР типа-I с неколлинеарным частотно-невырожденным синхронизмом реализовано в работе [43]. Данная работа объединяет схему приготовления «затравочного» состояния с двумя кристаллами с идеей локальных преобразований. Упрощённая схема установки изображена на рисунке 1.4. Рассмотрено влияние эффектов частотной дисперсии в кристаллах, приводящих к ухудшению чистоты приготавливаемого состояния, а также предложен метод компенсации этого явления.

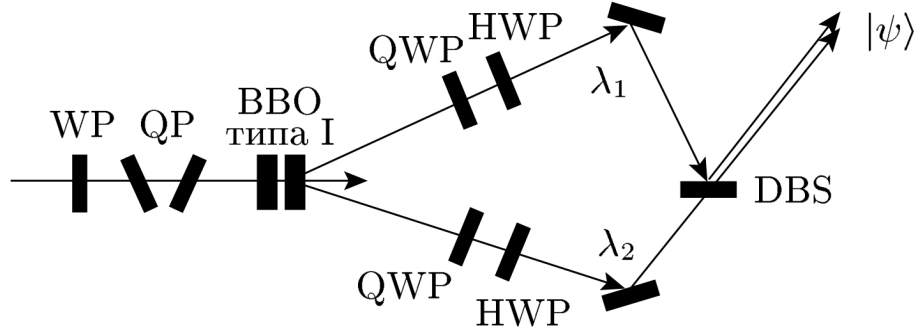


Рисунок 1.4 — Схема приготовления произвольного поляризационного состояния кукварта, предложенная в работе [43].

1.5 Формализм квантовых преобразований

С математической точки зрения квантовое преобразование $\mathcal{E} : \mathcal{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H}')$ — это отображение из множества $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ операторов плотности ρ , действующих над гильбертовым пространством \mathcal{H} , в множество $\mathcal{S}(\mathcal{H}')$ операторов ρ' над пространством \mathcal{H}' . Для простоты будем полагать, что гильбертовы пространства входа и выхода имеют одинаковую размерность, $\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{H}' = D$, то есть они изоморфны друг другу: $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}'$. Отображение \mathcal{E} должно удовлетворять следующему ряду аксиом:

1. $0 \leq \text{Tr } \mathcal{E}(\rho) \leq 1$ — вероятность осуществления преобразования \mathcal{E} .
2. $\mathcal{E}(\rho)$ — линейное отображение, то есть

$$\mathcal{E}\left(\sum_i p_i \rho_i\right) = \sum_i p_i \mathcal{E}(\rho_i). \quad (1.30)$$

3. $\mathcal{E}(\rho)$ — вполне положительное отображение.

Первое требование определяет физический смысл следа результирующей матрицы плотности. Удобно включить не только процессы, сохраняющие след, для которых $\text{Tr } \mathcal{E}(\rho) = 1$, но также и процессы, не увеличивающие след. Первый класс преобразований будем также называть *процессами без потерь*, а второй, соответственно, *процессами с потерями*. Несохраниение следа означает, что преобразование \mathcal{E} в некотором смысле не даёт полного описания, то есть с некоторой вероятностью возможно осуществление другого процесса. Примером, несохраняющего след преобразования является проекционное измерение, которое действует по правилу $\mathcal{E}(\rho) = P\rho P$, где P — проектор. Нетрудно проверить,

что величина $\text{Tr } \mathcal{E}(\rho) = \text{Tr } P\rho P = \text{Tr } P^2\rho = \text{Tr } P\rho$ определяет вероятность исхода данного измерения.

Второе требование можно проиллюстрировать на следующем примере. Пусть на вход преобразования подаётся состояние ρ_i , случайно выбранное с вероятностью p_i из некоторого набора, то есть ансамбль входных состояний представляет собой статистическую смесь вида $\rho = \sum_i p_i \rho_i$. Для каждого ρ_i на выходе получится состояние $\mathcal{E}(\rho_i) / \text{Tr } \mathcal{E}(\rho_i)$, безусловная вероятность появления которого равна $p_i \text{Tr } \mathcal{E}(\rho_i)$. Таким образом результирующая статистическая смесь описывается суммой

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i [p_i \text{Tr } \mathcal{E}(\rho_i)] \frac{\mathcal{E}(\rho_i)}{\text{Tr } \mathcal{E}(\rho_i)}. \quad (1.31)$$

После очевидного сокращения множителя $\text{Tr } \mathcal{E}(\rho_i)$ приходим к выражению (1.30).

Очевидно, отображение \mathcal{E} должно быть положительным, то есть переводить множество положительно определённых матриц в себя. Однако, интересующая физическая система \mathcal{H} может находиться во взаимодействии или просто сосуществовать рядом с неким окружением \mathcal{S} . Действие преобразования \mathcal{E} на систему \mathcal{H} естественным образом индуцирует отображение $\mathcal{I} \otimes \mathcal{E}$ составной системы $\mathcal{S} \otimes \mathcal{H}$ (\mathcal{I} обозначает тождественное преобразование). При этом, $\mathcal{I} \otimes \mathcal{E}$ также должно быть положительным, что и составляет определение *вполне* положительности. Более формально: отображение \mathcal{E} называется вполне положительным, если для любой положительности матрицы $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{H}}$ результат $(\mathcal{I} \otimes \mathcal{E})\rho_{\mathcal{S}\mathcal{H}}$ также положительно определён.

Представление операторной суммой. Оказывается, что любое квантовое преобразование, удовлетворяющее приведённым выше трём аксиомам, имеет следующую форму, называемую *представлением операторной суммой* [44]:

$$\rho' = \mathcal{E}(\rho) = \sum_{k=1}^K E_k \rho E_k^\dagger. \quad (1.32)$$

Число слагаемых K в сумме, вообще говоря, может быть произвольно велико, однако, их количество всегда можно ограничить величиной D^2 , переопределив операторы E_k , где D – размерность гильбертова пространства системы, на которую действует преобразование. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $K = D^2$, если иное не указано явно. *Операторные элементы* (также называемые

операторами Крауса) E_k удовлетворяют условию

$$\sum_k E_k^\dagger E_k = I \quad (1.33)$$

для сохраняющих след каналов, а для процессов с потерями это условие заменяется на

$$\sum_k E_k^\dagger E_k \leq I, \quad (1.34)$$

которое гарантирует выполнение требования невозрастания следа $\text{Tr } \mathcal{E}(\rho) \leq 1$.

Унитарная динамика в расширенной системе. Простейшим сохраняющим след процессом является унитарное преобразование. В этом случае сумма (1.32) содержит ровно одно слагаемое $\rho' = U\rho U^\dagger$, а из условия (1.33) следует, что U — унитарная матрица, то есть $UU^\dagger = I$. Унитарные процессы во многом похожи на чистые квантовые состояния по своим свойствам. Так, согласно теореме о расширении Стайнспринга (the Stinespring dilation theorem) [45] действие вполне положительного сохраняющего след (ВПСС) отображения \mathcal{E} эквивалентно действию унитарного процесса, описываемого матрицей U , на состояние расширенной системы $\mathcal{S} \otimes \mathcal{H}$ с последующей операцией взятия частичного следа по вспомогательной системе \mathcal{S} :

$$\rho' = \mathcal{E}(\rho) = \text{Tr}_{\mathcal{S}}[U(|0\rangle\langle 0| \otimes \rho)U^\dagger], \quad (1.35)$$

где $|0\rangle$ — произвольный фиксированный вектор из гильбертова пространства \mathcal{S} . Чтобы представление (1.35) было справедливо для любого квантового преобразования, достаточно выбрать размерность вспомогательной системы, равную D^2 : $\dim \mathcal{S} = D^2$. Утверждение о том, что всякое ВПСС отображение можно рассматривать как некий унитарный процесс над расширенной системой, аналогичен теореме о расширении смешанного состояния до чистого в расширенном пространстве. Так же как и в случае расширения смешанного состояния до чистого, унитарная матрица U , описывающая преобразование, определена неоднозначно. Действительно, если выполнить замену $U \rightarrow (V \otimes I)U$, где V — унитарное преобразование вспомогательной системы, то результирующая матрица плотности ρ' в выражении (1.35) не изменится.

По заданным операторам Крауса $\{E_k\}$ можно составить соответствующую блочную унитарную матрицу U размера $D^3 \times D^3$. Особенно просто эта связь выражается в стандартном вычислительном базисе, где вектору $|i\rangle$, $i = 0, \dots, D-1$,

соответствует столбец с единицей на $i + 1$ месте и остальными нулевыми элементами:

$$U = \begin{pmatrix} (E_1) & \dots & \dots & \dots \\ (E_2) & \dots & \dots & \dots \\ (E_3) & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Только первый блочный столбец матрицы U определяет эволюцию основной системы \mathcal{H} , в то время как остальные столбцы могут быть выбраны произвольно, лишь бы не нарушалось условие унитарности.

Представление χ -матрицей. На практике вместо представления операторной суммой (1.32), включающей D^2 матриц размера $D \times D$, удобнее описывать квантовое преобразование единой матрицей размера $D^2 \times D^2$. Для этого введём базис $\{\tilde{E}_k\}$ на множестве операторов $\{E_k\}$ и разложим каждый элемент: $E_k = \sum_{m=1}^{d^2} e_{km} \tilde{E}_m$, где e_{km} комплексные коэффициенты разложения. Выражение (1.32) при этом примет вид

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{m,n=1}^{d^2} \tilde{E}_m \rho \tilde{E}_n^\dagger \chi_{mn}, \quad (1.37)$$

где величины $\chi_{mn} = \sum_{k=1}^{d^2} e_{km} e_{kn}^*$ по построению являются матричными элементами некоторой эрмитовой положительно определённой матрицы χ . Так называемое *представление χ -матрицей* полностью определяет процесс \mathcal{E} наравне с представлением операторной суммой (1.32).

Минимально необходимое количество членов в сумме (1.32) для определения данного процесса \mathcal{E} равно рангу χ -матрицы. По аналогии с квантовыми состояниями можно ввести степень *чистоты* χ -матрицы:

$$p = \text{Tr}(\chi^2) / (\text{Tr} \chi)^2. \quad (1.38)$$

Сохраняющим след процессам ранга 1 соответствуют унитарные преобразования, поэтому для них $p = 1$. Для любых других типов процессов $p < 1$.

Другой полезной величиной является $\text{Tr} \chi$, которая характеризует средние потери в канале \mathcal{E} (среднюю вероятность осуществления процесса). Пусть частица в состоянии ρ направляется через канал \mathcal{E} , тогда след $\text{Tr} \mathcal{E}(\rho)$ равен вероятности прохождения. Средняя вероятность $\langle \text{Tr} \mathcal{E}(\rho) \rangle$ найдётся усреднением по всевозможным входным состояниям ρ , распределённым согласно некоторой мере $\mu(\rho)$,

которая для наших целей должна быть «наиболее равномерной». Как будет указано в разделе 2.2, класс унитарно инвариантных мер обычно ассоциируется с равномерными, неинформативными распределениями, поэтому их мы и будем использовать. В этом случае усреднённое состояние $\langle \rho \rangle$ совпадает с полностью смешанным состоянием:

$$\langle \rho \rangle = \int \rho \mu(\rho) d\rho = I/D. \quad (1.39)$$

Итого, для среднего пропускания в канале приходим к выражению:

$$\langle \text{Tr } \mathcal{E}(\rho) \rangle = \int \text{Tr} \left(\sum_{m,n} \tilde{E}_m \rho \tilde{E}_n^\dagger \chi_{mn} \right) \mu(\rho) d\rho = \sum_n \frac{\chi_{nn}}{D} = \frac{1}{D} \text{Tr } \chi, \quad (1.40)$$

где использовано представление (1.37), соотношение (1.39) и учтено, что базисные операторы \tilde{E}_m ортогональны друг другу: $\text{Tr } \tilde{E}_m \tilde{E}_n = \delta_{mn}$. Таким образом, средние потери в канале равны $1 - \text{Tr } \chi/D$.

1.6 Изоморфизм Чоя — Ямиолковского

Существует взаимно-однозначное соответствие между вполне положительными сохраняющими след отображениями \mathcal{E} и специального вида матрицами плотности в расширенном пространстве размерности D^2 , называемое *изоморфизмом Чоя — Ямиолковского* (Choi-Jamiołkowski isomorphism) [44; 46]:

$$\rho_{\mathcal{E}} = [\mathcal{E} \otimes \mathcal{I}](|\Psi\rangle\langle\Psi|), \quad (1.41)$$

где $|\Psi\rangle = \sum_{j=1}^d |j\rangle \otimes |j\rangle / \sqrt{D}$ — максимально перепутанное состояние двухкомпонентной системы.

Матричные элементы χ -матрицы зависят от выбора базисных операторов \tilde{E}_m в (1.37). Удобно определить

$$\tilde{E}_{m=ld+l'} = |l\rangle\langle l'|, \quad l, l' = 1, \dots, D. \quad (1.42)$$

В этом базисе связь χ -матрицы и соответствующего состояния Чоя — Ямиолковского $\rho_{\mathcal{E}}$ выражается наиболее просто. Действительно, подставляя в (1.41)

представление (1.37), находим:

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{E}} &= \frac{1}{D}[\mathcal{E} \otimes \mathcal{I}](|jj\rangle\langle j'j'|) = \frac{1}{D}\mathcal{E}(|j\rangle\langle j'|) \otimes |j\rangle\langle j'| = \\ &= \frac{1}{D}\langle m'|j\rangle\langle j'|n'\rangle\chi_{mm',nn'}|m\rangle\langle n| \otimes |j\rangle\langle j'| = \frac{1}{D}|mj\rangle\langle nj'|\chi_{mj,nj'} = \frac{\chi}{D},\end{aligned}\quad (1.43)$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Таким образом, с точностью до множителя χ -матрица совпадает с $\rho_{\mathcal{E}}$:

$$\chi = D \times \rho_{\mathcal{E}}. \quad (1.44)$$

Изоморфизм Чоя — Ямиолковского позволяет свести томографию квантовых процессов к томографии состояний. Для этого следует:

1. ввести вспомогательную систему такой же размерности, как и исходная;
2. приготовить расширенную систему в максимально перепутанном состоянии $|\Psi\rangle$;
3. подвергнуть исходную систему преобразованию \mathcal{E} , а вспомогательную не трогать;
4. провести томографию результирующего состояния $\rho_{\mathcal{E}}$ расширенной системы, что даст χ -матрицу процесса.

Такая процедура известна под названием *томография процессов со вспомогательной системой* (ancilla-assisted process tomography) [47—49].

1.7 Меры различия процессов

Изоморфизм Чоя — Ямиолковского позволяет легко задать метрику для сравнения двух квантовых процессов [50]. Расстояние Δ между двумя процессами \mathcal{E} и \mathcal{F} определяется как расстояние d между соответствующими состояниями Чоя $\rho_{\mathcal{E}}$ и $\rho_{\mathcal{F}}$:

$$\Delta(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = d(\rho_{\mathcal{E}}, \rho_{\mathcal{F}}). \quad (1.45)$$

Этот подход, хотя и является довольно общим, применим только для сохраняющих след процессов — в случае, когда изоморфизм Чоя — Ямиолковского справедлив. Предположим, что проводится эксперимент по восстановлению поляризационного преобразования посредством томографии со вспомогательной

системой. Если процесс обладает потерями, не зависящими от входного состояния (например, томография нейтрального фильтра), то результирующее состояние Чоя $\rho_{\mathcal{E}}$ будет не отличимо от состояния $\rho_{\mathcal{F}}$ для подобного процесса, но с другой величиной потерь. Очевидно, расстояние (1.45) будет равно нулю, хотя процессы различны. χ -матрица даёт полное описание преобразования и лишена этого недостатка.

Заметим, что χ -матрица обладает такими же основными свойствами, как и матрица плотности: она эрмитова и неотрицательно определённая³. Поэтому в выражение (1.45) вместо матриц плотности можно подставить соответствующие χ -матрицы, получив тем самым второе определение расстояния между процессами \mathcal{E} и \mathcal{F} :

$$\Delta(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = d(\chi_{\mathcal{E}}, \chi_{\mathcal{F}}). \quad (1.46)$$

Возможен и третий подход к определению степени различия между процессами, сведя задачу к рассмотрению расстояния между состояниями после преобразования. Пусть ρ — некоторое входное состояние, тогда расстояние между результирующими состояниями $d(\mathcal{E}(\rho), \mathcal{F}(\rho))$ будет тем больше, чем сильнее отличаются процессы друг от друга. Усреднив это расстояние по какому-либо априорному распределению $\mu(\rho)$ входных матриц плотности, получим среднюю степень различия процессов:

$$\Delta(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \int d(\mathcal{E}(\rho), \mathcal{F}(\rho)) \mu(\rho) d\rho. \quad (1.47)$$

Можно также использовать наихудшее расстояние:

$$\Delta(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \max_{\rho} d(\mathcal{E}(\rho), \mathcal{F}(\rho)), \quad (1.48)$$

где максимум берётся по всевозможным входным состояниям ρ .

Определения (1.47) и (1.48) требуют дополнительных трудоёмких операций: многомерного интегрирования или оптимизации в пространстве матриц плотности, поэтому не удобны на практике в отличие от простых⁴ выражений (1.45) и (1.46).

В данной работе будет использоваться определение (1.46), которое, как было сказано выше, корректно учитывает несохраняющие след процессы и является

³Однако, нормировка следа имеет характер неравенства: $\text{Tr} \chi \leq D$. Равенство выполняется только для сохраняющих след процессов.

⁴При условии, конечно, что сама метрика $d(\cdot, \cdot)$ достаточно быстро вычисляется.

более общим по сравнению с (1.45). В качестве расстояния $d(\chi_{\mathcal{E}}, \chi_{\mathcal{F}})$ возьмём обобщённую метрику Бюреса [51]:

$$d_B^2(\chi_{\mathcal{E}}, \chi_{\mathcal{F}}) = \text{Tr} \chi_{\mathcal{E}} + \text{Tr} \chi_{\mathcal{F}} - 2 \text{Tr} \sqrt{\sqrt{\chi_{\mathcal{E}}} \chi_{\mathcal{F}} \sqrt{\chi_{\mathcal{E}}}}. \quad (1.49)$$

Отметим, что данное определение отличается от использованного ранее выражения (1.8) только лишь наличием слагаемого $\text{Tr} \chi_{\mathcal{E}} + \text{Tr} \chi_{\mathcal{F}} \neq 2$, которое учитывает неединичность следа χ -матриц.

Обобщённая метрика Бюреса d_B^2 является однородной функцией, поэтому для сохраняющих след процессов оба определения (1.45) и (1.46) эквивалентны, ввиду выполнения простого соотношения:

$$d_B(\rho_{\mathcal{E}}, \rho_{\mathcal{F}}) = \frac{d_B(\chi_{\mathcal{E}}, \chi_{\mathcal{F}})}{D}, \quad (1.50)$$

где D — размерность гильбертова пространства системы, над которой действуют процессы.

1.8 Стандартная томография процессов

При *стандартной* томографии квантовых процессов на вход преобразования \mathcal{E} подаются различные состояния ρ_{α} , а затем над результирующими состояниями $\mathcal{E}(\rho_{\alpha})$ проводятся измерения, описываемые набором POVM элементов $M_{\alpha\gamma}$ [52]. Вероятность исхода γ определится правилом Борна (1.1):

$$\mathbb{P}(\gamma|\chi, \alpha) = \text{Tr}(M_{\alpha\gamma} \mathcal{E}(\rho_{\alpha})). \quad (1.51)$$

Подставляя представление χ -матрицей (1.37), найдём

$$\mathbb{P}(\gamma|\chi, \alpha) = \text{Tr} \left(\sum_{m,n=1}^{d^2} M_{\alpha\gamma} \tilde{E}_m \rho_{\alpha} \tilde{E}_n^{\dagger} \chi_{mn} \right) = \text{Tr}(M_{\alpha\gamma}^{\chi} \chi), \quad (1.52)$$

где введена новая матрица $M_{\alpha\gamma}^{\chi}$ с элементами $(M_{\alpha\gamma}^{\chi})_{nm} = \text{Tr}(M_{\alpha\gamma} \tilde{E}_m \rho_{\alpha} \tilde{E}_n^{\dagger})$. Правая часть полученного выражения по форме полностью совпадает с правилом Борна (1.1), если в нём провести замену $\rho \rightarrow \chi$ и $M_{\alpha\gamma} \rightarrow M_{\alpha\gamma}^{\chi}$. Используя базисные операторы \tilde{E} вида (1.42), $\tilde{E}_{mm'} = |m\rangle\langle m'|$, получим

$$\begin{aligned} (M_{\alpha\gamma}^{\chi})_{nn',mm'} &= \text{Tr}(M_{\alpha\gamma} |m\rangle\langle m'| \rho_{\alpha} |n'\rangle\langle n|) = \\ &= \langle n|M_{\alpha\gamma}|m\rangle\langle m'|\rho_{\alpha}|n'\rangle = (M_{\alpha\gamma} \otimes \rho_{\alpha}^*)_{nn',mm'}, \end{aligned} \quad (1.53)$$

где ρ_α^* — комплексно-сопряжённая матрица плотности. Сравнивая самую левую и правую части данного выражения заключаем, что оператор $M_{\alpha\gamma}^\chi$, являющийся аналогом POVM элемента при измерении процесса, имеет следующий вид:

$$M_{\alpha\gamma}^\chi = M_{\alpha\gamma} \otimes \rho_\alpha^*. \quad (1.54)$$

Показательно, что при стандартной томографии квантовых процессов оператор $M_{\alpha\gamma}^\chi$ всегда факторизован. Это отличается от случая томографии со вспомогательной системой, где $M_{\alpha\gamma}^\chi$, вообще говоря, может быть произвольным.

Сходства и различия с томографией состояний. Эквивалентность выражений (1.1) и (1.52) позволяет говорить об аналогии между томографией состояний и процессов. Однако, есть и различия:

1. Размеры восстанавливаемых матриц отличаются: $D^2 \times D^2$ для χ -матрицы процесса и $D \times D$ для матрицы плотности состояния ρ .
2. Операторы $M_{\alpha\gamma}^\chi$ не образуют разложения единицы, $\sum_\gamma M_{\alpha\gamma}^\chi \neq I$, хотя при томографии состояний обычно полагается, что $\sum_\gamma M_{\alpha\gamma} = I$.
3. Множество всех χ -матриц для сохраняющих след процессов эквивалентно подмножеству матриц плотности соответствующего размера, так как в силу изоморфизма Чоя — Ямиолковского (1.41) χ -матрица по сути представляет собой специального вида матрицу плотности (с точностью до множителя, см. (1.44)).
4. Для несохраняющих след процессов (с потерями) ситуация усложняется, так как нормировка следа имеет характер неравенства $\text{Tr } \chi \leq D$.

В дальнейшем будет рассматриваться только стандартная томография процессов, понимаемая в описанном выше смысле.

Глава 2. Томография состояний

2.1 Описание метода

Кратко изложим процедуру адаптивной байесовской томографии, предложенную в работе [12], и экспериментально реализованную нами.

Критерий адаптивности. Апостериорное распределение вероятностей $p(\rho|\mathcal{D}_N)$ характеризует оставшуюся неопределённость в нашем знании о томографируемом состоянии. Количественно это незнание задаётся энтропией Шеннона \mathbb{H} . Естественно выбрать следующее измерение (то есть конфигурацию установки α) таким образом, чтобы максимально уменьшить энтропию апостериорного распределения:

$$\alpha_{N+1} = \underset{\alpha}{\operatorname{argmax}} \left(\mathbb{H}[p(\rho|\mathcal{D}_N)] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \mathcal{D}_N)} \mathbb{H}[p(\rho|\alpha, \gamma, \mathcal{D}_N)] \right), \quad (2.1)$$

где $p(\rho|\alpha, \gamma, \mathcal{D}_N)$ — гипотетическое апостериорное распределение, получаемое в предположении, что при конфигурации α наблюдается исход γ . Этот исход измерения нельзя предсказать заранее, поэтому используется усреднение энтропии гипотетического распределения по всем исходам γ . Истинная вероятность того или иного исхода $\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \rho_0)$ опять же неизвестна, ибо неизвестно истинное состояние ρ_0 , поэтому вероятность исхода заменяется на ожидаемую $\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \mathcal{D}_N) = E_{p(\rho|\mathcal{D}_N)} \mathbb{P}(\gamma|\alpha, \rho)$. Можно посмотреть на распределение $\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \mathcal{D}_N)$ и с другой стороны. В силу линейности $\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \rho)$ по ρ найдём, что справедливо равенство $\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \mathcal{D}_N) = \mathbb{P}(\gamma|\alpha, \hat{\rho})$. Таким образом, первый член выражения (2.1) равен энтропии текущего распределения вероятностей, а второй член равен ожидаемой энтропии апостериорного распределения при использовании конфигурации α . Формально адаптивность выбора оптимального измерения заключается в том, что написанное выше выражение зависит от истории измерений \mathcal{D}_N .

Однако с практической точки зрения прямое использование формулы (2.1) трудоёмко. Во-первых, требуется определять энтропию распределения вероятностей в общем случае многомерных состояний. Во-вторых, гипотетическое распределение необходимо вычислять не только для разных α в соответствии с алгоритмом поиска максимума, но и для всех возможных исходов γ . Поэтому в

действительности применяется эквивалентная процедура нахождения оптимального измерения [12]:

$$\alpha_{N+1} = \operatorname{argmax}_{\alpha} \left(\mathbb{H}[\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \mathcal{D}_N)] - \mathbb{E}_{p(\rho|\mathcal{D}_N)} \mathbb{H}[\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \rho)] \right). \quad (2.2)$$

Здесь требуется только текущее распределение $p(\rho|\mathcal{D}_N)$ и вычисляется энтропия вероятностей *результатов* γ .

Напомним, что для оценки истинного состояния используется среднее $\hat{\rho}$ (1.4) по апостериорному распределению, а погрешность восстановления оценивается, как размер распределения (1.9) по метрике Бюреса \bar{d}_B^2 (1.8).

Непосредственно глядя на критерий (2.2), тяжело понять, какие измерения являются оптимальными. Однако, в пределе малого размера апостериорного распределения выражение (2.2) можно упростить. Для этого разложим энтропию $\mathbb{H}[\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \rho)]$ по ρ до второго порядка в окрестности среднего $\hat{\rho} = \mathbb{E}_{p(\rho|\mathcal{D})}[\rho]$. После этого найдём, что максимизируемое выражение в (2.2) приближённо равно

$$\sum_{\gamma} \frac{\mathbb{E}_{p(\rho|\mathcal{D})} (\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \rho) - \mathbb{P}(\gamma|\alpha, \hat{\rho}))^2}{\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \hat{\rho})} \leq \sum_{\gamma} \frac{\bar{d}_B^2}{\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \hat{\rho})}, \quad (2.3)$$

где использовались следующие неравенства для следового расстояния $d_{tr}(\rho, \hat{\rho}) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} |\rho - \hat{\rho}|$ [37]: $\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \rho) - \mathbb{P}(\gamma|\alpha, \hat{\rho}) \leq d_{tr}(\rho, \hat{\rho})$ и $d_{tr} \leq \sqrt{1 - F} \leq d_B$. Верхняя граница принимает наибольшее значение, когда вероятности $\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \hat{\rho})$ в знаменателе минимизируются. Таким образом, оптимально проецировать на состояния, которые дают малое число отсчётов¹. Хорошим примером являются измерения в собственном базисе текущей оценки $\hat{\rho}$ [8]. Для них все вероятности, кроме одной близки к нулю (при условии, конечно, что томографируемое состояние близко к чистому).

Последовательная выборка по значимости. Прямое применение формулы Байеса (см. раздел 1.1)

$$p(\rho|\mathcal{D}_N) = \mathcal{L}(\rho, \mathcal{D}_N)p(\rho)/p(\mathcal{D}_N), \quad (2.4)$$

для пересчёта вероятностей трудоёмко (особенно для многомерных систем) с вычислительной точки зрения. Например, в формуле (2.4) требуется нахождение

¹Отметим, что при минимизации вероятностей с неизбежностью возникнут и большие величины, так как полная вероятность равна единице: $\sum_{\gamma} \mathbb{P}(\gamma|\alpha, \hat{\rho}) = 1$.

нормировочного интеграла в пространстве состояний кукварта, которое характеризуется $4^2 - 1 = 15$ вещественными параметрами. Поэтому для аппроксимации байесовского распределения и вычисления связанных с ним величин используют алгоритмы из семейства методов Монте — Карло [2]. В оригинальной работе [12] предложен алгоритм, являющийся вариантом последовательной выборки по значимости (sequential importance sampling — SIS).

На основе распределения $p(\rho)$ задаётся набор точек (обычно называемых частицами) $\{\rho_s\}_{s=1,\dots,S}$ с соответствующими весами («вероятностями») $\{w_s\}$: $\sum_s w_s = 1$. Множество пар (ρ_s, w_s) называется выборкой из распределения вероятностей $p(\rho)$. Полученная выборка аппроксимирует распределение $p(\rho)$ следующим образом:

$$p(\rho) \approx \sum_{s=1}^S w_s \delta(\rho - \rho_s). \quad (2.5)$$

После наблюдения очередного результата измерения γ_{n+1} в конфигурации α_{n+1} , применяя аппроксимацию (2.5), согласно (2.4) получим:

$$\begin{aligned} p(\rho|\mathcal{D}_{n+1}) &= \frac{\mathbb{P}(\gamma_{n+1}|\alpha_{n+1}, \rho)p(\rho|\mathcal{D}_n)}{\int \mathbb{P}(\gamma_{n+1}|\alpha_{n+1}, \rho)p(\rho|\mathcal{D}_n) d\rho} \approx \\ &\approx \sum_{s=1}^S \frac{\mathbb{P}(\gamma_{n+1}|\alpha_{n+1}, \rho_s)w_s^{(n)}}{\sum_{r=1}^S \mathbb{P}(\gamma_{n+1}|\alpha_{n+1}, \rho_r)w_r^{(n)}} \delta(\rho - \rho_s) \equiv \sum_{s=1}^S w_s^{(n+1)} \delta(\rho - \rho_s), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $w_s^{(n)}$ — вес частицы ρ_s , отвечающий распределению $p(\rho|\mathcal{D}_n)$. В итоге, пересчёт вероятностей для получения апостериорного распределения сводится к простой рекуррентной процедуре: текущий вес $w_s^{(n)}$ умножается на вероятность $\mathbb{P}(\gamma_{n+1}|\alpha_{n+1}, \rho_s)$, затем все веса нормируются.

По мере процесса томографии размер байесовского распределения становится всё меньше, оно сосредотачивается вблизи томографируемого состояния, и, так как пересчитываются только веса частиц, а их положения фиксированы, на каком-то шаге веса значительного числа частиц оказываются близки к нулю — качество аппроксимации падает. Для отслеживания этой ситуации вводится эффективный размер выборки S_{eff} :

$$S_{\text{eff}} = \left(\sum_{s=1}^S w_s^2 \right)^{-1}. \quad (2.7)$$

Как только данный параметр падает ниже заданного порога (в нашем случае он составляет 1/10 от полного числа частиц), то происходит процедура повторной

выборки (resampling). Метод повторной выборки опирается на алгоритм Метрополиса — Гастингса [53] и состоит из нескольких частей:

1. Из имеющихся частиц с вероятностью w_k выбрать частицу с номером k . Повторить этот процесс S раз.
2. Присвоить всем новым частицам одинаковый вес $1/S$.
3. Подвергнуть каждую из полученных частиц случайному блужданию согласно алгоритму Метрополиса — Гастингса с заданным числом шагов.

Для работы алгоритма Метрополиса — Гастингса необходимо задать правило случайного блуждания исходной частицы $\rho_0 \rightarrow \rho$. Затем новая частица принимается с вероятностью (acceptance ratio)

$$\alpha = \min(p(\rho)/p(\rho_0), 1). \quad (2.8)$$

Если частица принята, то в следующей итерации эта новая частица будет подвергнута блужданию ($\rho \rightarrow \rho'$), иначе снова осуществляется блуждание старой частицы ($\rho_0 \rightarrow \rho''$). Вероятность $p(\rho)$ в точке нахождения новой частицы вычисляется на основе полной истории измерений, так как в общем случае новая частица не совпадает ни с одной частицей из имеющейся выборки.

Правило случайного блуждания можно описать как вероятность перехода $q(\rho|\rho_0)$ от частицы ρ_0 к ρ . Согласно алгоритму Метрополиса — Гастингса эта вероятность должна быть симметрична по перестановке аргументов $q(\rho|\rho_0) = q(\rho_0|\rho)$, чтобы повторная выборка правильно аппроксимировала непрерывное распределение $p(\rho)$. Ясно, что для выполнения данного требования не подойдёт алгоритм блуждания, имеющий какое-либо выделенное направление. Проиллюстрируем это следующим рассуждением: пусть существует выделенное направление и вероятность шага $\rho_0 \rightarrow \rho$ равна q , тогда второй шаг $\rho \rightarrow \rho'$ обладает той же вероятностью q , если он осуществляется в том же направлении, что и первый, а вероятностью шагнуть назад в исходную точку ρ_0 меньше. Таким образом, распределение $q(\rho|\rho_0)$ должно быть сферически симметричным относительно ρ_0 .

Вычисление вероятности в точке нахождения новой частицы по полной истории измерений — дорогостоящая процедура, требующая число операций порядка $O(N)$, где N — число проведённых измерений². Естественно минимизировать количество шагов в алгоритме Метрополиса — Гастингса. Хотя

²Следует учесть, что полное число операций при повторной выборке составляет $O(N \times S \times M)$. В наших экспериментах $N \sim 10^5$, число частиц в распределении $S = 10^3$, число шагов в алгоритме Метрополиса — Гастингса $M = 50$.

сферически симметричное распределение $q(\rho|\rho_0)$ может быть «изрезанным» по различным направлениям, естественно потребовать, чтобы производимое им блуждание в равной степени захватывало всевозможные направления. В этом случае можно уменьшить количество итераций принятия/отбрасывания частиц в алгоритме Метрополиса — Гастингса за счёт изначально равномерного по направлениям распределения $q(\rho|\rho_0)$ при том же качестве повторной выборки (область вокруг ρ_0 обследована по всевозможным направлениям).

Нахождение метода блуждания, удовлетворяющего упомянутому выше требованию, явилось одной из проблем при обобщении алгоритма томографии кубитов [15] на случай произвольной размерности. Дальнейшее обсуждение данного вопроса приведено в 2.3.

2.2 Априорное распределение

Для целей квантовой томографии априорное распределение должно быть как можно менее информативным. Естественно выбрать такое распределение, в котором любое состояние ρ встречается с равной вероятностью. Для определения понятия вероятности необходимо задать какую-либо меру μ на D -мерном пространстве состояний \mathcal{H}_D .

При использовании последовательной выборки по значимости равновероятность в соответствии с какой-либо мерой означает, что, выбрав некоторую область $V \subset \mathcal{H}_D$ в пространстве состояний, среднее количество попавших туда частиц пропорционально мере этой области $\mu(V)$.

Можно определить меру, считая, что максимальная симметрия меры соответствует требованию наименьшей информативности [54; 55]. В случае чистых состояний данное условие позволяет выделить единственную меру $d\mu_D(|\psi\rangle)$, определяемую требованием инвариантности относительно всех унитарных преобразований $U(D)$. Иными словами, мера в пространстве чистых состояний в \mathcal{H}_D порождается мерой Хаара на унитарной группе $U(D)$ [56; 57], то есть случайное состояние $|\psi\rangle$ может быть получено умножением фиксированного состояния $|\psi_0\rangle$ на случайную матрицу, распределённую равномерно согласно мере Хаара: $|\psi\rangle = U|\psi_0\rangle$.

Однако, для случая смешанных состояний этого условия для однозначного нахождения меры на пространстве матриц плотности недостаточно [56]. Из унитарной инвариантности следует лишь мера Хаара на пространстве собственных векторов матриц плотности, а распределение на множестве собственных значений необходимо искать из других соображений. Например, можно предположить, что исследуемая система размерности D находится во взаимодействии с другой системой — окружением — размерности K , и составная система находится в чистом состоянии. Мера на составной системе известна, и, после взятия частичного следа по окружению, она порождает меру $\mu_{D,K}$ на пространстве состояний исходной системы \mathcal{H}_D . Такой класс мер исследовался в работах [54; 57].

Возможен и другой подход к построению ансамблей матриц плотности. Пусть в пространстве состояний \mathcal{H}_D задана метрика $d(\rho, \rho_0)$, тогда каждому шару $B = \{\rho \in \mathcal{H}_D : d(\rho, \rho_0) \leq R\}$ радиуса R припишем одинаковую меру. В упомянутой работе [57] показано, что мера, получаемая взятием частичного следа при $D = K$, совпадает с мерой, порождаемой метрикой Гильберта — Шмидта (1.5): $\mu_{D,D} = \mu_{HS}$.

В литературе распространена также мера μ_B , порождённая метрикой Бюреса (1.8). Выбор в пользу метрики Бюреса обосновывается тем, что в случае многократных измерений одного и того же состояния она связана с границей Чернова [58], которая показывает минимальную вероятность ошибки различения двух состояний при повторяющихся измерениях [59; 60] (ясно изложенная сводка основных результатов приведена в начале [8]).

Итого, в данной главе мы рассмотрим следующие априорные распределения³:

1. порождённое метрикой Бюреса

$$p_B(\rho) \propto \prod_{i=1}^D \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \prod_{i < j}^D \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j}, \quad (2.9)$$

2. порождённое расстоянием Гильберта — Шмидта

$$p_{HS}(\rho) \propto 1, \quad (2.10)$$

3. равномерное в симплексе собственных значений

$$p_{\Delta}(\rho) \propto \prod_{i < j}^D \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_j)^2}. \quad (2.11)$$

³Строго говоря, в формулах ниже следует добавить функцию Хевисайда $\theta(\rho)$ и дельта функцию Дирака $\delta(\text{Tr } \rho - 1)$, чтобы отобразить неотрицательную определённость и нормировку следа матриц плотности.

После интегрирования по собственным векторам, найдём распределение $p(\lambda_1, \dots, \lambda_D)$ по собственным значениям. Полученные выражения будут отличаться от (2.9)–(2.11) наличием *геометрического фактора* $\prod_{i<j}^D (\lambda_i - \lambda_j)^2$. Например,

$$p_{HS}(\lambda_1, \dots, \lambda_D) \propto 1 \times \prod_{i<j}^D (\lambda_i - \lambda_j)^2. \quad (2.12)$$

Аналогично, $p_\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_D) \propto 1$, что действительно является равновероятным распределением в симплексе $\{\lambda_i : \sum_i \lambda_i = 1\}$.

Геометрический фактор приводит к нулевой плотности вероятности состояний с вырожденными собственными значениями для распределений (2.9) и (2.10). С другой стороны, такие состояния получаются если, например, чистое состояние $|\psi\rangle$ подвержено деполяризующему шуму $|\psi\rangle\langle\psi| \rightarrow (1 - \varepsilon)|\psi\rangle\langle\psi| + \varepsilon\mathbb{I}/D$, где \mathbb{I}/D — полностью смешанное состояние размерности D . Именно для решения проблемы вырожденных собственных значений и было введено распределение $p_\Delta(\rho)$. Дальнейшие результаты приведены в разделе 2.6.2.

В работе [61] приведён простой метод генерации случайных матриц плотности, распределённых равномерно в соответствии с метрикой Бюреса и Гильберта — Шмидта. Случайное бюресовское состояние ρ_B составляется согласно выражению:

$$\rho_B = \frac{(1 + U)GG^\dagger(1 + U^\dagger)}{\text{Tr}[(1 + U)GG^\dagger(1 + U^\dagger)]}, \quad (2.13)$$

где U — случайная унитарная матрица, равномерно распределённая по мере Хаара; G — случайная матрица, принадлежащая ансамблю Жинибра (Ginibre) [62]. Вещественные и мнимые части элементов матрицы из ансамбля Жинибра по определению являются независимыми случайными гауссовскими величинами с нулевым средним и одинаковой дисперсией. Конкретное значение дисперсии в нашем случае не важно из-за нормировки в (2.13). Ансамбль Жинибра инвариантен относительно унитарных преобразований: $G \rightarrow UGU^\dagger$.

Для получения априорного распределения $p_{HS}(\rho)$, порождаемого метрикой Гильберта — Шмидта, можно воспользоваться одним из следующих соотношений:

$$\rho_{HS} = \frac{GG^\dagger}{\text{Tr} GG^\dagger} = \text{Tr}_D |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (2.14)$$

здесь $|\psi\rangle = U|\psi_0\rangle$ — случайный вектор из расширенного пространства $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_D \otimes \mathcal{H}_D$. Последнее равенство справедливо ввиду эквивалентности индуцированной меры $\mu_{D,D}$ и меры Гильберта — Шмидта μ_{HS} .

В выражениях (2.13) и (2.14) фигурирует случайная матрица U , равномерно распределённая по мере Хаара. Для её генерации предложено несколько методов: метод Блюма [2], Жичковского [63; 64], Меццадри [65]. В задаче создания априорного распределения все данные методы приводят к одинаковому результату, так как здесь не имеет значения близость получаемых состояний — состояния должны находиться во всём пространстве \mathcal{H}_D . Однако, эти методы обладают недостатками при осуществлении случайных блужданий и генерации окрестности какого-либо фиксированного состояния. Рассмотрим их более подробно в следующем разделе.

2.3 Генерация случайных блужданий

Ограничимся рассмотрением случайных блужданий для чистых состояний, так как для блуждания в пространстве матриц плотности достаточно воспользоваться расширением до чистого состояния: очищенный вектор подвергается преобразованию, а затем берётся частичный след по вспомогательной системе. При этом, однако, блуждание в пространстве состояний исходной системы будет производиться в соответствии с мерой $\mu_{D,D} = \mu_{HS}$, индуцированной операцией взятия частичного следа.

В используемом нами протоколе томографии случайные блуждания используются в двух местах: алгоритм Метрополиса — Гастингса и метод случайного поиска оптимального измерения (2.2). Они оба требуют, чтобы средний размер шага блуждания поддавался управлению. Если же взять случайный вектор, порождённый мерой Хаара, $\psi = U\psi_0$, то он будет распределён равномерно во всём пространстве. Поэтому матрица U должна быть близка к единичной.

Чтобы проверить является ли блуждание равномерным по всем направлениям, можно сгенерировать окрестность вокруг произвольного фиксированного центра, каждый раз начиная блуждание из этого центра. Если потребовать, чтобы размер шага не превышал заданной величины d , то сравнение полученной окрестности с шаром радиуса d даст оценку изотропности блуждания.

Приведённые ниже методы (кроме метода Блюма) изначально были предназначены для генерации всевозможных унитарных матриц. Последний метод (Меццадри) удалось адаптировать для получения локальных преобразований.

Метод Блюма. Метод Блюма позволяет производить шаги с регулируемым размером и состоит из следующих этапов [2]:

1. Выбрать направление шага, сгенерировав два случайных числа $i, j = 1, \dots, D$.
2. Определить эрмитов оператор H_{ij} , который действует только на подпространство, образованное базисными векторами $|i\rangle$ и $|j\rangle$, по правилу: $H_{ij} = \sigma_x$ при $i < j$, $H_{ij} = \sigma_y$ при $i > j$, $H_{ij} = \sigma_z$ при $i = j$ ⁴, где $\sigma_{x,y,z}$ — матрицы Паули.
3. Выбрать случайный размер шага δ (например, распределённый по гауссовскому закону): $\langle \delta \rangle = 0$ и $\langle \delta^2 \rangle = \Delta^2$. Δ играет роль среднего размера шага.
4. Осуществить блуждание $|\psi\rangle \rightarrow e^{i\delta H_{ij}}|\psi\rangle$.

Сгенерированная для двумерного случая окрестность состояния $|H\rangle$ представлена на рисунке 2.1а. Каждая точка получена в результате двух шагов случайного блуждания. Из рисунка отчётливо видно, что существуют два направления, вдоль которых преимущественно располагаются состояния. Это связано с тем, что при двух итерациях метода велика вероятность оба раза шагнуть в одном и том же направлении, то есть выбрать одинаковую пару (i, j) . Для уменьшения такого эффекта можно увеличить число итераций, что нежелательно, так как приведёт к усложнению вычислений, либо явно указать не повторяющиеся пары (i, j) . Например, на первом шаге $(i, j) = (1, 2)$, а затем $(i, j) = (2, 1)$. Результат работы модифицированного алгоритма приведён на рисунке 2.1б. Распределение приняло изотропную форму, однако оно сохраняется не для всех начальных состояний (например, для $|R\rangle$ см. рисунок 2.1в). По этим причинам данный метод случайного блуждания не следует использовать для целей повторной выборки.

Метод Жичковского. Унитарная матрица, распределённая по мере Хаара, образуется перемножением элементарных случайных вращений в двумерных под-

⁴В оригинальной статье [2] по всей видимости содержится ошибка, ибо при $i = j$ говорить о двумерном подпространстве, на котором действует σ_z , не приходится. Поэтому при проверке алгоритма случай $i = j$ был отброшен.

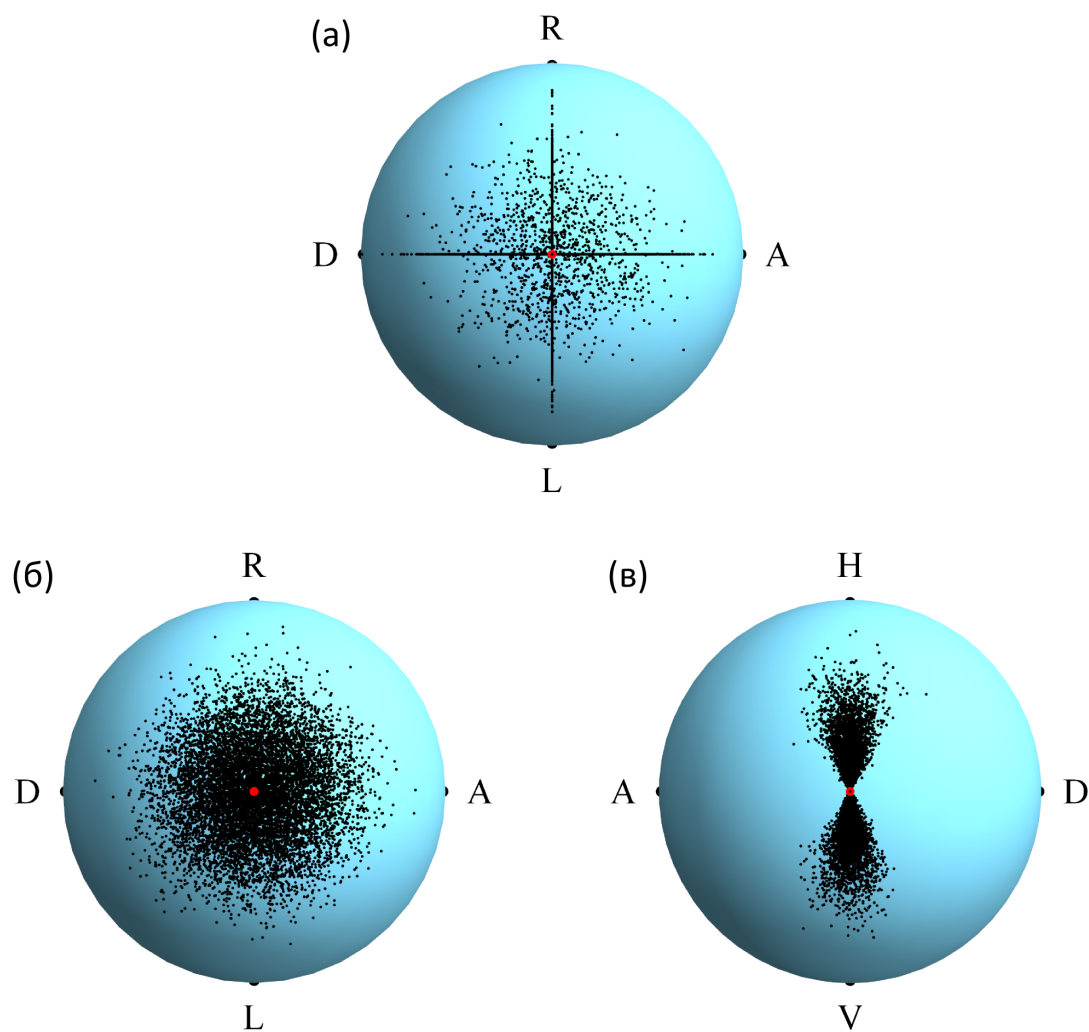


Рисунок 2.1 — Распределения чистых состояний на сфере Блоха, полученные методом Блюма. Размер шага выбран случайной гауссовской величиной со стандартным отклонением $\Delta = 0.1$. Количество состояний равно 10^4 . Красная точка — центр окрестности. (а) Каждое состояние получено в результате двух шагов случайного блуждания в соответствии с исходным вариантом алгоритма (см. сноску 4 на стр. 49). (б) Окрестность с центром в точке $|H\rangle$, сгенерированная модифицированным методом. (в) То же, что и (б) для окрестности с центром в $|R\rangle$.

пространствах [63]. Авторами используется явная параметризация и, ограничивая максимальные значения параметров, возможно получить близкие состояния. Однако, нам не удалось получить «круглые» окрестности с произвольным центром.

Степень совпадения между центром шара, равномерно заполненного по мере Хаара, и какой-либо его точкой является случайной величиной. Для дальнейшего рассмотрения нам потребуется алгоритм генерации значений этой случайной величины, который можно получить из метода Жичковского. Достаточно найти степень совпадения вида (используются обозначения оригинальной работы)

$$F(|0\rangle, U|0\rangle) = |\langle 0|U|0\rangle|^2 = |\cos(\varphi_{D-2,D-1})e^{i\psi_{D-2,D-1}}|^2 = \cos^2(\varphi_{D-2,D-1}), \quad (2.15)$$

где $\varphi_{D-2,D-1} = \arcsin(\xi^{1/(2D-2)})$ — одна из координат в используемой авторами параметризации, а ξ — равномерно распределённая величина на отрезке $[0, \delta]$. Подставляя ξ , найдём

$$F(|0\rangle, U|0\rangle) = 1 - \xi^{1/(D-1)}, \quad (2.16)$$

здесь D — размерность пространства. При $\delta = 1$ получим степень совпадения для «шара», охватывающего всё пространство чистых состояний.

Метод Меццадри основывается на QR-разложении [65]. QR-разложением матрицы G называется представление вида

$$G = QR, \quad (2.17)$$

где Q — унитарная матрица, R — обратимая верхнетреугольная матрица (элементы ниже диагонали равны нулю). QR разложение не единственно. Действительно, если ввести диагональную матрицу $\Lambda = \text{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_D})$, то получим другое разложение:

$$G = QR = Q\Lambda\Lambda^{-1}R = Q'R', \quad (2.18)$$

где $Q' = Q\Lambda$, $R' = \Lambda^{-1}R$. Для выделения единственного разложения следует потребовать, чтобы диагональные элементы матрицы R были вещественными и положительными. Одним из простейших вариантов QR-разложения является процесс ортогонализации Грама — Шмидта: в результате ортогонализации столбцов матрицы G получим Q .

