

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Тарыгин Илья Евгеньевич

**Расширенные температурные модели погрешностей
измерений инерциальных датчиков в задаче калибровки**

1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научные руководители:

доктор физико-математических наук

Голован Андрей Андреевич

кандидат физико-математических наук

Козлов Александр Владимирович

Москва – 2023

Оглавление

Введение	4
Список обозначений	21
1 Модели погрешностей измерений инерциальных датчиков . .	28
1.1 Параметризация моделей погрешностей измерений инерциальных датчиков	29
1.1.1 Традиционная модель погрешностей измерений	30
1.1.2 Расширенная температурная модель погрешностей измерений инерциальных датчиков	32
1.2 Идентификация параметров модели погрешностей и их наблюдаемость	37
1.2.1 Математическая постановка задачи калибровки	37
1.2.2 Описание калибровочного эксперимента	39
1.2.3 Исследование наблюдаемости в задаче температурной калибровки	41
1.2.4 Методика численного моделирования	53
1.2.5 Ковариационный анализ на модельных данных	56
2 Особенности оценки производной температуры по времени . .	64
2.1 Типовые свойства измерений датчиков температуры	66
2.2 Динамика тепловых процессов в БИНС	68
2.3 Аппроксимация показаний датчиков температуры в постобработке	71
2.3.1 Аппроксимация показаний датчиков температуры при стационарных внешних условиях	71
2.3.2 Оконная аппроксимация показаний датчиков температуры при нестационарных внешних условиях	74

2.4	Аппроксимация показаний датчиков температуры в реальном времени	79
2.4.1	Простейший дифференцирующий фильтр	79
2.4.2	Оконная экспоненциальная регрессия	81
2.4.3	Численное моделирование производной температуры по времени	83
2.4.4	Результаты обработки экспериментальных данных	85
2.4.5	Редукция температурной модели	87
2.4.6	Выбор априорных параметров фильтра	88
3	Практические примеры температурной калибровки	93
3.1	Точная БИНС на базе кольцевых лазерных гироскопов	94
3.1.1	Математические модели задачи калибровки	95
3.1.2	Описание калибровочного эксперимента	98
3.1.3	Результаты калибровки	100
3.1.4	Результаты обработки серии экспериментов	104
3.1.5	Оценка качества калибровки	107
3.2	Блок чувствительных элементов на базе микромеханических датчиков	108
3.2.1	Математические модели задачи калибровки	110
3.2.2	Описание калибровочного эксперимента	111
3.2.3	Результаты калибровки	112
3.2.4	Оценка качества калибровки	116
4	Калибровка блока ДУС с использованием измерений стенда .119	
4.1	Математические модели задачи калибровки	123
4.2	Численное моделирование	125
4.3	Результаты моделирования	127
	Заключение	134
	Литература	136
	Приложение	148

Введение

Диссертационная работа посвящена актуальной проблеме калибровки бескарданных инерциальных навигационных систем (БИНС), которые в наши дни являются приборной основой бортовых навигационных комплексов подвижных объектов различного назначения [1–3]. В качестве первичной информации для построения навигационного решения в БИНС выступают измерения инерциальных датчиков: ньютонометров (акселерометров) и датчиков угловой скорости — ДУС (гироскопов). ДУС измеряют проекции вектора абсолютной угловой скорости объекта на собственные оси чувствительности, а ньютонометры — проекции вектора удельной силы реакции со стороны внешних тел, действующей на их чувствительные массы. В вычислителе БИНС решается прямая задача механики: на основе измерений инерциальных датчиков, моделей силы тяжести, формы и вращения Земли, а также начальных условий определяются параметры движения (местоположение, скорость и ориентация) объекта, на котором установлена БИНС.

Точность навигационного решения во многом определяется инструментальными погрешностями инерциальных датчиков, которые включают в себя погрешности смещений нулевых сигналов, масштабных коэффициентов, углов перекосов осей чувствительности и пр. Задача калибровки состоит в оценке параметров априорной модели погрешностей измерений инерциальных датчиков по результатам калибровочных экспериментов, проходящих на специализированном оборудовании. Решение задачи калибровки позволяет компенсировать погрешности измерений инерциальных датчиков при функционировании системы. Поскольку инструментальные погрешности подвержены влиянию температуры, а БИНС во время эксплуатации испытывает широкодиапазонную температурную нагрузку, возникает задача учета температурных зависимостей погрешностей измерений инерциальных датчиков во время калибровки. В наши

дни калибровке БИНС с учетом температурных зависимостей уделяется большое внимание, поскольку такая калибровка позволяет повысить точность системы благодаря решению чисто математической задачи (не прибегая к решению сложной технологической задачи по повышению точности систем или к использованию дополнительного оборудования для термостатирования системы). Таким образом можно заключить, что разработка методов калибровки БИНС с учетом температурных зависимостей является актуальной проблемой прикладной механики.

Теоретический аппарат инерциальной навигации был разработан в середине XX века и подробно изложен в работах М. Шулера, Ч. Драйпера, Р. Граммеля, А.Ю. Ишлинского, Б.В. Булгакова, В.Д. Андреева, Н.А. Парусникова и др. [1, 2, 4–6].

