

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Грозновой Анастасии Юрьевны на тему «Свойства типа несвязности и однородность топологических пространств», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 «Геометрия и топология» (01.01.04 «Геометрия и топология»).

1. Экстремально несвязные (э. н.) пространства, с одной стороны, экстремально экзотичны среди всех топологических пространств. Например, среди метризуемых пространств таковыми являются только дискретные пространства. С другой стороны, э. н. пространства – проективно универсальны: грубо говоря, любое пространство есть непрерывный (совершенный и неприводимый) образ некоторого э. н. пространства. Они самым естественным образом возникают при систематическом рассмотрении процедуры «рассыпания» топологического пространства, т. е. представлении его как предела проекционных спектров, состоящих из определенным способом организованных, более элементарных, частей самого пространства.

Сама идея такого представления, скорее всего, восходит к классической теореме П. С. Александра о непрерывных образах канторова множества и методу (максимальных) центрированных систем. Позже этого типа представления использовались в работах многих математиков (Хьюит, М. Стоун, Глисон, Исбелл) и, в определенной степени, получили итоговое завершение в исследованиях абсолютов топологических пространств (В. И. Пономарев, С. Д. Илиадис и С. В. Фомин и др.) Также активно исследовались э. н. пространства, во взаимосочетаниях с тем или иным свойством: булевы алгебры и решетки функций, счетная компактность, структура произведения, групповая структура (У. Рудин, Фролик, Комфорт, ван Милл, Шиманьский, ван Даун, А. В. Архангельский, Кунен, Е. А. Резниченко). Специальное внимание было при этом уделено свойству топологической одинаковости, однородности пространства. В заметном числе случаев компакты в однородных э. н. пространствах исчерпываются конечными подмножествами.

В диссертации А. Ю. Грозновой рассмотрен ряд проблем современной общей топологии (однородность, стоун-чеховские компактификации, версии экстремальной несвязности, некоторые вопросы теории ультрафильтров и др.), которые естественным образом продолжают уже известные исследования в этой области. Тематика диссертации является актуальной.

2. Базовая идея диссертационного исследования состоит, кратко говоря, в замене открытых отделённых подмножеств (в определении экстремальной

несвязности) на отделённые подмножества из каких-двух семейств K_1 и K_2 подмножеств пространства. В качестве таких семейств в главе 2 работы выбраны семейства счетных или счетных дискретных подмножеств. Получаются (с.38) три ослабления экстремальной несвязности и, соответственно, три новых класса пространств, «похожих» на класс э. н. пространств; аналогично, и для любых кардиналов (с.47).

В главе 3 диссертации показано, что такая замена-обобщение не есть формальная игра текстом определения экстремальной несвязности. В параграфе 3.1 в терминах C^* -вложимости счётных или счетных дискретных подпространств получены критерии принадлежности вполне регулярного (компактного, нормального) пространства введенным ранее классам пространств в случаях, когда $K_1 = K_2$. В разделе 3. 2. 2 эти классы охарактеризованы в терминах поведения точек замыканий счётных или счетных дискретных множеств. В теоремах 3.2.4 – 3.2.7 представлены еще два типа критериев принадлежности компакта введенным классам в случаях, когда $K_1 = K_2$; эти критерии сами по себе состоят из довольно объёмного списка (от 4 до 11) эквивалентных утверждений. В одном случае критерии используют ограничения на простые идеалы кольца непрерывных функций, в другом – на изоморфность решеток идеалов.

В технически, пожалуй, самой нетривиальной главе 4 работы продолжены исследования (Фролик, ван Дауэн, Кунен, А. В. Архангельский, Е. А. Резниченко) о том, как экстремальная несвязность пространства (не)согласуется с его однородностью. Основой являются найденные автором аналоги леммы Кунена – ключевого момента в его доказательстве неоднородности произведений F -компактов - для введенного в главе 2 класса R_2 обобщённых э. н. пространств (случай $K_1 \neq K_2$) и для класса $\beta\omega$ -пространств аналогов, см. теоремы 4.1.1 и 4.2.1 соответственно. Эти теоремы существенно использованы в параграфе 4.3. для доказательства неоднородности произведений R_2 -компактов (следствие 4.3.1) и произведений $\beta\omega$ -компактов (следствие 4.3.2); последнее - при дополнительном условии существования дискретных ультрафильтров в наросте пространства натуральных чисел. Последний в работе параграф 4. 4. связан с не «наивной» топологией – используется либо аксиома Мартина, либо предположение о существовании большого числа ультрафильтров несравнимых относительно порядка Рудин – Бласса. Основной результат – конечность компактов в однородных подпространствах счетных степеней $\beta\omega$ -пространств, теорема 4.4.2.

3. Текст работы достаточно аккуратен и ясен, основные шаги и рассуждения доказательств представлены полно. На 86-ти страницах всегда можно обнаружить разного типа неточности, эта работа - не исключение. Например, в самом титуле точнее было бы говорить не просто о несвязности, а об экстремальной несвязности. В 2.3. правильнее говорить о незамкнутости относительно взятия стоун-чеховской компактификации, а не об неинвариантности. Вполне можно было бы не приводить (3.2.2) определение кольца. На с.69 использована ссылка на предложение 4.2.1, которого в работе нет, есть теорема 4.2.1. Не очень прояснено значение обобщения на произвольные кардиналы (2.4.): кроме примера 2.4.2 они, кажется, нигде не нужны. Впрочем, эти и аналогичные недостатки не влияют на общую положительную характеристику работы.

4. В целом диссертация является законченным и самостоятельно выполненным исследованием по актуальной научной тематике, которое, несомненно, может быть продолжено в различных направлениях теории экстремально несвязных пространств. Автореферат верно и полно отражает основные результаты диссертационной работы.

5. Считаю, что диссертационная работа Грозновой А.Ю. «Свойства типа несвязности и однородность топологических пространств» соответствует критериям, определенным пп. 2.1–2.5 «Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова», и оформлена согласно приложениям № 5, 6 «Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова». По моему мнению, автор диссертации заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 «Геометрия и топология» (01.01.04 «Геометрия и топология»).

Доктор физико-математических наук, профессор,
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Национальный
исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
профессор, факультет математики.

Семенов Павел Владимирович.

Подпись заверяю

СПЕЦИАЛИСТ
ПО ПЕРСОНАЛУ

КИСИН И