Если взять матрицу G , принадлежащую ансамблю Жинибра, и подвергнуть её QR-разложению, то матрица Q будет равномерно распределённой по мере Хаара. Иными словами, ансамбль Жинибра порождает случайные хааровские матрицы.

Модификация метода Меццадри. Для получения выражения, описывающего локальные блуждания начального вектора состояния $|\psi_0\rangle$, заметим, что первый столбец матриц G и Q совпадает с точностью до множителя, так как матрица R является верхнетреугольной. Выделим из ансамбля Жинибра такие матрицы G_{ψ_0} , у которых первый столбец совпадает с $|\psi_0\rangle$ (это всегда можно сделать, ибо элементы матрицы G независимы и принимают всевозможные значения с ненулевой вероятностью). Полученное подмножество матриц Жинибра породит подмножество хааровских матриц Q_{ψ_0} . Матрицы Q_{ψ_0} обладают тем свойством, что все они переводят вектор $|0\rangle$ в $|\psi_0\rangle$: $|\psi_0\rangle = Q_{\psi_0}|0\rangle$. Любой вектор, отличный от $|0\rangle$, будет преобразовываться по-разному в зависимости от конкретной матрицы Q_{ψ_0} . Таким образом, окрестность с центром в $|0\rangle$ (образ) переходит в некоторую окрестность с центром в $|\psi_0\rangle$ (прообраз). Расстояние между соответствующими точками образа и прообраза сохраняется, так как преобразование унитарно, поэтому распределение по расстоянию до центра инвариантно. Идея метода блуждания заключается в том, что образ не обязательно сразу генерировать шарообразным, важно лишь обеспечить заданное радиальное распределение (см. выражение (2.19)). При этом прообраз будет уже сферически симметричным из-за свойств ансамбля матриц Q_{ψ_0} (доказательство приводится ниже, см. (2.26) и (2.27)).

Найдём теперь явное выражение для случайного блуждания, используемое нами в протоколе томографии. Для этого случайный вектор $|\varphi\rangle$ в окрестности состояния $|0\rangle$ выберем следующим образом:

$$|\varphi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (2.19)$$

здесь a, b — случайные вещественные величины, удовлетворяющие условию нормировки $a^2 + b^2 = 1$. Выбор их закона распределения определяется законом распределения по расстоянию для получаемых случайных векторов. Действительно, степень совпадения $F(|0\rangle, |\varphi\rangle) = a^2$, и если взять a согласно (2.16)

$$a = \sqrt{1 - \xi^{1/(D-1)}}, \quad (2.20)$$

то получится окрестность в виде равномерно заполненного по объёму шара с радиусом, выражаемом через параметр δ . При выборе a в виде:

$$a = 1 - d^2/2, \quad (2.21)$$

образуется окрестность с радиальным распределением (в метрике Бюреса), совпадающим с законом распределения случайной величины d . Нами использовался

гауссов закон. При тестировании алгоритма томографии оказалось, что такой выбор a предпочтительнее, чем согласно выражению (2.20), так как доля принятых шагов в алгоритме Метрополиса — Гастингса остаётся постоянной, если стандартное отклонение d выбрать пропорциональным размеру текущего распределения $p(\rho|\mathcal{D})$.

Искомый случайный вектор $|\psi\rangle$ образуется умножением $|\varphi\rangle$ (2.19) на матрицу Q_{ψ_0} :

$$|\psi\rangle = Q_{\psi_0}|\varphi\rangle = \begin{pmatrix} |\psi_0\rangle_1 & |q\rangle_1 & \cdots \\ |\psi_0\rangle_2 & |q\rangle_2 & \cdots \\ |\psi_0\rangle_3 & |q\rangle_3 & \cdots \\ \dots\dots\dots \\ |\psi_0\rangle_D & |q\rangle_D & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a|\psi_0\rangle + b|q\rangle, \quad (2.22)$$

где $|q\rangle$ — вектор, получаемый ортогонализацией $|\psi_0\rangle$ и столбца жинибровской матрицы $|g\rangle$. С точностью до нормировки:

$$|q\rangle \propto |g\rangle - |\psi_0\rangle\langle\psi_0|g\rangle. \quad (2.23)$$

Окончательно найдём, что правило случайного блуждания $\mathcal{W} : |\psi_0\rangle \xrightarrow{\mathcal{W}} |\psi\rangle$ описывается выражением:

$$|\psi\rangle = \mathcal{W}(|\psi_0\rangle) = a|\psi_0\rangle + b \cdot \frac{|g\rangle - |\psi_0\rangle\langle\psi_0|g\rangle}{\| |g\rangle - |\psi_0\rangle\langle\psi_0|g\rangle \|}. \quad (2.24)$$

Ансамбль Жинибра инвариантен относительно унитарных преобразований U , поэтому имеет место коммутативность \mathcal{W} и U в смысле получаемых окрестностей:

$$U\mathcal{W}(|\psi_0\rangle) = \mathcal{W}(U|\psi_0\rangle), \quad (2.25)$$

иными словами, можно сначала образовать окрестность вектора $|\psi_0\rangle$, а потом осуществить унитарное преобразование матрицей U , или же исходно повернуть центр $|\psi_0\rangle$ той же матрицей U , а затем строить окрестность в новом центре. Вероятностное распределение точек при этом не изменится. Для доказательства подставим явный вид правила блуждания (2.24):

$$U\mathcal{W}(|\psi_0\rangle) = aU|\psi_0\rangle + b \cdot \frac{U(1 - |\psi_0\rangle\langle\psi_0|)|g\rangle}{\| (1 - |\psi_0\rangle\langle\psi_0|)|g\rangle \|}, \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(U|\psi_0\rangle) &= aU|\psi_0\rangle + b \cdot \frac{(1 - U|\psi_0\rangle\langle\psi_0|U^\dagger) |g\rangle}{\|(1 - U|\psi_0\rangle\langle\psi_0|U^\dagger) |g\rangle\|} = \\ &= aU|\psi_0\rangle + b \cdot \frac{U(1 - |\psi_0\rangle\langle\psi_0|)U^\dagger |g\rangle}{\|(1 - |\psi_0\rangle\langle\psi_0|)U^\dagger |g\rangle\|}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Полученные выражения отличаются лишь заменой $|g\rangle \rightarrow U^\dagger |g\rangle$. Но $U^\dagger |g\rangle$ также является столбцом матрицы из ансамбля Жинибра в силу унитарной инвариантности.

Если в выражении (2.25) подразумевать под U произвольную унитарную матрицу, лишь бы $|\psi_0\rangle = U|\psi_0\rangle$, то найдём, что получаемая окрестность инвариантна относительно любых унитарных поворотов, не сдвигающих её центр. Таким образом, распределение точек, вычисляемое по формуле (2.24), является радиально симметричным вокруг центра $|\psi_0\rangle$.

Свойство коммутативности (2.25) позволяет утверждать, что для проверки правила блуждания достаточно ограничиться окрестностью только одной фиксированной точки. Для случая куквартов численно была сгенерирована окрестность состояния $|HH\rangle$ при выбранном согласно (2.20) параметром a с радиусом $d = 0.3$. С помощью шестимерных гистограмм (6 — число вещественных параметров, характеризующих четырёхмерный вектор состояния) проводилось сравнение полученного распределения с распределением, найденным методом грубой силы (из случайных векторов во всём пространстве вырезался шар того же радиуса). Мерой соответствия служила классическая степень совпадения между гистограммами:

$$F = \sum_i \sqrt{p_i q_i}, \quad (2.28)$$

где p_i и q_i — частота попадания в i -й элемент для первой и второй гистограммы соответственно. Степень совпадения оказалась равной 0.998, что свидетельствует о получении достаточно шарообразной окрестности.

2.4 Блочные измерения

В отличие от протоколов статических измерений большинство адаптивных схем подразумевает частую смену измерительного базиса. Именно по данной причине достигается лучшая точность определения состояния. При практической

реализации адаптивных схем может получиться, что время, затрачиваемое на изменение базиса, велико по сравнению со временем регистрации одного события (отсчёта в детекторе). Поэтому выгодно измерять сразу несколько событий в одном и том же базисе. Однако, при этом желательно сохранить точность, близкую к предельному случаю адаптивной томографии, в котором обновление базиса происходит после каждого события. Возможны два пути:

1. после регистрации каждого события с помощью какого-либо критерия выясняется, является ли текущий базис оптимальным или же нет;
2. регистрируется блок из b событий, чья длина заранее определена. Размер блока подбирается так, чтобы по прошествии в среднем b событий базис переставал быть оптимальным.

Имея в распоряжении схему первого типа, можно вычислить средний по реализациям размер блока $b(N)$ (который, вообще говоря, зависит от числа зарегистрированных событий N) и использовать его уже как заданный заранее для схемы второго типа.

Нами используется второй подход. Примером же схемы первого типа является протокол адаптивной томографии, предложенный в работе [66]. Алгоритм позволяет томографировать чистые состояния произвольной размерности. Авторы предполагают в будущем обобщить его на смешанные состояния. Проведено численное моделирование для случая кубитов. Показано, что в среднем изменение базиса происходит логарифмически редко. А именно, среднее количество смен базиса y зависит от числа событий N как $y = 2.811 \log_2 N - 5.800$. Отсюда нетрудно найти средний размер блока:

$$b = N(y + 1) - N(y) \approx \frac{\ln 2}{2.811} N. \quad (2.29)$$

В полученном выражении размер блока пропорционален числу зарегистрированных событий. Оказывается, что данный результат напрямую связан со скоростью сходимости степени совпадения $1 - F(N)$. Чтобы понять эту связь, изложим предложенную схему томографии более подробно.

Пусть в ходе проекционных измерений зарегистрировано N событий, и последовательность исходов эксперимента имеет вид $\mathcal{D}_N = \{|\alpha_1 \gamma_1\rangle, \dots, |\alpha_N \gamma_N\rangle\}$, где, как и прежде, α обозначает конфигурацию экспериментальной установки (например, углы установки фазовых пластинок), а γ — номер исхода измерения. В качестве результата томографии $|\hat{\psi}\rangle$ выбирается наиболее вероятное состояние

по байесовскому распределению $p(\psi|\mathcal{D}_N)$:

$$|\hat{\psi}_N\rangle = \operatorname{argmax}_{\psi} p(\psi|\mathcal{D}_N) = \operatorname{argmax}_{\psi} \mathcal{L}(\rho, \mathcal{D}_N)p(\psi)/\mathbb{P}(\mathcal{D}_N), \quad (2.30)$$

где в последнем равенстве использована формула Байеса и введены стандартные обозначения: $\mathcal{L}(\rho, \mathcal{D}_N)$ — функция правдоподобия, $p(\psi)$ — априорное распределение, $\mathbb{P}(\mathcal{D}_N)$ — нормировочная константа. Далее для простоты положим априорное распределение равномерным согласно мере Хаара $p(\psi) = \text{const}$, что соответствует не информативному распределению. В явном виде байесовское распределение переписется в виде:

$$p(\psi|\mathcal{D}_N) = \frac{\prod_{n=1}^N |\langle \alpha_n \gamma_n | \psi \rangle|^2}{\int \prod_{n=1}^N |\langle \alpha_n \gamma_n | \psi \rangle|^2 d\psi}. \quad (2.31)$$

Выбор оптимального базиса измерения $\mathcal{B}_{N+1} = \{|\alpha_{N+1}, 1\rangle, \dots, |\alpha_{N+1}, \Gamma\rangle\}$ происходит следующим образом. Предположим, что выполнено измерение в данном базисе и получен результат γ , тогда можно найти максимальное значение *логарифмической* функции правдоподобия \mathcal{L}_γ с учётом этого исхода. Так как в действительности исход заранее неизвестен, то выполним усреднение по всевозможным исходам:

$$\langle \mathcal{L} \rangle = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \mathbb{P}(\gamma|\mathcal{D}_N) \mathcal{L}_\gamma, \quad (2.32)$$

где условная вероятность наблюдения исхода определяется выражением

$$\mathbb{P}(\gamma|\mathcal{D}_N) = \int \mathbb{P}(\gamma|\alpha, \psi) p(\psi|\mathcal{D}_N) d\psi. \quad (2.33)$$

Оптимальным базисом будет тот базис, который максимизирует $\langle \mathcal{L} \rangle$:

$$\begin{aligned} \alpha_{N+1} &= \operatorname{argmax}_{\alpha} \langle \mathcal{L} \rangle = \\ &= \operatorname{argmax}_{\alpha} \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \left(\int p(\psi|\mathcal{D}_N) |\langle \alpha \gamma | \psi \rangle|^2 d\psi \right) \max_{\psi} (\log p(\psi|\mathcal{D}_N) + \log |\langle \alpha \gamma | \psi \rangle|^2). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Словесная формулировка полученной формулы такова: требуется найти базис, который максимизирует математическое ожидание максимального значения логарифмической функции правдоподобия.

Далее, следуя за авторами, стоит отметить, что хотя процедура нахождения оптимального измерения явно определена, связанные с ней вычисления довольно трудоёмки, поэтому они предлагают использовать упрощённое выражение:

$$\alpha_{N+1} = \operatorname{argmax}_{\alpha, \gamma} p(|\alpha\gamma\rangle | \mathcal{D}_N). \quad (2.35)$$

Критерий (2.35) является хорошей аппроксимацией (2.34) в случае, когда байесовское распределение $p(\psi | \mathcal{D}_N)$ имеет малый размер и сконцентрировано вблизи томографируемого состояния. В действительности оказывается, что два критерия дают похожие результаты уже через несколько итераций алгоритма томографии.

Помимо вычислительной простоты критерий (2.35) обладает ещё несколькими достоинствами. Во-первых, сравнив выражения (2.35) и (2.30), замечаем, что они совпадают при замене $|\alpha\gamma\rangle \rightarrow |\psi\rangle$. Это означает, что одно из состояний оптимального базиса содержит оценку томографируемого состояния $|\hat{\psi}\rangle$, которая была вычислена ранее. Остальные состояния базиса найдутся из условия взаимной ортогональности. Таким образом, для рассматриваемого протокола оптимальное измерение — измерение в собственном базисе текущей оценки томографируемого состояния. Во-вторых, пусть результат $N + 1$ измерения $|\alpha_{N+1}\gamma_{N+1}\rangle = |\hat{\psi}_N\rangle$. Тогда наиболее вероятное состояние не изменится $|\hat{\psi}_{N+1}\rangle = |\hat{\psi}_N\rangle$, ибо новое байесовское распределение $p(\psi | \mathcal{D}_{N+1}) \propto p(\psi | \mathcal{D}_N) |\langle \psi | \alpha_{N+1}\gamma_{N+1} \rangle|^2$. Из неизменности оценки $|\hat{\psi}\rangle$ следует, что новый оптимальный базис измерения совпадает со старым $\mathcal{B}_{N+1} = \mathcal{B}_N$ и по-прежнему содержит измерение на наиболее вероятное состояние. По мере процесса томографии оценка становится всё ближе к истинному состоянию, и исход, соответствующий наиболее вероятному состоянию, возникает всё чаще. Этот факт позволяет сократить число изменений базиса без ухудшения точности томографии.

В результате численного моделирования авторами получена следующая зависимость скорости сходимости степени совпадения $I = 1 - F$ от числа событий N :

$$\log_2 I = -1.000 \log_2 N + 1.00. \quad (2.36)$$

Как видно, данный протокол демонстрирует типичное для адаптивных схем поведение $I \propto 1/N$.

Результаты рассматриваемой работы позволяют, поняв условия, при которых оптимальный базис не изменяется, теоретически вычислить средний размер блока. Обозначим p_γ — вероятности исходов, также, не ограничивая общности,

положим $\gamma = 1$ — результат, соответствующий измерению на наиболее вероятное состояние (2.30). Рассмотрим случайную последовательность результатов и выделим в ней блоки, состоящие из одинаковых, идущих подряд исходов. Требуется найти среднюю длину блока $\langle b \rangle$:

$$\langle b \rangle = \sum_{b=1}^{\infty} b \mathbb{P}(b) = \sum_{b=1}^{\infty} b \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \mathbb{P}(b|\gamma) \mathbb{P}(\gamma). \quad (2.37)$$

Условная вероятность получения блока размером b : $\mathbb{P}(b|\gamma) \propto p_{\gamma}^b$. С учётом нормировки $\sum_{b=1}^{\infty} \mathbb{P}(b|\gamma) = 1$ получим $\mathbb{P}(b|\gamma) = p_{\gamma}^{b-1}(1 - p_{\gamma})$. $\mathbb{P}(\gamma)$ — вероятность появления блока, состоящего из исходов γ . Она отличается от p_{γ} и пропорциональна $p_{\gamma}(1 - p_{\gamma})$. С учётом нормировки по γ найдём $\mathbb{P}(\gamma) = \frac{p_{\gamma}(1-p_{\gamma})}{1 - \sum_{\gamma} p_{\gamma}^2}$. Подставив все вероятности в формулу (2.37), после некоторых вычислений получим:

$$\langle b \rangle = \frac{1}{1 - \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} p_{\gamma}^2}. \quad (2.38)$$

В асимптотическом случае, когда оценка $|\hat{\psi}\rangle$ близка к истинному состоянию $|\psi_0\rangle$, $p_1 \approx 1$, а остальные вероятности малы. Сохраняя основной вклад в $\langle b \rangle$ от p_1 запишем:

$$\langle b \rangle \approx \frac{1}{2(1 - p_1)} = \frac{1}{2(1 - |\langle \hat{\psi} | \psi_0 \rangle|^2)} \equiv \frac{1}{2I}. \quad (2.39)$$

Подставляя в (2.29) зависимость $N(I)$ из (2.36), найдём по результатам численного моделирования $\langle b \rangle = 1/2.02I$, что хорошо согласуется с нашей оценкой (2.39).

2.5 Эксперимент

2.5.1 Описание установки

Схема экспериментальной установки изображена на рисунке 2.2. Источником бифотонов является спонтанное параметрическое рассеяние типа-I ($e \rightarrow oo$) в паре кристаллов β -бората бария (ВВО) толщиной 2 мм со взаимно перпендикулярными осями. Кристаллы вырезаны под частотно-вырожденный коллинеарный

лизации, выполненном на элементе Пельтье с пассивным радиатором и датчиком температуры. Величина поддерживаемой температуры 38.0 ± 0.2 °С.

Оптический изолятор ОI не позволяет обратному излучению (например, бликам) попадать обратно в резонатор, образованный лазерным диодом и решёткой G. Обратное излучение может привести к нестабильной генерации диода. В силу внутреннего устройства изолятора ОI из него выходит горизонтально поляризованное излучение.

Поляризация накачки задаётся парой кварцевых фазовых пластинок WP5 и WP6. Кристаллы ВВО настроены на частотно-вырожденный неколлинеарный режим. Сигнальный и холостой фотоны расходятся под углом $\approx 1^\circ$. На выходе из кристаллов установлен длинноволновой фильтр F с частотой отсечки 450 нм для подавления прошедшей накачки. После него идёт полосовой интерференционный фильтр IF с центральной длиной волны 820 нм и шириной спектра пропускания на полувысоте 10 нм (значения по каталогу производителя ThorLabs). При попадании накачки на фильтр IF он начинает сильно люминесцировать (интенсивность люминесценции оказывается много больше интенсивности сигнала), поэтому необходим длинноволновой фильтр F, который подвержен этому в гораздо меньшей степени. Фильтр IF предназначен для выделения нужной спектральной компоненты. При работе в частотно-вырожденном режиме сигнальное и холостое излучение обладает длиной волны 815.4 нм (для длина волны накачки 407.7 нм), что попадает на край полосы пропускания фильтра IF. Наклон фильтра позволяет сместить спектр пропускания в коротковолновую область.

В каждом из каналов находятся кварцевые фазовые пластинки нулевого порядка WP1–WP4, что позволяет выполнять проекционные измерения на факторизованные состояния. По каталогам производителей фазовые пластинки WP1 и WP2 (производства ThorLabs) вносят сдвиг фаз $\lambda/4$ и $\lambda/2$ на длинах волн 808 нм и 830 нм соответственно, а пластинки WP3 и WP4 (AGOptics) являются четверть-волновой и полуволновой на длине волны 780 нм. Измеренные и используемые нами сдвиги фаз приведены в таблице 2. Пластинки закреплены во вращающихся с помощью шаговых двигателей оправках; минимальный угол поворота равен 0.1° . Опорная точка в задании начального угла поворота определяется посредством датчика Холла и магнита, установленного в оправке, с точностью не хуже 0.2° . Во избежание люфта пластинки вращаются только в одну сторону.

Также в каждом из каналов установлены ирисовые диафрагмы A1 и A2, расположенные на расстоянии 53 см и 90 см от кристаллов соответственно. Диа-

Таблица 2 — Сдвиги фаз кварцевых пластинок на длине волны 815.4 нм.

Пластинка	Сдвиг фаз
WP1	$94.12 \pm 0.02^\circ$
WP2	$175.67 \pm 0.34^\circ$
WP3	$88.68 \pm 0.06^\circ$
WP4	$178.18 \pm 0.10^\circ$

фрагмы позволяют изменять регистрируемый угловой диапазон излучения СПР, что влияет на чистоту приготавливаемого состояния. Далее идут призмы Волластона WL1 и WL2, разделяющие падающее на них излучение на две поляризационные компоненты — вертикальную и горизонтальную. Призмы имеют высокий коэффициент экстинкции $\gtrsim 10^5$ (отношение интенсивностей в двух выходных каналах призмы при падении на неё излучения с поляризацией, соответствующей поляризации одного из выходных каналов). После призм излучение собирается коллиматорами и через многомодовые волокна MMF попадает на счётные фотодетекторы D1–D4 на основе лавинных фотодиодов. Диафрагмы перед коллиматорами предназначены для уменьшения внешней засветки. Зеркала перед коллиматорами служат для удобства юстировки.

Сигнал с детекторов поступает на схему совпадений СС, которая настроена на парные совпадения между детекторами D1–D3, D1–D4, D2–D3, D2–D4. Окно схемы совпадений равно 4 нс. Отсчёты схемы совпадений поступают в программу квантовой томографии, которая управляет четырьмя фазовыми пластинками.

2.5.2 Калибровка эффективностей детектирования

Ввиду того, что в установке применяются разные коллиматоры (два из них имеют регулируемое фокусное расстояние, а два других — фиксированное), а также из-за неодинаковой точности юстировки, скорость счёта совпадений неизбежно отличается для различных пар детекторов. Для учёта данного эффекта следует ввести поправочные коэффициенты η_γ в выражение для вероятности ис-

Таблица 3 — Относительные эффективности детектирования.

i	η_i
1	0.874 ± 0.006
2	0.919 ± 0.008
3	0.981 ± 0.006
4	1 (по определению)

хода γ , даваемое правилом Борна (1.1):

$$\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \rho) = \frac{\eta_\gamma \text{Tr } M_{\alpha\gamma}\rho}{\sum_{\gamma=1}^4 \eta_\gamma \text{Tr } M_{\alpha\gamma}\rho}. \quad (2.40)$$

Для определения эффективностей детектирования η_γ осуществлялось проекционное измерение на случайное состояние. Время накопления совпадений составляло 40 секунд, полное число состояний — 1000. Стоит отметить, что на данном этапе работы установка содержала лишь один нелинейный кристалл, испускавший состояние $|HH\rangle$. Нахождение самих коэффициентов η_i основано на том, что суммарное количество совпадений должно оставаться постоянным:

$$\sum_{\gamma=1}^4 c_\gamma/\eta_\gamma = \text{const} \equiv I, \quad (2.41)$$

где c_γ — наблюдаемое количество совпадений в паре детекторов номер γ , I — суммарное число совпадений. Данное уравнение задаёт гиперплоскость в пространстве переменных c_γ с нормалью вдоль направления $\{1/\eta_\gamma\}$. В таблице 3 указаны вычисленные значения. Так как абсолютные значения коэффициентов эффективности не важны, то один из них положен равным единице.

Помимо нахождения эффективностей описанная выше процедура преследовала ещё две цели: проверить стабильность интенсивности во времени (см. рисунок 2.3), и, что более важно, правомерность самого приближения постоянных эффективностей (рисунок 2.4). Это приближение может нарушаться, например, из-за того, что фазовые пластинки установлены не совсем нормально к пучку, и при вращении они несколько уводят луч в сторону. Поэтому эффективность детектирования будет зависеть от конкретного положения пластинок.

Рисунок 2.4 требует пояснений. Как уже было сказано, уравнение (2.41) описывает гиперплоскость в пространстве переменных c_γ . После нахождения гиперплоскости спроецируем на неё наблюдаемые данные. Итого получится

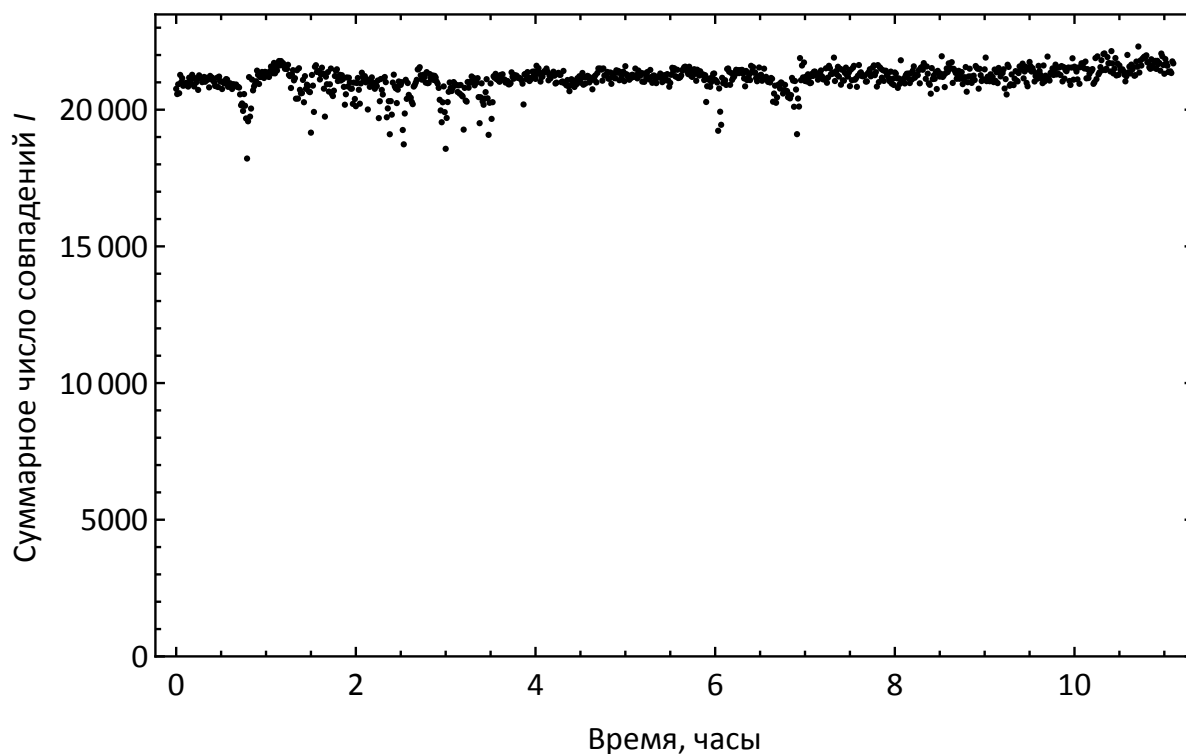


Рисунок 2.3 — Зависимость суммарной интенсивности счёта совпадений от времени после калибровки эффективностей детектирования.

массив точек в трёхмерном пространстве, который и изображён на рисунке. Предварительно для наглядности координаты точек были нормированы, чтобы максимальное (минимальное) значение не превышало 1 (-1). Цветом показано расстояние между гиперплоскостью и точкой в исходном четырёхмерном пространстве. В общем случае облако точек образует тетраэдр, вершины которого соответствуют ситуации, в которой весь сигнал направляется лишь в одну из пар детекторов. В нашем случае измерялись проекции только на факторизованные состояния, что накладывает дополнительные ограничения на возможные значения c_γ , и поэтому точки лежат на двумерной изогнутой поверхности.

В целом отклонение точек от аппроксимирующей гиперплоскости мало, но слева, вблизи одного угла, существует область пониженной интенсивности (синие точки). Понижения интенсивности также наблюдаются на рисунке 2.3. Расположение области свидетельствует о том, что неполадки вызваны одним из каналов детектирования. Последующее выяснение причины снижения интенсивности выявило, что один из детекторов обладал плохим контактом с источником питания. В дальнейшем неисправность была устранена.

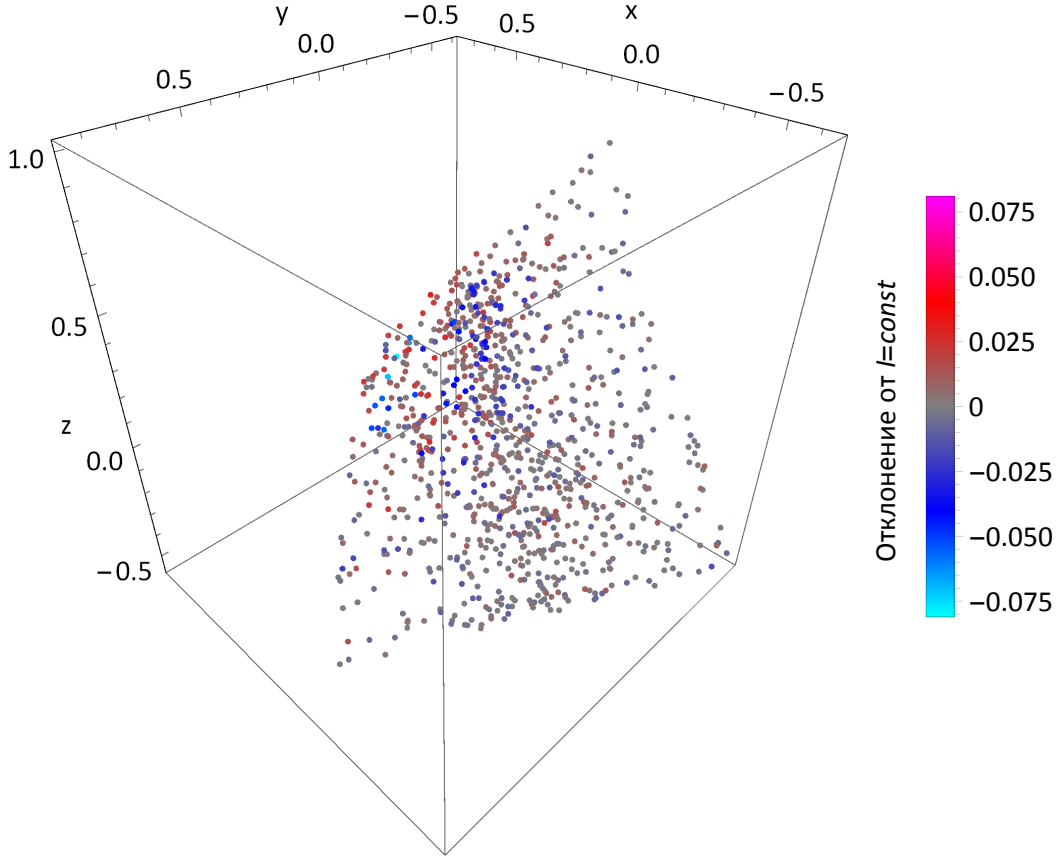


Рисунок 2.4 — Проекция нормированных отсчётов на аппроксимирующую гиперплоскость $I = \text{const}$.

2.5.3 Факторы, влияющие на чистоту приготавливаемого состояния

Состояние бифотонного поля $|\psi\rangle$ при СПР типа-I в случае непрерывной накачки описывается выражением:

$$|\psi_p\rangle = \int d\Omega d\theta_1 d\theta_2 f_p(\theta_1, \theta_2, \Omega) a_p^\dagger(\theta_1, \omega_1 + \Omega) a_p^\dagger(\theta_2, \omega_2 - \Omega) |vac\rangle, \quad (2.42)$$

где f — амплитуда бифотона, зависящая от углов вылета $\theta_{1,2}$ сигнального и холостого фотонов, а также от частотной расстройки Ω . Индекс p обозначает направление поляризации, $p = V$ для первого кристалла, а для второго $p = H$. Введём сокращённые обозначения:

$$x = \{\theta_1, \theta_2, \Omega\}, \quad dx = d\Omega d\theta_1 d\theta_2, \\ a_p^\dagger(\theta_1, \omega_1 + \Omega) a_p^\dagger(\theta_2, \omega_2 - \Omega) |vac\rangle = |\theta_1, \theta_2, \Omega\rangle |PP\rangle = |x\rangle |PP\rangle. \quad (2.43)$$

При наличии двух кристаллов состояние будет представлять собой суперпозицию:

$$|\psi\rangle = \int dx (f_V(x)|VV\rangle + f_H(x)|HH\rangle)|x\rangle. \quad (2.44)$$

Пусть схема детектирования описывается проектором M :

$$M_{p_1, p_2} = \int d\tilde{x} (|\tilde{x}\rangle\langle\tilde{x}|) \otimes (|P_1 P_2\rangle\langle P_1 P_2|) g_{p_1, p_2}(\tilde{x}), \quad (2.45)$$

где функция $g(\theta_1, \theta_2, \Omega)$ учитывает частотный и угловой диапазон, который детектируется в эксперименте. Она зависит от спектра пропускания фильтра IF, а также от размера диафрагм A1 и A2. Скорость счёта совпадений c будет пропорциональна выражению:

$$\begin{aligned} c &\propto \text{Tr}(M|\psi\rangle\langle\psi|) = \langle\psi|M|\psi\rangle = \\ &= \int dx g(x) \langle P_1 P_2 | (f_V(x)|VV\rangle + f_H(x)|HH\rangle) (f_V^*(x)\langle VV| + f_H^*(x)\langle HH|) | P_1 P_2 \rangle \equiv \\ &\equiv \langle P_1 P_2 | \rho | P_1 P_2 \rangle, \quad (2.46) \end{aligned}$$

где ρ — редуцированный оператор плотности, отвечающий за поляризационные степени свободы. Матрица ρ имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho &= |HH\rangle\langle HH| \int |f_H|^2 g dx + \\ &+ |HH\rangle\langle VV| \int f_H f_V^* g dx + \\ &+ |VV\rangle\langle HH| \int f_V f_H^* g dx + \\ &+ |VV\rangle\langle VV| \int |f_V|^2 g dx. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Видно, что недиагональные элементы, в отличие от диагональных, зависят от перекрытия амплитуд f_H и f_V для бифотонов, рождённых в разных кристаллах. Если амплитуды ортогональны (с весом g), то матрица плотности примет диагональный вид, что означает полностью смешанное состояние. Напротив, при одинаковых амплитудах образуется чистое белловское состояние. Таким образом, изменяя конфигурацию экспериментальной установки g , например, с помощью диафрагм, можно влиять на чистоту приготавливаемого состояния.

Если ограничиться частотными степенями свободы, то приведённое выше рассуждение упрощается. Начнём с рассмотрения состояния $|\psi\rangle = |HH\rangle +$

$e^{i\varphi}|VV\rangle$. Наличие дополнительной относительной фазы φ обусловлено двумя причинами. Во-первых, возникает набег фаз между поляризационными компонентами накачки в первом кристалле. Во-вторых, у фотонов, рождённых в первом кристалле, появляется дополнительная фаза при их прохождении через второй кристалл [69]:

$$\varphi = (k_e(\omega_p) - k_o(\omega_p))L + (k_e(\omega_1 + \Omega) + k_e(\omega_2) - \Omega)L, \quad (2.48)$$

где ω_p — частота накачки, L — толщина кристалла. Образовав матрицу плотности $|\psi\rangle\langle\psi|$ и проинтегрировав её по частотным переменным, найдём опять, что из-за дисперсии показателей преломления состояние бифотона является смешанным.

Если спектр накачки узкий, то интегрирование по ω_p снимается. Для получения чистых состояний в частотно невырожденном режиме можно компенсировать набег фаз [43]. При совпадающих частотах $\omega_1 = \omega_2$ зависимость $\varphi(\Omega)$ становится квадратичной по Ω и введение компенсатора становится не нужным.

В настоящей работе используется частотно вырожденный синхронизм, а накачкой служит диодный лазер, ширина спектра которого без дополнительных ухищрений составляет порядка 1 нм. Поэтому в выражении (2.48) учтём лишь первое слагаемое. На интервале в 1 нм зависимость $\varphi(\lambda_p)$ практически линейна с коэффициентом наклона $d\varphi/d\lambda_p = 11.2$ рад/нм. Данное значение велико и следует ожидать практически полностью смешанного состояния.

Для проверки чистоты приготавливаемого состояния производилось следующее измерение. Положение фазовых пластинок в первом канале соответствовало проекции на диагональную поляризацию $|D\rangle$, а во втором канале выполнялась проекция на линейную поляризацию с переменным углом $|\theta\rangle$. Накачка выставлялась диагонально. В данном случае скорость счёта совпадений c :

$$c \propto \langle D\theta|\rho|D\theta\rangle = \frac{1}{4}(1 + V \sin 2\theta), \quad (2.49)$$

где V — видность полученной зависимости. В то же время число единичных отсчётов остаётся постоянным.

На рисунке 2.5 приведена теоретическая зависимость видности от ширины спектра накачки для гауссовой формы линии. Для ширины спектра 1 нм видность равна нулю, что и было обнаружено в эксперименте. Для получения высоких значений видности требуется ширина спектра $\lesssim 0.1$ нм, что и было достигнуто введением дифракционной решётки по схеме Литтроу.

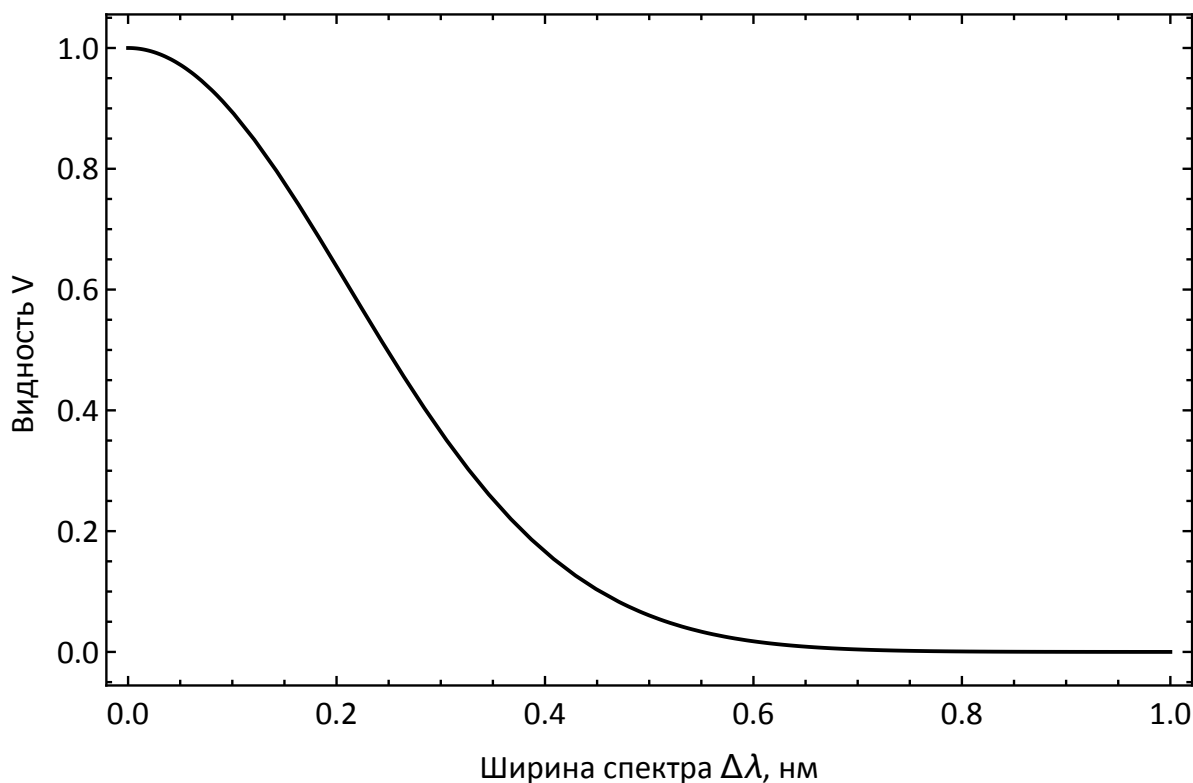


Рисунок 2.5 — Теоретическая зависимость видимости V от ширины спектра накачки $\Delta\lambda$, определённой на полувысоте. Для расчёта использовалась гауссова форма линии.

Видность лимитируется двумя факторами: шириной спектра накачки и конечным угловым диапазоном, который выделяется диафрагмами. Измерения ширины линии с помощью резонатора Фабри — Перо с областью свободной дисперсии 3 ГГц (1.7×10^{-3} нм для рабочей длины волны) выявили следующую особенность работы применяемого нами диода. При токе менее 39 мА ширина линии $\Delta\omega \ll 3$ ГГц, а при увеличении тока $\Delta\omega \gg 3$ ГГц. Поэтому для выяснения влияния частотного и пространственного фактора, были проведены измерения видимости при низком (37 мА) и высоком (100 мА) токах, а также при открытых и закрытых диафрагмах (см. таблицу 4). Диаметры закрытых диафрагм $A1$ и $A2$ равнялись 0.9 мм и 1.5 мм соответственно, что позволило выделить примерно одинаковый угловой диапазон 0.1° . На рисунках 2.6 и 2.7 изображена типичная зависимость скорости счёта совпадений и единичных отсчётов от угла поворота поляризации θ в одном из каналов.

Данные из таблицы 4 позволяют утверждать, что ни частотный, ни пространственный фактор не является доминирующим. Для получения как можно более чистых состояний требуется одновременно сузить спектр и закрыть диафрагмы. Однако при этом скорость счёта совпадений падает примерно в 60 раз,

Таблица 4 — Видность при различной ширине спектра и диаметре диафрагм. Условные обозначения: У — узкий спектр $\Delta\omega \ll 3$ ГГц, Ш — широкий спектр $\Delta\omega \gg 3$ ГГц; О — диафрагмы открыты, З — диафрагмы закрыты до диаметра 0.9 мм и 1.5 мм.

Спектр	Диафрагмы	Видность, %
У	З	92 ± 2
Ш	З	81 ± 2
У	О	86 ± 2
Ш	О	77 ± 2

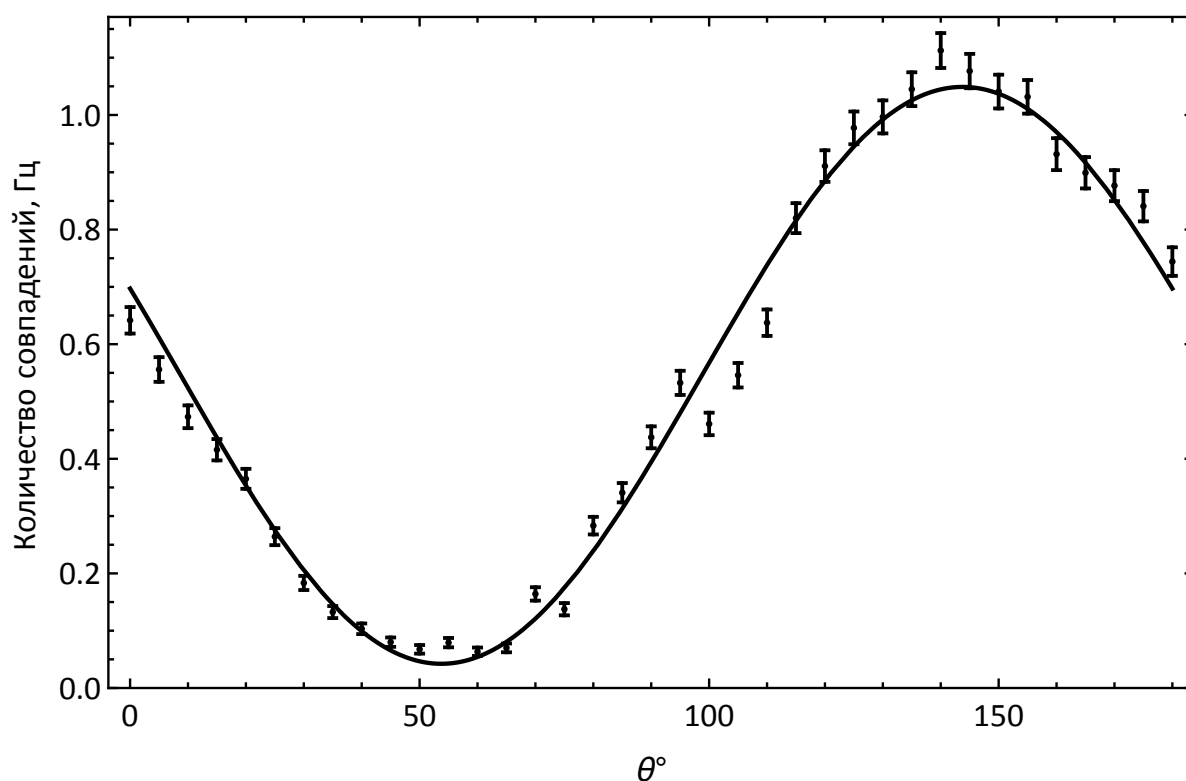


Рисунок 2.6 — Зависимость скорости счёта совпадений от угла поворота поляризации θ в одном из каналов при закрытых диафрагмах (диаметры 0.9 мм и 1.5 мм) и узком спектре $\Delta\omega \ll 3$ ГГц (ток диода 37 мА). Видность $92 \pm 2\%$.

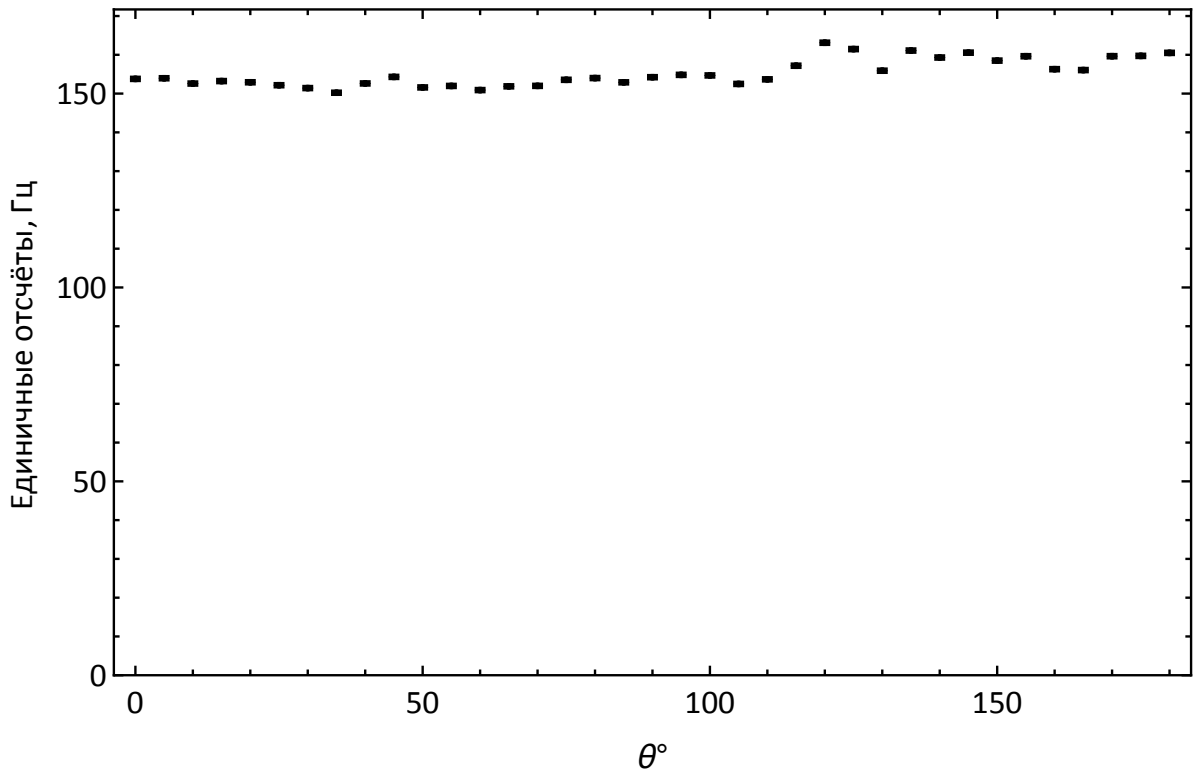


Рисунок 2.7 — Зависимость количества единичных отсчётов от угла поворота поляризации θ в одном из каналов при тех же условиях, что и на рисунке 2.6.

что приводит к неприемлемо долгой процедуре томографии. Поэтому в дальнейших измерениях использовалось значение тока 100 мА, а диафрагмы были открыты.

2.5.4 Сходимость

Сравнение исследуемого адаптивного протокола томографии проводилось со стратегией случайных измерений, которая является оптимальной среди неадаптивных методов [70, теорема 3.1]. В эксперименте томографировались два состояния: факторизованное $|HH\rangle$ и перепутанное белловское $(|HH\rangle + |VV\rangle)/\sqrt{2}$.

На рисунках 2.8а и 2.8в показаны зависимости размера апостериорного распределения $\bar{d}_B^2(N)$ от числа зарегистрированных событий N , усреднённые по нескольким проходам томографии (обычно 15). Параметры аппроксимации зависимости $\bar{d}_B^2(N)$ степенной функцией вида cN^a представлены в таблице 5. В обоих случаях наблюдается преимущество адаптивного протокола над неадаптивным

Таблица 5 — Параметры аппроксимации размера распределения $\bar{d}_B^2(N)$ функцией вида cN^a .

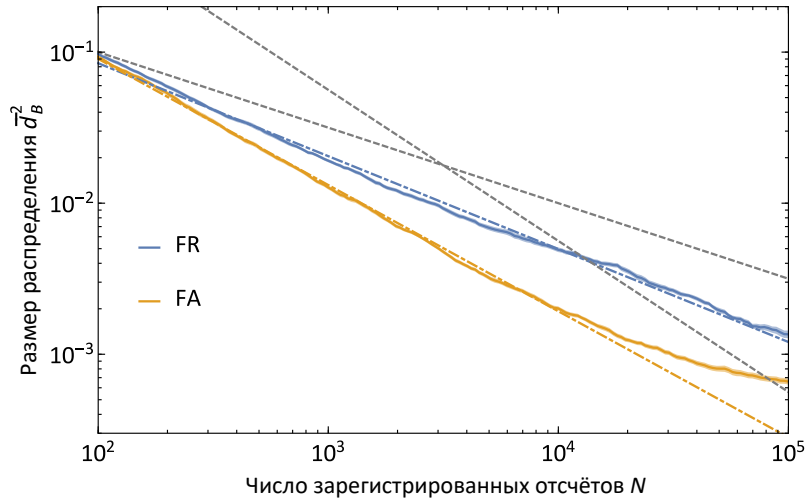
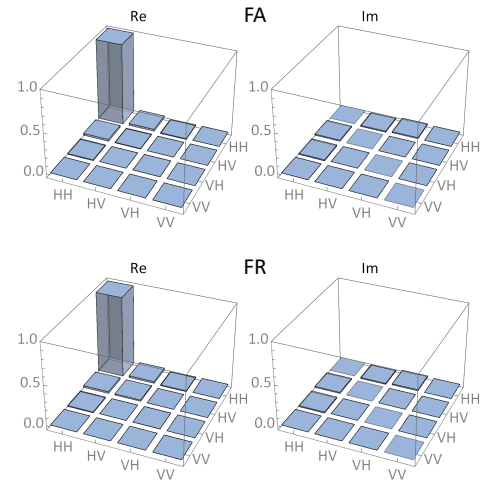
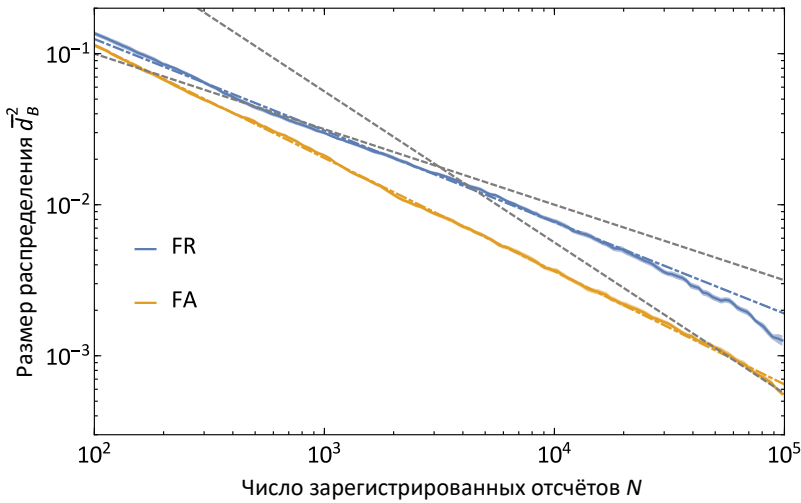
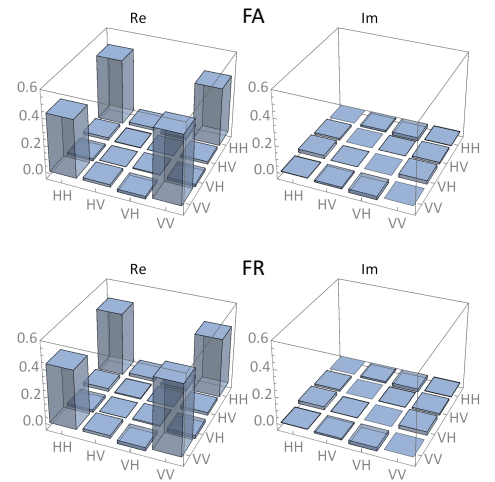
Состояние	Измерения	a	c
$ HH\rangle$	Адаптивные	-0.835 ± 0.003	4.23 ± 0.10
	Случайные	-0.614 ± 0.002	1.42 ± 0.03
$(HH\rangle + VV\rangle)/\sqrt{2}$	Адаптивные	-0.749 ± 0.003	3.60 ± 0.09
	Случайные	-0.606 ± 0.004	2.04 ± 0.06

методом. Матрицы плотности, полученные в ходе томографии, усреднённые по нескольким реализациям, изображены на рисунках 2.8б и 2.8г. Также адаптивный метод лучше восстанавливает чистоту состояния $\text{Tr } \rho^2$ (см. рисунок 2.9а) и степень перепутывания, называемую concurrence [71] (см. рисунок 2.9б).

Скорость сходимости для адаптивного протокола несколько отличается от ожидаемого поведения N^{-1} . Это можно объяснить двумя факторами: погрешностью в установке углов фазовых пластинок (порядка 0.2°) и отличием измеряемого состояния от идеально чистого. Первая причина исследовалась ранее в работе [8, приложение]. Второй пункт рассматривается ниже в разделе 2.6.1, посвящённом численным симуляциям. Также отметим, что кривая $\bar{d}_B^2(N)$ для адаптивного протокола на рисунке 2.8а явно загибается при $N \gtrsim 10^4$. Наиболее вероятное объяснение — томографируемое состояние имеет малые и почти вырожденные собственные значения, и поэтому оно подвержено проблеме плато в зависимости $\bar{d}_B^2(N)$ (см. раздел 2.6.2). В целом, причины ухудшения точности адаптивной томографии кроются в фундаментальных ограничениях факторизованных измерений, которые будут рассмотрены в 4.4.

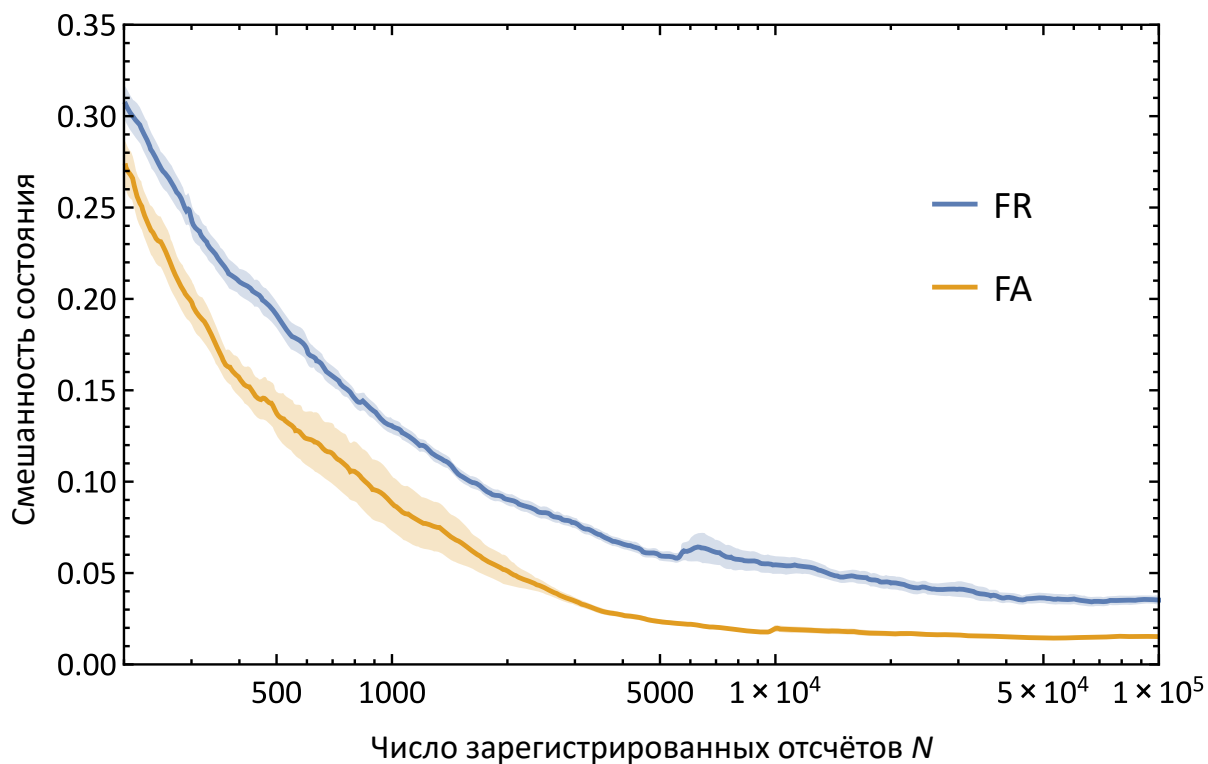
2.5.5 Влияние шумов

В данном разделе рассматривается влияние инструментальных шумов в экспериментальной установке на точность томографии. В ходе эксперимента обнаружено, что адаптивная томография куквартов менее чувствительна к шумам, чем неадаптивная. Ранее этот факт был показан для случая одного кубита посредством численных симуляций в работе [8].

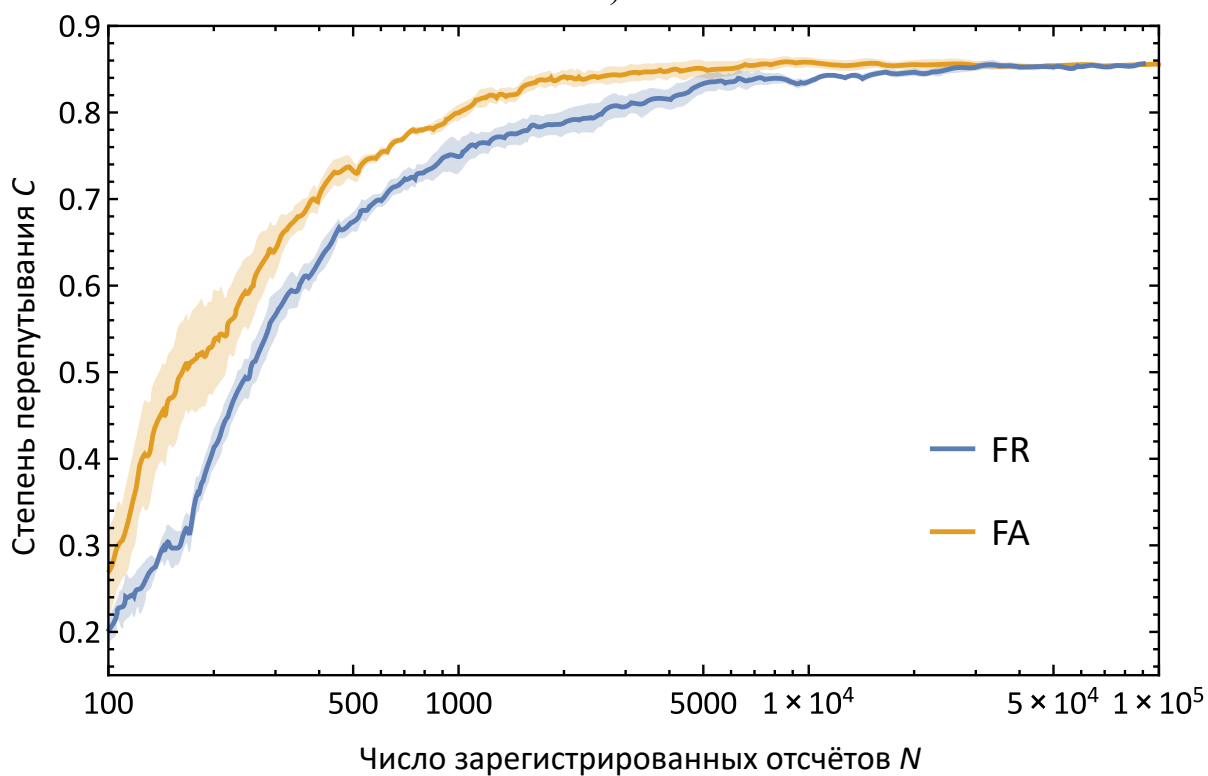
а) Сходимость для $|HH\rangle$.б) Матрица для $|HH\rangle$.в) Сходимость для $(|HH\rangle + |VV\rangle)/\sqrt{2}$.г) Матрица для $(|HH\rangle + |VV\rangle)/\sqrt{2}$.

FR — случайные измерения, FA — адаптивные.

Рисунок 2.8 — Усреднённые экспериментальные зависимости размера апостериорного распределения \bar{d}_B^2 от числа зарегистрированных совпадений N для (а) факторизованного и (в) перепутанного состояния. Жирные линии — размер распределения, пунктир — аппроксимация степенной функцией вида $d_B^2(N) = cN^a$, а штрих-пунктир — зависимости $\propto N^{-1/2}$ и $\propto N^{-1}$, отложенные здесь и далее для сравнения. На рисунках (б) и (г) показаны усреднённые матрицы плотности, найденные по результатам томографии при $N = 10^5$. Слева изображена вещественная часть матричных элементов, справа — мнимая.



а)



б)

FR — случайные измерения, FA — адаптивные.

Рисунок 2.9 — Экспериментальная зависимость (а) смешанности $1 - \text{Tr} \rho^2$ состояния $|HH\rangle$ и (б) степени перепутывания C (concurrence) белловского состояния $(|HH\rangle + |VV\rangle)/\sqrt{2}$ от числа зарегистрированных совпадений N . Цветная заливка — область в одно стандартное отклонение среднего.

Нами использовалась следующая модель шума: каждый раз при повороте фазовой пластинки WP1-4 её положение выставляется на угол $\theta_i + \delta\theta_i$ вместо точного значения угла θ_i , которое используется при построении оценок. Величина $\delta\theta_i$ является случайной, распределённой равномерно на отрезке $[-\Delta\theta, \Delta\theta]$.

И вновь для экспериментальной проверки точности томографии нельзя прибегнуть к расстоянию до истинного состояния, так как оно доподлинно неизвестно⁵. Вместо этого будем использовать величину d_{spr}^2 , которую назовём *разбросом* результатов. Она показывает воспроизводимость оценок матриц плотности от одного запуска томографии к другому. Пусть $\hat{\rho}_k(N)$ — оценка, полученная при k -ом запуске, тогда разброс d_{spr}^2 по определению равен:

$$d_{\text{spr}}^2(N) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K d_B^2(\hat{\rho}_k(N), \sigma(N)) \quad (2.50)$$

где $\sigma(N) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{\rho}_k(N)$ — средняя оценка на шаге N по K запускам.

На рисунке 2.10 изображена экспериментально полученная зависимость разброса от числа зарегистрированных отсчётов $d_{\text{spr}}^2(N)$ ($K = 10$) для томографии Белловского состояния. Рассмотрены три различных амплитуды шума: $\Delta\theta = \{0^\circ, 3^\circ, 5^\circ\}$. Нулевая амплитуда означает, что дополнительные искусственные шумы не вносятся, и поведение томографии определяется возможностями подвижек, где установлены фазовые пластинки (их погрешность $\approx 0.2^\circ$). При умеренном объёме статистики $N \lesssim 10^3$ различия в сходимости для адаптивного протокола (FA) и стратегии случайных измерений (FR) не наблюдается. Но когда зависимости $d_{\text{spr}}^2(N)$ выходят на насыщение для больших N , шумовой порог для FA располагается ниже. Таким образом, предельно достижимая точность томографии выше для адаптивного протокола при прочих равных. С ростом $\Delta\theta$ предельные значения разброса d_{spr}^2 для случайного и адаптивного протокола сближаются. В нашем случае разница становится несущественной при $\Delta\theta = 5^\circ$. Заметим, что при $\Delta\theta = 0^\circ$ FA ещё продолжает сходиться даже спустя $N = 10^5$, в то время как FR выходит на насыщение при $N \approx 10^4$.

Качественно понять снижение чувствительности к погрешностям в установке углов фазовых пластинок для адаптивной томографии можно следующим образом. Если известны вероятности томографически полного набора измерений, то восстановить матрицу плотности не составит труда. В реальности вероятности

⁵Томография даёт хорошую оценку истинного состояния, но в проводимых экспериментах сама процедура томографии является объектом исследования, поэтому необходим другой критерий точности.

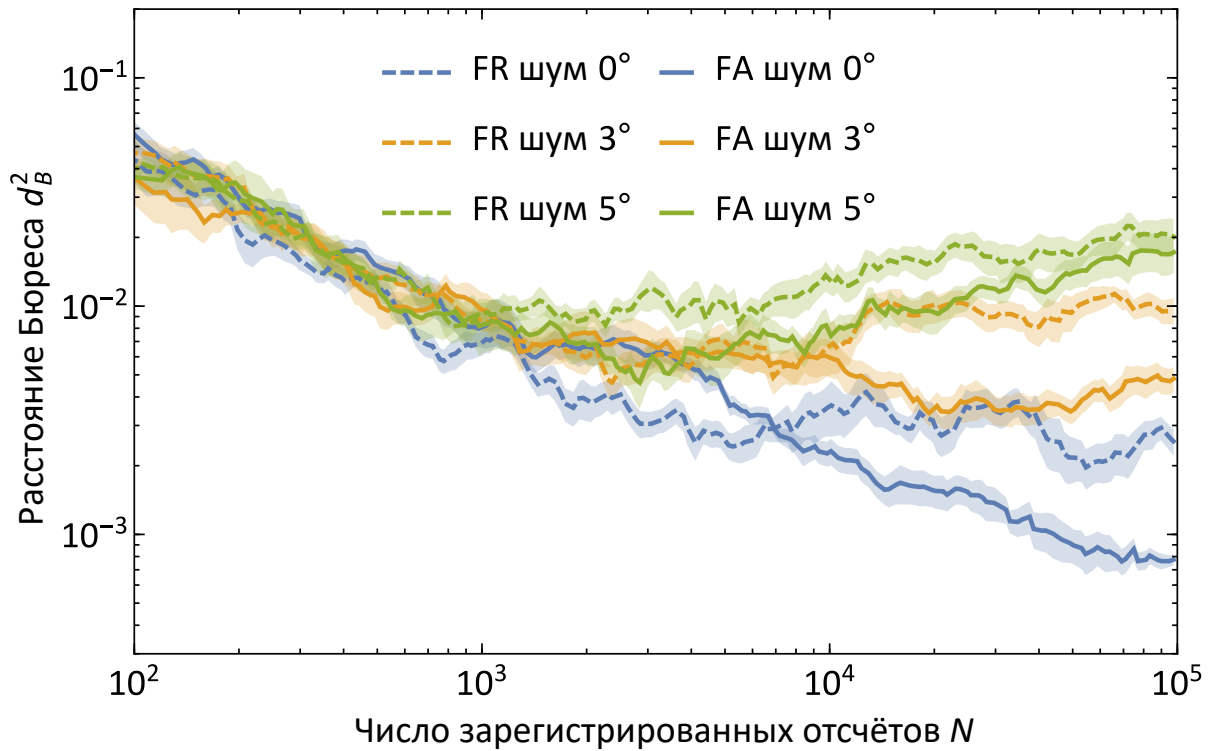


Рисунок 2.10 — Результаты эксперимента по томографии при наличии инструментальных ошибок. Изображена зависимость $d_{\text{spr}}(N)$ разброса результатов (2.50) от числа зарегистрированных отсчётов N . Пунктир соответствует случайным измерениям (FR), сплошные линии — адаптивным (FA). Цвет отображает уровень вносимых ошибок: голубой — дополнительный шум отсутствует, жёлтый — отклонение фазовых пластинок в пределах 3° , зелёный — 5° . Заливка обозначает область в одно стандартное отклонение среднего по 10 проходам томографии.

всегда определены с какой-то погрешностью, поэтому цель состоит в наиболее точной оценке вероятностей. Пусть выполняется томография состояния ρ_0 , и ROVM элементы $M_{\alpha\gamma} = M_\gamma(\theta_i)$ параметризованы углами θ_i . Адаптивная томография преимущественно выбирает такие параметры θ_i , которые дают малые вероятности исходов $p_A(\theta_i)$ (см. раздел 2.1). Следовательно, $p_A(\theta_i)$ принимают свои экстремальные значения, и погрешность определения вероятности δp_A зависит квадратично от неопределённости параметров $\delta\theta_i$: $\delta p_A = \mathcal{O}(\delta\theta_i^2)$. Для неадаптивных протоколов это соотношение выполняется только в случае, если ROVM выровнен относительно истинного состояния [8]. Для неадаптивных протоколов типично $\delta p_R = \mathcal{O}(\delta\theta_i) \gg \delta p_A$.

2.6 Численные симуляции

2.6.1 Сходимость

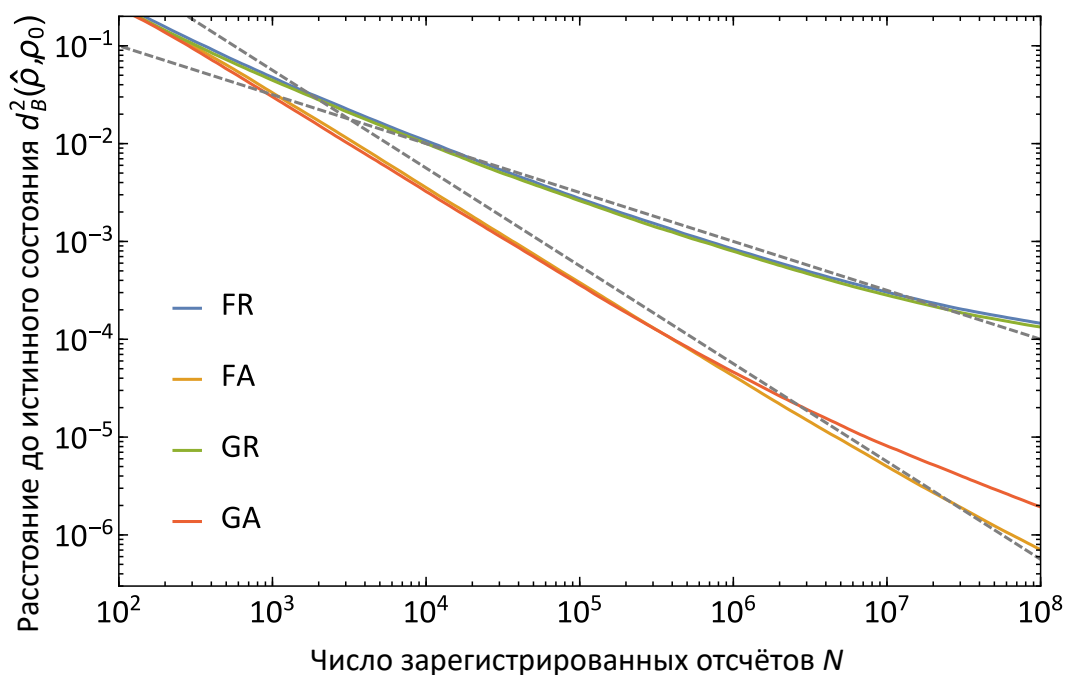
Используемая экспериментальная установка, изображённая на рисунке 2.2, допускает лишь класс *факторизованных* измерений, который будем обозначать буквой F . Проективные измерения *общего вида* без ограничения на факторизуемость (класс G) также можно экспериментально реализовать, но это требует гораздо бóльших усилий [39]. Из общих соображений логично ожидать, что томография с измерениями общего вида будет давать лучшую точность оценок, так как класс G гораздо шире F . В данном разделе исследуется вопрос о влиянии класса измерений (F или G) и адаптивности (A — адаптивные или R — неадаптивные) на точность и о соотношении этих двух факторов.

Из литературы известно несколько результатов касательно чистых состояний. В работе [39] показано, что неадаптивные измерения во взаимно несмещенных базисах (принадлежат классу G , так как требуются проекции на перепутанные состояния) могут улучшить точность томографии *некоторых* состояний. В целом, измерения общего вида не хуже факторизованных (формально будем писать, что $GR \geq FR$, где отношение «больше» означает «выше точность»). Тем не менее, ситуация меняется для адаптивных протоколов [12]: в среднем адаптивные факторизованные измерения превосходят случайные измерения общего вида ($FA > GR$).

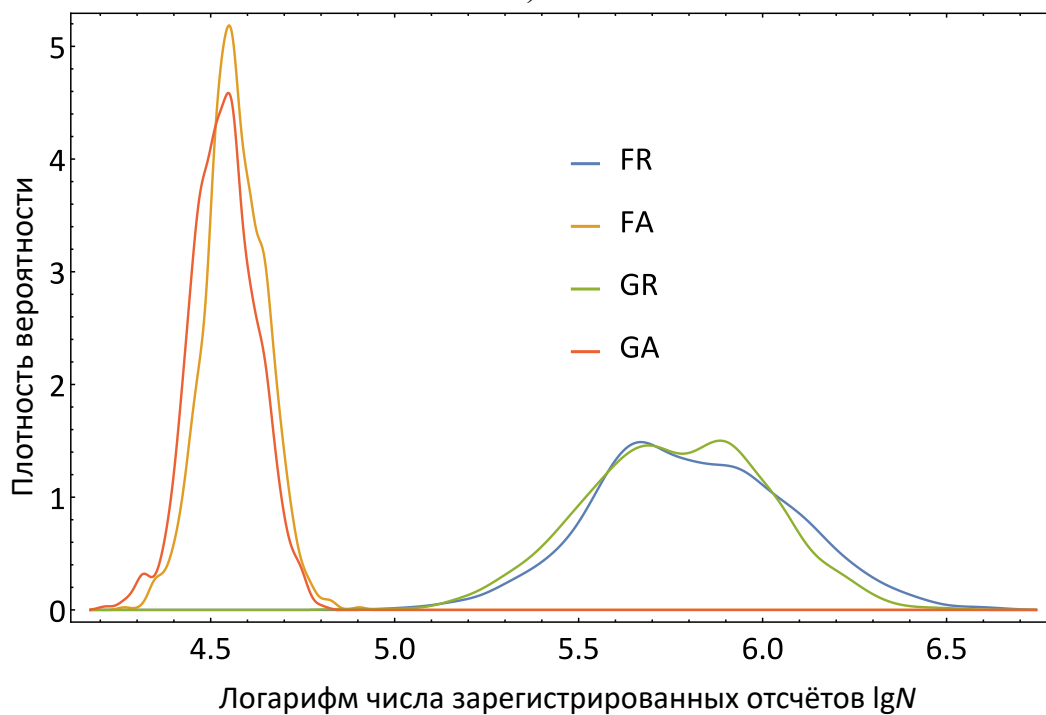
Нами были проведены численные симуляции байесовской томографии для всех четырёх комбинаций измерений: факторизованные случайные (FR), факторизованные адаптивные (FA), общие случайные (GR) и общие адаптивные (GA). Исследовались как чистые состояния, так и смешанные.

Результаты симуляций для чистых состояний приведены на рисунке 2.11. Для каждого из четырёх протоколов томографировалось по 1000 случайных состояний, распределённых равномерно по мере Хаара. В качестве априорного распределения взято распределение $p_{\Delta}(\rho)$ (2.11), равномерное в симплексе собственных значений⁶. Точность томографии оценивается как средний квадрат

⁶В предварительных симуляциях расчёты выполнялись также для других априорных распределений (2.9) и (2.10). Было обнаружено, что асимптотическая сходимость расстояния до истинного состояния отли-



а)



б)

F — факторизованные измерения, G — измерения общего вида, R — случайные, A — адаптивные.

Рисунок 2.11 — Результаты численных симуляций для чистых состояний. Изображены (а) зависимость расстояния до истинного состояния, усреднённая по апостериорному распределению, от числа зарегистрированных отсчётов N и (б) гистограмма значений N , необходимых для достижения требуемой точности

$$d_B^2 = 10^{-3}.$$

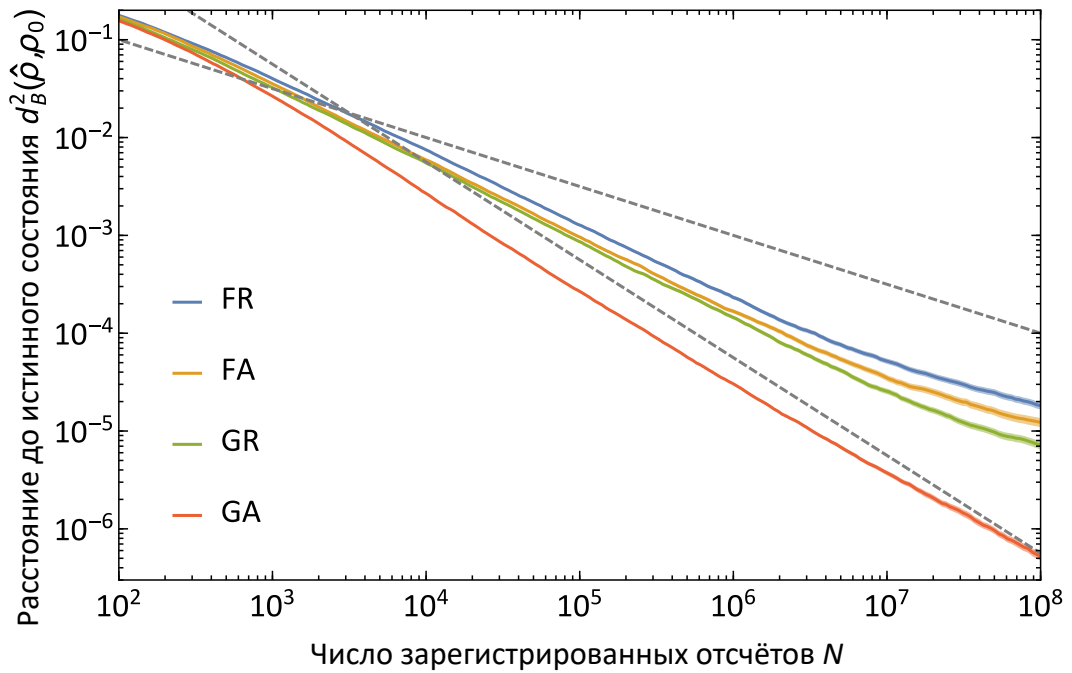
расстояния Бюреса $d_B^2(\hat{\rho}(N), \rho_0)$ между текущей оценкой $\hat{\rho}(N)$ и истинным состоянием ρ_0 (см. рисунок 2.11а). Также полезно рассмотреть гистограммы объёма выборки N , требуемой для достижения фиксированной точности $d_B^2 = 10^{-3}$, в разных проходах томографии (см. рисунок 2.11б).

Из результатов рисунка 2.11 можно заключить, что адаптивность является решающим фактором для точности томографии чистых состояний, так как сходимость не зависит от класса измерений (F или G). Аппроксимация зависимостей $d_B^2(\hat{\rho}(N), \rho_0)$ степенной функцией вида cN^a даёт скорость сходимости $a = -0.958 \pm 0.008$ для адаптивных протоколов и $a = -0.588 \pm 0.011$ для случайных, что близко к теоретически ожидаемому поведению N^{-1} и $N^{-1/2}$ соответственно. Подытоживая, для чистых состояний имеем соотношение $GA = FA > GR = FR$ — в среднем преимущество от измерений общего вида не наблюдается.

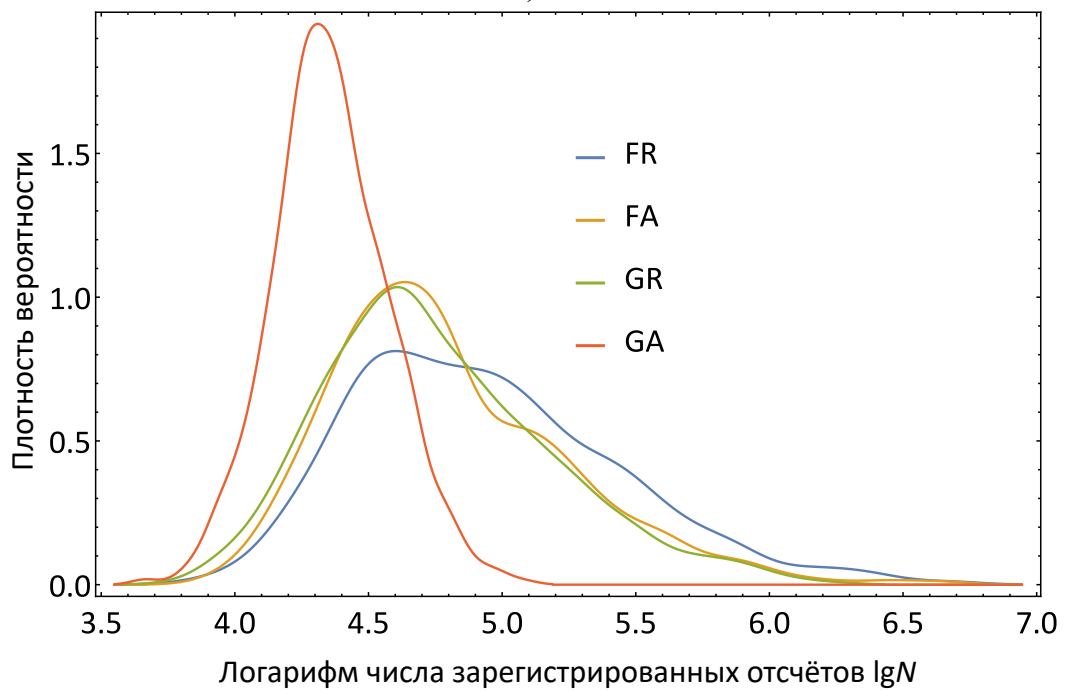
Ввиду того, что идеально чистые состояния невозможно приготовить в эксперименте, важно проверить поведение протоколов томографии для смешанных состояний. Представленные на рисунке 2.12 зависимости усреднены по 1000 случайным истинным состояниям, распределённым равномерно по мере, порождённой метрикой Бюреса. Для смешанных состояний картина качественно меняется: $GA > FA = GR \gtrsim FR$. Безусловным лидером по точности является протокол GA , демонстрирующий оптимальную сходимость N^{-1} ($a = -1.00 \pm 0.02$). Остальные протоколы ведут себя примерно одинаково, обладая асимптотикой $N^{-3/4}$ ($a = -0.77 \pm 0.03$). Заметим, что ранее сходимость $N^{-3/4}$ была предсказана теоретически для неадаптивной томографии смешанных состояний кубитов [33].

Как и ожидалось, при переходе от чистых к смешанным состояниям точность для протокола GA не изменилась, а для случайных измерений (FR и GR) даже улучшилась. Качество оценок для FA ухудшилось, что несколько неожиданно, так как в некотором смысле томография смешанных состояний проще чистых для случая одного кубита [8]. Поэтому наивно обобщая этот результат на более высокие размерности, можно было бы ожидать, что точность для FA как минимум не уменьшится. В разделе 4.4 станут понятны ограничения факторизованных измерений, из-за которых наблюдается такое поведение при томографии смешанных состояний.

чается только на множитель (см. также 2.6.2). Таким образом, соотношения точности между различными типами измерений не зависят от априорного распределения.



а)



б)

Рисунок 2.12 — То же, что и на рисунке 2.11 только для случайных смешанных состояний, распределённых равномерно по мере, порождённой метрикой Бюреса.

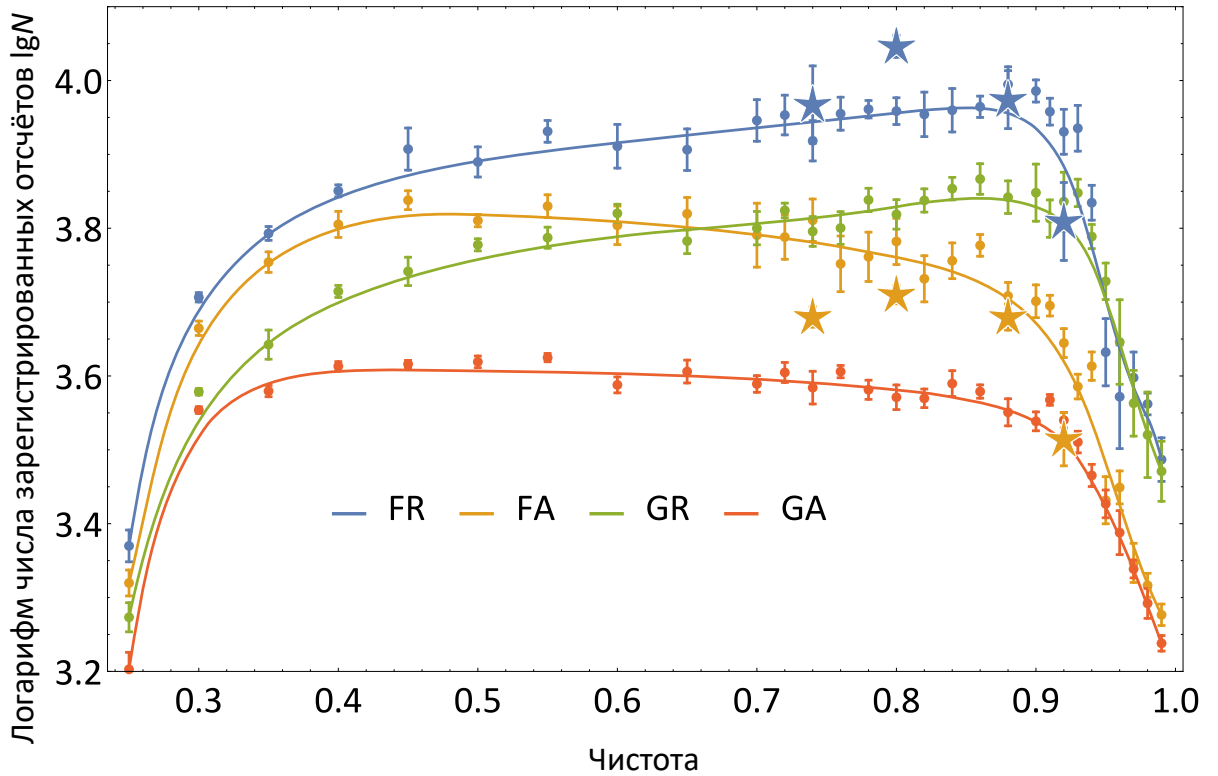


Рисунок 2.13 — Результаты томографии для состояний различной чистоты. По оси ординат отложены значения N , необходимые для достижения заданной точности (определяемой как расстояние до истинного состояния $\bar{d}_B^2(N) = d_{\text{err}}^2 = 5 \times 10^{-3}$) и усреднённые по случайным состояниям с заданной чистотой. Звёздочками отложены экспериментально полученные данные, а точками — результаты симуляций. Планки погрешностей соответствуют одному стандартному отклонению среднего. Сплошные линии добавлены для наглядности.

Из соображений непрерывности, очевидно, что для достаточно чистых состояний должно всё ещё выполняться соотношение $GA = FA > GR = FR$, которое справедливо для идеально чистых состояний. Чтобы исследовать переход от одних состояний к другим, были проведены симуляции для состояний с фиксированной чистотой $\text{Tr } \rho^2$. Для построения слоя $\text{Tr } \rho^2 = \text{const}$ из распределения $p_B(\rho)$ (2.9) вырезалось 10 истинных состояний. Затем расстояние до истинного состояния $\bar{d}_B^2(N)$ усреднялось по этим состояниям. На рисунке 2.13 изображена зависимость объёма выборки N , необходимого для достижения заданной точности $\bar{d}_B^2(N) = d_{\text{err}}^2 = 5 \times 10^{-3}$, от чистоты состояния. Для протоколов FA и FR также отложены экспериментальные точки. Они в целом соотносятся с результатами симуляций.

Для чистоты выше $p_{\text{pure}} \approx 0.94$ преимущество от использования измерений общего вида практически отсутствует, и остаётся справедливым соотношение для

чистых состояний ($GA = FA > GR = FR$). Для чистоты ниже p_{pure} применение измерений общего вида предпочтительно как для адаптивных ($GA > FA$), так и для неадаптивных протоколов ($GR > FR$). С другой стороны, выигрыш от адаптивности всё ещё перевешивает ($FA > GR$) для чистоты выше $p_{\text{adapt}} \approx 0.7$. Стоит отметить, что сами граничные значения p_{adapt} и p_{pure} зависят от выбранного уровня ошибки d_{err}^2 . При уменьшении d_{err}^2 порог p_{adapt} также понижается из-за разной скорости сходимости для адаптивных и неадаптивных протоколов. Напротив, p_{pure} стремится к единице, потому что смешанные состояния, близкие к чистым, становятся томографически различимыми от идеально чистых для меньших d_{err}^2 . Например, $p_{\text{pure}} \approx 0.98$ для $d_{\text{err}}^2 = 10^{-3}$.

2.6.2 Влияние априорного распределения

Хотя усреднённая по некоторому ансамблю истинных состояний точность томографии (измеренная как среднее по апостериорному распределению расстояние до истинного состояния) отличается только на множитель для различных априорных распределений, сходимость томографии для отдельно взятого истинного состояния может существенно изменяться. Причиной является то, что в выбранном априорном распределении окрестность истинного состояния может быть очень маловероятна. Среди рассмотренных априорных распределений (2.9)–(2.11) плотность вероятности состояний с вырожденными собственными значениями равна нулю для распределений Бюреса $p_B(\rho)$ и Гильберта — Шмидта $p_{HS}(\rho)$ (см. выражение (2.12)). Такой эффект есть следствие геометрии пространства матриц плотности [51]. Распределение $p_{\Delta}(\lambda) \propto 1$, равномерное в симплексе собственных значений, специально построено так, чтобы геометрический фактор сокращался, и плотность вероятности всех состояний была отлична от нуля.

На рисунке 2.14 сравниваются зависимости среднего расстояния до истинного состояния $d_B^2(\hat{\rho}(N), \rho_0)$ от числа зарегистрированных отсчётов N для бюресовского $p_B(\rho)$ и симплексного $p_{\Delta}(\rho)$ априорного распределения в протоколе FA . Для распределения Гильберта — Шмидта $p_{HS}(\rho)$ получаются похожие результаты как для $p_B(\rho)$. Истинное состояние диагонально с тоекратно вырожденным собственным значением: $\lambda_i = \{0.9925, 0.0025, 0.0025, 0.0025\}$ (чистота ≈ 0.985). В начале сходимость протокола FA близка к $c_1 N^{-1}$ для распределения

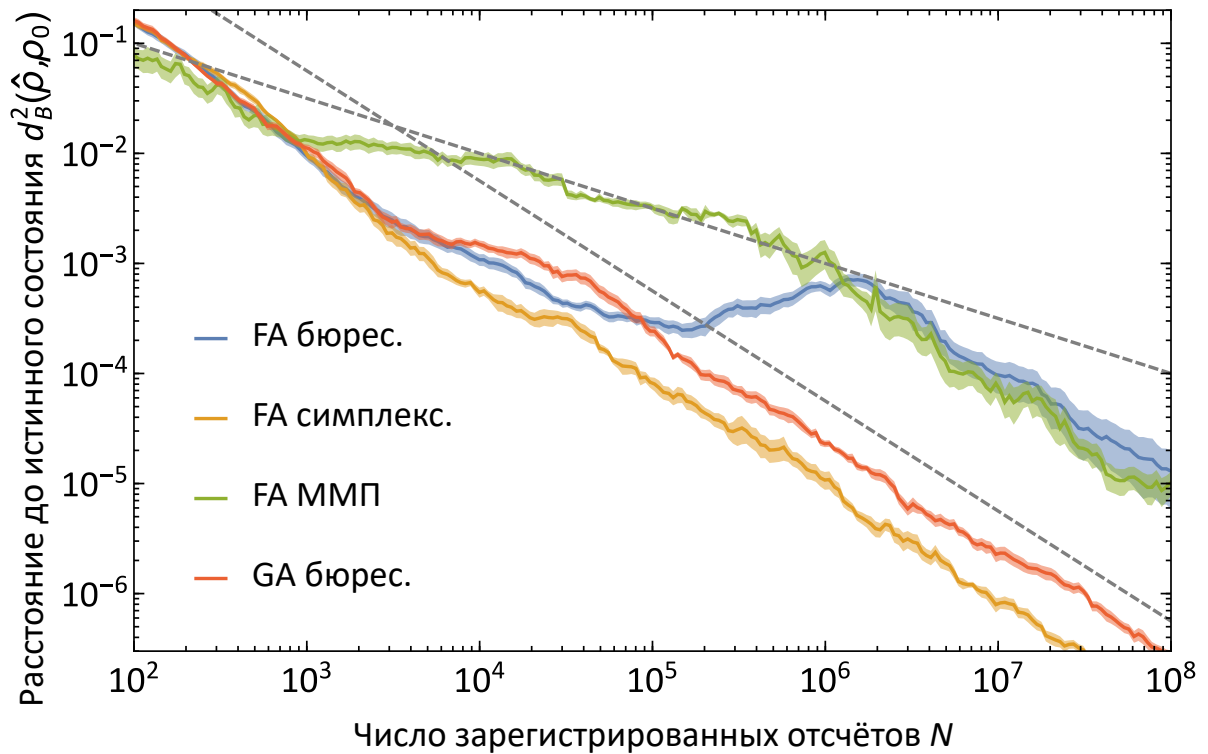


Рисунок 2.14 — Влияние априорного распределения на сходимость томографии. Изображена зависимость среднего расстояния $d_B^2(\hat{\rho}(N), \rho_0)$ до истинного состояния от числа зарегистрированных отсчётов N для протокола FA с бюресовским (голубая линия) и симплексным распределением (жёлтая). Для протокола GA проблема плато менее выражена (красная). Также для сравнения отложено расстояние между истинным состоянием и оценкой по методу максимального правдоподобия (зелёная). Заливка соответствует одному стандартному отклонению среднего. Каждая кривая усреднена по 10 реализациям.

Бюреса, но затем возникает плато. После того, как собран достаточный объём статистики, сходимость $c_2 N^{-1}$ восстанавливается, однако, сомножитель становится на два порядка больше: $c_2/c_1 \sim 10^2$. Из-за плато расстояние $d_B^2(\hat{\rho}(N), \rho_0)$ не падает на длительном промежутке $2 \times 10^5 \lesssim N \lesssim 4 \times 10^6$, и может показаться, что процедура томография перестала сходиться. Применение симплексного априорного распределения убирает проблему плато: наблюдается сходимость N^{-1} и сомножитель c сохраняет своё изначальное значение на всём протяжении томографии.

Ухудшение сходимости для состояний с вырожденными собственными значениями проявляется не только для байесовских оценок. Оценки максимального правдоподобия не опираются ни на какие априорные распределения, но также подвержены проблеме плохой сходимости (см. рисунок 2.14, зелёная кривая). Для

оптимизации функции правдоподобия использовался алгоритм из работы [72]. Набор измерений и их результатов брался таким же, как и при байесовской томографии с симплексным априорным распределением по протоколу FA . В начале для метода максимального правдоподобия (ММП) наблюдается сходимость $N^{-1/2}$, в том месте, где располагается плато у байесовской томографии, но точность всё равно хуже. Асимптотически для больших N поведение для байесовского метода и ММП одинаково с учётом погрешности. В целом, можно утверждать, что ММП не лучше байесовских оценок.

Представленные результаты относятся к предельному случаю трижды вырожденной матрицы плотности. По мере удаления от вырожденных состояний, плато становится короче. Положение плато d_{plt}^2 пропорционально расстоянию от истинного состояния ρ_0 до множества состояний неполного ранга (ранга 3 для куквартов):

$$d_{\text{plt}}^2 \propto \min_{\text{rank } \rho=3} d_B^2(\rho_0, \rho) \approx \lambda_{\min} \text{ при } \lambda_{\min} \ll 1, \quad (2.51)$$

где λ_{\min} — минимальное собственное значение истинного состояния. Отметим также, что размер плато зависит от протокола — для GA оно значительно короче.

Таким образом, для приложений, где важно получить наилучшую точность, следует выбирать информативное априорное распределение, основываясь на физических соображениях, например, модели декогеренции в системе. Один из рецептов построения информативных априорных распределений приводится в работе [73].

2.7 Выводы по главе

Собрана экспериментальная установка на основе схемы с двумя нелинейными кристаллами, которая позволяет получать перепутанные состояния поляризационных куквартов. Проведена томография двух состояний: факторизованного $|HH\rangle$ и перепутанного белловского $(|HH\rangle + |VV\rangle)/\sqrt{2}$. Полученные результаты позволяют утверждать, что процедура адаптивной байесовской томографии даёт лучшую точность восстановления по сравнению со стратегией случайных измерений.

Также адаптивный протокол обладает меньшим шумовым порогом, возникающим из-за случайных ошибок в установке углов фазовых пластинок. Иными словами, при одинаковом уровне инструментальных ошибок, точность томографии выше для адаптивного протокола.

Обнаружен участок замедления скорости сходимости для адаптивного метода, проявляемый как в эксперименте, так и в результатах численного моделирования. Замедление скорости сходимости связано с вырожденными собственными значениями томографируемого состояния. Использование априорного распределения, равномерного в симплексе собственных значений, устраняет эту проблему.

В численных симуляциях исследовано влияние класса измерений (факторизованные или общего вида) и наличия адаптивности на точность томографии в зависимости от чистоты истинного состояния. Показано, что для достаточно чистых состояний адаптивность является решающим фактором. Для сильно смешанных состояний точность факторизованных измерений меньше, чем для измерений общего вида, независимо от применения или отсутствия адаптивности.

Результаты второй главы опубликованы в работе [74].

Глава 3. Томография процессов

В отличие от томографии состояний, описанной в главе 2, при томографии квантовых *процессов*, также называемых *каналами*, ставится задача определения неизвестного преобразования состояний системы [37]. В данной главе под процессом будет пониматься некоторое произвольное, но фиксированное преобразование начальных состояний в конечные состояния, абстрагируясь от временной динамики. Томография эволюции системы с течением времени в данной работе рассматриваться не будет, хотя примеры такой томографии известны в литературе [14; 75; 76].

3.1 Байесовское оценивание

Как и при томографии состояний оценку неизвестного квантового процесса будем производить в рамках байесовского подхода. Общая схема остаётся неизменной. Апостериорное распределение рассчитывается по формуле Байеса (ср. с (1.3)):

$$p(\chi|\mathcal{D}) \propto \mathcal{L}(\chi; \mathcal{D})p(\chi|\emptyset), \quad (3.1)$$

где $\mathcal{L}(\chi; \mathcal{D}) = \prod_n \mathbb{P}(\gamma_n|\chi, \alpha_n)$ — функция правдоподобия, а за $p(\chi|\emptyset)$ обозначено априорное распределение, определённое на множестве χ -матриц. За оценку истинного преобразования $\hat{\chi}$ берётся среднее по апостериорному распределению (ср. с (1.4)):

$$\hat{\chi} = \mathbb{E}_{p(\chi|\mathcal{D})}[\chi] = \int \chi p(\chi|\mathcal{D}) d\chi. \quad (3.2)$$

Неопределённость оценки $\hat{\chi}$ характеризуется размером распределения в выбранной метрике (1.49) (ср. с (1.9)):

$$\bar{d}_B^2 = \mathbb{E}_{p(\chi|\mathcal{D})}[d_B^2(\chi, \hat{\chi})] = \int d_B^2(\chi, \hat{\chi}) p(\chi|\mathcal{D}) d\chi. \quad (3.3)$$

Выражения (3.2) и (3.3) содержат многомерное интегрирование, поэтому, как и при томографии состояний, прибегнем к последовательной выборке по

значимости (см. раздел 2.1). Выражение (2.5) и правило обновления веса частицы (2.6) остаются справедливыми при замене $\rho \rightarrow \chi$. Алгоритм Метрополиса — Гастингса для повторной выборки из распределения также сохраняет свою структуру и выполняется, когда эффективный размер выборки S_{eff} (2.7) падает ниже порога в $1/10$ от полного числа частиц S : $S_{\text{eff}} < 0.1S$. При томографии сохраняющих след процессов использовалось $S = 10^3$ частиц, для процессов с потерями — $S = 10^4$. Отличие же от случая томографии состояний заключается в методах генерации априорного распределения и случайного блуждания на множестве χ -матриц.

3.1.1 Априорное распределение

Используемая в данной работе процедура генерации случайных χ -матриц различается для сохраняющих след каналов и процессов с потерями. Рассмотрим сначала первый случай. Идея основана на том факте, что операторы Крауса $\{E_k\}$ составляют блочную унитарную матрицу U (1.36). Таким образом, по заданной унитарной матрице U можно сначала найти операторные элементы $\{E_k\}$, а затем перейти к представлению χ -матрицей. В качестве U разумно выбрать случайную унитарную матрицу, распределённую равномерно по мере Хаара. Как уже было описано в 2.3, она может быть получена в результате QR разложения случайной матрицы G , принадлежащей ансамблю Жинибра: $G = UR$. На практике достаточно сгенерировать только первый «блочный столбец» матрицы U размера $D^3 \times D$ (аналогично для G), так как только он и задаёт χ -матрицу соответствующего процесса.

Генерация χ -матриц каналов с потерями опять же опирается на соотношение (1.36), однако, с учётом следующего факта. Предположим, несохраняющий след процесс $\mathcal{E}_{\text{n-p}}$ обладает операторами Крауса E_1, \dots, E_{D^2} , и пусть

$$\sum_{k=1}^{D^2} E_k^\dagger E_k = Q < I. \quad (3.4)$$

К набору операторов Крауса всегда можно добавить ещё один элемент E_{D^2+1} , чтобы получить сохраняющий след процесс \mathcal{E}_p . Действительно, перепишем (3.4) в

виде:

$$\sum_{k=1}^{D^2} E_k^\dagger E_k + \Delta Q = I, \quad (3.5)$$

где $\Delta Q = I - Q > 0$ — некий неотрицательно определённый оператор. Используя разложение Холецкого $\Delta Q = E_{D^2+1}^\dagger E_{D^2+1}$, можно явно найти недостающий оператор E_{D^2+1} . Таким образом, сначала генерируется случайная унитарная матрица U размера $(D^2 + D) \times D$. После того, как все $D^2 + 1$ операторов Крауса получены из матрицы U , последний из них отбрасывается, а по оставшимся D^2 операторам вычисляется χ -матрица преобразования \mathcal{E}_{n-p} .

3.1.2 Случайные блуждания

Алгоритм Метрополиса — Гастингса опирается на процедуру случайного блуждания, которая генерирует физически допустимую χ -матрицу χ' в окрестности старой матрицы χ . Идея заключается в следующем. Сначала по заданной χ -матрице находятся операторы Крауса $\{E_k\}$ и соответствующая унитарная матрица U (1.36). Затем к матрице U добавляется случайное приращение dU : $W = U + dU$. При этом, почти наверное, унитарность нарушится, поэтому W «проецируется» обратно на множество унитарных матриц посредством QR разложения: $W = U'R$. Наконец, новая матрица χ' вычисляется по найденной U' . Если dU будет малой (например, по норме Фробениуса $\|dU\| = \sum_{ij} |dU_{ij}|^2$), то из соображений непрерывности χ' будет также лежать в некоторой малой окрестности исходной матрицы χ .

В программной реализации протокола томографии dU принадлежит ансамблю Жинибра. Зависимость стандартного отклонения матричных элементов от размера распределения \bar{d}_B^2 (3.3) подобрана таким образом, чтобы доля принятых шагов в алгоритме Метрополиса — Гастингса оставалась примерно постоянной. Операторы Крауса $\{E_k\}$, соответствующие данной χ -матрице, могут быть найдены с помощью собственного разложения χ [37]:

$$\chi_{mn} = \sum_{ik} V_{mi} \delta_{ik} \lambda_i V_{nk}^*. \quad (3.6)$$

Подставляя это выражение в (1.37) и сравнивая с (1.32), находим, что операторы Крауса имеют вид:

$$E_k = \sqrt{\lambda_k} \sum_m V_{mk} \tilde{E}_m, \quad k = 1, \dots, D^2 \quad (3.7)$$

Для процессов с потерями требуется дополнительно хранить вспомогательный операторный элемент E_{D^2+1} , полученный в ходе генерации априорного распределения и отвечающий за потери, так как он не может быть найден по описанной выше процедуре.

3.2 Адаптивность

При переходе к томографии процессов критерий (2.2) выбора следующего оптимального измерения (конфигурации экспериментальной установки α_{N+1}) сохраняется, необходимо только провести формальную замену $\rho \rightarrow \chi$:

$$\alpha_{N+1} = \operatorname{argmax}_{\alpha} \left(\mathbb{H} \circ \mathbb{P}(\gamma|\alpha, \mathcal{D}_N) - \mathbb{E}_{p(\chi|\mathcal{D}_N)} \circ \mathbb{H} \circ \mathbb{P}(\gamma|\chi, \alpha) \right), \quad (3.8)$$

где $\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \mathcal{D}_N) = \int \mathbb{P}(\gamma|\chi, \alpha) p(\chi|\mathcal{D}_N) d\chi$.

Однако, непосредственное применение критерия (3.8) для сохраняющих след процессов и каналов с потерями различается. Причина заключается в разных схемах измерений, использованных в эксперименте. Экспериментальная проверка протокола была реализована для однокубитовых процессов, затрагивающих поляризацию одиночных фотонов, поэтому проведём рассмотрение на данном примере (подробнее см. 3.4). Ключевой величиной является вероятность исхода $\mathbb{P}(\gamma|\chi, \alpha)$. Для сохраняющих след процессов есть только два исхода: фотон зарегистрирован либо детектором под номером $\gamma = 0$, либо $\gamma = 1$. Счётчик фотонов при этом настраивается на регистрацию «до возникновения события», то есть ожидает регистрации фотона любым из детекторов. При такой настройке измерительной схемы потери не учитываются, так как они проявляются только в увеличении времени ожидания, которое не участвует в дальнейших вычислениях. Вероятности исходов, $\mathbb{P}(\gamma|\chi, \alpha)$, в точности определяются аналогом правила Борна (1.52). В силу линейности (1.52) по χ имеет место равенство $\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \mathcal{D}_N) = \mathbb{P}(\gamma|\hat{\chi}, \alpha)$, что позволяет несколько упростить вычисления, так как среднее $\hat{\chi}$ уже посчитано на этапе нахождения оценки истинной χ -матрицы.

Чтобы учесть потери в канале требуется регистрация дополнительного исхода — отсутствие фотона. Схема с тремя исходами ($\{0,0\}$ — нет отсчётов, $\{1,0\}$ — отсчёт в первом детекторе, $\{0,1\}$ — отсчёт во втором детекторе) была бы возможна, если существовал способ достоверно узнать наличие фотона на входе канала. Казалось бы это достигается использованием источника с условным приготовлением одиночных фотонов, однако, таким образом учитываются все потери: как связанные непосредственно с томографируемым процессом, так и, например, в измерительной части установки. Итого, в эксперименте нет метода гарантированно определить присутствие фотона на входе преобразования, поэтому схема с тремя исходами не подходит. С томографической точки зрения источник фотонов следует отнести к вероятностным. Его статистику с хорошей точностью можно считать пуассоновской.

Очевидным решением учёта потерь является измерение в течении фиксированного времени t . При этом помимо трёх вышеупомянутых исходов возникает ещё бесконечно много других вариантов вида $\{n_0, n_1\}$. Если измерение α длится заданное время t , то вероятность получения множества исходов $\{n_\gamma\} \equiv \{n_0, n_1\}$ равняется

$$\mathbb{P}(\{n_\gamma\}|\chi, \alpha, t) \propto \prod_{\gamma=0}^{D-1} \mathbb{P}^{n_\gamma}(\gamma|\chi, \alpha) e^{-I_\gamma \mathbb{P}(\gamma|\chi, \alpha)t}, \quad (3.9)$$

где I_γ — интенсивность излучения, попадающего на детектор под номером γ , при отсутствии потерь, ассоциированных с томографируемым процессом χ . В выписанном выражении предполагается, что источник фотонов обладает пуассоновской статистикой. Множители, не зависящие от χ , опущены, так как они не влияют на конечный результат. Для работы протокола интенсивность I_γ должна быть известна заранее до проведения томографии.

Интересно отметить, что для сохраняющих след преобразований вероятность $\mathbb{P}(\{n_\gamma\}|\chi, \alpha, t)$ сводится к $\mathbb{P}(\gamma|\chi, \alpha)$. Действительно, в этом случае имеем независимую от χ сумму

$$\sum_{\gamma} I_\gamma \mathbb{P}(\gamma|\chi, \alpha) = \text{const}, \quad (3.10)$$

и вероятность (3.9) сводится к

$$\mathbb{P}(\{n_\gamma\}|\chi, \alpha, t) \propto \prod_{\gamma} \mathbb{P}^{n_\gamma}(\gamma|\chi, \alpha). \quad (3.11)$$

Последняя не зависит от t и равняется $\mathbb{P}(\gamma|\chi, \alpha)$, если учесть, что n_γ принимает значения 0 или 1.

Таким образом, при томографии несохраняющих след процессов пуассоновскую вероятность (3.9) следует подставлять вместо $\mathbb{P}(\gamma|\chi, \alpha)$ при пересчёте апостериорного распределения $p(\chi|\mathcal{D}_N)$ (3.1) в функцию правдоподобия, а также при использовании критерия оптимального измерения (3.8). Однако, непосредственное применение критерия становится затруднительным, так как теперь он включает расчёт энтропии распределения Пуассона, для которой нет выражений в замкнутой форме, и требуется суммирование бесконечных рядов [77]. Всё это значительно усложняет как и программную реализацию протокола томографии, так и замедляет его скорость работы, поэтому решено было прибегнуть к следующему эвристическому критерию:

$$\alpha_{N+1} = \operatorname{argmax}_{\alpha} \{ \mathbb{H}[\pi(\gamma|\hat{\chi}, \alpha)] - \mathbb{E}_{p(\chi|\mathcal{D}_N)} \mathbb{H}[\pi(\gamma|\chi, \alpha)] \}, \quad (3.12)$$

где $\pi(0|\chi, \alpha) = \mathbb{P}(0|\chi, \alpha)$ и $\pi(1|\chi, \alpha) = 1 - \mathbb{P}(0|\chi, \alpha)$. Важно отметить, что $\pi(1|\chi, \alpha) \neq \mathbb{P}(1|\chi, \alpha)$ из-за наличия потерь. При использовании этой эвристики сложность вычислений остаётся такой же, как и при томографии сохраняющих след процессов, что позволяет проводить адаптивные измерения «на лету».

3.3 Численные симуляции

В данном разделе представлены результаты численных симуляций для различных однокубитовых ($D = 2$) сохраняющих след процессов. Рассматриваемый адаптивный протокол байесовской томографии сравнивается со стратегией случайных измерений. В обоих протоколах входное состояние является чистым, а измерение выходного состояния проводится в некотором базисе. В адаптивном методе и входное состояние, и базис находятся согласно критерию оптимальности (3.8). При случайных измерениях входное состояние и базис распределены равномерно по мере Хаара. Количественно протоколы сравниваются по зависимостям $d_B^2(N)$ квадрата бюресовского расстояния (1.49) между оценкой $\hat{\chi}(N)$ (3.2) и истинным процессом χ_0 от числа зарегистрированных отсчётов N .

Вид зависимости $d_B^2(N)$ для единичного процесса, $\mathcal{E}(\rho) = \rho$, и 50% деполаризующего канала, $\mathcal{E}(\rho) = \rho/2 + I/4$, изображён на рисунке 3.1. Как видно, адаптивные измерения дают существенное преимущество для единичного процесса. Результаты дополнительных симуляций (не изображены на графике)

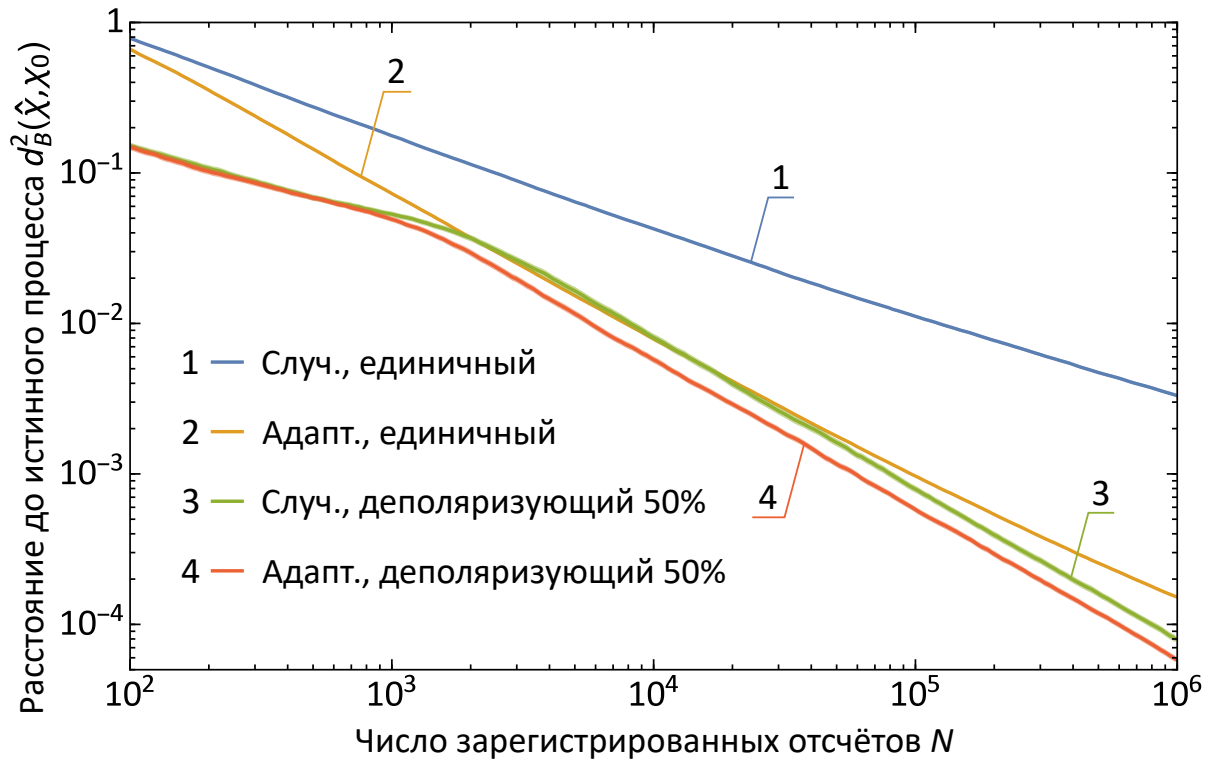


Рисунок 3.1 — Зависимость квадрата бюрсовского расстояния $d_B^2(\hat{\chi}, \chi_0)$ между текущей оценкой $\hat{\chi}$ и истинным процессом χ_0 от числа зарегистрированных отсчетов N для единичного процесса и 50% деполаризующего канала. Результаты усреднены по 1000 проходам томографии. Здесь и на последующих графиках «Случ.» означает случайные измерения, «Адапт.» — адаптивные.

Таблица 6 — Аппроксимация зависимости размера распределения $\bar{d}_B^2(N)$ от числа зарегистрированных фотонов N степенной функцией cN^a для сохраняющих след процессов. Результаты численных симуляций.

Измерения	Процесс	a	c
Случайные	Единичный	-0.577 ± 0.004	2.15 ± 0.04
Адаптивные	Единичный	-0.904 ± 0.003	3.48 ± 0.03
Случайные	Деполаризующий 50%	-1.009 ± 0.009	4.48 ± 0.10
Адаптивные	Деполаризующий 50%	-0.993 ± 0.008	3.99 ± 0.09

свидетельствуют, что эта ситуация типична и для других унитарных преобразований. Однако, преимущество по точности от использования адаптивности практически исчезает для неунитарных процессов, коим является деполаризующий канал.

В таблице 6 приведены результаты аппроксимации полученных зависимостей $\bar{d}_B^2(N)$ степенной функцией вида cN^a . Показатель степени a будем называть

степенью сходимости. Для адаптивного протокола наблюдается сходимость $a \approx -1$ независимо от истинного процесса. Для случайных измерений единичный процесс и другие процессы ранга 1 (унитарные) плохо поддаются оцениванию, так как $a \approx -0.5$. Эти результаты аналогичны случаю томографии состояний [12; 74]. Степень сходимости $a \approx -0.5$ также наблюдалась для состояний ранга 1 (то есть чистых) при использовании случайных измерений. Для смешанных состояний преимущество от адаптивности пропадало — обе стратегии демонстрировали $a \approx -1$.

3.3.1 Влияние инструментальных погрешностей

При проведении эксперимента неизбежны различного рода инструментальные погрешности (шумы), которые ухудшают точность томографии. В наших экспериментах с поляризационными кубитами использовались фазовые пластинки, закреплённые на вращающихся моторизированных подвижках, поэтому данный раздел посвящён симуляциям погрешностей в выставлении углов пластинок. Модель ошибки выбрана следующая: после установки пластинки в нужную позицию её положение сдвигается на случайный угол $\Delta\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$, выбранный равномерно из интервала $[-\varphi_0, \varphi_0]$. Наличие аппаратных ошибок приводит к тому, что в какой-то момент оценка истинного процесса перестаёт улучшаться, и зависимость $d_B^2(N)$ выходит на предельную точность [78]. Пример такого поведения изображён на вставке рисунка 3.2, где томография без шума ($\varphi_0 = 0^\circ$) сравнивается с зашумлёнными измерениями ($\varphi_0 = 1^\circ$). Здесь проявляется ещё одно преимущество от использования адаптивного протокола: предельная точность для адаптивных измерений больше, чем для случайных. Аналогичный эффект наблюдался и при томографии состояний [74].

На рисунке 3.2 приведено сравнение расстояния $d_B^2(\hat{\chi}, \chi_0)$ между текущей оценкой $\hat{\chi}$ и истинным процессом χ_0 при фиксированном числе зарегистрированных отсчётов N для различных уровней шума φ_0 . В качестве истинного процесса использовалось единичное преобразование. Для построения графика было выбрано значение $N = 10^6$, так как оно оказалось достаточным для выхода на предельную точность, обусловленную шумами, для амплитуд погрешностей $\varphi_0 \gtrsim$

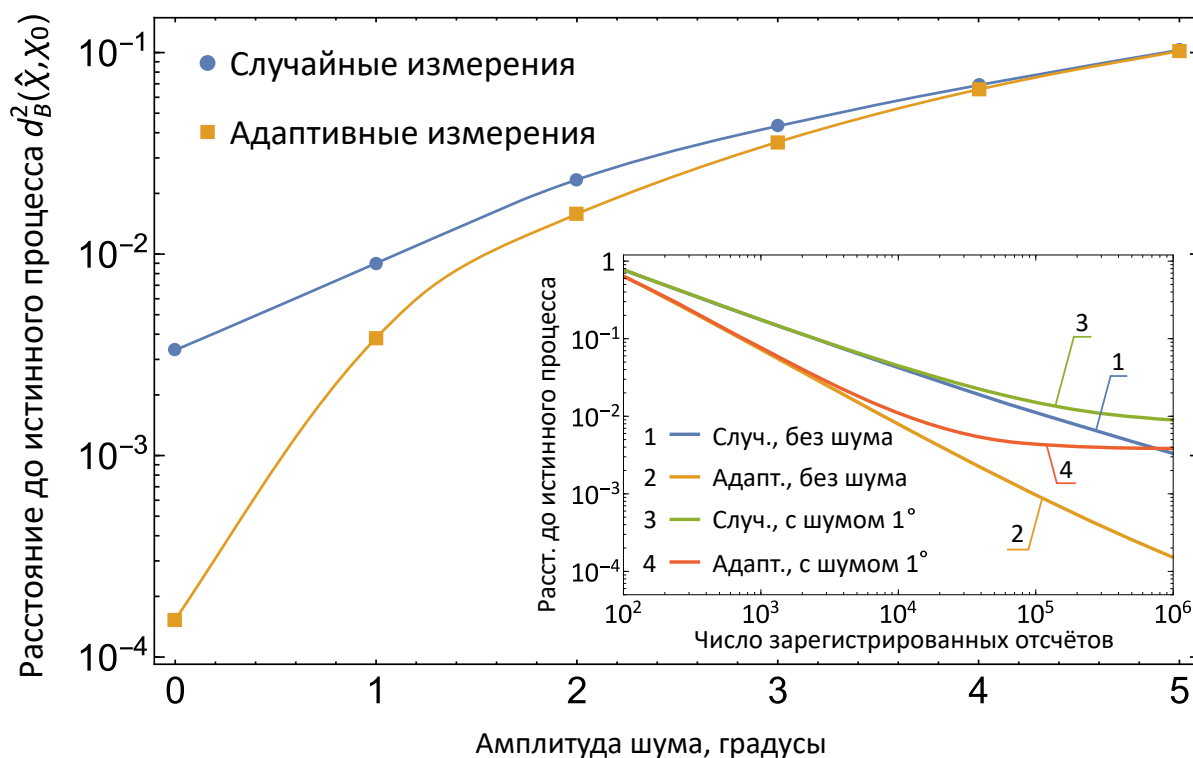


Рисунок 3.2 — Зависимость расстояния до истинного процесса $d_B^2(\hat{\chi}, \chi_0)$, взятая при числе зарегистрированных отсчётов $N = 10^6$, от уровня погрешности в установке углов фазовых пластинок. Адаптивная стратегия (оранжевые квадратики) выигрывает по сравнению со случайными измерениями (голубые кружки), так как для неё зависимость лежит ниже. Сплошные линии — интерполяция точек. Вставка: зависимость расстояния до истинного процесса $d_B^2(\hat{\chi}, \chi_0)$ при различных N для идеальных измерений (шум 0°) и измерений с шумом $\varphi_0 = 1^\circ$ (шум 1°). Все результаты усреднены по 1000 полным проходам томографии.

1° . Видно, что преимущество адаптивных измерений ярче выражено для низких и умеренных амплитуд шума и пропадает при $\varphi_0 \gtrsim 4^\circ$.

Критерий останковки. Как правило, в эксперименте истинный процесс точно неизвестен, поэтому расстояние от текущей оценки до истинного процесса недоступно для экспериментатора. Как следует из вставки на рисунке 3.2, для адаптивного протокола измерения после $N = 10^5$ уже не улучшают точность оценки, то есть процедура томографии вышла на шумовой порог. Следовательно, необходим некий критерий останковки, который даст возможность определить, когда предельная точность уже достигнута, не опираясь на знание истинного процесса. Для достижения этой цели можно использовать хорошо известную тестовую статистику χ^2 , которая характеризует различие между ожидаемыми дан-

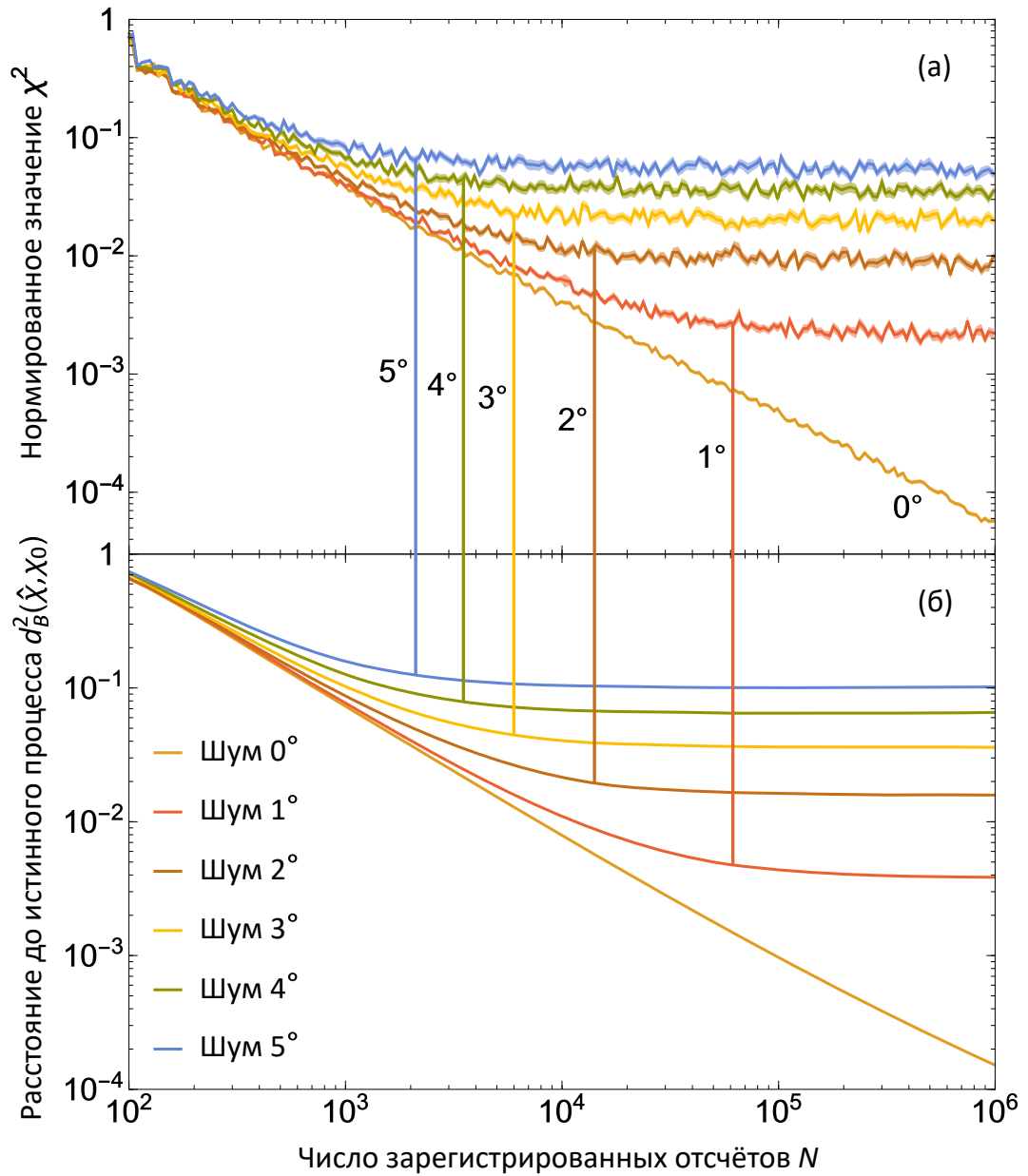


Рисунок 3.3 — Сравнение (а) зависимости нормированной статистики χ^2/b от числа зарегистрированных отсчётов N и (б) расстояния до истинного процесса $d_B^2(\hat{\chi}, \chi_0)$. Представлены результаты численных симуляций для адаптивного протокола и разных уровней аппаратных ошибок в углах установки фазовых пластинок. В качестве истинного процесса взято единичное преобразование. Вертикальными линиями отмечены значения N , при которых двойная логарифмическая производная принимает значение $\frac{d \ln d_B^2(\hat{\chi}, \chi_0)}{d \ln N} = -0.25$. Все результаты получены усреднением по 1000 проходам томографии.

ными и фактически наблюдаемыми [79]:

$$\chi^2 = \sum_{\gamma} \frac{(n_{\gamma} - b\hat{p}_{\gamma})^2}{b\hat{p}_{\gamma}}, \quad (3.13)$$

где n_{γ} — количество событий, когда наблюдался исход γ , $b = \sum_{\gamma} n_{\gamma}$ — суммарное число отсчётов для заданной конфигурации установки α и $\hat{p}_{\gamma} = \mathbb{P}(\gamma|\hat{\chi}, \alpha)$ — ожидаемая вероятность наблюдения исхода γ .

При томографии однокубитовых процессов возможны два исхода с вероятностями $p_0 = p$ и $p_1 = 1 - p$. Соответственно, величина n_0 имеет биномиальное распределение со средним bp_0 : $n_0 \sim \text{Bin}(b, p_0)$. Нетрудно найти математическое ожидание статистики χ^2 :

$$\langle \chi^2 \rangle = \frac{b(p - \hat{p})^2 + p(1 - p)}{\hat{p}(1 - \hat{p})}. \quad (3.14)$$

При отсутствии инструментальных погрешностей оценка $\hat{\chi}$ сходится к истинному процессу, поэтому в пределе бесконечно большого N имеем $\hat{p} = p$ и $\langle \chi^2 \rangle = 1$. Аппаратные ошибки приводят к систематическому сдвигу оценки, $\hat{p} \neq p$, что ведёт к неравенству $\langle \chi^2 \rangle \neq 1$. Размер блока b должен быть достаточно большим, чтобы в эксперименте иметь возможность довольно точно определить истинную вероятность p по наблюдаемым отсчётам n_0 и выявить отличие $\langle \chi^2 \rangle$ от единицы. Также как и при томографии состояний использовался постепенно возрастающий размер блока, линейно зависящий от N : $b \propto N$. Такое правило возрастания блока является компромиссом между преимуществом от использования адаптивности (измерения достаточно часто перестраиваются) и временем на изменение конфигурации установки α (например, на вращение фазовых пластинок) [74]. Подставляя $b \propto N$ в выражение (3.13), находим, что вторым слагаемым в числителе можно пренебречь в пределе $N \rightarrow \infty$, и, следовательно, $\langle \chi^2 \rangle \propto b$. Нормированная величина χ^2/b сходится к некоторой константе, зависящей от уровня инструментальных ошибок. Для идеальных измерений она равняется нулю.

Таким образом, о сходимости процедуры томографии можно судить по поведению нормированной тестовой статистики χ^2/b . Когда она выходит на константу, то же происходит и с расстоянием до истинного процесса $d_B^2(\hat{\chi}, \chi_0)$, и измерения следует прекратить. Для подтверждения этого факта были проведены соответствующие численные симуляции. На рисунке 3.3 представлено сравнение

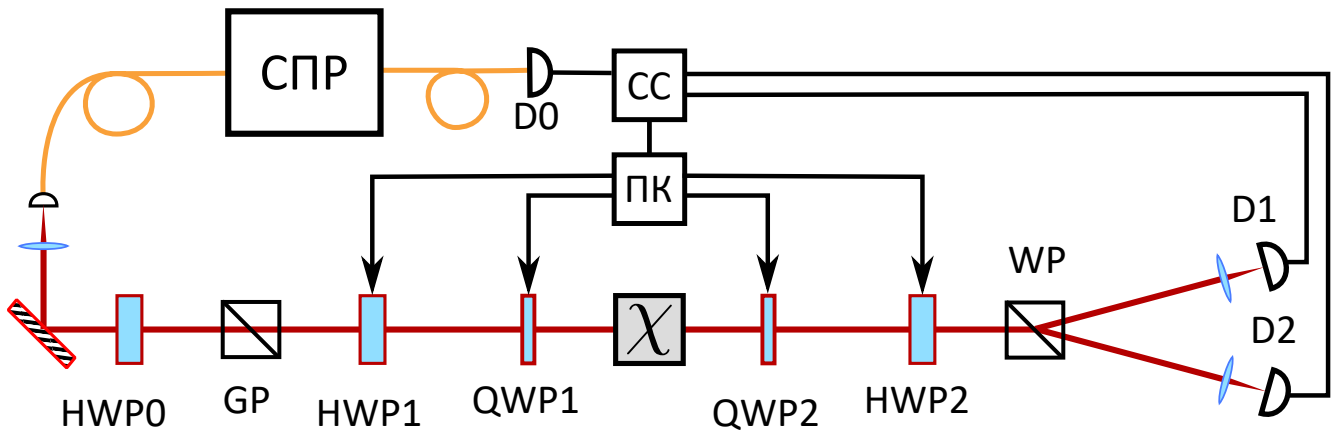


Рисунок 3.4 — Экспериментальная установка. Пары фотонов, рождённые в процессе спонтанного параметрического рассеяния, используются для условного приготовления одиночных фотонов (один фотон является триггером). Фазовые пластинки, установленные в моторизированных вращающихся подвижках, позволяют готовить произвольное чистое входное состояние и задавать любое проекционное измерение.

зависимостей χ^2/b и $d_B^2(\hat{\chi}, \chi_0)$ от числа зарегистрированных отсчётов N для разных уровней инструментальных погрешностей. Отчётливо видно, что выход на константу для обеих зависимостей происходит при одних и тех же значениях N .

3.4 Эксперимент

3.4.1 Описание установки

Экспериментально протокол адаптивной байесовской томографии проверен для процессов, изменяющих поляризацию одиночных фотонов. Одиночные фотоны приготавливаются условно из бифотонов, рождённых в процессе спонтанного параметрического рассеяния (СПР). Источник бифотонов содержит периодически поляризованный нелинейный кристалл титанила фосфата калия (РРКТР) длиной 25 мм, установленный внутри интерферометра Саньяка [80]. Призма Глана GP, полуволновая HWP1 и четвертьволновая QWP1 фазовые пластинки служат для приготовления состояния поляризационного кубита, подаваемого на вход процесса χ (см. рисунок 3.4). Фазовые пластинки QWP2 и HWP2 вместе с призмой

Волластона WP позволяют задавать проективное измерение выходного состояния в произвольном базисе. После этого сигнальный фотон попадает через многомодовое оптическое волокно в один из счётных детекторов D1 или D2. Холостой фотон направляется через многомодовый световод напрямую в детектор D0 и служит триггером. Схема совпадений СС учитывает только те события, когда оба фотона приходят одновременно. Все фазовые пластинки установлены на моторизованных вращающихся подвижках, управляемых компьютером, где запущена программа томографии. Исследуемым процессом могут быть различные оптические элементы, такие как поляризатор, фазовая пластинка, световод и так далее.

3.4.2 Предельная точность

Как было отмечено в 3.3.1 реальная экспериментальная установка никогда не является идеальной. Такие инструментальные погрешности как ошибки в фазах фазовых пластинок, углах установки осей призм Глана и Волластона, темновые отсчёты детекторов и т. д. приводят к уменьшению точности томографии. В определённый момент измерения следует прекратить, потому что процедура томографии перестаёт сходиться — точность оценки не улучшается. В данном разделе приводятся результаты томографии единичного преобразования с целью определения предельно достижимой точности томографии. Единичный процесс не изменяется поляризацию, поэтому экспериментально он выражается в отсутствии какого-либо оптического элемента χ на схеме 3.4.

Единичное преобразование является выделенным с точки зрения эксперимента, так как оно может быть создано с максимально возможной точностью, и поэтому его истинная χ -матрица известна. Таким образом, это, пожалуй, единственный процесс, для которого можно построить экспериментальную зависимость расстояния до истинной χ -матрицы от числа зарегистрированных фотонов N (см. рисунок 3.5). Как следует из графика, для адаптивного протокола наблюдается более быстрая сходимость, а также предельно достижимая точность несколько лучше, чем для стратегии случайных измерений. Квадрат бюрсовского расстояния между оценкой процесса $\hat{\chi}$ и теоретическим единичным преобразованием χ_0 на момент окончания томографии в точке $N = 10^6$ представлен в таблице 7 для обоих протоколов томографии. По всей видимости, шумовой порог

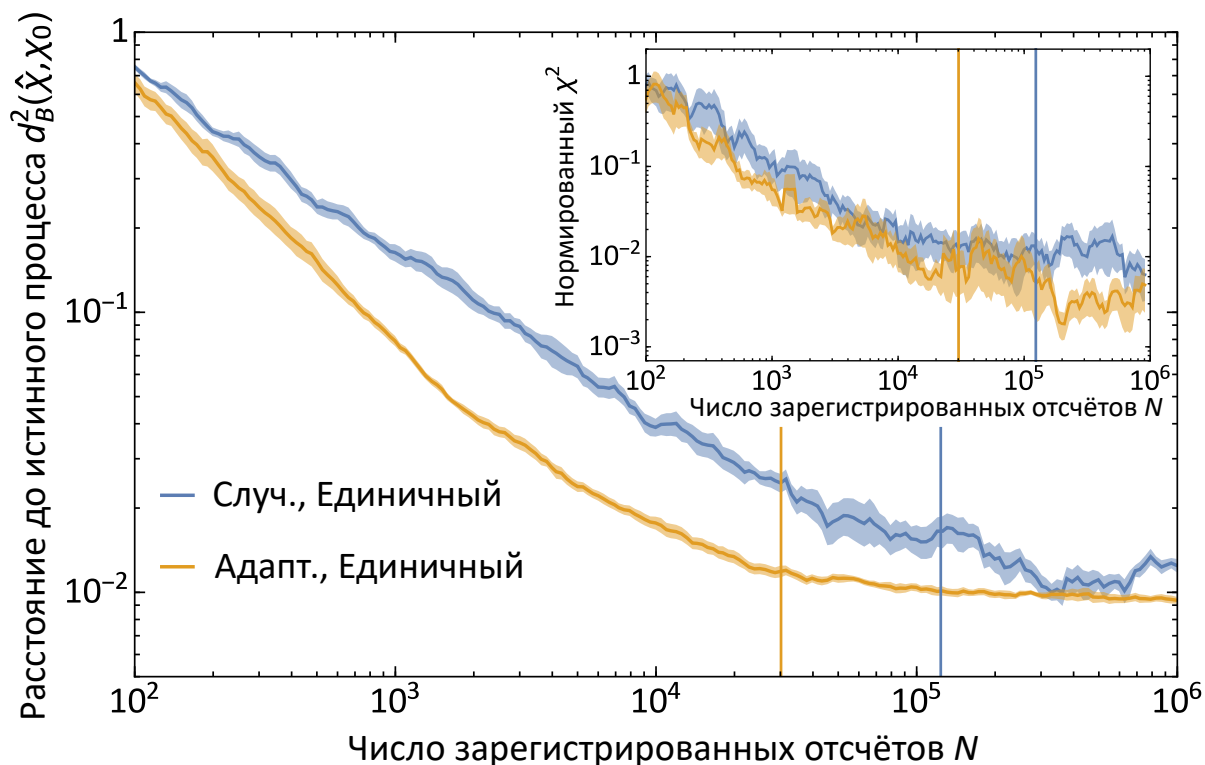


Рисунок 3.5 — Зависимость квадрата бюресовского расстояния $d_B^2(\hat{\chi}, \chi_0)$ до теоретического истинного процесса (единичное преобразование) от числа зарегистрированных отсчётов N для случайных и адаптивных измерений (верхняя и нижняя кривые соответственно). Вставка: зависимость нормированной тестовой статистики χ^2/b от N . Вертикальные линии показывают те значения N , когда сглаженная зависимость двойной логарифмической производной принимает величину $\frac{d \ln d_B^2(\hat{\chi}, \chi_0)}{d \ln N} = -0.25$ для соответствующих протоколов томографии. Результаты получены усреднением по 10 проходам томографии. Зависимость χ^2/b была дополнительно сглажена посредством скользящего среднего вдоль оси N по 5 соседним точкам.

обусловлен в основном погрешностью в определении вносимой фазовыми пластинками фазой, а также неточностью в установке их угла поворота.

Также на вставке рисунка 3.5 отложена нормированная статистика χ^2/b . Данная величина выходит на насыщение приблизительно после $N \approx 3 \times 10^4$ зарегистрированных отсчётов, и согласно описанному в 3.3.1 критерию остановки дальнейшие измерения следует остановить в этой точке. Данный результат качественно согласуется с зависимостями расстояния до истинного процесса $d_B^2(\hat{\chi}, \chi_0)$, которые также начинают выходить на константный уровень при $N \approx 3 \times 10^4$. К недостаткам использования нормированной статистики χ^2/b следует отнести, что она довольно сильно флуктуирует от одного прохода томографии к

Таблица 7 — Квадрат бюресовского расстояния d_B^2 между оценкой и истинной χ -матрицей после регистрации $N = 10^6$ отсчётов в эксперименте по томографии единичного преобразования. Фиделити рассчитано между соответствующими состояниями Чоя — Ямиолковского.

Измерения	Расстояние d_B^2	Фиделити F
Случайные	0.0125 ± 0.0017	0.9938 ± 0.0008
Адаптивные	0.0094 ± 0.0008	0.9953 ± 0.0004

другому, и поэтому требует довольно много заходов для получения достаточно гладких усреднённых зависимостей.

3.4.3 Сохраняющие след процессы

В данном разделе сравниваются по точности получаемых оценок адаптивный протокол со стратегией случайных измерений для унитарных и неунитарных сохраняющих след процессов. В качестве унитарного преобразования используется фазовая пластинка, а многомодовое оптоволокно служит примером процесса с декогеренцией. Для понимания того, почему многомодовый световод приводит к смешиванию входного поляризационного состояния, заметим, что пространственные моды имеют немного отличные константы распространения, поэтому поляризация внутри каждой моды изменяется по-своему. При входе в световод излучение распределяется по всевозможным модам, унитарно преобразуется в пределах каждой моды, а затем этот эффект интегрируется детектором, не различающим пространственные состояния. Математически ситуация аналогична динамике в расширенной системе (см. раздел 1.5): есть две системы (поляризационная и пространственная), преобразование составной системы унитарно, а процесс над поляризационной степенью свободы обладает декогеренцией.

На рисунке 3.6 изображены зависимости размера распределения $\bar{d}_B^2(N)$ от числа зарегистрированных отсчётов N для случая томографии фазовой пластинки и многомодового световода. Результаты аппроксимации полученных зависимостей степенной функцией cN^a представлены в таблице 8. Адаптивный протокол даёт преимущество в сходимости по сравнению со стратегией случайных из-

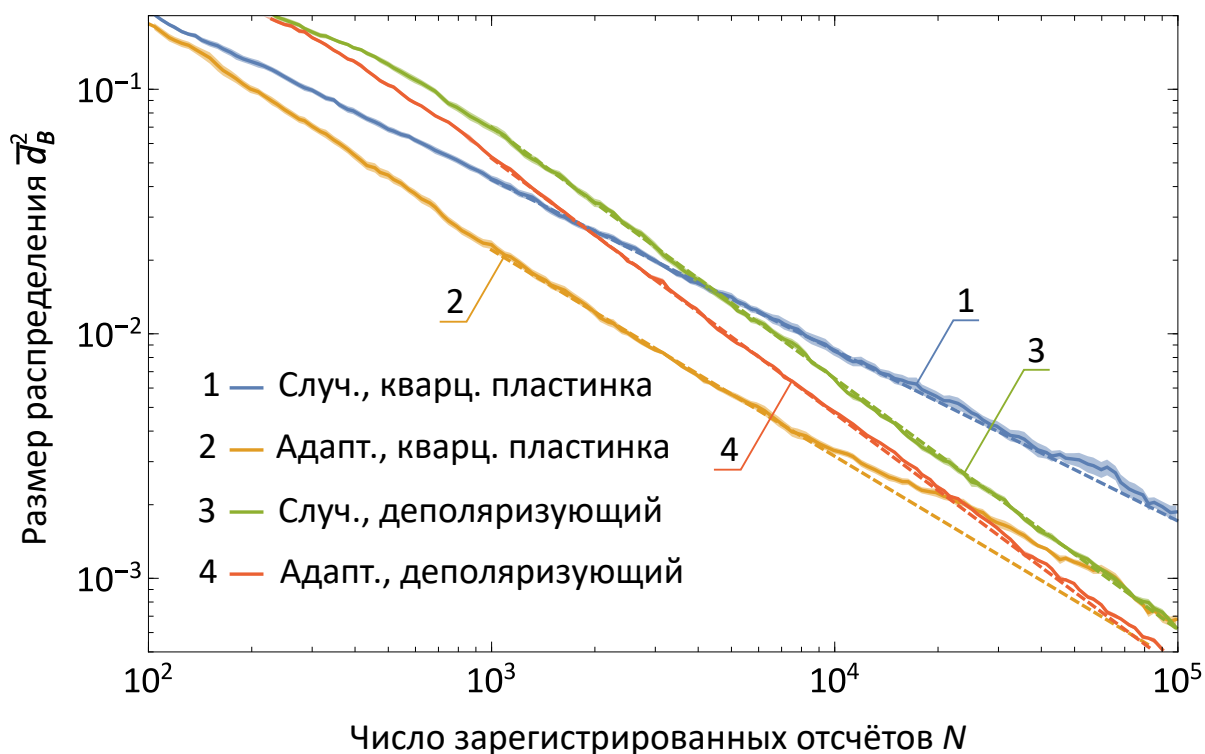


Рисунок 3.6 — Экспериментально полученные зависимости размера распределения \bar{d}_B^2 от числа задетектированных фотонов N для случайных и адаптивных измерений. Исследованы два процесса: унитарный (четвертьволновая фазовая пластинка) и неунитарный деполяризующий канал (многомодовый световод). Пунктирные линии — аппроксимация степенной функцией cN^a . Результаты усреднены по 10 полным проходам томографии.

мерений. Наибольший выигрыш достигается для унитарного процесса (фазовая пластинка).

3.4.4 Несохраниющие след процессы

В данном разделе перейдём к сравнению адаптивного протокола со стратегией случайных измерений для несохраняющих след процессов. Как уже было сказано ранее в 3.2, при томографии процессов с потерями измерения делаются в течении фиксированного времени, а не проводятся до фиксированного числа событий, что ведёт к модификации выражения для вероятности исхода (3.9). Интенсивности I_γ должны быть определены заранее до начала самой процедуры томографии. Для их измерения можно поступить следующим образом: процесс χ

Таблица 8 — Результаты аппроксимации зависимости размера распределения $\bar{d}_B^2(N)$ от числа зарегистрированных отсчётов N степенной функцией вида cN^a для случайной и адаптивной стратегии измерений. Томографируемые процессы восстановлены как сохраняющие след преобразования.

Измерения	Процесс	a	c
Случайные	Унитарный (фазовая пластинка)	-0.698 ± 0.016	1.67 ± 0.13
Адаптивные	Унитарный (фазовая пластинка)	-0.844 ± 0.016	2.01 ± 0.13
Случайные	Деполаризующий (световод)	-1.027 ± 0.013	4.44 ± 0.11
Адаптивные	Деполаризующий (световод)	-1.044 ± 0.006	4.26 ± 0.05

заменяется на единичное преобразование и всё излучение от источника направляется на один из детекторов (например, под номером $\gamma = 0$) посредством изменения поляризации. После измерения значения интенсивности $I_{\gamma=0}$ процедура повторяется для детектора под номером $\gamma = 1$.

После проведения подготовительных измерений была выполнена томография трёх процессов: единичного преобразования, нейтрального фильтра с уровнем ослабления 3 дБ и поляризатора. Все процессы, включая единичное преобразование, восстановлены в предположении того, что они потенциально не сохраняют след. Нейтральный фильтр является примером процесса с не зависящими от поляризации потерями, а поляризатор — наоборот, процесс с зависящими от входного состояния потерями. Результаты томографии представлены на рисунке 3.7 и в таблице 9. Как видно, показатель сходимости a увеличивается по абсолютному значению при переходе от случайных измерений и адаптивному протоколу. Это можно объяснить тем, что ранг всех рассмотренных преобразований равен единице, хотя процессы, осуществляемые поляризатором и нейтральным фильтром, не являются унитарными. Основной вывод заключается в том, что адаптивный протокол даёт качественно лучшую точность восстановления для процессов ранга 1 независимо от величины потерь.

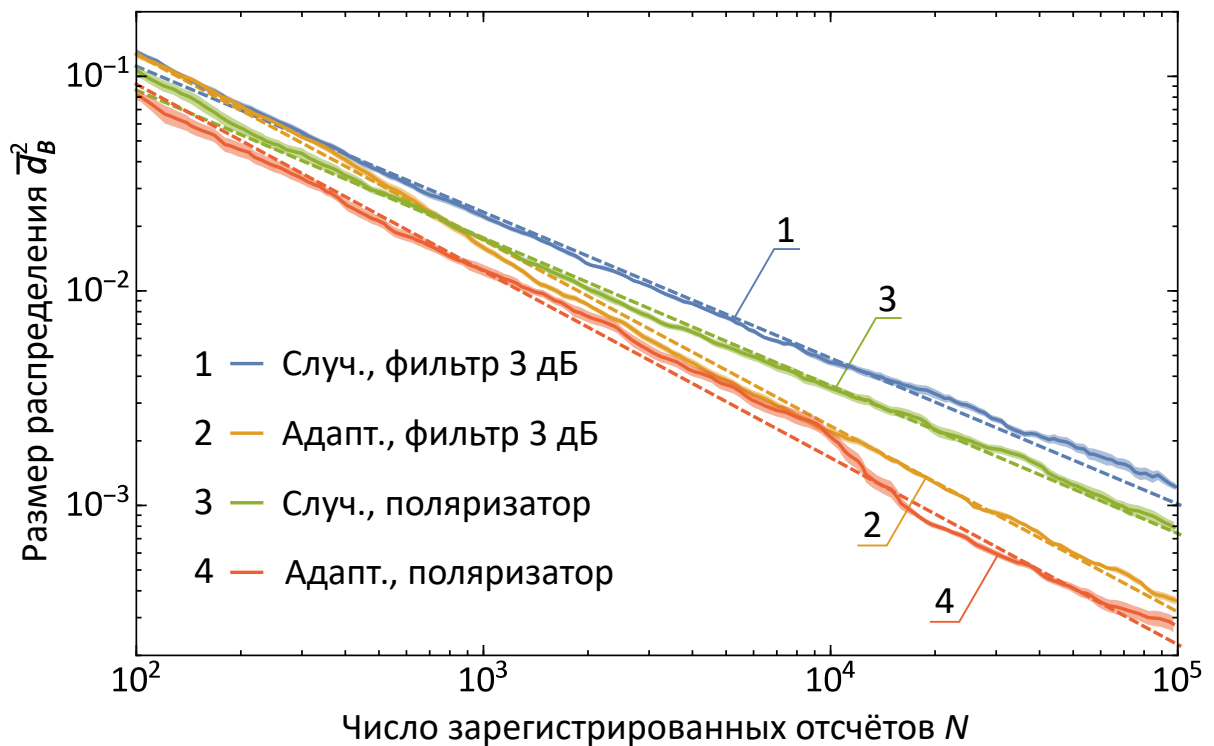


Рисунок 3.7 — Экспериментально полученные зависимости размера распределения \bar{d}_B^2 от числа задетектированных фотонов N для несохраняющих след процессов. Рассмотрены два процесса: процесс с независимыми от входного состояния потерями (нейтральный фильтр с ослаблением 3 дБ) и преобразование с зависящими от поляризации потерями (линейный поляризатор). Пунктирные линии — аппроксимация степенной функцией cN^a . Результаты усреднены по 10 проходам томографии.

Таблица 9 — Результаты аппроксимации экспериментально полученных зависимостей размера распределения $\bar{d}_B^2(N)$ от числа зарегистрированных отсчётов N степенной функцией вида cN^a . Томографируемые процессы восстановлены как несохраняющие след преобразования.

Измерения	Процесс	a	c
Случайные	Единичный	-0.630 ± 0.003	1.21 ± 0.03
Адаптивные	Единичный	-0.764 ± 0.003	1.59 ± 0.03
Случайные	Фильтр 3 дБ	-0.680 ± 0.003	0.94 ± 0.02
Адаптивные	Фильтр 3 дБ	-0.866 ± 0.002	1.92 ± 0.02
Случайные	Поляризатор	-0.689 ± 0.004	0.72 ± 0.03
Адаптивные	Поляризатор	-0.870 ± 0.004	1.62 ± 0.04

3.5 Выводы по главе

Рассмотренный в главе 2 протокол адаптивной байесовской томографии с использованием энтропийного критерия обобщён на случай томографии квантовых процессов. Протокол проверен экспериментально для всех типов преобразований одиночных кубитов: унитарное преобразование, канал с деполяризацией, процессы с зависящими и независящими от поляризации потерями. Показано, что рассматриваемый адаптивный протокол превосходит по точности стратегию случайных измерений для процессов единичного ранга и близких к ним.

Также исследовано поведение томографии при наличии инструментальных погрешностей, таких как неточности в угловом позиционировании фазовых пластинок. Отслеживание тестовой статистики χ^2 позволяет определить момент достижения предельной точности томографии в эксперименте, когда истинный процесс неизвестен. Показано, что для адаптивного протокола ошибка восстановления меньше, чем для случайных измерений, при одинаковом уровне аппаратного шума.

Результаты третьей главы опубликованы в работе [81].

Глава 4. Томография высокоразмерных двухкомпонентных систем

В данной главе описывается предложенный автором протокол адаптивной томографии состояний высокоразмерных двухкомпонентных систем [82].

Очевидная особенность высокоразмерной томографии заключается в больших затратах машинного времени на вычисление оценок состояний и поиск оптимальных измерений. Также специфической чертой является то, что обычно высокоразмерные системы естественным образом разделены на несколько подсистем. В соответствии с этим возникают два класса измерений: перепутанные и факторизованные (по терминологии раздела 1.2). Практическая реализация перепутанных измерений представляет большую трудность. В этой связи, предпочтительно, чтобы протокол томографии использовал только факторизованные измерения. Таким образом, желательно, чтобы используемый протокол одновременно обладал следующими свойствами (обычно противоречащими друг другу):

- высокой точностью оценок (сходимостью $d_B^2 \propto 1/N$ для чистых состояний и близких к ним),
- возможностью использовать только тот ограниченный набор измерений, который позволяет выполнять данная экспериментальная реализация (в данной главе нас будут интересовать факторизованные измерения),
- простота вычислений.

Протокол адаптивной байесовской томографии с энтропийным критерием оптимальности, рассмотренный в предыдущих главах для случая томографии состояний и процессов, продемонстрировал высокую точность восстановления по сравнению со стратегией случайных измерений. Также к достоинствам протокола следует отнести повышенную устойчивость к инструментальным погрешностям. Используемый критерий оптимальности (2.2) и (3.8) является гибким в том смысле, что позволяет находить оптимальное измерение среди любого доступного множества измерений. Иными словами, если какое-то измерение (класс измерений) невозможно выполнить на данной экспериментальной установке, то оно просто исключается из процедуры оптимизации, и наилучшее измерение будет найдено среди доступных. Использование байесовского подхода одновременно даёт как и преимущества в виде высокой точности и гибкости, так и основной недостаток — относительно высокую вычислительную сложность по сравнению,

например, с методом линейной инверсии, несмотря на использование продвинутых алгоритмов выборки из распределений.

Увеличение размерности исследуемой системы ведёт к естественному возрастанию вычислительной сложности её томографии. В какой-то момент байесовское оценивание становится неприемлемо затратным, поэтому, несмотря на все достоинства, от него приходится отказаться в пользу других вариантов. В стремлении уменьшить время, затрачиваемое на вычисления, в литературе предлагаются новые методы. Сюда можно отнести недавно предложенный для задач томографии алгоритм ускоренного проективного градиентного подъёма для нахождения оценки по методу максимального правдоподобия [83], рекурсивную линейную регрессию (recursive linear regression estimation) [84], а также оптимизацию метода линейной инверсии под конкретный набор измерений, что позволило провести томографию 14-кубитового состояния [85].

Помимо нахождения оценок любой протокол томографии включает в себя набор измерений. Альтернативой байесовским методам нахождения оптимального измерения может служить двухстадийная схема, предложенная в работе [35], а затем реализованная экспериментально в работах [8] и [86]. На первом этапе находится предварительная оценка истинного состояния с помощью какого-либо статического протокола, а затем, на втором шаге, измерения проводятся в собственном базисе восстановленной матрицы плотности с целью получения финальной оценки. Данная схема демонстрирует сходимость $1/N$ и недавно была обобщена на случай систем высокой размерности [87]. Однако, она не обладает гибкостью и требует измерений общего вида, так как собственный базис в зависимости от томографируемого состояния может содержать любой, наперёд заданный вектор. Известны и другие идеи в построении оптимальных адаптивных стратегий [16; 66; 88], однако, их экспериментальная реализация ограничивается двухкубитовыми состояниями [84; 89; 90].

Представляемый протокол в той или иной мере сочетает все три вышеупомянутых свойства. Он использует только факторизованные измерения, обладает преимуществом по точности восстановления в сравнении с неадаптивными протоколами. Оптимальное измерение зависит только от текущей оценки состояния, а метод, которым она была получена, не важен. Это позволяет, например, использовать наиболее быстрые алгоритмы вычисления оценок. Само по себе нахождение оптимального измерения сводится к оптимизационной задаче и выполняется достаточно быстро. Как показали проведённые численные симуляции

и эксперименты, основное время затрачивается на вычисление оценки по методу максимального правдоподобия, а не на поиск измерения. Работа протокола продемонстрирована для двухкомпонентных систем размерности $D = 9 = 3 \times 3$ и $D = 36 = 6 \times 6$. Протокол получил дальнейшее развитие в работе [91], выполненной другими авторами.

4.1 Теория точности восстановления состояний

Оценка состояния $\hat{\rho}$ является некоторой заданной функцией случайных исходов измерений, поэтому она сама и любые содержащие её выражения также есть случайные величины. Рассматриваемый адаптивный протокол томографии высокоразмерных двухкомпонентных систем основывается на теории универсального статистического распределения фиделити $F(\rho, \hat{\rho}) = \text{Tr}^2 \sqrt{\rho^{1/2} \hat{\rho} \rho^{1/2}}$ между истинным состоянием ρ и его оценкой $\hat{\rho}$. В данном разделе описываются основные моменты этой теории согласно работе [92].

Универсальное статистическое распределение фиделити $F(\rho, \hat{\rho})$ строится для оценок максимального правдоподобия¹ в асимптотическом пределе бесконечно большого числа зарегистрированных отсчётов N для заданного протокола томографии. Как и ранее, измерения описываются набором операторов $M_{\alpha\gamma} \in \mathcal{M}_\alpha$, образующих разложение единицы $\sum_\gamma M_{\alpha\gamma} = 1_D$, где 1_D — единичная матрица размера $D \times D$.

Пусть ρ — матрица плотности ранга R размерности D , то есть имеет только R ненулевых собственных значений λ_k . Тогда она может быть расширена до чистого состояния в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{RD} = \mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_D$ размерности $R \times D$:

$$\rho = \text{Tr}_R |\Psi\rangle\langle\Psi|. \quad (4.1)$$

Расширенное чистое состояние $|\Psi\rangle$ определено с точностью до унитарных преобразований, действующих над вспомогательной системой \mathcal{H}_R . Один из возможных

¹Если проследить за выводом выражения для статистического распределения в оригинальной работе [92], то становится ясно, что оно также справедливо для любых асимптотически эффективных оценок, для которых неравенство Крамера — Рао обращается в равенство.

вариантов расширения $|\Psi\rangle$ имеет следующий вид:

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=1}^R \sqrt{\lambda_k} |k\rangle \otimes |\psi_k\rangle, \quad (4.2)$$

где $|\psi_k\rangle$ — собственные векторы, отвечающие ненулевым собственным значениям λ_k (далее будем считать, что λ_k отсортированы по убыванию). Обозначим за $M'_{\alpha\gamma} = 1_R \otimes M_{\alpha\gamma}$ «расширенный» оператор измерения, действующий на пространстве \mathcal{H}_{RD} . Заметим, что правило Борна (1.1) инвариантно относительно замены $\rho \rightarrow |\Psi\rangle\langle\Psi|$ и $M_{\alpha\gamma} \rightarrow M'_{\alpha\gamma}$.

Завершающим подготовительным шагом служит переход от комплексных векторов и матриц к их вещественным аналогам. Действительно, любая комплексная матрица A и вектор-столбец v могут быть рассмотрены как вещественная матрица A_{re} и вектор v_{re} удвоенной размерности:

$$A_{\text{re}} = \begin{pmatrix} \text{Re } A & -\text{Im } A \\ \text{Im } A & \text{Re } A \end{pmatrix}, \quad v_{\text{re}} = \begin{pmatrix} \text{Re } v \\ \text{Im } v \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

При этом выражения линейной алгебры, как, например, $w = Av$, сохраняют свою форму: $w_{\text{re}} = A_{\text{re}}v_{\text{re}}$. Операция эрмитова сопряжения заменяется на транспонирование: $A^\dagger \rightarrow A_{\text{re}}^T$. Используя расширение до чистого состояния (4.2) и изоморфизм (4.3), правило Борна (1.1) переписывается в виде

$$p_{\alpha\gamma} = c^T O_{\alpha\gamma} c, \quad (4.4)$$

где $c = |\Psi\rangle_{\text{re}}$ и $O_{\alpha\gamma} = (M'_{\alpha\gamma})_{\text{re}}$.

Для дальнейшего нам понадобится *матрица информации Фишера* H :

$$H_{ij} = \left\langle \frac{\partial \ln \mathcal{L}(c; \{n_{\alpha\gamma}\})}{\partial c_i} \frac{\partial \ln \mathcal{L}(c; \{n_{\alpha\gamma}\})}{\partial c_j} \right\rangle, \quad (4.5)$$

где $\mathcal{L}(c; \{n_{\alpha\gamma}\})$ — функция правдоподобия, $n_{\alpha\gamma}$ — количество зарегистрированных исходов γ в измерении α , а усреднение производится по различным реализациям случайных отсчётов $\{n_{\alpha\gamma}\}$. Матрица информации Фишера является симметричной и вещественной матрицей размера $2RD \times 2RD$. Ранг матрицы связан с полнотой набора измерений. По определению *информационно полный протокол* содержит измерения, результаты которых достаточны для однозначного восстановления истинного состояния в пределе бесконечно большого объёма накопленной статистики N . Для таких протоколов матрица H имеет $2RD - R^2$

строго положительных сингулярных числа σ_i , а остальные R^2 чисел в точности равны нулю. Иными словами, $\text{rank } H = 2RD - R^2$. Далее будем предполагать, что σ_i отсортированы по убыванию.

Фиделити $F(\rho, \hat{\rho})$ между истинным состоянием ρ и асимптотически эффективной оценкой $\hat{\rho}$ (например, оценкой максимального правдоподобия) выражается через сингулярные значения σ_i матрицы информации Фишера H . Асимптотическое распределение случайной величины $F(\rho, \hat{\rho})$ в пределе бесконечно большого числа наблюдений N имеет следующий вид [78; 92]:

$$1 - F = \sum_{i=2}^{\nu+1} \frac{1}{\sigma_i} \xi_i^2, \quad (4.6)$$

где $\nu = 2RD - R^2 - 1$, а $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ — независимые одинаково распределённые нормальные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией. Заметим, что первое сингулярное число $\sigma_1 = 4N$ не входит в выражение для фиделити и отвечает по сути за нормировку.

Сумма (4.6) содержит $\nu(R)$ слагаемых, количество которых совпадает с числом степеней свободы у матрицы плотности ранга R . Например, для чистых состояний $\nu(1) = 2D - 2$, а для состояний полного ранга $\nu(D) = D^2 - 1$. Распределение (4.6) представляет собой обобщение распределения χ^2 . В работах [93; 94] приводится выражение для его плотности вероятности, представленное в виде бесконечного ряда. Нетрудно найти математическое ожидание $\langle 1 - F \rangle$ и стандартное отклонение $\Delta(1 - F)$:

$$\langle 1 - F \rangle = \sum_{i=2}^{\nu+1} \frac{1}{\sigma_i}, \quad \Delta(1 - F) = \sqrt{\sum_{i=2}^{\nu+1} \frac{2}{\sigma_i^2}}. \quad (4.7)$$

В проведённых экспериментах (см. раздел 4.7) функция правдоподобия $\mathcal{L}(c)$ выражается в виде произведения пуассоновских вероятностей:

$$\mathcal{L}(c) = \prod_{\alpha\gamma} \frac{[p_{\alpha\gamma}(c)b_{\alpha\gamma}]^{n_{\alpha\gamma}}}{n_{\alpha\gamma}!} e^{-p_{\alpha\gamma}(c)b_{\alpha\gamma}}, \quad (4.8)$$

где $b_{\alpha\gamma}$ — константы, зависящие от интенсивности источника фотонов и пропорциональные времени измерения; $n_{\alpha\gamma}$ — число зарегистрированных исходов γ при измерении α ; $\sum_{\alpha\gamma} n_{\alpha\gamma} = N$. Заметим, что (4.8) при определённых условиях переходит в стандартную для квантовой томографии *мультиномиальную* функцию

правдоподобия:

$$\mathcal{L}_{\text{mult}}(c) \propto \prod_{\alpha\gamma} p_{\alpha\gamma}^{n_{\alpha\gamma}}(c). \quad (4.9)$$

Такой переход возникает, когда $b_{\alpha\gamma}$ в (4.8) не зависит от индекса γ : $b_{\alpha\gamma} = b_\alpha$. При этом сумма $\sum_{\alpha\gamma} p_{\alpha\gamma}(c)b_{\alpha\gamma} = \sum_\alpha b_\alpha$ перестаёт зависеть от c , следовательно, экспоненту можно считать константой вместе со знаменателем $n_{\alpha\gamma}!$ и не выписывать их явно из-за наличия знака пропорциональности в (4.9).

Для пуассоновской функции правдоподобия (4.8) матрицу информации Фишера можно найти в явном виде:

$$H = \sum_{\alpha\gamma} \frac{4b_{\alpha\gamma}}{p_{\alpha\gamma}} O_{\alpha\gamma} c c^T O_{\alpha\gamma}. \quad (4.10)$$

Максимальное сингулярное число σ_1 отвечает собственному вектору c . Зафиксировав полное число задетектированных отсчётов N , придём к равенству $c^T H c = 4N$, так как среднее $\langle n_{\alpha\gamma} \rangle = p_{\alpha\gamma} b_{\alpha\gamma}$, а, следовательно, $\sigma_1 = 4N$. Другие ненулевые сингулярные числа так же пропорциональны N в пределе $N \rightarrow \infty$: $\sigma_i \propto N$. таким образом, и среднее, и стандартное отклонение (4.7) обратно пропорциональны N :

$$\langle 1 - F \rangle \propto 1/N, \quad \Delta(1 - F) \propto 1/N. \quad (4.11)$$

4.2 Восстановление состояний при несовпадающих рангах

В оригинальной теории распределения точности [92] при получении выражения (4.6) неявно предполагалось, что ранг R_s истинного состояния ρ совпадает с рангом R_e оценки $\hat{\rho}$: $R_s = R_e = R$. Под *рангом оценки* мы будем понимать ранг состояний, среди множества которых ищется оценка (то есть, например, проводится максимизация функции правдоподобия).

В настоящей работе дополнительно рассмотрим ситуацию, когда ранг оценки и истинного состояния не равны друг другу. Интерес представляет только случай $R_s < R_e$, так как иначе оценка в какой-то момент вообще перестанет сходиться к истинному состоянию. Такая ситуация была типичной в предыдущих главах, когда состояния (процессы) ранга 1 восстанавливались по сути в предположении, что они обладают полным рангом (ввиду того, что байесовское среднее

по апостериорному распределению даёт оценки полного ранга). Как свидетельствуют полученные результаты, в этом случае скорость сходимости падает до $\langle 1 - F \rangle \propto 1/\sqrt{N}$ для неадаптивных протоколов (см. также [34]).

Асимптотика $1/N$ нарушается по причине того, что часть сингулярных значений σ_i в сумме (4.6) устремляются к нулю. Количество слагаемых определяется рангом оценки R_e и равняется $\nu_e + 1 \equiv 2R_e D - R_e^2$. С другой стороны, количество ненулевых сингулярных чисел определяется рангом истинного состояния R_s : $\text{rank } H = \nu_s + 1 \equiv 2R_s D - R_s^2$.

Проиллюстрируем вышесказанное следующим примером. Пусть проводится томография состояния ранга $R_s = 3$ с ненулевыми собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ посредством некоторого протокола $\{M_{\alpha\gamma}\}$. Предполагая ранг оценки $R_e = 3$, можно найти в соответствии с исходной схемой из работы [92] матрицу информации Фишера $H_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и её ранг: $\text{rank } H_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \nu(3) + 1$. Переходя к пределу $\lambda_3 \rightarrow 0$, получим новую матрицу $H_3(\lambda_1, \lambda_2, 0)$, соответствующую ситуации $R_s = 2$ и $R_e = 3$.

Теперь найдём ранг $H_3(\lambda_1, \lambda_2, 0)$. Для этого рассмотрим множитель $O_{\alpha\gamma c}$ в (4.10). Для упрощения записи в силу изоморфизма (4.3) будем работать с эквивалентной комплексной величиной $M'_{\alpha\gamma}|\Psi\rangle$, имеющей вид:

$$\begin{pmatrix} M_{\alpha\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & M_{\alpha\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & M_{\alpha\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1}|\psi_1\rangle \\ \sqrt{\lambda_2}|\psi_2\rangle \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1}M_{\alpha\gamma}|\psi_1\rangle \\ \sqrt{\lambda_2}M_{\alpha\gamma}|\psi_2\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Теперь заметим, что если образовать произведение $O_{\alpha\gamma c} c^T O_{\alpha\gamma}$, то определённые строки и столбцы полученной матрицы будут содержать в точности нулевые значения (на тех местах, где раньше находилось собственное значение λ_3). Информация Фишера $H_3(\lambda_1, \lambda_2, 0)$ по той же причине будет иметь нулевые строки и столбцы, если $p_{\alpha\gamma} \neq 0$ для всех измерений $M_{\alpha\gamma}$, что типично для статических протоколов. Вычёркивая из матрицы $H_3(\lambda_1, \lambda_2, 0)$ нулевые строки и столбцы, получим матрицу $H_2(\lambda_1, \lambda_2)$, которая совпадает с информацией Фишера, посчитанной для ситуации $R_e = R_s = 2$, когда изначально рассматривается истинное состояние ранга 2 и вышеописанный предельный переход не производится. Опять же ранг $H_2(\lambda_1, \lambda_2)$ находится согласно исходной теории для $R_e = R_s$ и равняется $\nu(2) + 1$. Итого, имеем цепочку равенств:

$$\text{rank } H_3(\lambda_1, \lambda_2, 0) = \text{rank } H_2(\lambda_1, \lambda_2) = \nu(2) + 1. \quad (4.13)$$

Следовательно, в сумме (4.6) сингулярные числа равны нулю, $\sigma_i = 0$, для индексов $i = \nu(2) + 2, \dots, \nu(3) + 1$. Формально сумма расходится, а на практике наблюдается сходимость $1/\sqrt{N}$.

Реально приготовленное в эксперименте состояние всегда имеет полный ранг $R_s = D$ из-за существующих неидеальностей и погрешностей. Но обычно часть его собственных значений весьма мала по сравнению с остальными. Тем не менее, восстановление смеси вынуждает экспериментатора использовать оценку полного ранга, $R_e = D$. Казалось бы, в этом случае формально проблема несоответствия рангов отсутствует, так как $R_s = R_e$, и следует ожидать асимптотической сходимости $1 - F(\rho, \hat{\rho}) \propto 1/N$. Однако, наличие малых собственных значений значительно снижает точность томографии. Эффективно, истинное состояние ведёт себя как состояние неполного ранга.

Численные симуляции показывают, что сходимость $1/N$ действительно будет наблюдаться, но только начиная с очень больших значений N — тем бóльших, чем меньше собственные значения истинного состояния [82]. До возникновения асимптотического поведения проявляется сходимость $1/\sqrt{N}$, как в ситуации $R_s < R_e$. Асимптотическое поведение $1/N$ наступает, когда неопределённость оценки $\langle 1 - F(\rho, \hat{\rho}) \rangle$ приблизительно сравнивается с расстоянием $1 - F_{r-d}$ между истинным состоянием ρ и множеством состояний ранга меньшего, чем R_e :

$$\langle 1 - F(\rho, \hat{\rho}) \rangle \approx 1 - F_{r-d} \equiv \min_{\sigma: \text{rank } \sigma < R_e} [1 - F(\rho, \sigma)]. \quad (4.14)$$

Можно показать, что $1 - F_{r-d} = \sum_{i=R_e}^D \lambda_i$, если σ и ρ коммутируют.

4.3 Ортогональные измерения

Описанная выше проблема нулевых сингулярных чисел матрицы информации Фишера (4.10), входящих в выражение для распределения фиделити (4.6), ведёт к падению точности томографии. Проблема возникает при одновременном выполнении двух условий. Во-первых, ранг истинного состояния R_s должен быть меньше ранга оценки R_e . Во-вторых, все вероятности исходов $p_{\alpha\gamma}$ должны быть отличны от нуля. В данной работе проблема нулевых сингулярных чисел решает-

ся с помощью адаптивной подстройки измерений с целью получить вероятности исходов, близкие к нулю²: $p_{\alpha\gamma} \approx 0$.

Возвращаясь к примеру из 4.2, рассмотрим случай, когда $\lambda_3 \approx 0$ и $p_{\alpha\gamma} \approx 0$. Хотя матрица $O_{\alpha\gamma} c c^T O_{\alpha\gamma}$ содержит практически нулевые элементы, они умножаются на величину $1/p_{\alpha\gamma} \gg 1$. Если же для достаточного числа измерений выполняется $p_{\alpha\gamma} \approx 0$, то матрица H_3 будет иметь необходимый ранг, равный $\text{rank } H_3 = \nu(R_e = 3) + 1$, и точность томографии будет высокой. В пределе $\lambda_3 \rightarrow 0$ измерения надо выбирать таким образом, чтобы выполнялось строгое равенство для вероятности исхода: $p_{\alpha\gamma} = 0$.

Говоря более строго, при наличии малых собственных значений λ_i ухудшение точности восстановления возникает тогда, когда блоки $\sqrt{\lambda_i} M_{\alpha\gamma} |\psi_i\rangle$ в векторе (4.12) не сбалансированы по норме между собой, то есть нормы блоков $g_i \equiv \|\sqrt{\lambda_i} M_{\alpha\gamma} |\psi_i\rangle\|_2$ различаются слишком сильно³. Особым выбором измерений $M_{\alpha\gamma}$ нормы можно уравнивать, $g_1 = \dots = g_{R_e}$, что приведёт к увеличению точности.

Выравнивание норм с необходимостью влечёт к условию малости вероятностей исходов измерений $p_{\alpha\gamma}$. Верхнюю границу на $p_{\alpha\gamma}$ можно построить следующим образом. Заметим, что

$$p_{\alpha\gamma} = \sum_{i=1}^{R_e} g_i^2 = \sum_{i=1}^{R_e} \lambda_i s_i, \quad s_i \equiv \|M_{\alpha\gamma} |\psi_i\rangle\|_2^2. \quad (4.15)$$

Величины s_i зависят от выбора измерений, но всегда удовлетворяют неравенству $\sum_{i=1}^{R_e} s_i \leq 1$. Следовательно, максимум суммы $\sum_{i=1}^{R_e} \lambda_i s_i$ при условиях $\sum_{i=1}^{R_e} s_i \leq 1$ и $g_i^2 = \lambda_i s_i = \text{const}$ будет верхней границей вероятности исхода. Решение имеет вид:

$$p_{\alpha\gamma} \leq \frac{R_e}{\sum_{i=1}^{R_e} 1/\lambda_i}. \quad (4.16)$$

Удерживая только наименьшее собственное значение λ_{R_e} , придём к условию $p_{\alpha\gamma} \lesssim R_e \lambda_{R_e} \ll 1$, что и доказывает малость вероятности исхода $p_{\alpha\gamma}$.

При построении протокола будем рассматривать предельную ситуацию, когда часть собственных значений истинного состояния в точности равна нулю,

²Заметим, что ранее оптимальность измерений с малыми вероятностями исходов была получена из других соображений и являлась следствием энтропийного критерия адаптивности (см. выражение (2.3)).

³Количественно различие можно задать, как отношение максимального значения нормы к минимальному $\frac{\max_i g_i}{\min_i g_i}$ по аналогии с числом обусловленности матрицы. Если это отношение много больше единицы, то можно говорить о «несбалансированности».

то есть $R_s < R_e$. Логично ожидать, что при наличии малых (но ненулевых) собственных значений λ_i построенный протокол также будет демонстрировать преимущество по точности по сравнению с неадаптивными стратегиями. Увеличение точности в последнем случае подтверждается результатами численных симуляций и экспериментов, представленных в 4.6 и 4.7 соответственно.

Дадим следующее определение: измерение $M_{\alpha\gamma}$ ортогонально проектору $|\psi\rangle\langle\psi|$, если $\text{Tr}(M_{\alpha\gamma}|\psi\rangle\langle\psi|) = 0$. Заметим, что в силу положительной определённости оператора $M_{\alpha\gamma}$ это эквивалентно условию $M_{\alpha\gamma}|\psi\rangle = 0$. Очевидно, рассмотренный в 4.2 пример может быть обобщён для различных вариантов соотношений, $R_s < R_e \leq D$, между рангами истинного состояния R_s и оценки R_e . Таким образом, приходим к следующему необходимому условию на протокол измерений для получения высокой скорости сходимости $1/N$ при $R_s < R_e$:

Условие 1 (необходимое). *Протокол должен содержать измерение $M_{\alpha\gamma}$, которое ортогонально к проекторам на собственные вектора $|\psi_k\rangle$, отвечающие ненулевым собственным значениям истинного состояния:*

$$M_{\alpha\gamma}|\psi_k\rangle = 0, k = 1, \dots, R_s. \quad (4.17)$$

Данное условие означает, что вероятность исхода измерения $M_{\alpha\gamma}$ равна нулю, $p_{\alpha\gamma} = 0$.

Очевидно, одного ортогонального измерения недостаточно для улучшения сходимости до $1/N$. Найдём минимальное достаточное число ортогональных измерений. Для этого заметим, что в отсутствие ортогональных измерений ранг матрицы информации Фишера H ограничен величиной $\nu_s + 1$. Каждое независимое ортогональное измерение увеличивает ранг H на единицу, так как слагаемое $O_{\alpha\gamma}c c^T O_{\alpha\gamma}$ в (4.10) является проектором ранга 1. Новые ортогональные измерения следует добавлять до тех пор, пока ранг H не достигнет своего максимально возможного значения $\nu_e + 1$. Итого, получаем условие на минимальное достаточное число ортогональных измерений:

Условие 2 (достаточное). *Протокол должен содержать*

$$\nu_e - \nu_s = (R_e - R_s)(2D - R_e - R_s) \quad (4.18)$$

независимых измерений $M_{\alpha\gamma}$, удовлетворяющих условию 1.

Может показаться, что для нахождения ортогональных измерений, удовлетворяющих вышеупомянутым условиям, требуется знание истинного состояния ρ , поэтому сама томография теряет смысл. Однако, как и для других

протоколов с адаптивной подстройкой измерительного базиса [6; 8; 35], при поиске новых измерений истинное состояние подменяется его текущей оценкой $\hat{\rho}$. Ранг R_s истинного состояния обычно заранее неизвестен (в противном случае ранг оценки R_e следует приравнять к R_s), поэтому в самом общем случае ортогональные измерения подстраиваются под всевозможные ранги томографируемого состояния. Сначала, находятся измерения, ортогональные к одному собственному вектору с максимальным собственным значением (подстройка под состояния ранга 1), затем ортогонализация проводится одновременно к двум векторам (подстройка под ранг 2) и т. д. Протокол, построенный таким образом, будет обладать сходимостью $1/N$ независимо от ранга истинного состояния.

4.4 Факторизованные измерения

Для упрощения экспериментальной реализации квантовой томографии высокоразмерных систем зачастую желательно использовать только факторизованные измерения (измерения над подсистемами). Согласно условию 1, операторы измерений должны быть ортогональны к собственным векторам $|\psi_k\rangle$ истинного состояния ρ (или текущей оценки $\hat{\rho}$). Почти наверняка собственные вектора являются перепутанными. Учитывая, что факторизованные измерения представляют собой весьма узкое подмножество измерений общего вида, возникает естественный вопрос: существуют ли одновременно факторизованные и ортогональные измерения? Забегая вперёд, краткий ответ на этот вопрос таков: такие измерения существуют, если количество K векторов для ортогонализации не превышает определённый порог K_{\max} . Это означает, что если ранг R_s истинного состояния больше данного предела, $R_s > K_{\max}$, то точность томографии с факторизованными измерениями будет низкой — наблюдается сходимость $1/\sqrt{N}$.

В простейшем случае двухкомпонентной системы и чистого истинного состояния для нахождения ортогональных измерений можно использовать разложение Шмидта. Действительно, в данном случае есть только один собственный вектор $|\psi_1\rangle$ с ненулевым собственным значением ($K = 1$). Пусть его разложение Шмидта имеет вид

$$|\psi_1\rangle = \sum_i \sqrt{\mu_i} |i\rangle \otimes |i\rangle, \quad (4.19)$$

где μ_i — собственные значения редуцированной матрицы плотности. Очевидно, факторизованные векторы $|i\rangle \otimes |j\rangle$, $i \neq j$, ортогональны $|\psi_1\rangle^4$. Искомые измерения представляют собой проекторы на данные векторы: $M_{\alpha\gamma} = |i\rangle\langle i| \otimes |j\rangle\langle j|$.

В общем виде проблема существования факторизованного измерения $M^{(K)}$, ортогонального к K перепутанным векторам, сводится к задаче о максимальной размерности *полностью перепутанного* подпространства [95]. Пусть гильбертово пространство \mathcal{H}_D системы размерности D состоит из l компонент:

$$\mathcal{H}_D = \mathcal{H}_{d_1} \otimes \mathcal{H}_{d_2} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{d_l}, \quad (4.20)$$

где размерности d_i компонент \mathcal{H}_{d_i} удовлетворяют соотношению $d_1 d_2 \dots d_l = D$. Подпространство $S_E \subset \mathcal{H}_D$ называется *полностью перепутанным*, если оно не содержит факторизованных векторов. Максимально возможная размерность *полностью перепутанного* подпространства равняется

$$D_E \equiv \max_{S_E \in \mathcal{E}} \dim S_E = D - (d_1 + \cdots + d_l) + l - 1, \quad (4.21)$$

где \mathcal{E} — множество всех *полностью перепутанных* подпространств.

Пусть $S_\psi \subset \mathcal{H}_D$ — линейная оболочка K векторов $|\psi_k\rangle$ ($\dim S_\psi = K$), а S_ψ^\perp — её ортогональное дополнение в \mathcal{H}_D ($\dim S_\psi^\perp = D - K$). Искомое измерение $M^{(K)}$ существует, если S_ψ^\perp не является *полностью перепутанным* подпространством. Это заведомо так, если $\dim S_\psi^\perp > D_E$. Учитывая (4.21), после элементарных преобразований получаем:

$$K \leq K_{\max} = d_1 + \cdots + d_l - l. \quad (4.22)$$

Следовательно, если $K \leq K_{\max}$, то факторизованное и ортогональное измерение $M^{(K)}$ существует для любого набора векторов $\{|\psi_k\rangle\}_{k=1}^K$. В противном случае, для существования измерения $M^{(K)}$ необходимо дополнительно потребовать, чтобы некоторые из векторов $|\psi_k\rangle$ были факторизованными, что почти наверное нарушается на практике.

В разделах, посвящённых проведённым численным симуляциям и экспериментам, рассматривается случай симметричной двухкомпонентной системы: $l = 2$ и $d_1 = d_2 = \sqrt{D}$. Для неё $K_{\max} = 2\sqrt{D} - 2$. Также упомянем здесь систему типа регистр из l кубитов, для которой $K_{\max} = l$, что экспоненциально мало по сравнению с максимально возможным рангом состояния регистра, равным $D = 2^l$.

⁴Заметим, что дополнительно существует ещё бесконечно много ортогональных факторизованных векторов, не сводящихся к этой тривиальной форме.

4.5 Описание протокола

Для получения сходимости $1/N$ при томографии состояний неполного ранга протокол томографии должен включать ортогональные измерения. В зависимости от исследуемой квантовой системы и конкретного вида протокола способ привнесения ортогональных измерений может различаться. В данном разделе описывается один из возможных вариантов построения протокола томографии двухкомпонентных систем с подсистемами одинаковой размерности, содержащего ортогональные измерения.

Пусть гильбертово пространство совокупной системы размерности D имеет вид:

$$\mathcal{H}_D = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B, \quad \dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_B = \sqrt{D}, \quad (4.23)$$

где \mathcal{H}_A и \mathcal{H}_B гильбертовы пространства каждой из подсистем в отдельности.

Численные симуляции и эксперименты по томографии пространственных мод пар фотонов были выполнены с использованием протокола, состоящего из следующей последовательности действий:

1. Найти текущую оценку $\hat{\rho}$ истинного состояния.
2. Вычислить собственные векторы $|\psi_k\rangle$ оценки и отсортировать их по убыванию соответствующих собственных значений.
3. Сгенерировать случайное целое число K равномерно из интервала $[1, K_{\max}]$, $K_{\max} = 2\sqrt{D} - 2$.
4. Отыскать факторизованный вектор $|\varphi_A\rangle \otimes |\varphi_B\rangle$, одновременно ортогональный к K собственным векторам: $\langle \varphi_A \varphi_B | \psi_k \rangle = 0$, $k = 1, \dots, K$.
5. Дополнить вектор $|\varphi_A\rangle$ до случайного базиса \mathcal{B}_A в пространстве \mathcal{H}_A . Аналогично дополнить вектор $|\varphi_B\rangle$ до базиса \mathcal{B}_B в \mathcal{H}_B .
6. Парно тензорно перемножить базисные элементы $|\alpha_i\rangle \in \mathcal{B}_A$ и $|\beta_j\rangle \in \mathcal{B}_B$ для получения базиса \mathcal{B}_D в \mathcal{H}_D с элементами $|\delta_k\rangle = |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_j\rangle$ для всех $i, j = 1, \dots, \sqrt{D}$.
7. Провести проективное измерение в базисе \mathcal{B}_D .
8. Вернуться к шагу 1, если полное число зарегистрированных отсчётов N меньше, чем заданное, иначе завершить процедуру томографии.

В дальнейшем данный протокол будет называться *ортогональным протоколом*.

Поясним детали реализации некоторых пунктов. На шаге 1 вычисляется оценка по методу максимального правдоподобия. В качестве алгоритма оптимизации используется ускоренный проективный градиентный (УПГ) метод с адаптивным перезапуском [96]. Программно реализован вариант алгоритма, описанный в работе [83, стр. 3] применительно к задаче томографии. Авторы [83] предлагают комбинировать УПГ оптимизацию с методом сопряжённых градиентов (СГ) для увеличения скорости сходимости. Однако, в ортогональном протоколе была использована только УПГ часть, потому что варианты «УПГ» и «УПГ+СГ» обладают примерно одинаковым быстродействием, если стартовая точка для запуска оптимизации близка к искомому максимуму, о чём упоминается в [83]. Это условие выполняется для адаптивного протокола, так как в качестве стартовой точки используется оценка состояния $\hat{\rho}$, найденная на предыдущей итерации работы протокола (в начале подставляется полностью смешанное состояние).

В алгоритме УПГ оптимизации функции правдоподобия начальный размер шага был выбран равным $t_1 = 0.1$, а множитель размера шага $\beta = 0.5$. Оптимизация останавливалась на итерации i , если за 20 последовательных шагов абсолютная разность значений логарифмической функции правдоподобия $\ln \mathcal{L}$ становилась меньше 10^{-8} :

$$|\ln \mathcal{L}(\hat{\rho}_{i-k+1}) - \ln \mathcal{L}(\hat{\rho}_{i-k})| < 10^{-8}, k = 1, \dots, 20 \quad (4.24)$$

Также для проведения УПГ оптимизации необходимо выбрать операцию проецирования матриц плотности: $\rho = \text{proj}(\sigma)$. Проекция по определению отображает произвольную эрмитову матрицу σ на множество физических (положительно определённых) матриц плотности ρ заданного ранга R_e . Обычно используют проекцию, которая действует только на собственные значения, а собственные векторы оставляет без изменения.

Пусть $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_D)^T$ — вектор собственных значений матрицы σ , который может по ходу оптимизации содержать отрицательные значения или не суммироваться в единицу. Напротив, вектор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_D)^T$ собственных значений физической матрицы плотности принадлежит каноническому симплексу $\Delta_D = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_D)^T \mid \lambda_i > 0 \wedge \sum_{i=1}^D \lambda_i = 1\}$. В итоге, если $R_e = D$, то достаточно спроецировать μ на симплекс Δ_D : $\lambda = \text{proj}_{\Delta_D}(\mu)$. Такая процедура описана в работе [97].

В случае $R_e < D$ операцию проекции следует немного изменить. Сначала составляется усечённый вектор $\tilde{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_{R_e})^T$. Затем он проецируется на симплекс Δ_{R_e} : $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{R_e})^T = \text{proj}_{\Delta_{R_e}}(\tilde{\mu})$. Наконец, $\tilde{\lambda}$ дополняется $D - R_e$ нулевыми элементами в конце: $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{R_e}, 0, \dots, 0)^T$. Таким образом полученный вектор λ соответствует матрице плотности ранга R_e .

Ортогональный факторизованный вектор на шаге 4 находится как решение задачи минимизации следующей функции:

$$f(|\varphi_A\rangle, |\varphi_B\rangle) = \sum_{k=1}^K |\langle \varphi_A \varphi_B | \psi_k \rangle|^2 + \langle \varphi_A | \varphi_A \rangle + \frac{1}{\langle \varphi_A | \varphi_A \rangle} + \langle \varphi_B | \varphi_B \rangle + \frac{1}{\langle \varphi_B | \varphi_B \rangle} - 4. \quad (4.25)$$

Эта функция составлена таким образом, чтобы обращаться в ноль тогда и только тогда, когда, во-первых, вектор $|\varphi_A\rangle \otimes |\varphi_B\rangle$ ортогонален всем собственным векторам $|\psi_k\rangle$, $k = 1, \dots, K$ и, во-вторых, $|\varphi_A\rangle$ и $|\varphi_B\rangle$ нормированы на единичную длину. Очевидно, функция f неотрицательна, $f \geq 0$, и глобальный минимум $f = 0$ достигается для искомого вектора. Он заведомо существует, так как $K \leq K_{\max}$. Заметим, что последние пять слагаемых были добавлены с целью обеспечить «автоматическую» нормировку векторов $|\varphi_A\rangle$ и $|\varphi_B\rangle$ при использовании алгоритмов безусловной оптимизации. При программной реализации был выбран квазиньютоновский алгоритм Бroyдена — Флетчера — Гольдфарба — Шанно [98]. Процедура поиска стартует из случайно выбранных векторов $|\varphi_A\rangle$ и $|\varphi_B\rangle$, обладающих равномерным распределением⁵. Если алгоритм оптимизации попал в локальный минимум со значением $f \neq 0$, тогда он запускается снова для другой стартовой точки. Множество решений $f = 0$ может содержать различные линейно-независимые векторы и случайный выбор начальной точки обеспечивает потенциальную сходимость к любому из решений. Этот факт вкуче с переполненностью набора измерений обеспечивает достаточное число ортогональных измерений (см. условие 2 из 4.3).

Дополнение заданного вектора $|\varphi\rangle$ до случайного ортонормированного базиса \mathcal{B} на шаге 5 происходит следующим образом. Для начала отметим, что каждой унитарной матрице соответствует некий базис и наоборот (столбцам

⁵Под равномерным распределением здесь имеется в виду распределение, порождённое мерой Хаара на унитарных матрицах. То есть вектор $|\varphi\rangle$ может быть представлен в виде $|\varphi\rangle = U|\varphi_0\rangle$, где U — случайная унитарная матрица, равномерно распределённая по мере Хаара, а $|\varphi_0\rangle$ — произвольный, но фиксированный вектор.

матрицы соответствуют элементы базиса). Следовательно, требуется случайная унитарная матрица с заданным первым столбцом. Для её получения прибегнем к подходу, использованному при модификации метода Медзадри генерации случайных блужданий (см. 2.3). Сначала генерируется матрица G , принадлежащая ансамблю Жинибра, затем её первый столбец заменяется на $|\varphi\rangle$, и, наконец, выполняется QR разложение, $G = QR$, для получения унитарной матрицы Q , соответствующей искомому базису \mathcal{B} .

Базис \mathcal{B}_D на шаге 7 алгоритма соответствует некоторому POVM \mathcal{M}_α , состоящему из проекторов $M_{\alpha\gamma}$ ранга 1 на векторы базиса, где индексом α нумеруются базисы, а γ — индекс вектора в базисе. В проведённых экспериментах время накопления отсчётов t_α было фиксировано для каждого $M_{\alpha\gamma} \in \mathcal{M}_\alpha$. Более того, t_α не изменялось для $D + 1$ идущих подряд базисов — минимального числа базисов для информационно полного протокола томографии состояний ранга D . Только после этого изменялось на новое значение.

По аналогии с блочными измерениями (см. 2.4) время экспозиции t_α увеличивалось пропорционально суммарному числу зарегистрированных отсчётов N . Под *размером блока* в данном случае подразумевается среднее число отсчётов $\langle \sum_\gamma n_{\alpha\gamma} \rangle$, полученных при измерении одного POVM. Заметим, что размер блока совпадает с параметром $b_{\alpha\gamma} \equiv b_\alpha$ в выражении (4.8) для функции правдоподобия. В эксперименте время t_α подбиралось так, чтобы размер блока возрастал по правилу: $b_\alpha = \max(100, \lfloor N/30 \rfloor)$. В симуляциях же вместо пуассоновской функции правдоподобия использовалась мультиномиальная форма (4.9), поэтому говорить о времени измерения не приходится. Вместо этого размер блока устанавливался напрямую, а не косвенно через зависимость от времени.

4.6 Численные симуляции

В данном разделе приводится сравнение факторизованного ортогонального (FO) протокола, описанного в 4.5, с четырьмя другими стратегиями измерений. Все протоколы сводятся к проекционным измерениям некоторого переполненного набора базисов. Времена измерений и размер блока для всех протоколов выбран одинаковым, чтобы исключить его влияние на результаты: $b_\alpha =$

$\max(100, \lfloor N/30 \rfloor)$. Краткие описания протоколов и их аббревиатуры, используемые в данной главе, представлены в следующем списке:

1. Факторизованные случайные измерения (FR) — измерения в случайных базисах, содержащих только факторизованные векторы. Сначала генерируются случайные базисы, распределённые равномерно по мере Хаара, в пространствах состояний двух подсистем, а затем составляются всевозможные попарные тензорные произведения векторов для получения результирующего базиса составной системы.
2. Случайные измерения общего вида (GR) — измерения в случайных базисах, распределённых равномерно по мере Хаара. Векторы, на которые выполняется проецирование, почти наверняка являются перепутанными.
3. Измерения в собственном базисе (Eigen) — адаптивный протокол, который содержит измерения в собственном базисе текущей оценки истинного состояния. Первый базис совпадает с собственным, последующие D базисов выбираются случайно, как и при GR измерениях. Они добавлены для обеспечения информационной полноты протокола. После измерения этого набора из $D + 1$ базисов процедура повторяется: оценка состояния уточняется и вычисляется новый собственный базис, к которому добавляется D случайных базисов и т. д.
4. Измерения в выровненных взаимно несмещённых базисах (AMUB) — адаптивный протокол, в котором полный набор из $D + 1$ взаимно несмещённых базисов [38; 99] (см. 1.3.1) повернут как целое таким образом, чтобы один из базисов совпадал с собственным базисом текущей оценки томографируемого состояния. Подобно протоколу Eigen процесс повторяется после измерения набора из $D + 1$ базисов. Этот протокол представляет собой прямое обобщение алгоритма, реализованного в работе [8], на случай систем высокой размерности (единственное различие используемой нами схемы состоит в том, что базисы выравниваются много раз, а не однократно).

В протоколах FR и FO используются только факторизованные измерения, остальные стратегии требуют измерений общего вида.

Напомним, что методы построения максимального набора из $D + 1$ взаимно несмещённых базисов известны только для пространств размерности $D = p^m$, где p — простое число, а m — положительное целое. Следовательно, протокол AMUB недоступен для некоторых размерностей и по этой причине был введён

протокол Eigen. В действительности обе схемы измерений очень похожи друг на друга, так как «наиболее важная» часть (измерения в собственном базисе), обеспечивающая улучшение сходимости, одинакова для обоих подходов. Заметим, что измерения в собственном базисе подпадают под определение ортогональных измерений, введённых в 4.3.

Количественным критерием сравнения вышеупомянутых протоколов, как и ранее, служит бюресовское расстояние $d_B^2(\rho, \hat{\rho})$ между текущей оценкой $\hat{\rho}$ и истинным состоянием ρ

$$d_B^2(\rho, \hat{\rho}) = 2 - 2\sqrt{F(\rho, \hat{\rho})} \approx 1 - F(\rho, \hat{\rho}), \quad (4.26)$$

где приближённое равенство справедливо при условии $1 - F \ll 1$. Таким образом, теория универсального статистического распределения фиделити, описанная в 4.1, остаётся применимой и для квадрата бюресовского расстояния.

Зависимости квадрата бюресовского расстояния $d_B^2(N)$ между текущей оценкой $\hat{\rho}(N)$ и истинным состоянием ρ от числа зарегистрированных отсчётов N изображены на рисунках 4.1 и 4.2 для случая томографии системы размерности $D = 9$ с помощью различных протоколов. Использовалась оценка полного ранга $R_e = D$. Для каждого протокола соответствующая зависимость усреднена по 50 полным проходам томографии. Рассмотрены два ансамбля истинных состояний: чистые состояния, распределённые равномерно по мере Хаара (рисунок 4.1), и смешанные состояния имеющие распределение, порождённое метрикой бюреса (рисунок 4.2; про распределение см. 2.2). В каждом проходе томографии использовалось новое случайно сгенерированное состояние. Полученные зависимости хорошо аппроксимируются степенной функцией вида cN^a . В таблице 10 приводятся результаты этой аппроксимации.

Для чистых состояний все адаптивные стратегии демонстрируют сходимость $1/N$ и выигрывают у случайных измерений, для которых наблюдается сходимость $1/\sqrt{N}$. Однако, несмотря на одинаковую степень сходимости, протокол FO уступает Eigen и AMUB примерно в три раза, независимо от объёма накопленной статистики N . Для случайных протоколов точность оценивания не зависит от класса используемых измерений — она одинакова для FR и GR. Как и ожидалось, протоколы Eigen и AMUB ведут себя практически одинаково (с небольшим перевесом в пользу Eigen для не слишком больших значений N).

Характерная пилообразная форма зависимостей $d_B^2(N)$ для этих протоколов объясняется тем фактом, что после выполнения измерения в собственном базисе

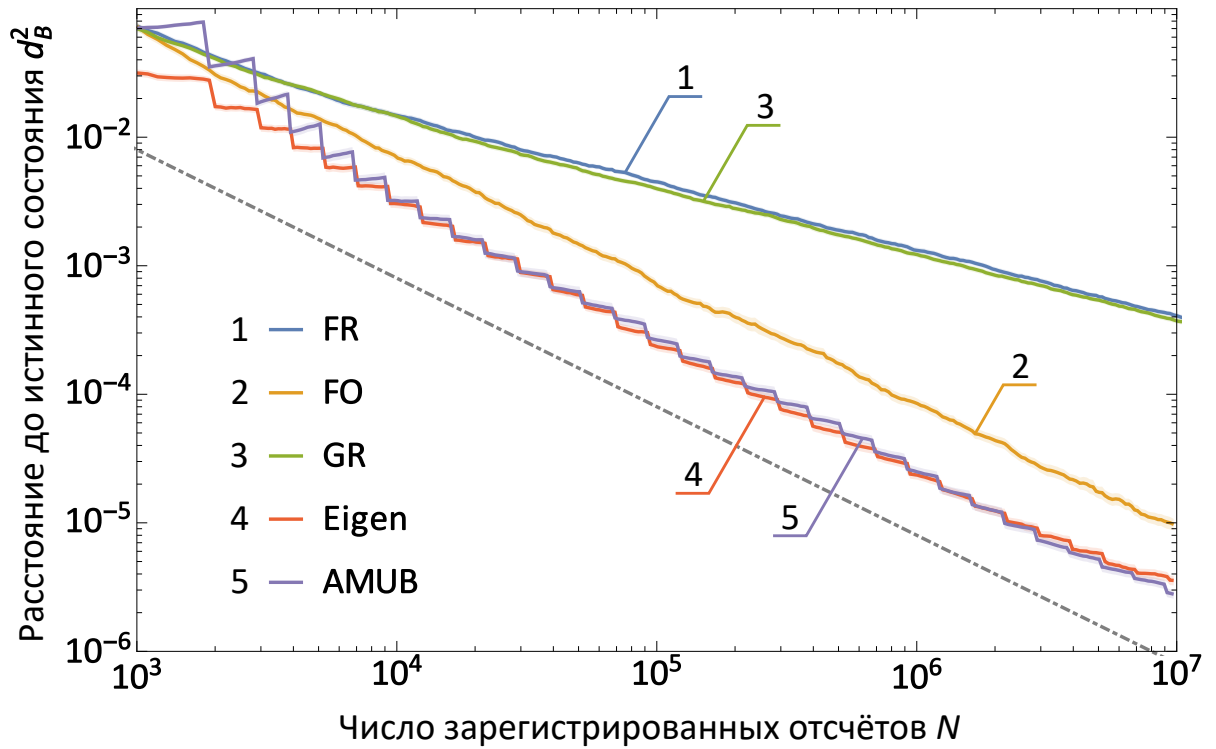


Рисунок 4.1 — Зависимости квадрата бюрсовского расстояния $d_B^2(N)$ между текущей оценкой и истинным состоянием от числа зарегистрированных отсчётов N для различных протоколов, полученные в численных симуляциях томографии девятимерных систем. Каждая кривая получена в результате усреднения по ансамблю случайных чистых состояний, распределённых равномерно по мере Хаара. Аббревиатуры протоколов приведены в начале раздела 4.6. Штрихпунктирной линией изображена граница Гилла — Массара $d_B^2 = 8/N$ для томографии чистых состояний (см. раздел 1.2).

точность оценки резко улучшается, соответственно, расстояние $d_B^2(N)$ скачком уменьшается. Между измерениями в собственном базисе проводятся случайные измерения, обладающие неоптимальной сходимостью. Тем не менее, чередование участков медленной сходимости и точек скачкообразного уменьшения расстояния приводит к совокупной сходимости $1/N$.

При усреднении зависимостей $d_B^2(N)$ по ансамблю смешанных состояний, имеющих распределение, порождённое метрикой Бюреса, ситуация качественно меняется. Хотя все зависимости сближаются друг к другу, тем не менее, можно выделить три группы протоколов. Стратегии, использующие только лишь факторизованные измерения, имеют степень сходимости $a \approx -3/4$ независимо от наличия или отсутствия адаптивности (FR и FO). Случайные измерения общего вида (GR) позволяют немного улучшить точность в фиксированное число раз

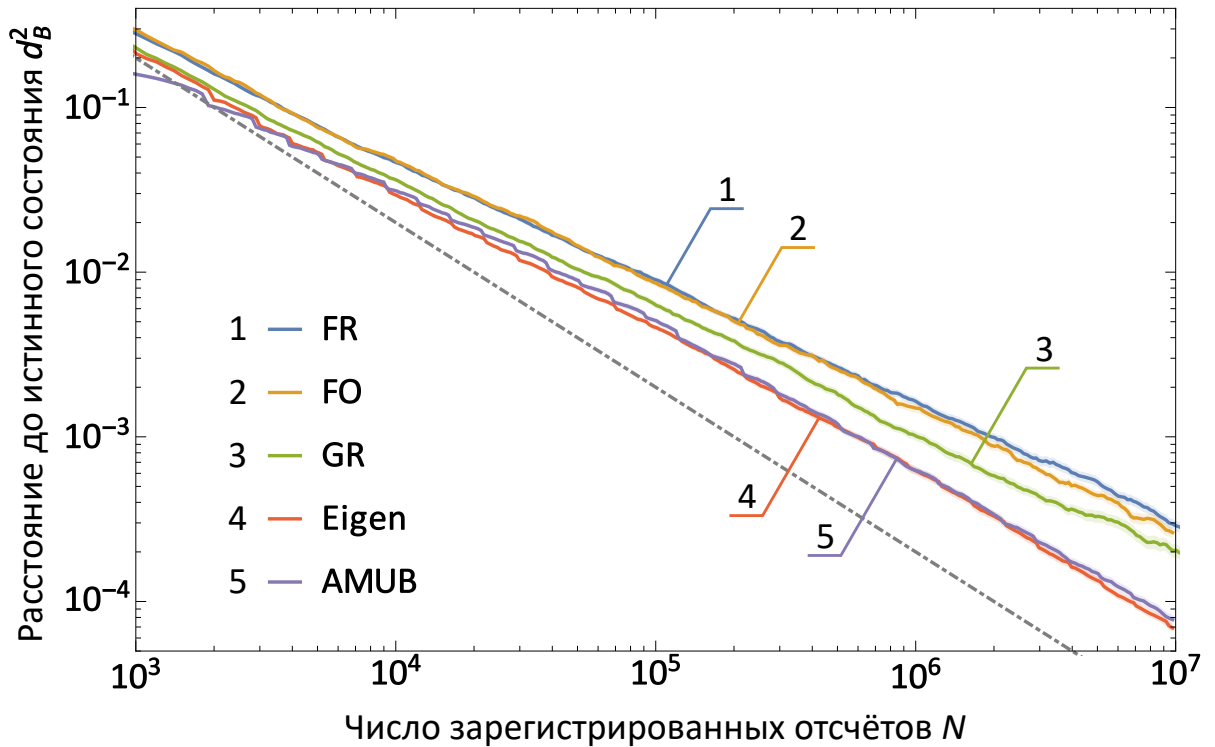


Рисунок 4.2 — То же, что и на рисунке 4.1, только для ансамбля случайных смешанных состояний, имеющих распределение, индуцированное метрикой Бюреса. Штрих-пунктир — граница Гилла — Массара $d_B^2 = 200/N$ для томографии смешанных состояний полного ранга.

при той же степени сходимости. Наилучшая точность восстановления достигается для протоколов Eigen и AMUB, в которых применяется как адаптивность, так и измерения общего вида.

Проигрыш ортогонального протокола FO в пользу Eigen и AMUB и степень сходимости наравне с FR ожидаема, так как в данном случае наблюдается ограничение на максимальный ранг истинного состояния для существования ортогональных измерений (см. (4.22)). Случайные бюресовские состояния хотя формально и обладают полным рангом, имеют тенденцию концентрироваться вблизи состояний ранга $D - 1$, поэтому в томографии эффективно их ранг можно считать неполным.

Отметим, что практически такое же влияние адаптивности и факторизуемости измерений на точность томографии чистых (смешанных) состояний наблюдалось при использовании иного по своей природе, *байесовского* протокола, описанного в 2.1 [74]. Это позволяет говорить о существовании единых закономерностей для различных адаптивных протоколов и общих ограничений факторизованных измерений.

Таблица 10 — Результаты аппроксимации зависимостей расстояния до истинного состояния $d_B^2(\rho, \hat{\rho})$ от числа зарегистрированных отсчётов N , полученных в ходе численных симуляций, степенной функцией cN^a для разных протоколов и состояний.

D	Состояние	Протокол	c	Δc	a	Δa
9	случайное	FR	1.73	0.07	-0.519	0.003
		FO	52	4	-0.967	0.006
	чистое	GR	1.53	0.06	-0.516	0.003
		Eigen	33.8	2.2	-1.019	0.005
		AMUB	44	3	-1.038	0.006
9	случайное	FR	37.9	1.4	-0.728	0.003
		FO	51.6	1.9	-0.757	0.003
	смешанное (бюресовское распределение)	GR	41.4	1.6	-0.765	0.003
		Eigen	90.7	2.9	-0.8642	0.0028
		AMUB	100	3	-0.8669	0.0027
36	случайное	FR	4.23	0.13	-0.5082	0.0020
		FO	396	30	-0.874	0.005
	чистое	GR	4.88	0.15	-0.5159	0.0019
		Eigen	131	12	-0.993	0.005

Также для проверки масштабируемости ортогонального протокола были проведены симуляции томографии чистых состояний размерности $D = 36$. Как и ранее, зависимости $d_B^2(N)$ для рассмотренных выше протоколов⁶ усреднены по 50 прохождениям томографии, в каждом из которых использовалось новое случайно сгенерированное состояние, распределённое равномерно по мере Хаара (см. рисунок 4.3). Параметры аппроксимации полученных зависимостей степенной функцией представлены в таблице 10. Качественные соотношения между точностью протоколов аналогичны случаю томографии девятимерных систем. Однако при возрастании размерности, асимптотический режим сходимости $1/N$ для протокола FO достигается для гораздо больших значений N . Это ведёт к увеличению отрыва по точности между протоколами FO и Eigen, использующем перепутанные измерения. Остаётся не ясным, является ли такое поведение особенностью

⁶Протокол AMUB исключён из рассмотрения по той простой причине, что полный набор взаимно несмещённых базисов неизвестен для размерности $D = 36$.

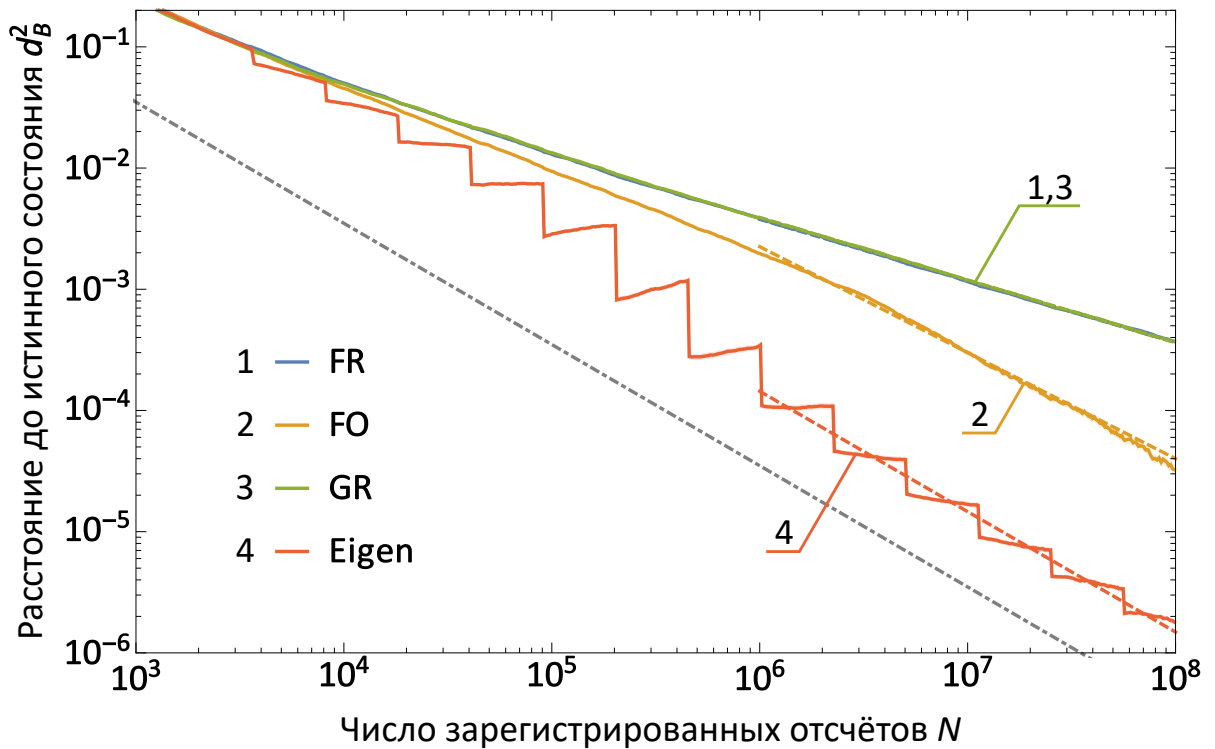


Рисунок 4.3 — Результаты численных симуляций томографии 36-мерных чистых состояний. Сплошными кривыми изображены усреднённые зависимости квадрата бюресовского расстояния от числа зарегистрированных событий N для различных протоколов. Пунктирные прямые — аппроксимация зависимостей степенной функцией cN^a . Штрих-пунктирная линия — граница Гилла — Массара $d_B^2 = 35/N$ для томографии 36-мерных чистых состояний.

протокола FO и его можно в дальнейшем улучшить, или же это общая закономерность и фундаментальное ограничение факторизованных измерений.

4.6.1 Влияние ранга на точность оценок

Сходимость фиделити $1 - F \propto 1/\sqrt{N}$ от числа зарегистрированных отсчётов N возникает только в ситуации несовпадения рангов истинного состояния и оценки: $R_s < R_e$. Если же ранги одинаковы, $R_s = R_e$, то для достаточно больших $N \rightarrow \infty$ наблюдается сходимость $1 - F \propto 1/N$. Поэтому в квантовой томографии важно выбрать *адекватный* ранг оценки, который по определению даёт сходимость $1/N$ независимо от протокола. В работе [92] предлагается находить ранг оценки R_e , исходя из наблюдаемых отсчётов с использованием теста χ^2 .

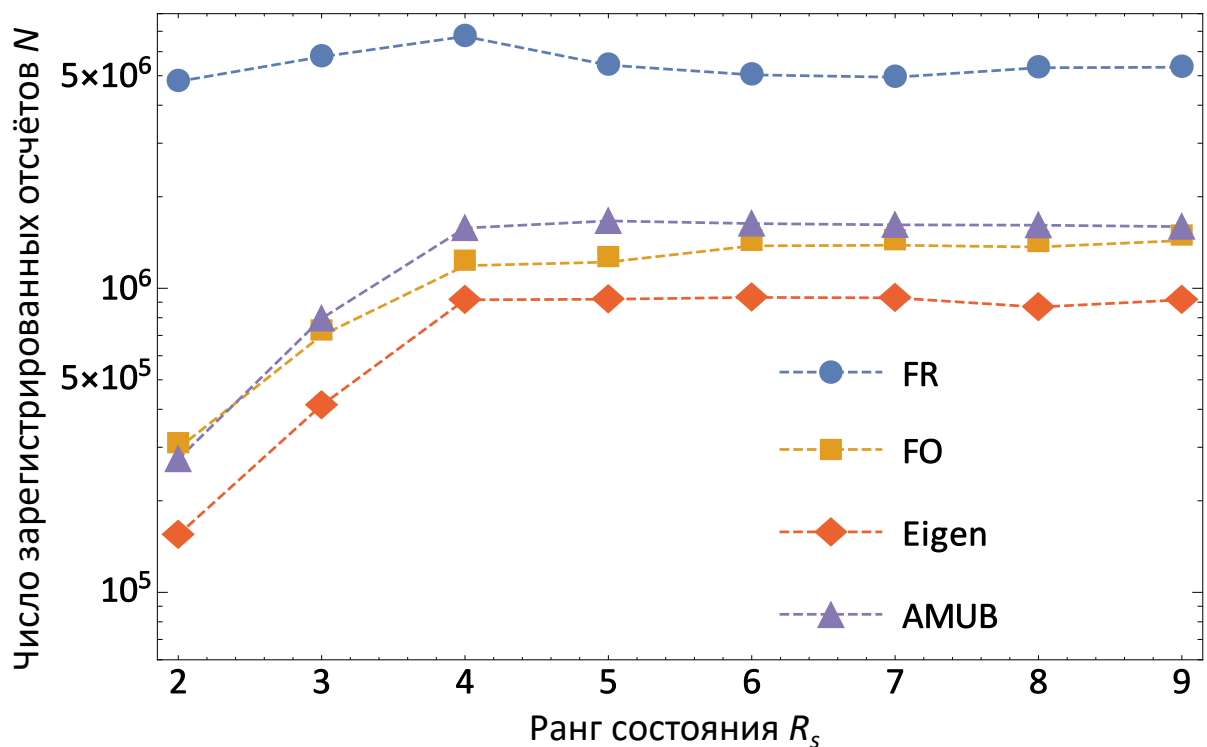


Рисунок 4.4 — Изменение полного числа зарегистрированных отсчётов N , которое необходимо для достижения заданного расстояния Бюреса $d_B^2(N) = 10^{-3}$ от истинного состояния до его оценки, от ранга истинного состояния. Размерность системы $D = 9$. Представлены результаты для оценки полного ранга и различных протоколов.

В реальных экспериментах, формально, все состояния имеют полный ранг $R_s = D$ (но быть может некоторые собственные значения весьма малы), поэтому на первый взгляд следует всегда использовать оценки полного ранга. Однако, оценка неполного ранга способна учесть статистически значимые ненулевые собственные значения при данном N без существенного ухудшения точности не смотря на то, что остальные собственные значения считаются в точности равными нулю. Адекватный ранг оценки можно подбирать на ходу, когда объём выборки N увеличивается, и всё новые собственные значения становятся статистически значимыми. Такой сценарий обеспечит сходимость $1/N$. Может показаться, что адаптивная томография (и ортогональный протокол в частности) не даёт преимуществ по сравнению с выбором адекватного ранга. Но оказывается, что объединив два подхода, точность оценки неизвестного состояния можно ещё сильнее увеличить.

Для исследования влияния рангов на точность оценок проведены численные симуляции томографии с разными рангами истинных состояний. Рассмотрен-

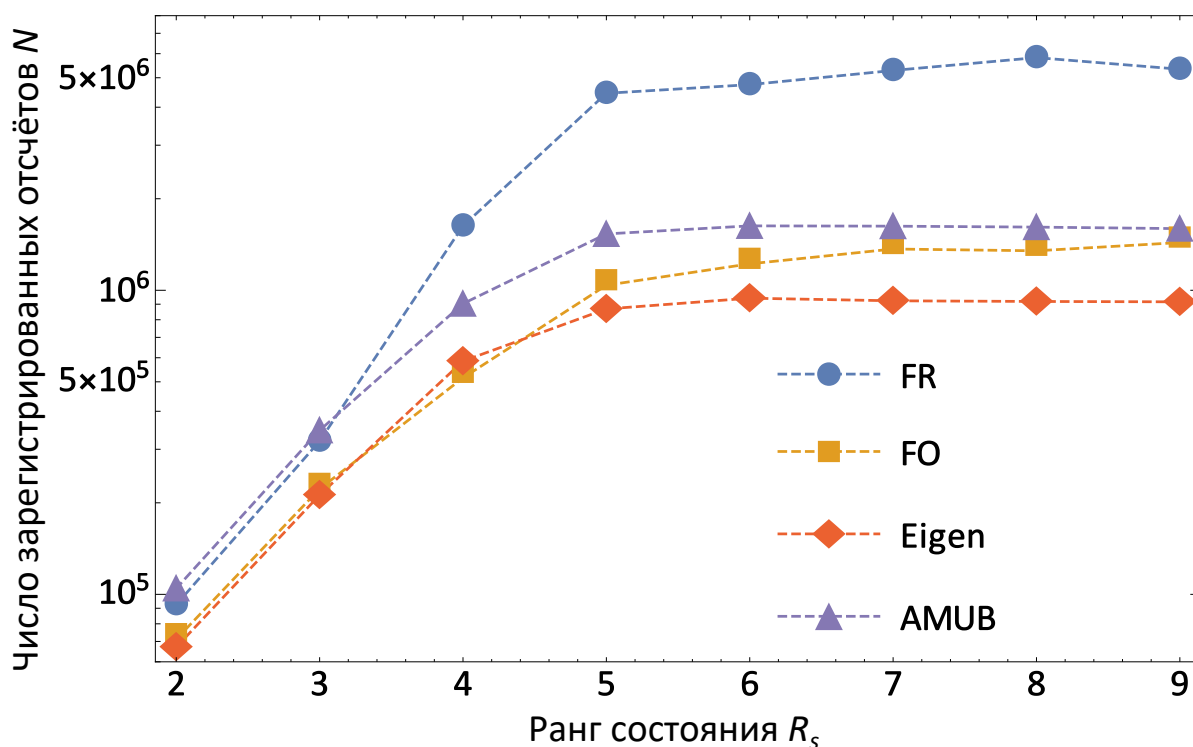


Рисунок 4.5 — То же, что и на рисунке 4.4, но в случае, когда ранг оценки и истинного состояния совпадают.

но два случая: оценка полного ранга ($R_e = D$) и оптимального ранга ($R_e = R_s$). На рисунках 4.4 и 4.5 отложены значения N , необходимые для достижения заданной точности $d_B^2(N) = 10^{-3}$, в зависимости от ранга истинного состояния R_s для различных протоколов и системы размерности $D = 9$. Исходные зависимости $d_B^2(N)$ усреднены по 50 проходам томографии. В качестве истинных состояний взяты состояния разного ранга, близкие к белловскому, с фиксированной чистотой $\text{Tr } \rho^2 = 0.9$.

Когда ранг истинного состояния и оценки различаются (см. рисунок 4.4), случайные измерения демонстрирует плохую сходимость (N велико), в то время как адаптивные протоколы предпочтительны по точности, особенно для состояний низкого ранга. Протоколу FO требуется примерно в 3 раза больший объём выборки N по сравнению с FR, чтобы достичь нужной точности для рангов состояния $R_s \geq 4$. Разрыв возрастает примерно до 30 раз при переходе к состояниям низкого ранга. Примечательно, что AMUB, несмотря на измерения общего вида, ведёт себя немного хуже, чем FO, для состояний выбранных именно в этой симуляции. Хотя в среднем AMUB даёт лучшую точность (см. рисунок 4.1).

Для случайных измерений картина качественно меняется в ситуации совпадения рангов оценки и состояния $R_e = R_s$ (см. рисунок 4.5). Асимптотически

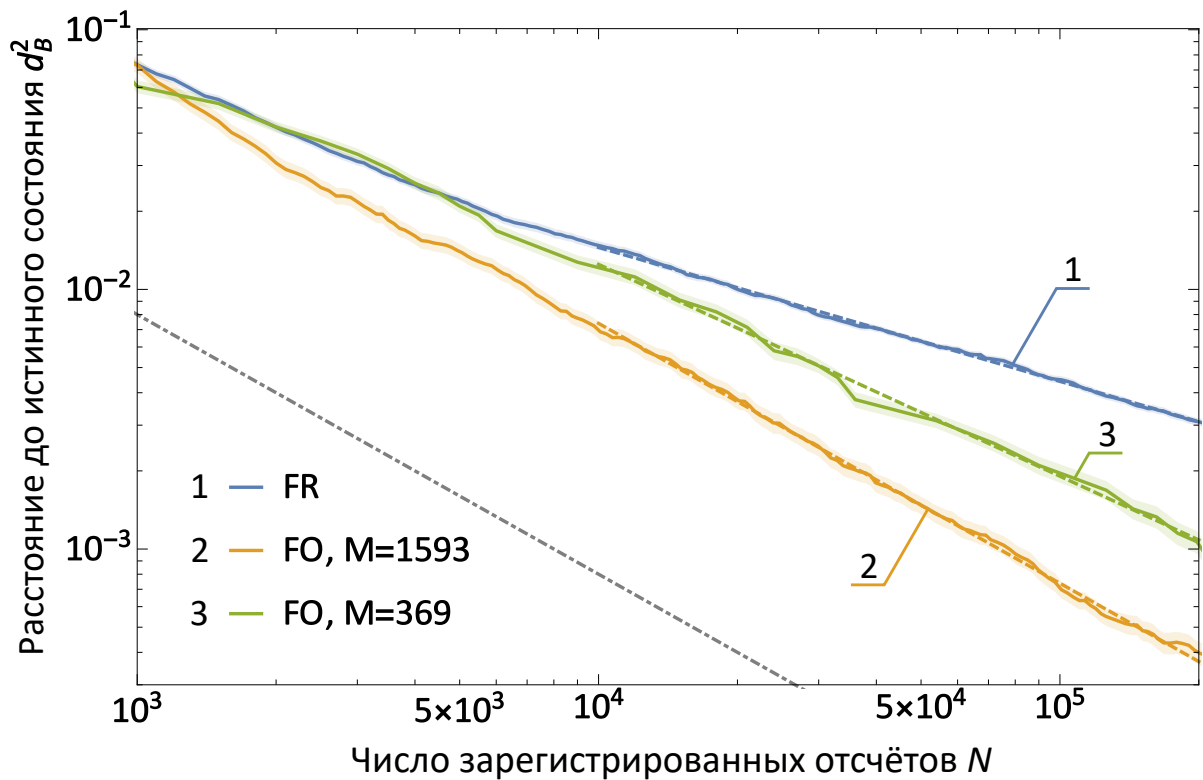


Рисунок 4.6 — Влияния различного числа измерений на точность протокола FO. Пунктирные линии — аппроксимация степенной функцией cN^a . Штирхпунктирная линия — граница Гилла — Массара $d_B^2 = 8/N$. Значение M на легенде обозначает количество различных проекторов для $N = 2 \times 10^5$.

для всех протоколов наблюдается сходимость $d_B^2 = c/N$, и только множитель c различается. Для состояний малого ранга $R_s \leq 4$ случайные измерения обладают примерно такой же точностью, как и адаптивные. Однако, оптимальный выбор ранга оценки не приводит к существенному улучшению результатов при томографии состояний высшего ранга и адаптивность начинает играть роль. Следует отметить, что конкретное значение ранга $R_s = 4$, когда выигрыш от адаптивности превалирует над выбором ранга оценки, зависит от заданного уровня точности $d_B^2 = 10^{-3}$ и истинного состояния.

4.6.2 Влияние размера блока на точность

Зачастую в адаптивных стратегиях томографии выполняются измерения большого числа различных проекторов (см. например, [12; 13; 88] или [100; 101]). Довольно сложно создать адаптивный протокол, который использует минимально

возможное число измерений M_{\min} и в то же время обладает повышенной точностью по сравнению с неадаптивными методами⁷. Обычно требуется по крайней мере удвоенное количество от минимального: $M = 2 \times M_{\min}$. В работах [8; 86] рассматриваются подобные схемы измерений. Сначала ищется предварительная оценка неизвестного истинного состояния, используя первые M_{\min} измерений. Затем новые M_{\min} проекторов подстраиваются под предварительную оценку и измеряются. Наконец, финальная оценка рассчитывается по результатам всех измерений.

Из общих соображений, чем больше различных измерений, тем выше точность томографии. В рассматриваемом протоколе ФО количество измерений определяется правилом, по которому растёт размер блока. Поэтому были проведены дополнительные численные симуляции с увеличенным размером блока $b_\alpha = \max(100, \lfloor N/2 \rfloor)$ (ранее использовался множитель $N/30$) и, следовательно, с меньшим количеством M различных проекторов. Результаты представлены на рисунке 4.6. Две кривые взяты из рисунка 4.1 («FR» и «FO, $M = 1593$ ») для сравнения. При построении кривой «FO, $M = 369$ » использовалось примерно в 4 раза меньше измерений, чем для «FO, $M = 1593$ ». Значения M указаны для момента, когда зарегистрировано $N = 2 \times 10^5$ отсчётов. Аппроксимация степенной функцией кривой «FO, $M = 369$ » даёт зависимость $d_B^2 = 23 \times N^{-0.82}$. Как и ожидалось, точность томографии упала, когда используется меньшее число шагов адаптации измерений.

4.7 Эксперимент

Апробация ортогонального протокола проводилась в эксперименте по томографии поперечных пространственных мод пар фотонов, рождённых в процессе спонтанного параметрического рассеяния (СПР). Упрощённая схема экспериментальной установки изображена на рисунке 4.7 (см. подробнее [102]). Данная схема типична при работе с пространственными состояниями бифотонов и основывается на интерферометре Хэнбери Брауна — Твисса с установленными в каждом плече пространственными фазовыми модуляторами света (ПФМ). Излучение

⁷Здесь речь идёт только о методах полной томографии и не рассматривается неполная томография, например, протоколы сжатого считывания (compressive sensing)

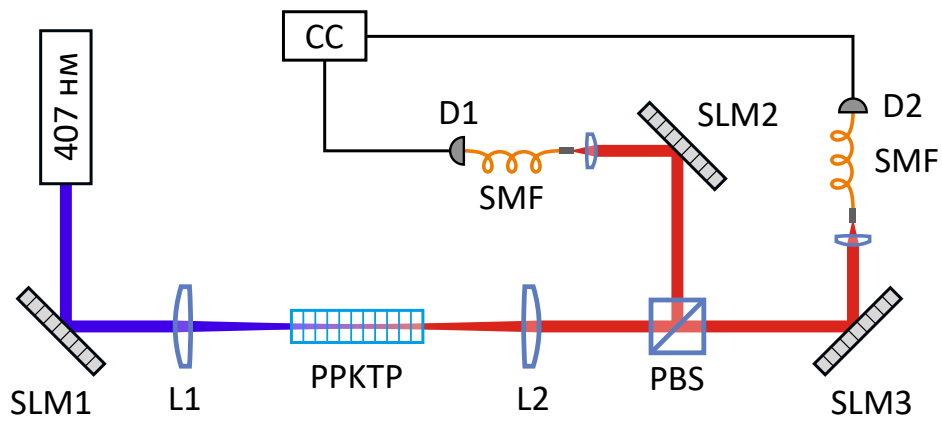


Рисунок 4.7 — Упрощённая схема экспериментальной установки. Управление пространственным состоянием пар фотонов, рождённых в процессе спонтанно-параметрического рассеяния в кристалле PPKTP, осуществляется посредством пространственного фазового модулятора света SLM1. Модуляторы SLM2 и SLM3 вместе с одномодовыми волокнами SMF выполняют заданное проекционное измерение приготовленного состояния.

диодного лазера с длиной волны 407 нм после пространственной фильтрации одномодовым оптоволоком (не показано на рисунке) направляется на ПФМ SLM1 с целью получения заданного поперечного профиля пучка в первом порядке дифракции после ПФМ. Подготовленный пучок служит накачкой нелинейного периодически поляризованного кристалла титанила фосфата калия PPKTP длиной 25 мм. Кристалл спроектирован под коллинеарный частотно-вырожденный синхронизм типа II. Линза L1 обеспечивает оптимальную фокусировку накачки в кристалл для получения одномодового режима генерации СПР [102]. Преобразованное излучение коллимируется линзой L2, и рождённая пара фотонов разделяется с помощью поляризационного светоделителя PBS. В каждом выходном канале PBS установлены ПФМ SLM2 и SLM3 (в действительности это две половины одного ПФМ), выполняющие заданное унитарное факторизованное преобразование состояния бифотона. Далее излучение собирается объективами в одномодовые волокна, где происходит проекционное измерение на фундаментальную (гауссовскую) пространственную моду волокна. Световоды подключены к счётным однофотонным детекторам D1 и D2. Коррелятор CC регистрирует события одновременного прихода фотонов в пределах временного окна 4 нс. Это обеспечивает учёт только пар фотонов, рождённых в процессе СПР, а также фильтрацию фоновой засветки.

Цифровая голограмма, отображаемая на SLM1, задаёт пространственное состояние приготавливаемых пар фотонов, а голограммы на SLM2 и SLM3 определяют выполняемое измерение. Используемые ПФМ состоят из жидкокристаллической матрицы и способны модулировать только фазу отражённого от них излучения. Используя методику из работы [103], можно аналитически рассчитать голограмму, после дифракции света на которой в первом порядке наблюдается заданное пространственное распределение, промодулированное как по фазе, так и по амплитуде. Описанная экспериментальная установка позволяет выполнять только факторизованные измерения, так как фотоны из рождённой пары разделяются светоделителем и в дальнейшем распространяются по отдельности.

Обычно для кодирования пространственных состояний используются два канонических набора поперечных мод: моды Лагерра – Гаусса и Эрмита — Гаусса. Выделенная роль этих мод обусловлена тем, что они являются собственными решениями волнового уравнения в параксиальном приближении, и, следовательно, их форма сохраняется при распространении волны. Более того, они образуют полный бесконечномерный базис пространственных поперечных мод. В проведённых экспериментах кодирование происходило в модах Эрмита — Гаусса. Амплитуда поля в перетяжке моды Эрмита — Гаусса описывается выражением:

$$HG_{nm}(x, y) \propto H_n\left(\frac{x}{w}\right) H_m\left(\frac{y}{w}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2w^2}\right). \quad (4.27)$$

где n, m — неотрицательные индексы мод, x, y — координаты в поперечной плоскости, w — размер перетяжки, а H_n обозначает полином Эрмита степени n . *Порядок моды* определяется как сумма $n + m$.

Экспериментально были приготовлены два состояния:

1. $|HG_{00}\rangle \otimes |HG_{00}\rangle$ — факторизованное (в дальнейшем оно будет упоминаться как *гауссовское* состояние);
2. $(|HG_{10}\rangle \otimes |HG_{00}\rangle + |HG_{00}\rangle \otimes |HG_{10}\rangle)/\sqrt{2}$ — перепутанное (*белловское* состояние).

Данные состояния получаются, если на кристалл направить пучок накачки в модах HG_{00} и HG_{10} соответственно. При этом размеры перетяжек всех пучков (как накачки, так и детектирующих мод) должны быть правильно подобраны, исходя из параметров кристалла [104]. Гауссовское состояние было дополнительно пропущено через одномодовый световод, устанавливаемый между кристаллом и поляризационный светоделителем (не показан на рисунке 4.7), с целью увеличения его чистоты.

В данной работе рассматривается томография только конечномерных систем, поэтому формально бесконечномерное пространство пространственных состояний следует ограничить, выбрав некоторое подпространство размерности D . Выбирая моды до первого порядка включительно, а именно $|\text{HG}_{00}\rangle$, $|\text{HG}_{01}\rangle$, $|\text{HG}_{10}\rangle$, и образуя их всевозможные попарные тензорные произведения (например, $|\text{HG}_{00}\rangle \otimes |\text{HG}_{01}\rangle$), получим подпространство размерности $D = 9$. Добавив моды второго порядка $|\text{HG}_{11}\rangle$, $|\text{HG}_{20}\rangle$, $|\text{HG}_{02}\rangle$, придём к подпространству увеличенной размерности $D = 36$. Таким образом, в работе исследуются системы, имеющие естественное разбиение на две трёхмерных и шестимерных подсистемы, соответственно.

Приготовленные состояния можно восстанавливать в любом подпространстве. Таким образом, получается четыре комбинации. Однако, в предварительных экспериментах было обнаружено, что протоколы FO и FR демонстрируют одинаковую сходимость при томографии белловского состояния, восстановленного в пространстве размерности $D = 36$, поэтому данная комбинация исключена из дальнейшего рассмотрения. Наиболее вероятно, что такой результат связан с низкой чистотой приготовленного состояния. Параметры состояний для оставшихся трёх серий экспериментов представлены в таблице 11. Параметры включают в себя чистоту $\text{Tr } \rho^2$, степень перепутывания (negativity) [105] и *разброс* d_{spr}^2 , усреднённые по нескольким проходам томографии (30 проходов для $D = 9$ и 10 — для $D = 36$). Полное число зарегистрированных отсчётов в каждом проходе составляет $N = 3 \times 10^5$. Определим разброс d_{spr}^2 состояний из серии как усреднённый квадрат бюрсовского расстояния от каждого состояния ρ_i из ансамбля до среднего $\bar{\rho} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \rho_i$:

$$d_{\text{spr}}^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m d_B^2(\rho_i, \bar{\rho}). \quad (4.28)$$

На разброс влияют как и статистическая неопределённость оценки ρ_i , так и систематическое изменение истинного состояния от одного прохода томографии к другому. Дополнительные эксперименты показали, что вклад последнего фактора превалирует. Флуктуации истинного состояния в основном связаны с медленным изменением температуры в помещении, где находилась экспериментальная установка. Кроме того, не все проходы томографии в серии шли подряд, они периодически прерывались на юстировку установки, таким образом одна серия экспериментов была разбита на несколько дней.

Таблица 11 — Экспериментально полученные параметры состояний, усреднённые по нескольким проходам томографии. Определения параметров приводятся в основном тексте.

D	Состояние	Чистота	Степень перепутывания	Разброс
9	гауссовское	0.942 ± 0.015	0.003 ± 0.001	0.0052 ± 0.0004
36	гауссовское	0.915 ± 0.007	0.022 ± 0.002	0.062 ± 0.013
9	белловское	0.740 ± 0.003	0.376 ± 0.005	0.0168 ± 0.0013

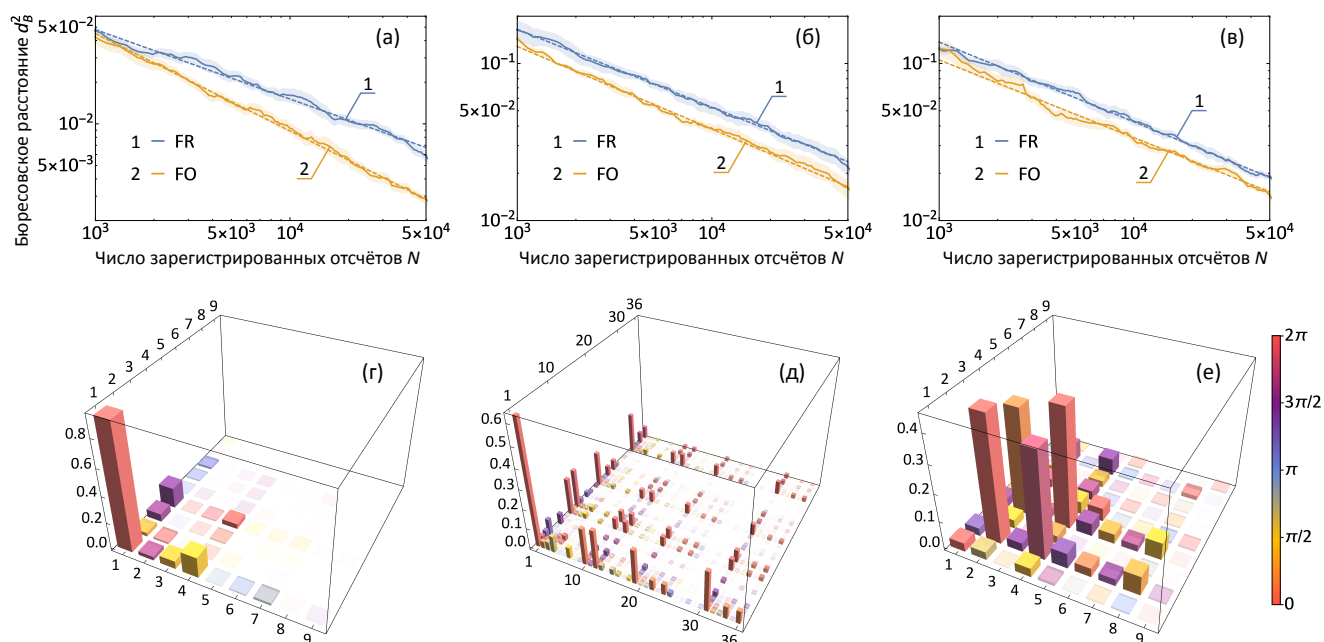


Рисунок 4.8 — Зависимости квадрата бюрсовского расстояния $d_B^2(N)$ до финальной оценки от числа зарегистрированных отсчётов N , полученные в эксперименте по томографии (а) гауссовского состояния, восстановленного в пространстве размерности $D = 9$ и (б) $D = 36$, а также (в) белловского состояния, восстановленного в пространстве размерности $D = 9$. Заливка возле кривых соответствует одному стандартному отклонению среднего. Пунктирные линии — аппроксимация степенной функцией вида cN^a . Восстановленные матрицы плотности (г-е) изображены под соответствующими графиками сходимости. Высота столбика показывает абсолютную величину матричного элемента, его фаза отражена цветом.

Таблица 12 — Результаты аппроксимации зависимости расстояния $d_B^2(\hat{\rho}, \hat{\rho}(N_0))$ до финальной оценки от числа зарегистрированных отсчётов N , полученных в эксперименте, степенной функцией cN^a .

D	Состояние	Протокол	c	Δc	a	Δa
9	гауссовское	FR	1.54	0.19	-0.502	0.014
		FO	5.8	0.9	-0.703	0.016
36	гауссовское	FR	5.1	0.7	-0.496	0.016
		FO	4.9	0.4	-0.526	0.010
9	белловское	FR	4.6	0.4	-0.507	0.010
		FO	3.2	0.4	-0.495	0.012

Ранее в 4.6 точность томографии характеризовалась бюресовским расстоянием $d_B^2(\hat{\rho}(N), \rho)$ между оценкой $\hat{\rho}$ и истинным состоянием ρ . Как правило, истинное состояние в эксперименте неизвестно, поэтому в данном разделе мы прибегнем к бюресовскому расстоянию $d_{\text{final}}^2(N) \equiv d_B^2(\hat{\rho}(N), \hat{\rho}(N_0))$ до финальной оценки $\hat{\rho}(N_0)$, полученной после детектирования N_0 событий. Графики зависимостей этой величины от числа зарегистрированных отсчётов N изображены на рисунках 4.8а–4.8в для томографии гауссовского и белловского состояний, восстановленных как состояния полного ранга. Результаты усреднены по нескольким проходам томографии (от 5 до 20), и полный объём статистики в каждом из них составил $N_0 = 3 \times 10^5$. Очевидно, при приближении N к N_0 расстояние $d_{\text{final}}^2(N_0)$ стремится к нулю, что не соответствует реальному улучшению точности оценки (характеризуемой как расстояние до истинного состояния). По этой причине графики приводятся только до значений $N = 5 \times 10^4$. Также, как будет показано ниже в 4.7.1, при $N > 5 \times 10^4$ оценка в действительности перестаёт улучшаться из-за наличия инструментальных погрешностей. Результаты аппроксимации полученных зависимостей степенной функцией вида cN^a приводятся в таблице 12. Восстановленные в конце томографии матрицы плотности изображены на рисунках 4.8г–4.8е.

Как следует из результатов, во всех рассмотренных случаях ортогональный протокол демонстрирует преимущество по сравнению со стратегией случайных измерений. Однако, степень улучшения зависит от чистоты и размерности приготовленного состояния. Наибольший выигрыш достигается при томографии

гауссовского состояния, обладающего наибольшей чистотой, в подпространстве меньшей размерности $D = 9$. Для случайных измерений наблюдается сходимость $1/\sqrt{N}$, а для ортогонального протокола степень сходимости увеличивается по абсолютному значению до $a = -0.70$ (см. рисунок 4.8а). Эта разница ведёт к повышению точности оценки в ≈ 2.2 раза при $N = 5 \times 10^4$ (данное отношение растёт с ростом N). В случае, когда гауссовское состояние восстанавливается в подпространстве более высокой размерности $D = 36$, степени сходимости a для ортогонального протокола и случайных измерений примерно сравниваются (см. рисунок 4.8б). Тем не менее, ортогональный протокол даёт лучшую в ≈ 1.4 раза точность. Это отношение остаётся постоянным для различных N . Наименьшее преимущество наблюдается для белловского состояния, которое обладает относительно низкой чистотой. Среднее отношение расстояний $d_{\text{final}}^2(N)$ для двух сравниваемых протоколов составило ≈ 1.25 (см. рисунок 4.8в).

4.7.1 Предел точности из-за инструментальных погрешностей

В представленных на рисунке 4.8 результатах эксперимента, точность томографии оценивалась как расстояние $d_{\text{final}}^2(N)$ до финальной оценки вместо расстояния $d_{\text{true}}^2(N)$ до истинного состояния, так как последнее доподлинно неизвестно. Тем не менее величина $d_{\text{final}}^2(N)$ приблизительно равна $d_{\text{true}}^2(N)$ до наступления некоторого предела $N < N_{\text{lim}}$, который возникает из-за неизбежных инструментальных ошибок в экспериментальной установке. При $N > N_{\text{lim}}$ зависимость $d_{\text{true}}^2(N)$ выходит на асимптотическое значение $d_{\text{asympt}}^2 = d_{\text{true}}^2(N \rightarrow \infty)$, в то время как $d_{\text{final}}^2(N)$ стремится к нулю. Следовательно, при $N > N_{\text{lim}}$ $d_{\text{final}}^2(N)$ перестаёт аппроксимировать $d_{\text{true}}^2(N)$, и уменьшение $d_{\text{final}}^2(N)$ не означает реального уточнения результата томографии. Очевидно, $d_{\text{asympt}}^2 \approx d_{\text{final}}^2(N_{\text{lim}})$.

Для оценки N_{lim} и, следовательно, d_{asympt}^2 воспользуемся тестовой статистикой χ^2 , которая ранее использовалась в 3.3.1. В обозначениях текущей главы выражение для χ^2 примет вид:

$$\chi^2 = \sum_{\alpha\gamma} \frac{(n_{\alpha\gamma} - p_{\alpha\gamma}b_{\alpha\gamma})^2}{p_{\alpha\gamma}b_{\alpha\gamma}}, \quad (4.29)$$

где как обычно $n_{\alpha\gamma}$ — число зарегистрированных отсчётов при измерении $M_{\alpha\gamma}$, $p_{\alpha\gamma}$ — вероятность исхода согласно правилу Борна и $b_{\alpha\gamma}$ — константа, зависящая

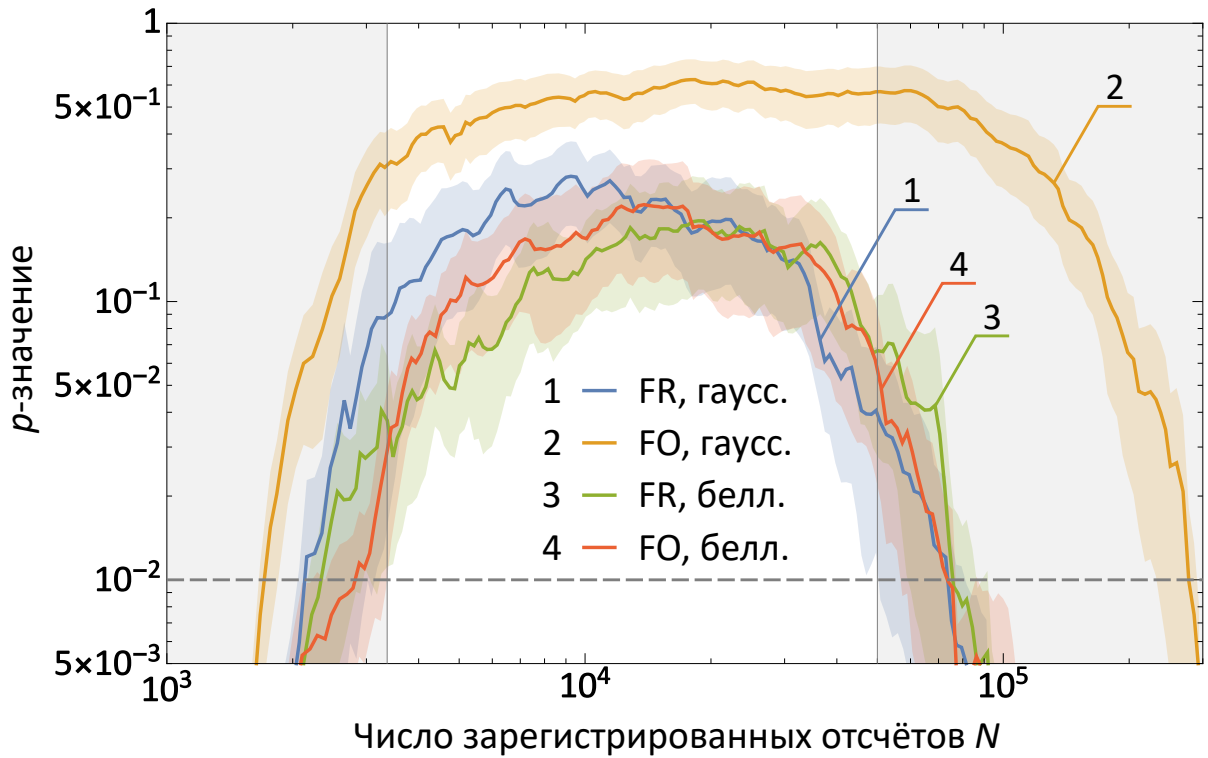


Рисунок 4.9 — Зависимости p -значения от числа зарегистрированных отсчётов N для гауссовского и белловского состояний размерности $D = 9$ для различных протоколов томографии. Используются те же данные эксперимента, что и для рисунка 4.8. Зависимости усреднены по нескольким полным проходам томографии. Заливка у каждой кривой соответствует одному стандартному отклонению среднего. Серыми прямоугольниками изображены области, где хотя бы для одной из кривых p -значение опускается ниже выбранного порога в 0.01, отмеченного пунктирной линией.

от времени экспозиции и интенсивности бифотонов (см. также (4.8)). Произведение $p_{\alpha\gamma}b_{\alpha\gamma}$ равняется математическому ожиданию $n_{\alpha\gamma}$: $p_{\alpha\gamma}b_{\alpha\gamma} = \langle n_{\alpha\gamma} \rangle$.

Имея рассчитанное значение χ^2 , наблюдаемая значимость (p -значение) определяется как

$$p\text{-value} = 1 - \int_0^{\chi^2} f_{k-\nu_e}(y) dy, \quad (4.30)$$

здесь $f_{k-\nu_e}(y)$ — плотность вероятности распределения χ^2 с $k - \nu_e$ степенями свободы, а k — количество слагаемых в (4.29). Если p -значение меньше некоторого порога (обычно выбирают пороги, равные 0.05, 0.01 или 0.005), то тогда оценка $\hat{\rho}$ не соответствует наблюдаемым данным $\{n_{\alpha\gamma}\}$ с высокой вероятностью.

Зависимость p -значения от числа зарегистрированных отсчётов N представлена на рисунке 4.9 для томографии системы размерности $D = 9$. Использовались

те же данные эксперимента, что и для рисунка 4.8. Серыми прямоугольниками изображены две области низких p -значений. Первая область (при малых N) возникает из-за недостатка данных, когда оценка состояния $\hat{\rho}$ далека от истинного состояния, и поэтому результаты измерений плохо предсказываются. Вторая область (при больших N) является следствием инструментальных погрешностей, так как вероятности измерений предсказываются неточно из-за отличия измерений от идеальных.

В интервале $3 \times 10^3 < N < 5 \times 10^4$ p -значение выше выбранного порога в 0.01 для всех кривых на графике 4.9. Отсюда следует, что предельное число зарегистрированных отсчётов составляет $N_{\text{lim}} = 5 \times 10^4$. Используя зависимость рисунка 4.8, можно по N_{lim} найти предельную точность $d_{\text{asymp}}^2 \approx d_{\text{final}}^2(N_{\text{lim}})$. Например, $d_{\text{asymp}}^2 \approx 0.02$ для белловского состояния размерности $D = 9$.

4.8 Выводы по главе

В данной главе предложен новый алгоритм адаптивной томографии состояний высокоразмерных двухкомпонентных систем, который легко может быть обобщён на многокомпонентные системы. К достоинствам протокола следует отнести использование только лишь факторизованных измерений, которые предпочтительны в эксперименте с парами фотонов. Также факторизованные измерения востребованы в контексте томографии процессов. Стандартная томография процесса, при которой на вход процесса подаётся заданное квантовое состояние, а на выходе производится измерение, сводится в силу изоморфизма Чоя — Ямиолковского к томографии состояния повышенной размерности посредством факторизованных измерений.

Работа протокола продемонстрирована в численных симуляциях и эксперименте по томографии пространственных состояний пар фотонов, рождённых в процессе СПР. Размерность томографируемых систем выбрана равной $D = 9$ и $D = 36$. Насколько известно автору, *адаптивная* томография систем размерности $D = 36$ выполнена впервые.

Предложенный протокол адаптации измерений зависит только от текущей точечной оценки матрицы плотности, а метод, которым она была найдена, не важен. Поэтому протокол можно комбинировать, например, с байесовскими ал-

горитмами. Процедура нахождения оптимального измерения сводится к простой задаче безусловной оптимизации.

При разработке протокола были сформулированы условия, необходимые для достижения максимальной скорости сходимости $1/N$. Они имеют общий характер, так как получены на основе теории универсального статистического распределения фиделити. Из найденных условий следует, что при использовании одних лишь факторизованных измерений, максимальная скорость сходимости $1/N$ достигается, только если ранг истинного состояния меньше определённого значения.

Результаты четвёртой главы опубликованы в работе [82].

Глава 5. Теневая томография

В предыдущих главах речь шла о так называемой полной томографии состояний или процессов. В настоящей главе рассматривается один из методов неполной томографии — теневая томография. В главе изложены результаты экспериментальной реализации теневой томографии по методу из работы [30]. Продемонстрировано восстановление средних значений случайных проекторов и оценка фиделити до целевого состояния.

5.1 Описание метода

Опишем схему теневой томографии из работы [30] в явном виде применительно к экспериментальной реализации. Цель алгоритма — предсказать математические ожидания $\{o_i\}$ множества из M наблюдаемых $\{O_i\}$:

$$o_i(\rho) = \text{Tr } O_i \rho, \quad 1 \leq i \leq M, \quad (5.1)$$

где ρ — истинное состояние системы из n кубитов. Очевидно, что $o_i(\rho)$ являются линейными функциями матричных элементов ρ .

На стадии сбора данных, входное состояние ρ преобразуется унитарным оператором U , $\rho \rightarrow U \rho U^\dagger$, и затем каждый из кубитов измеряется в вычислительном базисе $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Процедура повторяется много раз для различных $U \in \mathcal{U}$, выбранных случайно из некоторого множества \mathcal{U} . Ансамбль \mathcal{U} определяет класс наблюдаемых O_i , средние значения которых могут быть эффективно¹ оценены. В работе [30] в основном рассматриваются два ансамбля:

1. группа Клиффорда (Clifford) над n кубитами, $U \in \mathbf{P}_n$ [106];
2. тензорное произведение случайных однокубитовых операций, $U \in \{U_1 \otimes \dots \otimes U_n \mid \forall i = 1, \dots, n, U_i \in SU(2)\}$.

Хотя используемая нами экспериментальная установка может выполнять преобразования обоих типов, в настоящей работе используется первый вариант, так как он позволяет оценивать наблюдаемые более широкого класса.

¹Под эффективностью здесь следует понимать возможность оценки среднего по результатам измерений, чьё количество полиномиально по числу кубитов.

Случайное унитарное преобразование, $\rho \rightarrow U\rho U^\dagger$, с последующим измерением в вычислительном базисе $\{|b_i\rangle\}$ эквивалентно проекции на случайный вектор $|\psi_i\rangle = U^\dagger|b_i\rangle \in \mathcal{S}$. Так как U является схемой Клиффорда, то по определению $|\psi\rangle$ называется *стабилизаторным состоянием* (stabilizer state), а множество \mathcal{S} образует множество всех стабилизаторных состояний системы из n кубитов. В дальнейшем такие проекционные измерения будем называть стабилизаторными или клиффордовскими.

В виду того, что в используемой нами экспериментальной установке по томографии пространственных мод фотонов (см. раздел 5.3) отсутствует естественное разделение на унитарные вентили, для дальнейшего изложения удобнее работать с векторами состояний, а не с клиффордовскими операторами, как это было сделано в исходной статье [30]. Алгоритм генерации случайных стабилизаторных состояний $|\psi\rangle \in \mathcal{S}$ будет изложен в разделе 5.2.

После того как получены результаты измерений, рассчитывается *классическая тень* $\hat{\rho}$ (classical shadow) истинного состояния ρ системы из n кубитов:

$$\hat{\rho} = (2^n + 1) \sum_{i=1}^P f_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| - \mathbb{I}, \quad (5.2)$$

где P — количество различных проекторов, а f_i — наблюдаемая частота исхода, соответствующая проекции на $|\psi_i\rangle$, $\sum_{i=1}^P f_i = 1$. Выражение (5.2) есть не что иное, как явная форма оценки по методу линейной инверсии (см. раздел 1.1) для любого POVM, образующего сферический 2-дизайн² [107]. Стабилизаторные состояния являются 3-дизайном [108], поэтому приведённое выражение также справедливо.

Следует заметить, что изначально в работе [30] введено предположение о выполнении каждого проекционного измерения только над одной копией состояния ρ . Соответственно, количество проекторов P совпадает с числом измеренных копий N : $P = N$, $f_i = 1/N$. Однако, в выполненном нами эксперименте сразу несколько фотонов могут быть зарегистрированы во время экспозиции одного и

²В общем случае множество векторов $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^P$ называется сферическим t -дизайном, если выполнено равенство:

$$\frac{1}{P} \sum_{i=1}^P (|\psi_i\rangle\langle\psi_i|)^{\otimes t'} = \int (|\psi\rangle\langle\psi|)^{\otimes t'} d\psi, \quad 1 \leq t' \leq t, \quad (5.3)$$

где интеграл берётся по мере Хаара на множестве векторов $|\psi\rangle$. С помощью t -дизайна интегрирование полиномов порядка t от $|\psi\rangle\langle\psi|$ по мере Хаара можно заменить на суммирование по дизайну, что зачастую упрощает теоретические выкладки.

того же вектора $|\psi_i\rangle$, поэтому $P < N$, и предположение нарушается. Более того, в эксперименте реализовывался случай передержки — $P \ll N$. Обычно отношение N/P по порядку величины равнялось 10^4 – 10^5 в зависимости от размерности системы. Отметим, что передержка типична для экспериментов по сжатому считыванию, где статистические погрешности определения вероятностей исходов должны быть как можно меньше [21; 109; 110]. В предварительных численных симуляциях теневой томографии выяснилось, что точность оценки средних от наблюдаемых ограничивается конечным P даже при бесконечном объёме выборки $N \rightarrow \infty$. В этом смысле величина P важнее N . Также, проведённый анализ теорем из работы [30] показал, что они остаются справедливыми даже в случае $P < N$, если N заменить на P .

Имея классическую тень (5.2), оценка \hat{o}_i среднего o_i находится согласно простому выражению:

$$\hat{o}_i = \text{Tr } O_i \hat{\rho}, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (5.4)$$

Здесь возникает ещё одно отличие от оригинального алгоритма из работы [30], где предлагается дополнительно использовать медианную оценку (median-of-means estimator). Однако, в настоящей работе шаг вычисления медианы опущен³, так как не было обнаружено заметного влияния на получаемые результаты.

Приведём основную теорему теневой томографии из работы [30] (которая, строго говоря, справедлива для случая $P = N$):

Теорема 1. *Достаточно N стабилизаторных измерений над N копиями состояния ρ , чтобы предсказать M средних $o_i = \text{Tr } O_i \rho$, $1 \leq i \leq M$, с абсолютной ошибкой ε , если*

$$N \geq \mathcal{O} \left(\frac{\log M}{\varepsilon^2} \max_i \text{Tr } O_i^2 \right). \quad (5.5)$$

Заметим, что выражение для N включает наблюдаемые O_i через $\text{Tr } O_i^2$. Это может привести к неявной зависимости от размерности системы D для некоторых операторов O_i , поэтому такие наблюдаемые нельзя эффективно оценить. Например, образуем тензорное произведение матриц Паули $\sigma_{i,j}$: $O_i = \sigma_{i,1} \otimes \cdots \otimes \sigma_{i,n}$. В этом случае след $\text{Tr } O_i^2 = D$, так как $\sigma_{i,j}^2 = \mathbb{I}$. В проведённых экспериментах использовались только проекторы ранга 1, для которых $\text{Tr } O_i^2 = 1$, и поэтому зависимость от размерности пропадает.

³Единственным исключением являются результаты, представленные в разделе 5.4.2.

5.2 Генерация случайных стабилизаторных состояний

Обычно при работе со стабилизаторными состояниями на классическом компьютере оперируют не их представлением в виде вектора, а эквивалентным множеством стабилизирующих операторов так называемых *стабилизаторов*. Стабилизаторы удобны тем, что в таком формализме для описания состояния n кубитов требуется полиномиальный по n объём памяти (вместо $\mathcal{O}(2^n)$ для вектора), а действие вентилей Клиффорда преобразуется в эффективные операции над множеством стабилизаторов. Данный факт известен как теорема Готтсмана — Нила [111; 112].

Однако, в проведённых экспериментах с пространственными состояниями фотонов отсутствует естественное разделение на кубиты и вентили над ними, поэтому на этапах приготовления и измерения работа ведётся напрямую с векторами состояний размерности $D = 2^n$, по которым рассчитываются фазовые голограммы. Отсюда и возникает потребность в генерации случайных стабилизаторных состояний в форме вектора.

Сначала разберём недостатки очевидного подхода, в котором стабилизаторы преобразуются в вектор. Затем изложим оригинальный алгоритм непосредственной генерации случайных векторов стабилизаторных состояний с доказательством равновероятности получаемых векторов.

Множество \mathcal{S} всех стабилизаторных состояний конечно, его мощность $C(n)$ равна [112]:

$$C(n) = 2^n \prod_{k=1}^n (2^k + 1) \approx 2^{n^2/2}. \quad (5.6)$$

Равновероятная выборка означает, что каждое состояние $|\psi_i\rangle \in \mathcal{S}$ «достаётся» из \mathcal{S} с одинаковой вероятностью. Простейший подход заключается в генерации случайного индекса $i = 1, \dots, C(n)$ и взятии соответствующего состояния $|\psi_i\rangle$ из предварительно рассчитанного множества векторов \mathcal{S} . Однако, из-за чрезвычайно быстрого роста мощности (5.6) от числа кубитов n такая процедура становится неприменимой на практике.

Следующим более практичным подходом для получения случайных $|\psi\rangle$ будет генерация множества его стабилизаторов $\{g_i\}_{i=1}^n: g_i|\psi\rangle = |\psi\rangle$. Это можно проделать эффективно, используя, например, метод из работы [113], в котором

пронумерованы все стабилизаторные схемы $U: |\psi\rangle = U|0\rangle$. Затем, имея стабилизаторы $\{g_i\}$, состояние $|\psi\rangle$ получается из следующего соотношения:

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \prod_{i=1}^n \frac{1 + g_i}{2}. \quad (5.7)$$

Таким образом, преобразование из формализма стабилизаторов в явную векторную форму включает три экспоненциально сложные процедуры:

1. явное построение матриц стабилизаторов g_i — $\mathcal{O}(n \cdot 2^{2n})$ операций,
2. вычисление произведения — $\mathcal{O}(n \cdot 2^{3n})$,
3. восстановление $|\psi\rangle$ из $|\psi\rangle\langle\psi|$ — $\mathcal{O}(2^n)$.

Общая сложность определяется вторым шагом за счёт показателя степени $3n$.

Конечно, сложность явной генерации состояния n кубитов всегда будет экспоненциальной и не может быть меньше $\mathcal{O}(2^n)$ — числа операций, необходимого для обращения к каждому элементу в векторе. Однако, показатель степени сильно влияет на производительность. Для вышеописанного метода он равен $3n$, но его можно понизить до n . Ниже описывается оригинальный алгоритм, требующий $\mathcal{O}(2^n \text{ poly}(n))$ операций.

Начнём с универсальной формы для любого $|\psi\rangle \in \mathcal{S}$ [114; 115]:

$$|\psi\rangle \propto \sum_{x \in \mathbb{F}_2^k} (-1)^{q(x)} i^{l(x)} |Rx + t\rangle, \quad (5.8)$$

где $x \in \mathbb{F}_2^k$ и $t \in \mathbb{F}_2^n$ — бинарные вектора размерности k и n соответственно, $k \leq n$, $q(x)$ — квадратичная форма над \mathbb{F}_2^k , $l(x)$ — линейная форма, и $R \in \mathbb{F}_2^{n \times k}$ — бинарная матрица размера $n \times k$ с рангом k . Сложение и умножение в (5.8) ведётся по модулю два, так как операции производятся в конечном поле \mathbb{F}_2 . Также, будем отождествлять целое число x , записанное в двоичной системе счисления, и соответствующий ему бинарный вектор и наоборот.

Из представления (5.8) следуют некоторые свойства стабилизаторных состояний. С точностью до нормировки каждый элемент состояния есть ± 1 , $\pm i$ или 0. Количество ненулевых элементов всегда равно 2^k , $0 \leq k \leq n$ — числу различных векторов x в \mathbb{F}_2^k . Для удобства примем соглашение, что $\mathbb{F}_2^0 = \{0\}$.

Ключевым для предлагаемого алгоритма генерации случайных стабилизаторных состояний является множество \mathcal{S}_k , которое по определению содержит все n -кубитовые стабилизаторные состояния с ровно 2^k ненулевыми элементами. Теорема 2 даёт рецепт равновероятной выборки состояний $|\psi\rangle \in \mathcal{S}_k$. Затем в

теореме 3 рассчитывается мощность $C(n, k)$ множества \mathcal{S}_k . Наконец, эти результаты объединяются в теореме 4, где представлена процедура выборки из всего множества $\mathcal{S} = \bigcup_{k=0}^n \mathcal{S}_k$.

Теорема 2. *Зафиксируем $k = 0, \dots, n$. Образует n -кубитовое состояние $|\psi\rangle$ вида*

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &:= |t\rangle, \text{ если } k = 0, \\ |\psi\rangle &:= \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{x=0}^{2^k-1} (-1)^{x^T Q x; c^T x} |Rx + t\rangle, \text{ если } k \neq 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где $x \in \mathbb{F}_2^k$; величины $Q \in \mathbb{F}_2^{k \times k}$, $c \in \mathbb{F}_2^k$, $t \in \mathbb{F}_2^n$ являются случайными с независимыми одинаково распределёнными (i. i. d) элементами 0 или 1, которые возникают с вероятностью 1/2; $R \in \mathbb{F}_2^{n \times k}$ ($\text{rank } R = k$) — случайная матрица, выбранная равновероятно из множества всех матриц ранга k . Тогда $|\psi\rangle$ будет равновероятно выбран из \mathcal{S}_k .

Доказательство. Вновь обратимся к (5.8). Любая квадратичная форма $q(x)$ представима в виде суммы: $q(x) = x^T Q x + b^T x + x_0$. Константа x_0 затрагивает только глобальную фазу $|\psi\rangle$, и поэтому может быть опущена. Линейное слагаемое $b^T x$ уже включено в $x^T Q x$. Действительно, выражение $x^T Q x$ содержит диагональный член $Q_{ii} x_i^2 = Q_{ii} x_i$, так как $x_i^2 = x_i$ для любого $x_i \in \mathbb{F}_2$. Следовательно, без ограничения общности: $q(x) = x^T Q x$, где Q — произвольная бинарная матрица размера $k \times k$. Аналогично, константу можно опустить и в линейной форме: $l(x) = c^T x + x_0 \sim c^T x$, где $c \in \mathbb{F}_2^k$ — произвольный бинарный вектор. Таким образом, общий вид (5.8) сводится к (5.9).

Теперь докажем, что полученный $|\psi\rangle$ выбран равновероятно. Каждый объект Q, c, R, t порождает структуру, соответственно, квадратичную форму \mathcal{Q} , линейную форму L , векторное подпространство V_k размерности k и аффинное подпространство A_k :

$$\mathcal{Q} = f_Q(Q) = \{(x, x^T Q x) \mid x \in \mathbb{F}_2^k\}, \quad (5.10)$$

$$L = f_c(c) = \{(x, c^T x) \mid x \in \mathbb{F}_2^k\}, \quad (5.11)$$

$$V_k = f_R(R) = \{Rx \mid x \in \mathbb{F}_2^k\}, \quad (5.12)$$

$$A_k = f_t(t) = \{y + t \mid y \in V_k\}. \quad (5.13)$$

Отображения f_Q, f_c, f_R, f_t в общем случае являются сюръекциями, то есть они отображают много объектов на одну структуру. Аффинное подпространство A_k

определяет положение ненулевых элементов у $|\psi\rangle$, а формы Q и L отвечают за порядок следования $\pm 1, \pm i$, соответственно. В этом смысле, Q, L и A_k действуют независимо друг от друга, поэтому состояние (5.9) выбрано равновероятно, если каждая из этих структур выбрана равновероятно.

Очевидно, Q, c , и t выбраны равновероятно, так как их элементы i. i. d. случайные величины, для которых $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(1) = 1/2$; R выбрана равновероятно по условию теоремы. Однако, в общем случае для сюръекции $\omega = f(\xi)$, $\xi \in \Xi$, $\omega \in \Omega$ равновероятная выборка из области определения Ξ не означает того же для образа Ω . К счастью, для отображений (5.10)–(5.13) мощности прообразов каждого элемента из образа одинаковы (доказательство ниже):

$$|f^{-1}(\omega_1)| = |f^{-1}(\omega_2)|, \quad \forall \omega_{1,2} \in \Omega, \quad (5.14)$$

где $|\cdot|$ обозначает мощность множества. Для любого отображения f , удовлетворяющего (5.14), из равновероятности выборки области определения Ξ следует равновероятность выборки образа Ω .

Начнём с доказательства свойства (5.14) для f_Q . В выражении $x^T Q x$ недиагональные элементы встречаются только в виде комбинации $(Q_{ij} + Q_{ji})x_i x_j$, $i < j$. Отсюда возникают соотношения эквивалентности для пар (Q_{ij}, Q_{ji}) : $(0, 1) \sim (1, 0)$ и $(0, 0) \sim (1, 1)$. Существует $k(k-1)/2$ таких пар для матрицы Q размера $k \times k$ и каждая пара имеет два эквивалентных значения. Следовательно, для любой Q : $|f_Q^{-1}(Q)| = 2^{k(k-1)/2}$.

Отображение f_c является биекцией, так как существует взаимно однозначное соответствие между векторами c и линейными формами L , поэтому $|f_c^{-1}(L)| = 1$.

Любая невырожденная матрица R размера $n \times k$ определяет некоторый базис в k -мерном векторном подпространстве V_k векторного пространства V_n , обратное тоже верно. Количество разных базисов в данном подпространстве V_k зависит только от размерности k , но не от слагающих его векторов. С другой стороны, число базисов равно $|f_R^{-1}(V_k)|$, следовательно, условие (5.14) выполняется для f_R .

Аффинные подпространства $f_t(t_1)$ и $f_t(t_2)$ (5.13) для разных $t_1, t_2 \in \mathbb{F}_2^n$, $t_1 \neq t_2$, либо совпадают, либо не пересекаются. Действительно, предположим частичное пересечение и возьмём $z \in f_t(t_1) \cap f_t(t_2)$, тогда $z = y_1 + t_1 = y_2 + t_2$, $y_1, y_2 \in V_k$. Отсюда, $t_2 = t_1 + y_1 - y_2 = t_1 + \Delta y$, $\Delta y \in V_k$, и поэтому $f_t(t_2) \subset f_t(t_1)$. Аналогично, можно показать, что $f_t(t_1) \subset f_t(t_2)$. Одновременное включение подпространств

друг в друга означает, что они совпадают, $f_t(t_1) = f_t(t_2)$, а это противоречит изначальному предположению.

Также из рассуждения выше следует, что два аффинных подпространства совпадают тогда и только тогда, когда $t_2 = t_1 + y$, где $y \in V_k$. Следовательно, для каждого $t_1 \in \mathbb{F}_2^n$ существует 2^k векторов t_2 , которые порождают то же самое подпространство. Итак, мощность $|f_t^{-1}(A_k)| = 2^k$ одинакова для всех A_k , и условие (5.14) удовлетворяется.

Выше установлено, что аффинное подпространство A_k , полученное как сдвиг *фиксированного* векторного подпространства V_k на случайный вектор t , распределено равномерно. В виду того, что ранее доказана равномерность выборки векторных подпространств, получаем равномерность *всех* аффинных подпространств.

Итого, все необходимые структуры, а именно \mathcal{Q} , L и A_k , распределены равномерно, следовательно, теорема доказана. \square

В теореме 2 ничего не говорится о конкретном методе равномерной выборки матриц R . В проведённых экспериментах использовался простейший подход: бинарная матрица R размера $n \times k$ генерируется случайно (вероятности элементов $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(1) = 1/2$) до тех пор, пока её ранг не будет равен k . Для вычисления ранга применялся алгоритм со сложностью $\mathcal{O}(n^2k)$.

Теорема 3. *Мощность множества \mathcal{S}_k равняется*

$$C(n, k) = 2^{n + \frac{k(k+1)}{2}} \binom{n}{k}_2, \quad (5.15)$$

где 2-биномиальный (гауссов) коэффициент

$$\binom{n}{k}_2 = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{2^n - 2^j}{2^k - 2^j}. \quad (5.16)$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2, найдём $C(n, k)$ поэтапно, подсчитав количество всех различных квадратичных форм \mathcal{Q} (5.10), линейных форм L (5.11) и аффинных подпространств A_k (5.13) и перемножив результаты.

Мощность множества всех матриц $Q \in \mathbb{F}_2^{k \times k}$ составляет 2^{k^2} . Это множество разделяется на классы эквивалентности по $2^{k(k-1)/2}$ элементов, где каждый класс отвечает одной и той же квадратичной форме \mathcal{Q} . Следовательно, полное число различных квадратичных форм равно отношению этих двух величин: $C_{\text{quad.}} = 2^{k^2} / 2^{k(k-1)/2} = 2^{k(k+1)/2}$.

Существует $C_{\text{lin.}} = 2^k$ различных линейных форм над \mathbb{F}_2^k .

Количество k -мерных векторных подпространств V_k векторного пространства V_n размерности n над полем \mathbb{F}_2 равно 2-биномиальному коэффициенту $\binom{n}{k}_2$ [116]. Каждое V_k может быть сдвинуто на 2^n векторов $t \in \mathbb{F}_2^n$ для получения аффинных подпространств. Однако, 2^k сдвигов на вектора $t \in V_k$ приведут к одинаковому аффинному подпространству A_k (см. доказательство теоремы 2). Поэтому количество классов смежности $V_k + t$ равно $2^n/2^k$, а общее число аффинных подпространств определяется произведением $C_{\text{aff.}} = 2^{n-k} \binom{n}{k}_2$.

Перемножая $C_{\text{quad.}}$, $C_{\text{lin.}}$ и $C_{\text{aff.}}$, придём к выражению (5.15). \square

Используя q -биномиальную теорему [116], легко убедиться, что, действительно, выполняется равенство $\sum_{k=0}^n C(n, k) = C(n)$ [см. (5.6)].

Теорема 4. Пусть k — случайное целое число с вероятностью

$$\mathbb{P}(k) = C(n, k)/C(n), 0 \leq k \leq n.$$

Образуем $|\psi\rangle \in \mathcal{S}_k$ согласно теореме 2. Тогда $|\psi\rangle$ равновероятно выбрано из \mathcal{S} .

Доказательство. Индекс k определяет множество \mathcal{S}_k , откуда производится выборка, поэтому $\mathbb{P}(\psi \in \mathcal{S}_k) = \mathbb{P}(k)$. Условная вероятность выборки $|\psi\rangle$ из \mathcal{S}_k равняется $\mathbb{P}(\psi | \psi \in \mathcal{S}_k) = 1/C(n, k)$, потому что алгоритм из теоремы 2 генерирует равновероятные состояния. Следовательно, полная вероятность получения состояния $\psi \in \mathcal{S}$ равна

$$\mathbb{P}(\psi) = \mathbb{P}(\psi | \psi \in \mathcal{S}_k) \mathbb{P}(\psi \in \mathcal{S}_k) = \frac{1}{C(n)}. \quad (5.17)$$

Каждое состояние генерируется с одинаковой вероятностью, поэтому выборка равновероятна. \square

Процедура из теоремы 4 состоит в общей сложности из $\mathcal{O}(2^n \text{poly}(n))$ операций, так в векторе $|\psi\rangle$ (5.9) содержится 2^n элементов, а нахождение каждого элемента требует не более $\text{poly}(n)$ действий. На практике в использованной реализации алгоритма $\text{poly}(n) = \mathcal{O}(n^3)$, потому что основной вклад вносит вычисление ранга R .

В соответствии с теоремами 2–4 на языке Python написан алгоритм для генерации случайных стабилизаторных состояний [117].

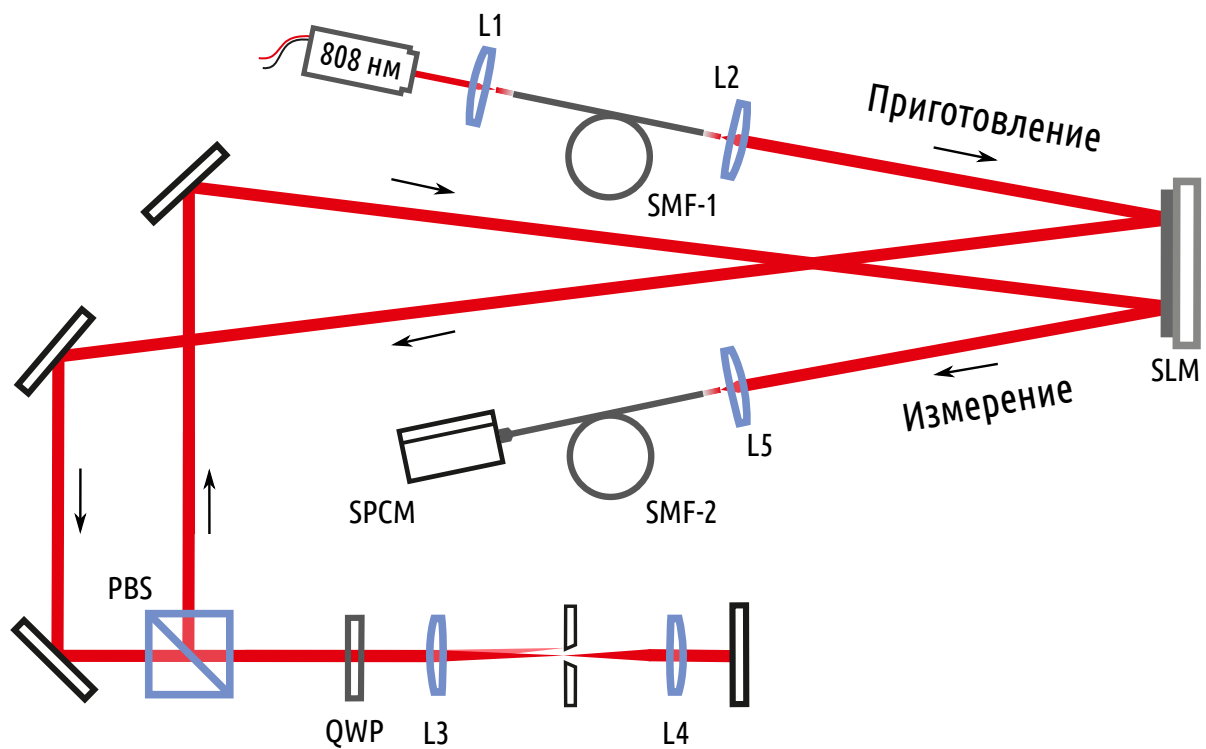


Рисунок 5.1 — Схема экспериментальной установки для проведения теневой томографии. Пространственный модулятор света используется для приготовления и проекционных измерений произвольных пространственных состояний фотонов в базисе мод Эрмита — Гаусса.

5.3 Эксперимент

Аналогично эксперименту по высокоразмерной томографии двухкомпонентных систем из 4.7, для экспериментальной проверки теневой томографии были выбраны пространственные моды фотонов и кодирование состояний в базисе мод Эрмита — Гаусса $|HG_{nm}\rangle$. Всего существует $(k+1)(k+2)/2$ мод Эрмита — Гаусса от нулевого порядка до k включительно. Для приготовления состояний размерности D использовались моды низшего порядка $k \leq k_{\max}$, где k_{\max} — минимальное целое число удовлетворяющее неравенству $(k_{\max}+1)(k_{\max}+2)/2 \geq D$. Эксперименты проведены для размерностей $D = 2, 4, 8, 16$ и 32 , что соответствует регистру от одного до пяти кубитов.

Схема экспериментальной установки изображена на рисунке 5.1. Ослабленное излучение диодного лазера с длиной волны 808 нм пространственно фильтруется одномодовым оптическим волокном SMF-1 и коллимируется асферической линзой L2. Верхняя половина пространственного модулятора света

SLM используется для приготовления желаемого состояния фотона в первом дифракционном порядке, а нижняя половина вместе с одномодовым волокном SMF-2 осуществляет проекционное измерение [118; 119]. Сигнал регистрируется однофотонным счётным детектором SPCM. Линзы L3 и L4 имеют одинаковое фокусное расстояние $F = 100$ мм и расположены на расстоянии 200 мм друг от друга. В фокальной плоскости между линзами установлена диафрагма, которая отсекает все порядки дифракции, кроме первого. После прохождения линзы L4 пучок отражается от зеркала. Двойное прохождение фотона через четверть-волновую пластинку QWP, чья ось установлена под 45° к горизонту, поворачивает поляризацию фотона на ортогональную. За счёт этого фотон отражается от поляризационного светоделителя PBS, поступая в измерительную часть установки.

5.3.1 Компенсация фазы Гуи

Детектируемое состояние, приходящее на нижнюю половину SLM (см. рисунок 5.1), отличается от состояния, приготовленного верхней половиной SLM. Различие возникает из-за набега фазы Гуи при распространении пучка в оптической схеме от одной половины SLM до другой. Фаза Гуи φ_G зависит только от геометрических параметров экспериментальной установки, например, длины Рэлея пучка и пройденного расстояния. В формализме квантовых состояний, базис мод Эрмита — Гаусса преобразуется по правилу:

$$|HG_{nm}\rangle \rightarrow e^{i(n+m+1)\varphi_G}|HG_{nm}\rangle \quad (5.18)$$

Приготавливаемое состояние $|\psi_{\text{prep.}}\rangle$ известно, так как оно задаётся специально рассчитанной фазовой голограммой на верхней половине SLM. В то же время теневая томография восстанавливает свойства детектируемого состояния $|\psi_{\text{det.}}\rangle$, поэтому для дальнейшего необходимо скорректировать приготавливаемое состояние на детектируемое. Состояния $|\psi_{\text{prep.}}\rangle$ и $|\psi_{\text{det.}}\rangle$ связаны унитарным преобразованием $U(\varphi_G)$ с единственным неизвестным параметром φ_G :

$$|\psi_{\text{det.}}\rangle = U(\varphi_G)|\psi_{\text{prep.}}\rangle, \quad (5.19)$$

где $U(\varphi_G)$ — диагональная унитарная матрица с фазовыми множителями, определяемыми выражением (5.18).

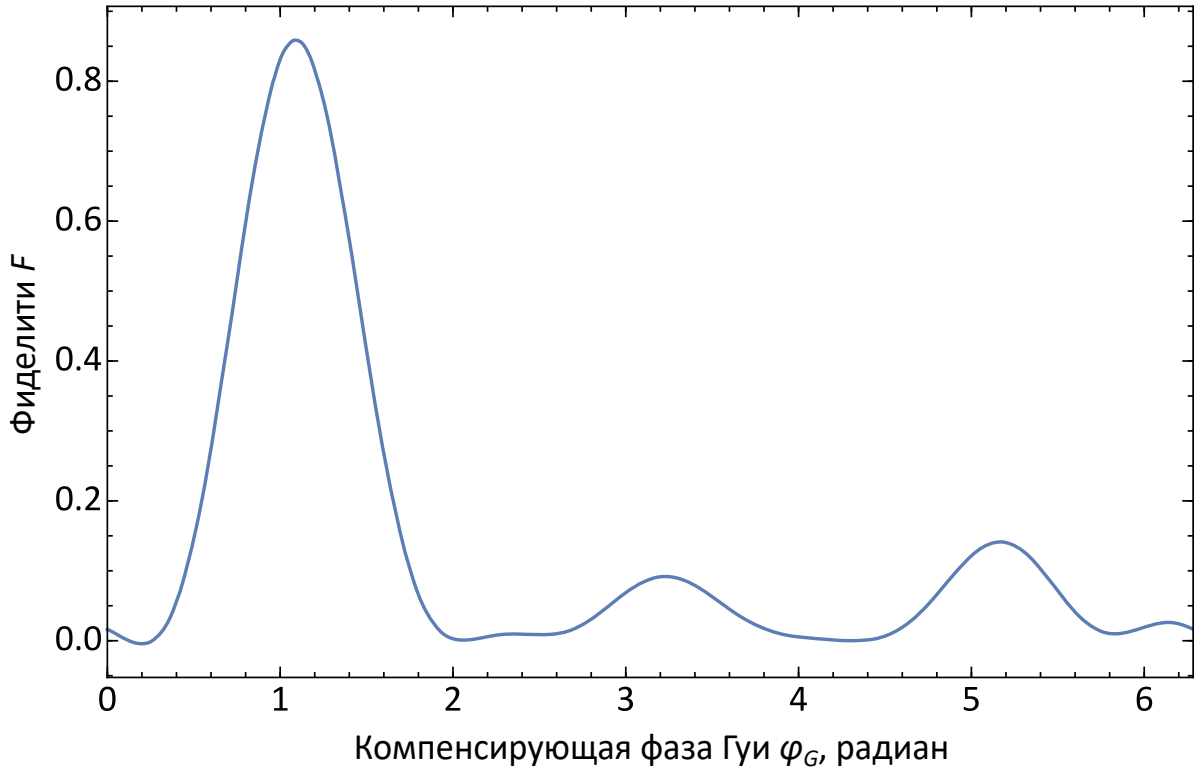


Рисунок 5.2 — Типичная зависимость фиделити приготовления F от компенсирующей фазы Гуй для размерности $D = 32$. Глобальный максимум соответствует «истинному» значению фазы, набегавшему в экспериментальной установке.

Фиделити приготовления, скомпенсированное на фазу Гуй, по определению равняется

$$F = \max_{\varphi_G} \langle \psi_{\text{преп.}} | U^\dagger(\varphi_G) \hat{\rho} U(\varphi_G) | \psi_{\text{преп.}} \rangle. \quad (5.20)$$

Состояние $U(\varphi_G^{\text{max}}) | \psi_{\text{преп.}} \rangle$, где φ_G^{max} доставляет максимум (5.20), будем называть *скомпенсированным приготовленным состоянием*.

Характерная зависимость максимизируемой величины в (5.20) от φ_G на примере размерности системы $D = 32$ изображена на рисунке 5.2. Наблюдается «рябь» в области низких значений F с локальными максимумами, которая становится ярко выраженной с увеличением D . Однако, для всех исследованных состояний и размерностей присутствует глобальный максимум при $\varphi_G^{\text{max}} \approx 1$ радиан с высоким значением фиделити. Независимость положения максимума от состояния подтверждает гипотезу об определяющем вкладе фазы Гуй (которая, напомним, зависит только от геометрии экспериментальной установки). Далее при обработке результатов все приготавливаемые состояния скомпенсированы на найденное значение φ_G^{max} .

5.4 Результаты

5.4.1 Анализ корреляций

Средние значения наблюдаемых o_i при теневой томографии оцениваются согласно (5.4). С другой стороны, выражение (5.1) имеет вид правила Борна, поэтому средние o_i могут быть измерены напрямую. Этот факт позволяет независимо в эксперименте проверить предсказания теневой томографии. Обозначим $\hat{o}_i^{\text{est.}}$ оценки, найденные в процессе теневой томографии, а $\hat{o}_i^{\text{meas.}}$ — непосредственно измеренные значения наблюдаемых. Обе эти величины подвержены погрешностям эксперимента и случайным ошибкам из-за конечного объёма выборки N . Однако, статистической погрешностью можно пренебречь, так как во всех проведённых экспериментах число зарегистрированных фотонов при измерении одного проектора O_i составляло примерно $I = 3 \times 10^5 \gg 1$ в пересчёте на $o_i = 1$. Для других значений $0 < o_i < 1$ следует указанную интенсивность I помножить на o_i .

Имея массив точек $\{(\hat{o}_i^{\text{meas.}}, \hat{o}_i^{\text{est.}})\}_i$, можно рассчитать коэффициент корреляции Пирсона r . В идеальном случае ожидается $\hat{o}_i^{\text{est.}} = \hat{o}_i^{\text{meas.}}$ и, следовательно, $r = 1$, но из-за погрешностей эксперимента коэффициент корреляции всегда будет немного отклоняться от единицы: $r \lesssim 1$. Таким образом, величина r отражает качество оценок теневой томографии.

Для экспериментального определения коэффициента корреляции, сначала было проведено $P = 10^4$ стабилизаторных измерений, по результатам которых найдена классическая тень $\hat{\rho}$ томографируемого состояния. Затем были измерены 5000 проекторов $O_i = |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ на случайные вектора $|\varphi_i\rangle$, распределённые равномерно по мере Хаара, чтобы получить набор величин $\hat{o}_i^{\text{meas.}}$. Для тех же операторов O_i вычислены оценки $\hat{o}_i^{\text{est.}}$ с использованием найденной ранее классической тени $\hat{\rho}$. Для проверки независимости процедуры теневой томографии от истинного состояния, для каждой размерности системы $D = 2^n, n = 1, \dots, 5$ приготавливались пять разных случайных состояний. Коэффициенты корреляции Пирсона r для имеющихся массивов точек $\{(\hat{o}_i^{\text{meas.}}, \hat{o}_i^{\text{est.}})\}_{i=1}^{5000}$ при разных D представлены в таблице 13. Во всех случаях наблюдаются высокие значения r , что

Таблица 13 — Коэффициент корреляции Пирсона r и фиделити приготовления F , усреднённые по пяти случайным состояниям, для различных размерностей системы D .

D	r	F
2	0.989 ± 0.002	0.981 ± 0.013
4	0.983 ± 0.001	0.974 ± 0.011
8	0.976 ± 0.002	0.899 ± 0.009
16	0.953 ± 0.003	0.920 ± 0.020
32	0.875 ± 0.006	0.807 ± 0.031

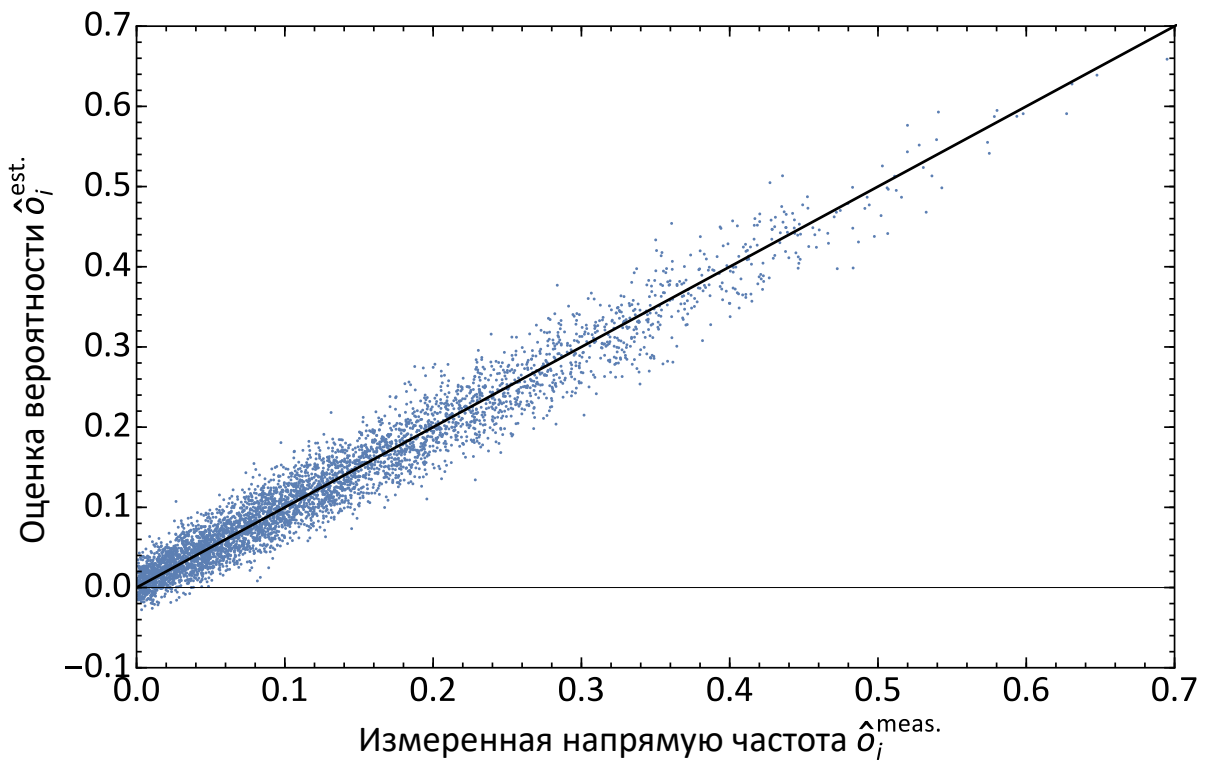


Рисунок 5.3 — Типичный график корреляции между средним значением наблюдаемой, оцененным по методу теневой томографии, $\hat{\rho}_i^{\text{est.}}$ и напрямую измеряемой величиной $\hat{\rho}_i^{\text{meas.}}$ на примере системы размерности $D = 8$. Чёрная прямая соответствует идеальному случаю $\hat{\rho}_i^{\text{est.}} = \hat{\rho}_i^{\text{meas.}}$.

свидетельствует о согласованности оценок по методу теневой томографии с прямыми измерениями.

На рисунке 5.3 изображён типичный график корреляций на примере размерности $D = 8$. Чёрная прямая соответствует идеальному равенству $\hat{\rho}_i^{\text{est.}} = \hat{\rho}_i^{\text{meas.}}$. Как видно, все точки концентрируются вблизи данной прямой (коэффициент корреляции Пирсона $r = 0.9758$). Также наблюдается небольшая область «нефи-

значных» значений, для которой $\hat{o}_i^{\text{est.}} < 0$. Она возникает, потому для классической тени $\hat{\rho}$ отсутствует требование положительной определённости как, например, в методе максимального правдоподобия. И действительно, $\hat{\rho}$ содержит отрицательные собственные значения из-за погрешностей эксперимента.

Нарастание плотности точек вблизи нуля на рисунке 5.3 есть просто следствие выбора вероятностного распределения для операторов $O_i = |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$. Величина $o_i = \text{Tr}(O_i|\psi\rangle\langle\psi|) = |\langle\psi|\varphi_i\rangle|^2$ является случайной, так как вектора $|\varphi_i\rangle$ выбираются равновероятно согласно мере Хаара, а $|\psi\rangle$ — фиксированное истинное состояние. Плотность вероятности $p_{o_i}(x)$ для подобного скалярного произведения известна: $p_{o_i}(x) = (D-1)(1-x)^{D-2}$ [120]. С ростом размерности системы D , математическое ожидание $\langle x \rangle = 1/D$ уменьшается. И $\hat{o}_i^{\text{est.}}$, и $\hat{o}_i^{\text{meas.}}$ начинают концентрироваться вблизи нуля, так как они являются оценкой o_i .

5.4.2 Влияние медианной оценки

Как было сказано ранее в разделе 5.1, авторы оригинальной работ [30] предлагают использовать медианную оценку [121]:

1. последовательность из P результатов измерений разбивается на K групп из $\lfloor P/K \rfloor$ элементов;
2. для каждой группы с индексом $k = 1, \dots, K$ вычисляется отдельная классическая тень $\hat{\rho}_k$ по аналогии с (5.2);
3. итоговой оценкой \hat{o}_i становится медиана

$$\hat{o}_i = \text{median}(\text{Tr } O_i \hat{\rho}_1, \dots, \text{Tr } O_i \hat{\rho}_K). \quad (5.21)$$

Такая медианная оценка устойчива к выбросам в измеренных данных. Количество групп K зависит от числа оцениваемых операторов M и уровня доверительной вероятности $1 - \delta$:

$$K = 2 \ln(2M/\delta). \quad (5.22)$$

Например для $\delta = 0.01$ и $M = 5000$, необходимое число групп равно $K \approx 28$.

Чтобы проверить, как число групп K влияет на точность теневой томографии, были найдены медианные оценки $\hat{o}_i^{\text{est.}}$ для разных K и рассчитан коэффициент корреляции Пирсона r между $\hat{o}_i^{\text{est.}}$ и $\hat{o}_i^{\text{meas.}}$. Полученные зависимости

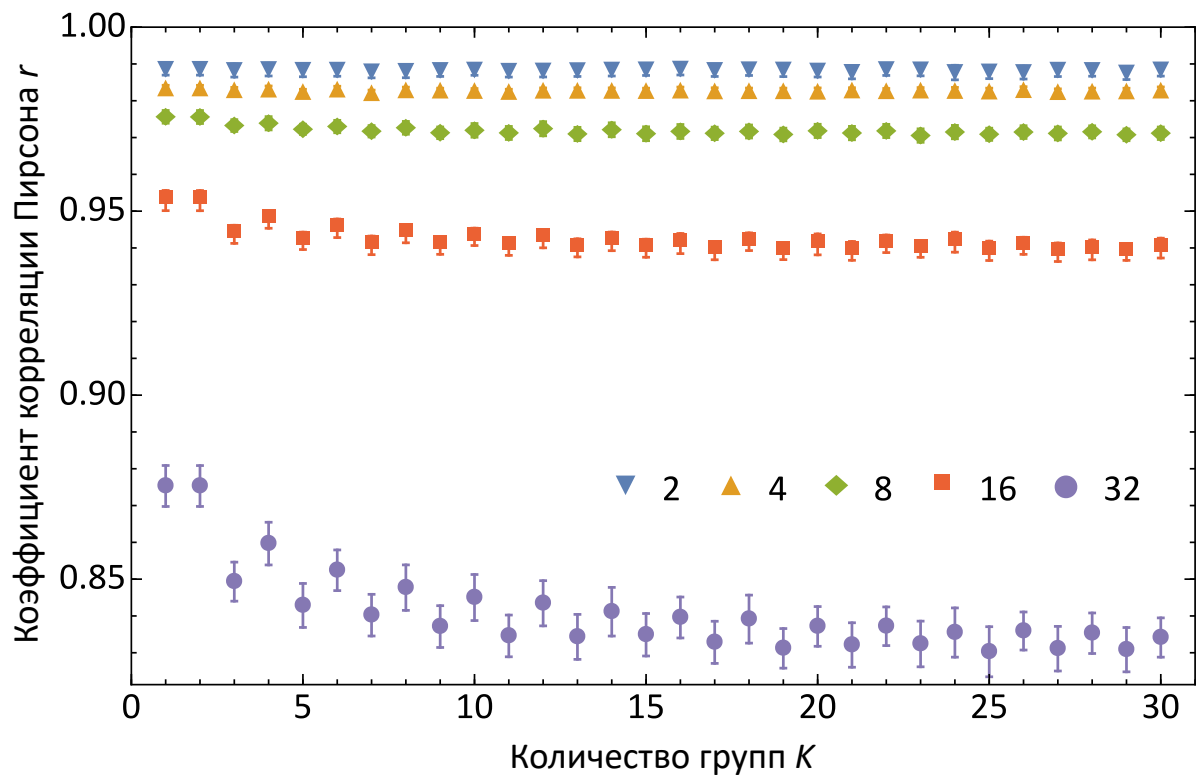


Рисунок 5.4 — Зависимость коэффициента корреляции Пирсона r между $\hat{\delta}_i^{\text{est.}}$ и $\hat{\delta}_i^{\text{meas.}}$ от количества групп K при вычислении медианной оценки для различных размерностей системы D (см. легенду). Каждая точка усреднена по пяти истинным состояниям. Планки погрешностей соответствуют одному стандартному отклонению среднего.

$r(K)$ представлены на рисунке 5.4. Каждая кривая усреднена по пяти проходам томографии. В крайнем случае $K = 1$ медианная оценка не использовалась. Как видно, с ростом числа разбиений K коэффициент корреляции r меняется слабо. Он даже немного уменьшается, что говорит об ухудшении точности томографии. Таким образом, в проведённом эксперименте применение медианной оценки не несёт преимуществ по сравнению с обычной оценкой средним.

Независимость точности от K объясняется двумя факторами. Во-первых, объём статистики, приходящийся на каждое измерение операторов O_i , велик (случай передержки, $N/P \gg 1$), поэтому выбросы в наблюдаемых данных крайне маловероятны (математические выкладки даны ниже). Во-вторых, систематические, детерминированные ошибки эксперимента превалируют над случайным дробовым шумом, а медианная оценка не может их нивелировать.

Сравним устойчивость к выбросам медианной оценки и оценки эмпирическим средним. Пусть имеется выборка x_1, \dots, x_N случайной величины x

длины N . Эмпирическое среднее определяется как

$$\hat{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i. \quad (5.23)$$

Согласно неравенству Чебышёва, \hat{x} отклоняется от математического ожидания $\mathbb{E} x$ не менее чем на ε с вероятностью не более δ :

$$\mathbb{P}(|\hat{x} - \mathbb{E} x| \geq \varepsilon) \leq \delta = \frac{\text{Var } x}{N\varepsilon^2}, \quad (5.24)$$

где $\text{Var } x$ — дисперсия x . Отсюда найдём объём выборки N для оценки средним:

$$N = \frac{\text{Var } x}{\varepsilon^2 \delta}. \quad (5.25)$$

Как и ранее, для расчёта медианной оценки $\hat{x}_{\text{ММ}}$ разделим выборку на K групп, каждая длины $\lfloor N/K \rfloor$, и найдём эмпирическое среднее \hat{x}_k для группы с номером k . По определению

$$\hat{x}_{\text{ММ}} = \text{median}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_K). \quad (5.26)$$

Положим $K = \log 1/\delta$, тогда справедливо следующее неравенство [121]:

$$\mathbb{P}(|\hat{x}_{\text{ММ}} - \mathbb{E} x| \geq \varepsilon) \leq \delta = \exp\left(-\frac{N\varepsilon^2}{4 \text{Var } x}\right). \quad (5.27)$$

Итого, объём выборки для медианной оценки равняется

$$N = \frac{4 \text{Var } x}{\varepsilon^2} \log 1/\delta. \quad (5.28)$$

Медианная оценка существенно более устойчива к выбросам, так как имеет зависимость $\log 1/\delta$ вместо $1/\delta$ в (5.25).

Однако, в асимптотическом пределе $N \rightarrow \infty$ становится справедливой центральная предельная теорема (ЦПТ), и эмпирическое среднее \hat{x} распределено нормально $\hat{x} \sim \mathcal{N}(\mathbb{E} x, \text{Var}(x)/N)$. Рассчитаем вероятность отклонения от математического ожидания:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\hat{x} - \mathbb{E} x| \geq \varepsilon) &= \delta = 1 - \text{erf}\left(\sqrt{\frac{N\varepsilon^2}{2 \text{Var } x}}\right), \\ \delta &\leq \exp\left(-\frac{N\varepsilon^2}{2 \text{Var } x}\right), \end{aligned} \quad (5.29)$$

где $\text{erf}(y)$ — функция ошибок Гаусса, и использовано неравенство: $1 - \text{erf}(y) \leq \exp(-y^2)$ при $y \geq 0$. Выражая N , получим:

$$N \leq \frac{2 \text{Var } x}{\varepsilon^2} \log 1/\delta. \quad (5.30)$$

Следовательно, в случае $N \rightarrow \infty$ эмпирическое среднее так же устойчиво к выбросам, потому что содержит логарифмическую зависимость $\log 1/\delta$, как и медианная оценка.

Если выражение для классической тени $\hat{\rho}$ (5.2) подставить в (5.4), то оценка \hat{o} будет линейной комбинацией случайных величин f_i . Каждая частота f_i может быть рассмотрена как эмпирическое среднее порядка N/P одиночных измерений. В эксперименте реализовывался случай передержки $N/P \rightarrow \infty$, поэтому можно применить ЦПТ. Таким образом, приведённый выше вывод об одинаковой точности медианной оценки и эмпирического среднего становится справедливыми.

5.4.3 Оценка фиделити

Одним из важных применений теневой томографии является оценка фиделити до некоторого заданного чистого состояния $|\psi\rangle$. В этом случае целевой оператор O представляет собой проектор на это состояние: $O = |\psi\rangle\langle\psi|$. В частности, можно оценить фиделити до приготовленного состояния. Однако, в нашем эксперименте приготовленное состояние $|\psi_{\text{prep.}}\rangle$ отличается от детектируемого $|\psi_{\text{det.}}\rangle$ из-за набега фазы Гуи, поэтому предварительно была выполнена компенсация фазы (см. 5.3.1).

Найденные значения фиделити приготовления F представлены в таблице 13. Видно, что F постепенно уменьшается с ростом размерности системы. Такое поведение возникает из-за погрешностей эксперимента и не является ограничением метода теневой томографии. Ухудшение фиделити типично для экспериментов с высокоразмерными пространственными состояниями света и наблюдалось ранее [103; 118]. Качество приготовления и детектирования состояний обусловлено множеством причин: абберации оптической системы, неидеальное выравнивание фазовой голограммы по отношению к падающему пучку, нарушение плоскостности поверхности фазового модулятора света и аппроксимация

непрерывной голограммы массивом пикселей. Влияние этих факторов усиливается с ростом порядка мод в пучке, так как при этом усложняется структура волнового фронта.

Представленные выше результаты получены для переполненного набора измерения, так как использовалось $P = 10^4$ проекторов при построении классической тени. Это количество превышает размер минимального полного набора измерений, который содержит $D^2 - 1$ элементов, даже для размерности $D = 32$. Однако, основное преимущество теневой томографии — возможность оценивать средние от операторов, используя далеко не полные наборы измерений. Поэтому был дополнительно исследован случай промежуточных значений P , включая $P < D^2 - 1$.

На рисунке 5.5а изображены усреднённые зависимости фиделити приготовления F , оценённые с помощью теневой томографии, от числа стабилизаторных измерений P для разных размерностей системы D . Фиделити рассчитывалось по отношению к скомпенсированному приготовленному состоянию, для которого фаза Гуи была найдена, используя полный набор данных (то есть для $P = 10^4$). Усреднение произведено по пяти разным состояниям для каждой размерности.

В начале, для малых P , разброс значений велик, и фиделити F может даже выходить за «физические» пределы $0 \leq F \leq 1$ из-за отрицательной определённости классической тени $\hat{\rho}$. По мере роста P , фиделити стабилизируется вблизи своих финальных значений. Тем не менее, оценки фиделити являются несмещёнными при любом количестве проекторов P , потому что теневая томография основывается на линейной инверсии, которая даёт несмещённые оценки. И действительно, судя по рисунку 5.5а, планки погрешностей накрывают финальные значения фиделити для любых P , что экспериментально подтверждает несмещённость.

Интересно пронаблюдать, как оценки фиделити изменяются, если классическую тень $\hat{\rho}$ (5.2) принудительно сделать положительно определённой. Для этого спроецируем собственные значения λ_i матрицы $\hat{\rho}$ на канонический симплекс $\Delta = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_D) \mid \lambda_i \geq 0 \wedge \sum_{i=1}^D \lambda_i = 1\}$, используя алгоритм из работы [97], а собственные вектора оставим без изменения. Полученные результаты изображены на вставке рисунка 5.5а. Теперь оценки фиделити стали смещёнными — для неполных наборов измерений, $P \lesssim D^2$, фиделити существенно тяготеет к нулевым значениям. Когда P уравнивается по порядку величины с D^2 , то оценки приближаются к своим финальным величинам. Также следует отметить явную

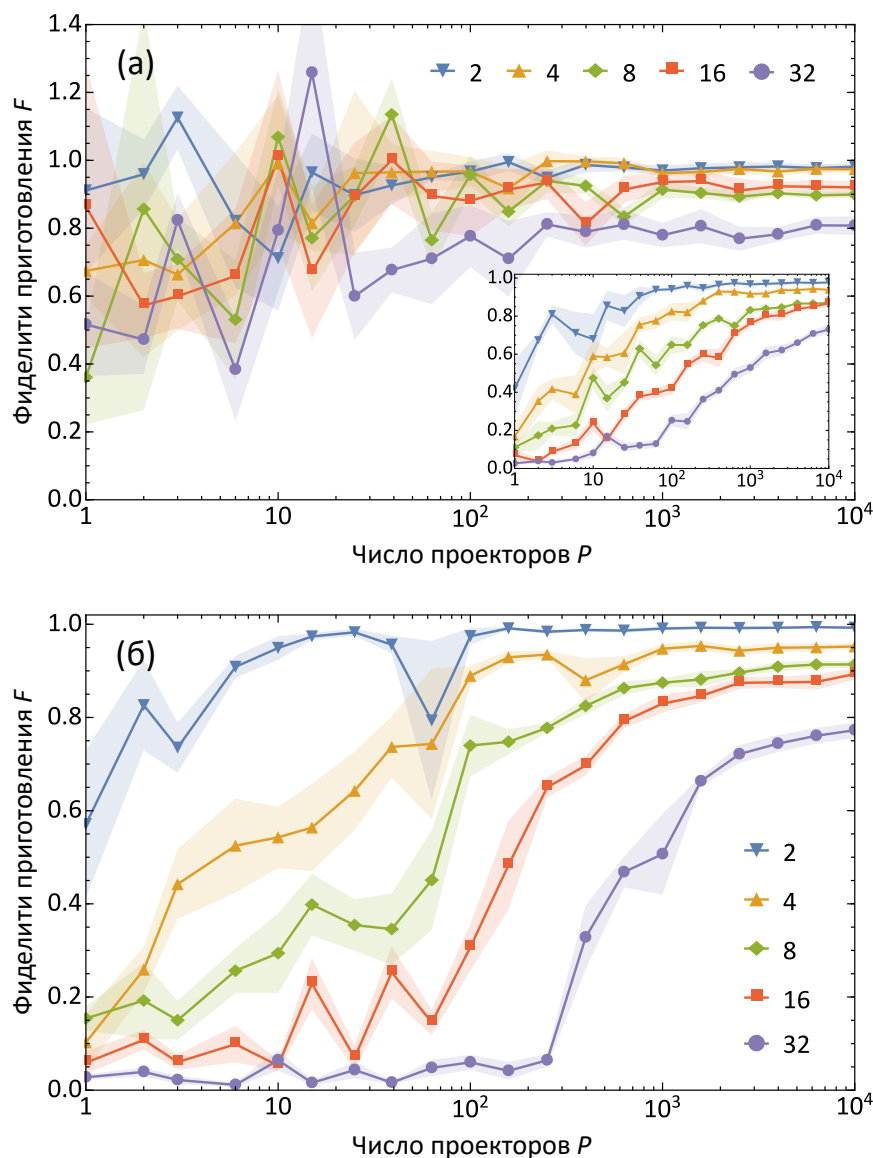


Рисунок 5.5 — Зависимость фиделити приготовления F от числа стабилизаторных измерений P для разных размерностей системы D (см. легенду), полученные с помощью (а) теневой томографии и (б) метода максимального правдоподобия. Каждая кривая усреднена по пяти истинным состояниям. Заливкой отображена область в одно стандартное отклонение среднего. На вставке рисунка (а) изображены такие же зависимости, но предварительно классическая тень $\hat{\rho}$ была спроецирована на множество положительно определённых матриц плотности.

зависимость от размерности системы D , которой не наблюдалось для исходной теневой томографии.

Смещённость оценки ведёт к плохой точности, когда набор измерений неполный. Например, возьмём точку $P = 251$ для $D = 32$ на рисунке 5.5а. Теневая томография уже сошлась, так как фиделити $F = 0.81 \pm 0.04$ совпадает с финальным значением для $P = 10^4$ в пределах погрешности. Но после проекции собственных значений на симплекс фиделити падает до $F = 0.36 \pm 0.03$.

К сожалению, смещённость неизбежна для любых оценок, которые всегда выдают положительные матрицы плотности [122]. Метод максимального правдоподобия не является исключением. На рисунке 5.5б изображены зависимости фиделити $F(P)$ для тех же измеренных данных, что и ранее. Оптимизация функции правдоподобия выполнялась алгоритмом ускоренного проективного градиентного подъёма [83]. Качественно поведение кривых $F(P)$ совпадает с таковым на вставке рисунка 5.5а.

5.4.4 Несмещённость оценки

Фиделити приготовления — не единственная величина, оцениваемая с сильным смещением по методу максимального правдоподобия, когда число P измерений мало. Это свойство проявляется для всех проекторов O_i со средним значением вблизи единицы, $o_i \approx 1$. Для проверки данной гипотезы были построены корреляционные графики, подобные изображённому на рисунке 5.3, для метода максимального правдоподобия. Оценки теневой томографии $\hat{\rho}_{CS}$ и по методу максимального правдоподобия $\hat{\rho}_{MLE}$ вычислялись на основе одних и тех же результатов стабилизаторных измерений. Затем, как обычно, $\hat{\rho}_{CS}$ и $\hat{\rho}_{MLE}$ подставлялись в выражение (5.4) для получения оценок $\hat{o}_i^{est.}$ средних значений 5000 случайно выбранных проекторов O_i .

Стоит отметить, что различие между теневой томографией и методом максимального правдоподобия наиболее заметно в области, где $o_i \approx 1$. С другой стороны, случайные проекторы O_i , распределённые равномерно по мере Хаара, приводят к средним значениям $o_i \approx 1$, которые сгущаются к нулю, что не очень подходит для интересующего случая. Поэтому проекторы O_i лучше выбрать так, чтобы равномерно были распределены средние o_i . Для этого возьмём проекто-

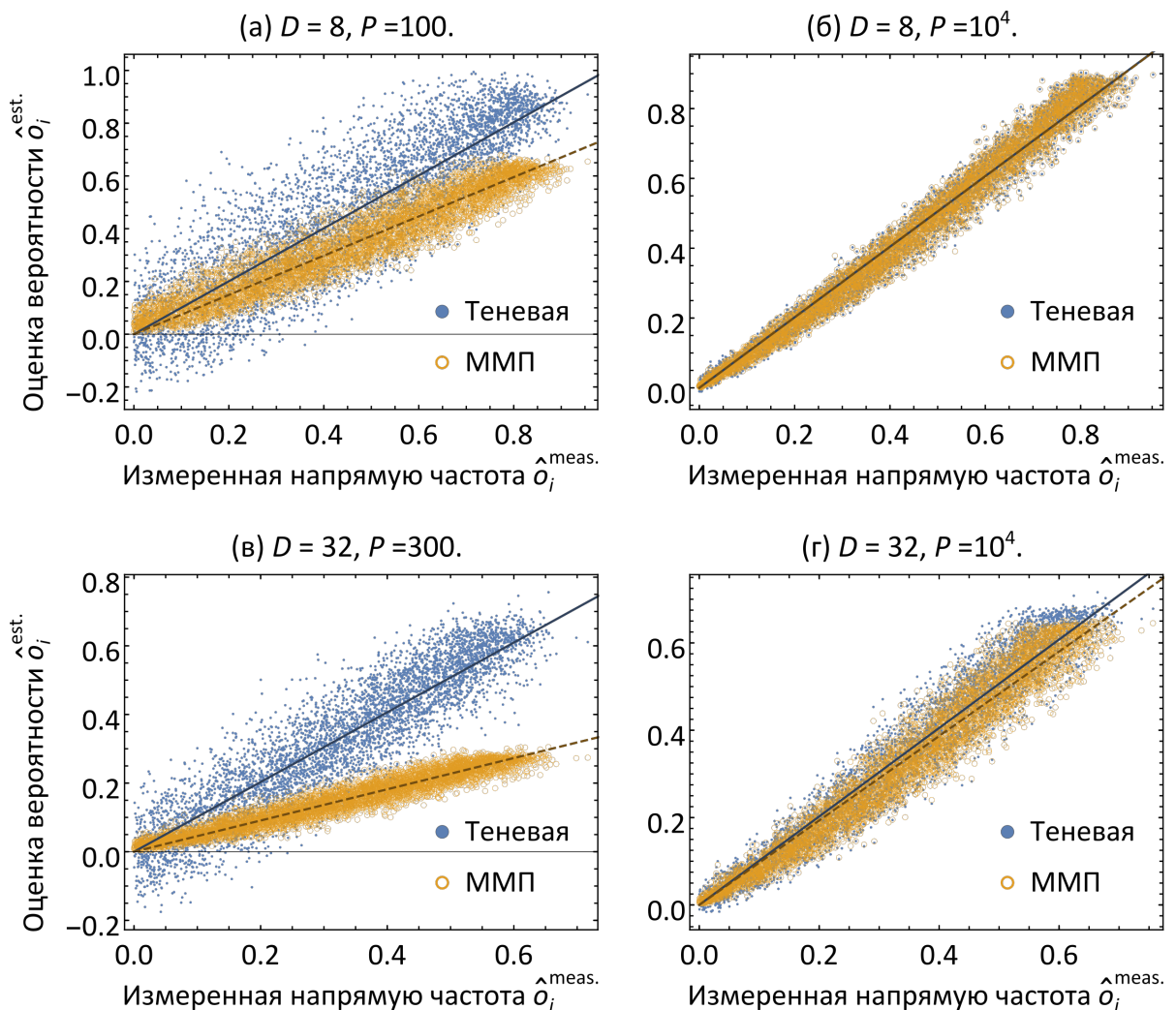


Рисунок 5.6 — Сравнение корреляционных графиков $\hat{\delta}_i^{\text{est.}}(\hat{\delta}_i^{\text{meas.}})$, полученных с помощью теневой томографии («Теневая») и метода максимального правдоподобия («ММП») для разных размерностей системы D и числа стабилизаторных измерений P . Прямые — наилучшая аппроксимация линейной функцией вида $\hat{\delta}_i^{\text{est.}} = \beta \hat{\delta}_i^{\text{meas.}}$. (сплошные линии — теневая томография, пунктир — ММП). Для переполненных наборов измерений $P = 10^4$ [рис. (б) и (г)] оба метода дают несмещённые оценки с коэффициентом пропорциональности $\beta \approx 1$. Для низких значений P [рис. (а) и (в)] предсказания $\hat{\delta}_i^{\text{est.}}$ по методу максимального правдоподобия сильно сдвинуты к нулю, а теневая томография по-прежнему не смещена.

Таблица 14 — Коэффициент корреляции Пирсона r и коэффициент пропорциональности β для данных рисунка 5.6, полученные с помощью теневой томографии (CS) и метода максимального правдоподобия (MLE) для разных размерностей системы D и числа стабилизаторных измерений P .

D	P	r_{CS}	r_{MLE}	β_{CS}	β_{MLE}
8	100	0.870	0.949	1.004 ± 0.004	0.745 ± 0.002
8	10^4	0.990	0.990	1.011 ± 0.001	1.010 ± 0.001
32	300	0.915	0.957	1.016 ± 0.003	0.455 ± 0.001
32	10^4	0.971	0.974	1.013 ± 0.002	0.967 ± 0.002

ры $O_i = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ на случайные вектора $|\varphi\rangle$ [см. также (2.24)]:

$$|\varphi\rangle = \sqrt{a}|\psi\rangle + \sqrt{1-a} \frac{|g\rangle - |\psi\rangle\langle\psi|g\rangle}{\| |g\rangle - |\psi\rangle\langle\psi|g\rangle \|}, \quad (5.31)$$

где $|g\rangle$ — вектор, вещественные и мнимые части которого распределены независимо и нормально с нулевым средним и единичной дисперсией, а скаляр a — распределён равномерно на отрезке $[0, 1]$. Нетрудно убедиться, что $|\langle\psi|\varphi\rangle|^2 = a$. Отсюда, если $|\psi\rangle$ — истинное состояние, то, действительно, $o_i = a$ имеет равномерное распределение. В качестве истинного состояния $|\psi\rangle$ взято его близкое приближение — скомпенсированное приготовленное состояние.

Полученные корреляции $\hat{o}_i^{\text{est.}}$ ($\hat{o}_i^{\text{meas.}}$) показаны на рисунке 5.6 для размерностей системы $D = 8$ и 32 . Исследованы два случая: малое число измерений P (100 для $D = 8$ и 300 для $D = 32$) и большое $P = 10^4$. Как и ожидалось, теневая томография даёт несмещённые оценки во всех ситуациях: $\hat{o}_i^{\text{est.}} \approx \hat{o}_i^{\text{meas.}}$. Оценка методом максимального правдоподобия ведёт себя иным образом, так как она является лишь *асимптотически* несмещённой. Для малых P оценки $\hat{o}_i^{\text{est.}}$ занижены и концентрируются вблизи прямой $\hat{o}_i^{\text{est.}} = \beta \hat{o}_i^{\text{meas.}}$ с коэффициентом пропорциональности $\beta < 1$ (см. таблицу 14). Для больших P реализуется асимптотический случай: оценки максимального правдоподобия становятся несмещёнными и практически совпадают с результатами теневой томографии.

Наблюдаемая на рисунках 5.6б и 5.6г плоская верхняя граница у облака точек может быть объяснена тем, что взятое состояние $|\psi\rangle$ в (5.31) всё же немного отличается от истинного состояния.

5.5 Выводы по главе

Метод теневой томографии был проверен в эксперименте по томографии пространственных состояний фотонов. Кодирование состояний осуществлялось в модах Эрмита — Гаусса. Было проведено сравнение оценок средних значений проекторов ранга 1, найденных посредством теневой томографии, с напрямую измеренными величинами. По результатам эксперимента наблюдается высокий коэффициент корреляции Пирсона (от 0.88 до 0.99).

В проведённом эксперименте объём собранной статистики был велик: порядка 10^4 – 10^5 отсчётов на одно измерение. В этом случае в теневой томографии можно использовать более простую оценку эмпирическим средним вместо медианной оценки без ухудшения точности.

Также в эксперименте подтверждено, что оценки теневой томографии являются несмещёнными. Это свойство ведёт к гораздо лучшей точности определения средних значений наблюдаемых при неполном наборе измерений по сравнению с традиционными методами как, например, метод максимального правдоподобия. В частности проверялась оценка фиделити приготовления для томографируемого состояния.

В ходе работы был предложен и теоретически обоснован алгоритм равновероятной выборки случайных стабилизаторных состояний, хранимых в виде вектора комплексных амплитуд, с вычислительной сложностью $\mathcal{O}(n^3 2^n)$ от числа кубитов n .

Результаты пятой главы опубликованы в работе [123].

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Экспериментально исследован протокол адаптивной байесовской томографии с использованием энтропийного критерия оптимальности измерений на примере томографии поляризованных кварцов.
2. Адаптивный протокол демонстрирует лучшую точность восстановления по сравнению со стратегией случайных измерений.
3. Проведены численные симуляции томографии факторизованного состояния, результаты которых хорошо согласуются с проведённым экспериментом.
4. Протокол адаптивной байесовской томографии состояний обобщён на случай томографии квантовых преобразований. Исследованы вопросы генерации априорного распределения и случайного блуждания на пространстве χ -матриц.
5. Выполнена проверка протокола в численных симуляциях и эксперименте для различных типов процессов, затрагивающих одиночный поляризованный кубит. Показано, что рассматриваемый адаптивный протокол превосходит по точности стратегию случайных измерений для процессов единичного ранга и близких к ним.
6. Обнаружено, что адаптивный протокол менее подвержен влиянию инструментальных погрешностей, таких как ошибка в установке углов фазовых пластинок, по сравнению со случайными измерениями.
7. Предложен новый адаптивный протокол томографии состояний высокоразмерных двухкомпонентных систем с использованием только лишь факторизованных измерений, которые предпочтительны при экспериментальной реализации ввиду своей простоты относительно измерений общего вида.
8. Предложенный протокол проверен в численных симуляциях и эксперименте по томографии пространственных состояний пар фотонов, рождаемых в процессе СПР, для размерностей $D = 9$ и $D = 36$. Адаптивный протокол выигрывает у стратегии случайных измерений при томографии чистых состояний и близких к ним.

9. Сформулированы условия на любой протокол томографии, необходимые для достижения максимальной скорости сходимости фиделити $1/N$. В случае использования только лишь факторизованных измерений найдено предельное значение ранга истинного состояния, при превышении которого сходимость $1/N$ невозможна, а наблюдается сходимость $1/\sqrt{N}$, типичная для неадаптивных методов.
10. Предложен алгоритм для равновероятной выборки стабилизаторных состояний, хранимых в виде вектора комплексных амплитуд, вычислительная сложность которого $\mathcal{O}(n^3 2^n)$ от числа кубитов n .
11. Метод теневой томографии проверен экспериментально при томографии пространственных состояний фотонов. Продемонстрирована высокая степень корреляции между оценками теневой томографии и напрямую измеренными средними величинами для проекторов ранга 1.
12. Экспериментально подтверждена несмещённость оценок по методу теневой томографии независимо от размерности пространства исследуемой системы, что ведёт к существенно лучшей точности оценок при неполном наборе измерений по сравнению с методом максимального правдоподобия.
13. Показано, что использование эмпирического среднего вместо медианной оценки в методе теневой томографии не приводит к ухудшению точности, если объём накопленной статистики велик.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Страупе С.С. за поддержку, обсуждение результатов и научное руководство. Отдельная благодарность выражается Ковлакову Е.В. за неоценимую помощь в проведении экспериментов с пространственными состояниями фотонов. Также автор благодарит соавторов научных публикаций Погорелова И.А., Кравцова К.С. и Радченко И.В. за содействие в проведённых исследованиях. Благодарность также выражается коллективу лаборатории квантовых оптических технологий и её руководителю Кулику С.П. за организацию научной работы. Дополнительно автор благодарит создателей `Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template` за предоставление шаблона оформления диссертации.

Список сокращений и условных обозначений

N	число зарегистрированных отсчётов (событий, совпадений между парами фотонов), объём выборки (статистики)
BBO	кристалл бета бората бария
i. i. d	независимые одинаково распределённые (independent and identically distributed)
MUB	mutually unbiased bases (взаимно несмещённые базисы), стр. 20
POVM	positive operator-valued measure (разложение единицы, положительная операторно-значная мера)
РРКТР	периодически поляризованный кристалл титанила фосфата калия
SIS	sequential importance sampling (последовательная выборка по значимости), стр. 42
ВПСС	вполне положительный сохраняющий след (квантовый процесс)
ММП	метод максимального правдоподобия, стр. 13
ПФМ	пространственный фазовый модулятор
СПР	спонтанное параметрическое рассеяние
УПГ	ускоренный проективный градиентный (метод оптимизации)
ЦПТ	центральная предельная теорема

Список литературы

1. Measurement of qubits / D. F. V. James [и др.] // *Phys. Rev. A.* — 2001. — Окт. — Т. 64, вып. 5. — С. 052312.
2. *Blume-Kohout, R.* Optimal, reliable estimation of quantum states / R. Blume-Kohout // *New J. Phys.* — 2010. — Т. 12, № 4. — С. 043034.
3. Quantum State Estimation. Т. 649 / под ред. М. Paris, J. Řeháček. — Berlin Heidelberg : Springer, Berlin, Heidelberg, 2004. — 520 с. — (Lecture Notes in Physics).
4. *Teo, Y. S.* Informationally incomplete quantum tomography / Y. S. Teo, J. Řeháček, Z. Hradil // *Quantum Measurements and Quantum Metrology.* — 2013. — Т. 1. — С. 57—83.
5. *Hradil, Z.* Quantum-state estimation / Z. Hradil // *Phys. Rev. A.* — 1997. — Март. — Т. 55, вып. 3. — R1561—R1564.
6. *Řeháček, J.* Minimal qubit tomography / J. Řeháček, B.-G. Englert, D. Kaszlikowski // *Phys. Rev. A.* — 2004. — Нояб. — Т. 70, вып. 5. — С. 052321.
7. Choice of measurement sets in qubit tomography / M. D. de Burgh [и др.] // *Phys. Rev. A.* — 2008. — Нояб. — Т. 78, вып. 5. — С. 052122.
8. Adaptive Quantum State Tomography Improves Accuracy Quadratically / D. H. Mahler [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — Окт. — Т. 111, вып. 18. — С. 183601.
9. *Blume-Kohout, R.* Accurate quantum state estimation via “Keeping the experimentalist honest” / R. Blume-Kohout, P. Hayden // *arXiv.* — 2006. — Т. [quant-ph]. — С. 0603116.
10. *Uhlmann, A.* The “transition probability” in the state space of a *-algebra / A. Uhlmann // *Rep. Math. Phys.* — 1976. — Т. 9. — С. 273—279.
11. *Bures, D.* An Extension of Kakutani’s Theorem on Infinite Product Measures to the Tensor Product of Semifinite w^* -algebras / D. Bures // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1969. — Т. 135. — С. 199—212.

12. *Huszár, F.* Adaptive Bayesian quantum tomography / F. Huszár, N. M. T. Houlby // *Phys. Rev. A.* — 2012. — Май. — Т. 85, вып. 5. — С. 052120.
13. *Fischer, D. G.* Quantum-state estimation by self-learning measurements / D. G. Fischer, S. H. Kienle, M. Freyberger // *Phys. Rev. A.* — 2000. — Февр. — Т. 61, вып. 3. — С. 032306.
14. Robust online Hamiltonian learning / С. E. Granade [и др.] // *New J. Phys.* — 2012. — Т. 14, № 10. — С. 103013.
15. Experimental adaptive Bayesian tomography / К. S. Kravtsov [и др.] // *Phys. Rev. A.* — 2013. — Июнь. — Т. 87, вып. 6. — С. 062122.
16. *Sugiyama, T.* Adaptive experimental design for one-qubit state estimation with finite data based on a statistical update criterion / T. Sugiyama, P. S. Turner, M. Muraо // *Phys. Rev. A.* — 2012. — Май. — Т. 85, вып. 5. — С. 052107.
17. Maximum-likelihood estimation of the density matrix / К. Banaszek [и др.] // *Phys. Rev. A.* — 1999. — Дек. — Т. 61, вып. 1. — 010304(R).
18. Quantum State Tomography via Compressed Sensing / D. Gross [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Окт. — Т. 105, вып. 15. — С. 150401.
19. Five Measurement Bases Determine Pure Quantum States on Any Dimension / D. Goyeneche [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Авг. — Т. 115, вып. 9. — С. 090401.
20. Quantum-State Reconstruction by Maximizing Likelihood and Entropy / Y. S. Teo [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Июль. — Т. 107, вып. 2. — С. 020404.
21. Objective compressive quantum process tomography / Y. S. Teo [и др.] // *Phys. Rev. A.* — 2020. — Февр. — Т. 101, вып. 2. — С. 022334.
22. Universal Compressive Characterization of Quantum Dynamics / Y. Kim [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2020. — Май. — Т. 124, вып. 21. — С. 210401.
23. Efficient quantum state tomography / M. Cramer [и др.] // *Nature communications.* — 2010. — Т. 1, № 1. — С. 1–7.
24. Efficient tomography of a quantum many-body system / B. Lanyon [и др.] // *Nature Physics.* — 2017. — Т. 13, № 12. — С. 1158–1162.

25. Neural-network quantum state tomography / G. Torlai [и др.] // Nature Physics. — 2018. — Т. 14, № 5. — С. 447—450.
26. Reconstructing quantum states with generative models / J. Carrasquilla [и др.] // Nature Machine Intelligence. — 2019. — Т. 1, № 3. — С. 155—161.
27. Experimental quantum homodyne tomography via machine learning / E. S. Tiunov [и др.] // Optica. — 2020. — Т. 7, № 5. — С. 448—454.
28. *Aaronson, S.* Shadow tomography of quantum states / S. Aaronson // Proceedings of the 50th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing. — Association for Computing Machinery, New York, NY, United States, 2018. — С. 325—338.
29. Experimental learning of quantum states / A. Rocchetto [и др.] // Science advances. — 2019. — Т. 5, № 3. — eaau1946.
30. *Huang, H.-Y.* Predicting many properties of a quantum system from very few measurements / H.-Y. Huang, R. Kueng, J. Preskill // Nat. Phys. — 2020. — 22 июня.
31. *Massar, S.* Optimal extraction of information from finite quantum ensembles / S. Massar, S. Popescu // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Т. 74. — С. 1259—1263.
32. Optimal minimal measurements of mixed states / G. Vidal [и др.] // Phys. Rev. A. — 1999. — Июль. — Т. 60, вып. 1. — С. 126—135.
33. Collective versus local measurements in a qubit mixed-state estimation / E. Bagan [и др.] // Phys. Rev. A. — 2004. — Янв. — Т. 69, вып. 1. — С. 010304.
34. Separable Measurement Estimation of Density Matrices and its Fidelity Gap with Collective Protocols / E. Bagan [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Сент. — Т. 97, вып. 13. — С. 130501.
35. *Gill, R. D.* State estimation for large ensembles / R. D. Gill, S. Massar // Phys. Rev. A. — 2000. — Март. — Т. 61, вып. 4. — С. 042312.
36. Statistical estimation of the quality of quantum-tomography protocols / Y. I. Bogdanov [и др.] // Phys. Rev. A. — 2011. — Окт. — Т. 84, вып. 4. — С. 042108.
37. *Nielsen, M. A.* Quantum Computation and Quantum Information / M. A. Nielsen, I. L. Chuang. — Cambridge : Cambridge University Press, 2001.

38. *Wootters, W. K.* Optimal state-determination by mutually unbiased measurements / W. K. Wootters, B. D. Fields // *Annals of Physics*. — 1989. — Т. 191, № 2. — С. 363—381.
39. *Adamson, R. B. A.* Improving quantum state estimation with mutually unbiased bases / R. B. A. Adamson, A. M. Steinberg // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Т. 105. — С. 030406.
40. *Ю. И. Богданов, А. К. Гавриченко, К. С. Кравцов, С. П. Кулик, Е. В. Морева и А. А. Соловьев.* Статистическое восстановление смешанных состояний поляризованных кубитов / Ю. И. Богданов, А. К. Гавриченко, К. С. Кравцов, С. П. Кулик, Е. В. Морева и А. А. Соловьев // *ЖЭТФ*. — 2011. — Т. 140. — С. 224—235.
41. Ultrabright source of polarization-entangled photons / P. G. Kwiat [и др.] // *Phys. Rev. A*. — 1999. — Август. — Т. 60, вып. 2, № 2. — R773—R776.
42. *D'Ariano, G. M.* Generating qudits with $d=3,4$ encoded on two-photon states / G. M. D'Ariano, P. Mataloni, M. F. Sacchi // *Phys. Rev. A*. — 2005. — Июнь. — Т. 71, вып. 6. — С. 062337.
43. *С. С. Страупе и С. П. Кулик.* К вопросу о приготовлении перепутанных пар поляризованных кубитов в частотно-невырожденном режиме / С. С. Страупе и С. П. Кулик // *ЖЭТФ*. — 2010. — Т. 137. — С. 211—219.
44. *Choi, M.-D.* Completely positive linear maps on complex matrices / M.-D. Choi // *Linear Algebra and its Applications*. — 1975. — Т. 10, № 3. — С. 285—290.
45. *Stinespring, W. F.* Positive functions on C^* -algebras / W. F. Stinespring // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1955. — Т. 6, № 2. — С. 211—216.
46. *Jamiolkowski, A.* Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators / A. Jamiolkowski // *Reports on Mathematical Physics*. — 1972. — Т. 3, № 4. — С. 275—278.
47. *D'Ariano, G. M.* Quantum Tomography for Measuring Experimentally the Matrix Elements of an Arbitrary Quantum Operation / G. M. D'Ariano, P. Lo Presti // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Май. — Т. 86, вып. 19. — С. 4195—4198.

48. *Leung, D. W.* Choi's proof as a recipe for quantum process tomography / D. W. Leung // *Journal of Mathematical Physics*. — 2003. — Т. 44, № 2. — С. 528—533.
49. *Ancilla-Assisted Quantum Process Tomography* / J. B. Altepeter [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Май. — Т. 90, вып. 19. — С. 193601.
50. *Gilchrist, A.* Distance measures to compare real and ideal quantum processes / A. Gilchrist, N. K. Langford, M. A. Nielsen // *Phys. Rev. A*. — 2005. — Т. 71, № 6. — С. 062310.
51. *Bengtsson, I.* *Geometry of Quantum States* / I. Bengtsson, K. Życzkovsky. — Cambridge : Cambridge University Press, 2006.
52. *Chuang, I. L.* Prescription for experimental determination of the dynamics of a quantum black box / I. L. Chuang, M. A. Nielsen // *Journal of Modern Optics*. — 1997. — Т. 44, № 11/12. — С. 2455—2467.
53. *Hastings, W. K.* Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications / W. K. Hastings // *Biometrika*. — 1970. — Т. 57, № 1. — С. 97—109.
54. *Hall, M. J.* Random quantum correlations and density operator distributions / M. J. Hall // *Phys. Lett. A*. — 1998. — Т. 242, № 3. — С. 123—129.
55. *Jones, K.* Principles of quantum inference / K. Jones // *Ann. Phys.* — 1991. — Т. 207, № 1. — С. 140—170.
56. *Wootters, W. K.* Random quantum states / W. K. Wootters // *Foundations of Physics*. — 1990. — Т. 20, № 11. — С. 1365—1378.
57. *Życzkowski, K.* Induced measures in the space of mixed quantum states / K. Życzkowski, H.-J. Sommers // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2001. — Сент. — Т. 34, № 35. — С. 7111—7125.
58. *Chernoff, H.* A Measure of Asymptotic Efficiency for Tests of a Hypothesis Based on the sum of Observations / H. Chernoff // *Ann. Math. Stat.* — 1952. — Дек. — Т. 23, № 4. — С. 493—507.
59. *Discriminating States: The Quantum Chernoff Bound* / K. M. R. Audenaert [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Апр. — Т. 98, вып. 16. — С. 160501.
60. *Quantum Chernoff bound as a measure of distinguishability between density matrices: Application to qubit and Gaussian states* / J. Calsamiglia [и др.] // *Phys. Rev. A*. — 2008. — Март. — Т. 77, вып. 3. — С. 032311.

61. *Osipov, V. A.* Random Bures mixed states and the distribution of their purity / V. A. Osipov, H.-J. Sommers, K. Życzkowski // J. Phys. A: Math. Theor. — 2010. — Т. 43, № 5. — С. 055302.
62. *Ginibre, J.* Statistical ensembles of complex, quaternion, and real matrices / J. Ginibre // J. Math. Phys. — 1965. — Т. 6. — С. 440—449.
63. *Życzkowski, K.* Random unitary matrices / K. Życzkowski, M. Kus // J. Phys. A: Math. Gen. — 1994. — Т. 27. — С. 4235—4245.
64. *Pozniak, M.* Composed ensembles of random unitary matrices / M. Pozniak, K. Życzkowski, M. Kus // J. Phys. A: Math. Gen. — 1998. — Т. 31, № 3. — С. 1059.
65. *Mezzadri, F.* How to generate random matrices from the classical compact groups / F. Mezzadri // Notices Am. Math. Soc. — 2007. — Т. 54. — С. 592—604.
66. *Kalev, A.* Fidelity-optimized quantum state estimation / A. Kalev, I. Hen // New J. Phys. — 2015. — Т. 17, № 9. — С. 093008.
67. A compact grating-stabilized diode laser system for atomic physics / L. Ricci [и др.] // Opt. Commun. — 1995. — Т. 117. — С. 541—549.
68. *Hawthorn, C. J.* Littrow configuration tunable external cavity diode laser with fixed direction output beam / C. J. Hawthorn, K. P. Weber, R. E. Scholten // Rev. Sci. Instrum. — 2001. — Т. 72, № 12. — С. 4477—4479.
69. Generation of different Bell states within the spontaneous parametric down-conversion phase-matching bandwidth / G. Brida [и др.] // Phys. Rev. A. — 2007. — Ноябрь. — Т. 76, вып. 5. — С. 053807.
70. *Holevo, A.* Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory / A. Holevo. — Philadelphia, PA : North-Holland, 1982.
71. *Wootters, W. K.* Entanglement of formation and concurrence / W. K. Wootters // Quantum Information and Computation. — 2001. — Т. 1. — С. 27—44.
72. *Gonçalves, D. S.* Global Convergence of Diluted Iterations in Maximum-likelihood Quantum Tomography / D. S. Gonçalves, M. A. Gomes-Ruggiero, C. Lavor // Quantum Inf. Comput. — Paramus, NJ, 2014. — Сентябрь. — Т. 14, № 11/12. — С. 966—980.
73. *Granade, C.* Practical Bayesian tomography / C. Granade, J. Combes, D. G. Cory // New Journal of Physics. — 2016. — Т. 18, № 3. — С. 033024.

74. Experimental adaptive quantum tomography of two-qubit states / G. I. Struchalin [и др.] // *Phys. Rev. A.* — 2016. — ЯНВ. — Т. 93, ВЫП. 1. — С. 012103.
75. Characterization of a qubit Hamiltonian using adaptive measurements in a fixed basis / A. Sergeevich [и др.] // *Phys. Rev. A.* — 2011. — НОЯБ. — Т. 84, ВЫП. 5. — С. 052315.
76. Experimental quantum Hamiltonian learning / J. Wang [и др.] // *Nature Physics.* — 2017. — ИЮНЬ. — Т. 13, ВЫП. 6. — С. 551—555.
77. *Evans, R.* The Entropy of a Poisson Distribution (C. Robert Appledorn) / R. Evans, J. Boersma // *SIAM Review.* — 1988. — Т. 30, № 2. — С. 314—317.
78. Statistical Estimation of the Efficiency of Quantum State Tomography Protocols / Y. I. Bogdanov [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — ИЮЛЬ. — Т. 105, ВЫП. 1. — С. 010404.
79. Cross-Validated Tomography / D. Mogilevtsev [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — СЕНТ. — Т. 111, ВЫП. 12. — С. 120403.
80. *Kim, T.* Phase-stable source of polarization-entangled photons using a polarization Sagnac interferometer / T. Kim, M. Fiorentino, F. N. C. Wong // *Physical Review A.* — 2006. — ЯНВ. — Т. 73, № 1. — С. 012316.
81. Experimental adaptive process tomography / I. A. Pogorelov [и др.] // *Phys. Rev. A.* — 2017. — ЯНВ. — Т. 95, ВЫП. 1. — С. 012302.
82. Adaptive quantum tomography of high-dimensional bipartite systems / G. I. Struchalin [и др.] // *Phys. Rev. A.* — 2018. — СЕНТ. — Т. 98, ВЫП. 3. — С. 032330.
83. *Shang, J.* Superfast maximum-likelihood reconstruction for quantum tomography / J. Shang, Z. Zhang, H. K. Ng // *Phys. Rev. A.* — 2017. — ИЮНЬ. — Т. 95, ВЫП. 6. — С. 062336.
84. Adaptive quantum state tomography via linear regression estimation: Theory and two-qubit experiment / B. Qi [и др.] // *npj Quantum Information.* — 2017. — Т. 3, № 1. — С. 19.
85. Full reconstruction of a 14-qubit state within four hours / Z. Hou [и др.] // *New Journal of Physics.* — 2016. — Т. 18, № 8. — С. 083036.
86. Achieving quantum precision limit in adaptive qubit state tomography / Z. Hou [и др.] // *npj Quantum Information.* — 2016. — Т. 2. — С. 16001.

87. Adaptive quantum tomography in high dimensions / L. Pereira [и др.] // Phys. Rev. A. — 2018. — Июль. — Т. 98, вып. 1. — С. 012339.
88. Experimental Demonstration of Adaptive Quantum State Estimation / R. Okamoto [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Сент. — Т. 109, вып. 13. — С. 130404.
89. *Lerch, S.* Adaptive quantum state estimation of an entangled qubit state / S. Lerch, A. Stefanov // Opt. Lett. — 2014. — Сент. — Т. 39, № 18. — С. 5399—5402.
90. Quantum state and process tomography via adaptive measurements / H. Wang [и др.] // Sci. China: Phys. Mech. Astron. — 2016. — Август. — Т. 59, № 10. — С. 100313.
91. *Bantysh, B. I.* Quantum tomography benchmarking / B. I. Bantysh, A. Y. Chernyavskiy, Y. I. Bogdanov // Quantum Information Processing. — 2021. — Окт. — Т. 20, вып. 10. — С. 339.
92. *Bogdanov, Y. I.* Unified statistical method for reconstructing quantum states by purification / Y. I. Bogdanov // J. Exp. Theor. Phys. — 2009. — Июнь. — Т. 108, № 6. — С. 928—935.
93. *Moschopoulos, P. G.* The distribution function of a linear combination of chi-squares / P. G. Moschopoulos, W. B. Canada // Comp. & Maths. with Appls. — 1984. — Т. 10, № 4. — С. 383—386.
94. *Ha, H.-T.* An accurate approximation to the distribution of a linear combination of non-central chi-square random variables / H.-T. Ha, S. B. Provost // REVSTAT – Stat. J. — 2013. — Ноябрь. — Т. 11, № 3. — С. 231—254.
95. *Parthasarathy, K. R.* On the maximal dimension of a completely entangled subspace for finite level quantum systems / K. R. Parthasarathy // Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) — 2004. — Т. 114, № 4. — С. 365—374.
96. *O'Donoghue, B.* Adaptive Restart for Accelerated Gradient Schemes / B. O'Donoghue, E. Candès // Found. Comput. Math. — 2015. — Июнь. — Т. 15, № 3. — С. 715—732.
97. *Chen, Y.* Projection Onto A Simplex / Y. Chen, X. Ye. — 2011. — arXiv: 1101.6081.

98. *Fletcher, R.* Practical methods of optimization / R. Fletcher. — 2nd. — John Wiley & Sons, 07.2013.
99. A New Proof for the Existence of Mutually Unbiased Bases / S. Bandyopadhyay [и др.] // *Algorithmica*. — 2002. — Т. 34, вып. 4. — С. 512—528.
100. *Ferrie, C.* Self-Guided Quantum Tomography / C. Ferrie // *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — Ноябрь. — Т. 113, вып. 19. — С. 190404.
101. *Chapman, R. J.* Experimental Demonstration of Self-Guided Quantum Tomography / R. J. Chapman, C. Ferrie, A. Peruzzo // *Phys. Rev. Lett.* — 2016. — Июль. — Т. 117, вып. 4. — С. 040402.
102. Spatial Bell-State Generation without Transverse Mode Subspace Postselection / E. V. Kovlakov [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2017. — Янв. — Т. 118, вып. 3. — С. 030503.
103. Exact solution to simultaneous intensity and phase encryption with a single phase-only hologram / E. Bolduc [и др.] // *Opt. Lett.* — 2013. — Сент. — Т. 38, № 18. — С. 3546—3549.
104. *Walborn, S. P.* Generalized Hermite–Gauss decomposition of the two-photon state produced by spontaneous parametric down conversion / S. P. Walborn, A. H. Pimentel // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* — 2012. — Т. 45, № 16. — С. 165502.
105. *Vidal, G.* Computable measure of entanglement / G. Vidal, R. F. Werner // *Phys. Rev. A*. — 2002. — Февр. — Т. 65, вып. 3. — С. 032314.
106. *Gottesman, D.* Stabilizer Codes and Quantum Error Correction / D. Gottesman. — 1997.
107. Fast state tomography with optimal error bounds / M. Guță [и др.] // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2020. — Апр. — Т. 53, № 20. — С. 204001.
108. *Webb, Z.* The Clifford Group Forms a Unitary 3-Design / Z. Webb // *Quantum Info. Comput.* — Paramus, NJ, 2016. — Ноябрь. — Т. 16, № 15/16. — С. 1379—1400.
109. Reconstructing high-dimensional two-photon entangled states via compressive sensing / F. Tonolini [и др.] // *Scientific Reports*. — 2014. — 13 окт. — Т. 4, вып. 1. — С. 6542.

110. Experimentally exploring compressed sensing quantum tomography / A. Steffens [и др.] // *Quantum Sci. Technol.* — 2017. — 11 мая. — Т. 2, № 2. — С. 025005.
111. *Gottesman, D.* The Heisenberg Representation of Quantum Computers / D. Gottesman // *Proceedings of the XXII International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics* / под ред. S. P. Corney, R. Delbourgo, P. D. Jarvis. — Cambridge, MA, International Press, 1999, 1998. — С. 32—43. — eprint: arXiv:quant-ph/9807006.
112. *Aaronson, S.* Improved simulation of stabilizer circuits / S. Aaronson, D. Gottesman // *Phys. Rev. A.* — 2004. — Ноябрь. — Т. 70, вып. 5. — С. 052328.
113. *Koenig, R.* How to efficiently select an arbitrary Clifford group element / R. Koenig, J. A. Smolin // *Journal of Mathematical Physics.* — 2014. — Т. 55, № 12. — С. 122202.
114. *Dehaene, J.* Clifford group, stabilizer states, and linear and quadratic operations over GF(2) / J. Dehaene, B. De Moor // *Phys. Rev. A.* — 2003. — Октябрь. — Т. 68, вып. 4. — С. 042318.
115. *Nest, M. V. den.* Classical simulation of quantum computation, the Gottesman-Knill theorem, and slightly beyond / M. V. den Nest // *Quant. Inf. Comp.* — 2010. — Март. — Т. 10, вып. 3/4. — С. 0258—0271.
116. *Goldman, J.* On the Foundations of Combinatorial Theory IV Finite Vector Spaces and Eulerian Generating Functions / J. Goldman, G.-C. Rota // *Studies in Applied Mathematics.* — 1970. — Т. 49, № 3. — С. 239—258.
117. <https://github.com/qotlabs/randstab>.
118. Experimental realization of quantum tomography of photonic qudits via symmetric informationally complete positive operator-valued measures / N. Bent [и др.] // *Physical Review X.* — 2015. — Т. 5, № 4. — С. 041006.
119. Experimental neural network enhanced quantum tomography / A. M. Palmieri [и др.] // *npj Quantum Information.* — 2020. — Т. 6. — С. 20.
120. *Życzkowski, K.* Average fidelity between random quantum states / K. Życzkowski, H.-J. Sommers // *Phys. Rev. A.* — 2005. — Март. — Т. 71, вып. 3. — С. 032313.

121. *Jerrum, M. R.* Random generation of combinatorial structures from a uniform distribution / M. R. Jerrum, L. G. Valiant, V. V. Vazirani // *Theor. Comput. Sci.* — 1986. — Т. 43. — С. 169—188.
122. Systematic Errors in Current Quantum State Tomography Tools / C. Schwemmer [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Февр. — Т. 114, вып. 8. — С. 080403.
123. Experimental Estimation of Quantum State Properties from Classical Shadows / G. I. Struchalin [и др.] // *PRX Quantum.* — 2021. — Янв. — Т. 2, вып. 1. — С. 010307.

Список рисунков

1.1	Схема установки для проведения измерений во взаимно несмещённых базисах над поляризационными куквартами, использованная в работе [39].	23
1.2	Схема на основе одного кристалла для приготовления произвольного состояния кукварта, предложенная в работе [42].	30
1.3	Схема установки на основе двух кристаллов со взаимно перпендикулярными осями, использованная в работе [41].	30
1.4	Схема приготовления произвольного поляризационного состояния кукварта, предложенная в работе [43].	32
2.1	Распределения чистых состояний на сфере Блоха, полученные методом Блюма.	50
2.2	Схема экспериментальной установки по томографии поляризационных куквартов.	59
2.3	Зависимость суммарной интенсивности счёта совпадений от времени после калибровки эффективностей детектирования.	63
2.4	Проекция нормированных отсчётов на аппроксимирующую гиперплоскость $I = \text{const}$	64
2.5	Теоретическая зависимость видности V от ширины спектра накачки $\Delta\lambda$	67
2.6	Зависимость скорости счёта совпадений от угла поворота поляризации θ	68
2.7	Зависимость количества единичных отсчётов от угла поворота поляризации θ	69
2.8	Экспериментальные зависимости размера апостериорного распределения $\vec{d}_B^2(N)$	71
2.9	Экспериментальная зависимость смешанности и степени перепутывания состояния.	72
2.10	Результаты эксперимента по томографии при наличии инструментальных ошибок.	74
2.11	Результаты численных симуляций для чистых состояний.	76
2.12	Результаты численных симуляций для смешанных состояний.	78

2.13	Результаты томографии для состояний различной чистоты.	79
2.14	Влияние априорного распределения на сходимость томографии	81
3.1	Зависимость квадрата бюресовского расстояния $d_B^2(\hat{\chi}, \chi_0)$ между текущей оценкой $\hat{\chi}$ и истинным процессом χ_0 от числа зарегистрированных отсчётов N для единичного процесса и 50% деполяризующего канала.	90
3.2	Зависимость расстояния до истинного процесса от уровня погрешности в установке углов фазовых пластинок.	92
3.3	Сравнение зависимости статистики χ^2/b от числа зарегистрированных отсчётов N и расстояния до истинного процесса $d_B^2(\hat{\chi}, \chi_0)$	93
3.4	Экспериментальная установка по томографии квантовых процессов.	95
3.5	Зависимость квадрата бюресовского расстояния $d_B^2(\hat{\chi}, \chi_0)$ до теоретического истинного процесса от числа зарегистрированных отсчётов N	97
3.6	Экспериментально полученные зависимости размера распределения $\bar{d}_B^2(N)$ для сохраняющих след процессов.	99
3.7	Экспериментально полученные зависимости размера распределения $\bar{d}_B^2(N)$ для несохраняющих след процессов.	101
4.1	Зависимости расстояния $d_B^2(N)$ до истинного состояния, усреднённые по чистым состояниям размерности $D = 9$ и полученные в численных симуляциях.	121
4.2	Зависимости расстояния $d_B^2(N)$ до истинного состояния, усреднённые по смешанным состояниям размерности $D = 9$ и полученные в численных симуляциях.	122
4.3	Результаты численных симуляций томографии 36-мерных чистых состояний.	124
4.4	Изменение полного числа зарегистрированных отсчётов N , которое необходимо для достижения заданного расстояния до истинного состояния, при оценке полного ранга.	125
4.5	Изменение полного числа зарегистрированных отсчётов N , которое необходимо для достижения заданного расстояния до истинного состояния, при оценке оптимального ранга.	126
4.6	Влияния различного числа измерений на точность протокола FO.	127

4.7	Упрощённая схема экспериментальной установки по томографии пространственных состояний фотонов.	129
4.8	Экспериментальные зависимости расстояния $d_B^2(N)$ до финальной оценки для состояний размерности $D = 9$ и $D = 36$	132
4.9	Зависимости p -значения от N для гауссовского и белловского состояний размерности $D = 9$ для различных протоколов томографии.	135
5.1	Схема экспериментальной установки для проведения теневой томографии.	147
5.2	Типичная зависимость фиделити приготовления F от компенсирующей фазы Гуи для размерности $D = 32$	149
5.3	Типичный график корреляции между $\hat{\rho}_i^{\text{est.}}$ и $\hat{\rho}_i^{\text{meas.}}$ на примере системы размерности $D = 8$	151
5.4	Зависимость коэффициента корреляции Пирсона r между $\hat{\rho}_i^{\text{est.}}$ и $\hat{\rho}_i^{\text{meas.}}$ от количества групп K при вычислении медианной оценки для различных размерностей системы D	153
5.5	Зависимость фиделити приготовления F от числа стабилизаторных измерений P для разных размерностей системы D , полученные с помощью теневой томографии и ММП.	157
5.6	Сравнение корреляционных графиков $\hat{\rho}_i^{\text{est.}}$ ($\hat{\rho}_i^{\text{meas.}}$), полученных с помощью теневой томографии и ММП.	159

Список таблиц

1	Два набора измерений, применяемых в работе [39].	24
2	Сдвиги фаз кварцевых пластинок на длине волны 815.4 нм.	61
3	Относительные эффективности детектирования.	62
4	Видность при различной ширине спектра и диаметре диафрагм.	68
5	Параметры аппроксимации размера распределения $\bar{d}_B^2(N)$ функцией вида cN^a	70
6	Аппроксимация зависимости размера распределения $\bar{d}_B^2(N)$ степенной функцией cN^a	90
7	Расстояние d_B^2 между оценкой и истинной χ -матрицей после регистрации $N = 10^6$ отсчётов в эксперименте по томографии единичного преобразования.	98
8	Результаты аппроксимации зависимости размера распределения $\bar{d}_B^2(N)$ степенной функцией вида cN^a . Процессы восстановлены как сохраняющие след преобразования.	100
9	Результаты аппроксимации зависимости размера распределения $\bar{d}_B^2(N)$ степенной функцией вида cN^a . Процессы восстановлены как несохраняющие след преобразования.	101
10	Результаты аппроксимации зависимостей расстояния до истинного состояния $d_B^2(\rho, \hat{\rho})$ от числа зарегистрированных отсчётов N	123
11	Экспериментально полученные параметры состояний, усреднённые по нескольким проходам томографии.	132
12	Результаты аппроксимации зависимости расстояния $d_B^2(\hat{\rho}, \hat{\rho}(N_0))$ до финальной оценки от числа зарегистрированных отсчётов N , полученных в эксперименте, степенной функцией cN^a	133
13	Коэффициент корреляции Пирсона r и фиделити приготовления F , усреднённые по пяти случайным состояниям, для различных размерностей системы D	151
14	Коэффициент корреляции Пирсона r и коэффициент пропорциональности β для данных рисунка 5.6.	160