Необходимым этапом, который предшествует эксплуатации БИНС является калибровка. В данной работе под «калибровкой» понимается задача определения неизвестных параметров в принятой априорной модели погрешностей измерений инерциальных датчиков. Набор этих параметров определяется для каждой системы отдельно. Основной идеей калибровки является «сопоставление» показаний инерциальных датчиков или связанных с ними величин с некоторыми «эталонными» значениями. В качестве «эталонных» величин исторически выступают вектор удельной силы тяжести в месте проведения калибровки и вектор угловой скорости вращения Земли. Перед проведением калибровки составляется план калибровочных экспериментов, затем проводятся калибровочные эксперименты в ходе которых выполняется запись первичных показаний инерциальных датчиков. Далее, при помощи зарегистрированных данных и соответствующих алгоритмов обработки оцениваются неизвестные параметры априорной модели погрешностей измерений инерциальных датчиков. Качество проведенной калибровки во многом определяет точность навигационной системы во время дальнейшей эксплуатации. Литература посвященная калибровке разнообразна, различные методики калибровки подробно описаны в отечественной [7–12] и зарубежной литературе [1, 13–19]. Среди отечественных публикаций по моделям погрешностей измерений инерциальных датчиков и способам их калибровки можно выделить работы Г.И. Емельянцева, В.М. Слюсарь, А.П. Степанова, О.С. Салычева, Ю.Г. Егорова, Е.А. Измайлова, Е.Ф. Поликовского,

Н.А. Парусникова, В.В. Тихомирова, Н.Б. Вавиловой, Ю.В. Болотина, А.И. Матасова, А.В. Деревянкина, А.А. Дзуева, И.Х. Шаймарданова, среди зарубежных публикаций работы Б.В. Климковича, В.В. Аврутова, P.G. Savage, J.W. Diesel, D. H. Titterton, Z. Syed, E.H. Shin. Подходы к калибровке можно классифицировать по следующим критериям:

- состав системы:
 - калибровка ДУС и ньютометров по отдельности;
 - калибровка БИНС в сборе;
- план эксперимента:
 - статическая калибровка (набор заданных положений);
 - динамическая калибровка (при изменяющейся угловой скорости);
- исходная информация:
 - калибровка при помощи первичной информации (показания датчиков);
 - калибровка при помощи вторичной информации (автономное навигационное решение БИНС);
- привлекаемая дополнительная информация:
 - информация об угловом и линейном движении БИНС во время калибровки, предоставляемая датчиками калибровочного стенда;
 - без использования дополнительной информации.

Традиционный подход к решению задачи калибровки [13, 20–23] подразумевает прямое сравнение первичных измерений инерциальных датчиков и соответствующих эталонных величин (удельная сила тяжести для ньютометров, угловая скорость Земли и/или углы поворота планшайбы стенда для ДУС) в соответствии с введенными априорными моделями погрешностей измерений датчиков. В процессе калибровки проводится серия статических экспериментов при различных заданных неподвижных положениях планшайбы стенда или с

заданной угловой скоростью вращения. Составляется переопределенная система алгебраических уравнений, описывающая взаимосвязь между известными и измеренными векторами эталонных величин в проекциях на оси приборного трехгранника, ориентация которого известна с точностью до погрешностей стенда и ошибок установки системы на планшайбе. При решении системы определяются параметры априорной модели погрешностей измерений инерциальных датчиков, например, с помощью метода наименьших квадратов или фильтра Калмана. Для рассматриваемого подхода характерно проведение отдельных калибровочных экспериментов для блоков ньютонометров и ДУС, при этом вопрос согласования осей чувствительности блоков ДУС и ньютонометров обычно не обсуждается. Отметим, что при таком подходе выдвигаются высокие требования к точности информации об ориентации приборного трехгранника и, как следствие, к точности калибровочного стенда. Также при статической калибровке невозможна оценка рассогласования измерений ДУС и ньютонометров во времени.

Скалярный способ калибровки [16, 24–28] базируется на свойстве инвариантности скалярного произведения векторов относительно ортогональных преобразований системы координат, что позволяет снизить требования к точности калибровочного стенда, поскольку в алгоритме калибровки не используется информация об ориентации приборного трехгранника. При скалярной калибровке блока ньютонометров в качестве эталона используется модуль вектора удельной силы тяжести в месте проведения калибровки. В работе [24] описан калибровочный эксперимент, состоящий из 24 статических положений, в которых угол отклонения оси чувствительности от направления удельной силы тяжести кратен 45° , последовательно для каждого из ньютонометров. Показано, что при таком плане обеспечивается наблюдаемость параметров априорной модели погрешностей измерений ньютонометров, более того, достигается наилучшая ожидаемая точность оценок (в смысле минимума следа ковариационной матрицы ошибок оценки). В исследованиях [16, 29, 30] описан скалярный подход к калибровке ДУС. В работах показано, что скалярная калибровка позволяет с высокой точностью определить смещения нулевых сигналов ДУС навигационного класса, однако точность определения погрешностей масштабных коэффициентов и углов перекосов осей чувствительности является недостаточной. Эта проблема

может быть решена с привлечением измерений датчиков углов поворота точного стенда [29] или комбинированием скалярного способа с калибровкой по навигационному решению [30].

Метод калибровки БИНС по навигационному решению имеет потенциально высокую точность и получил широкое распространение в последнее время [11, 12, 30–35]. Метод не требует жесткого соблюдения плана эксперимента и не предъявляет высоких требований к точности калибровочного стенда. Поскольку метод использует линейные модели ошибок скоростей и ориентации, параметры модели погрешностей измерений инерциальных датчиков должны быть достаточно малыми для удержания ошибок в линейной зоне. В связи с этим, метод калибровки по навигационному решению обычно комбинируют с другими методами калибровки для уменьшения начальных значений параметров до приемлемого уровня [30]. В качестве метода оценивания обычно используется фильтр Калмана и его различные модификации. Одним из открытых вопросов является выбор оптимального плана эксперимента.

В лаборатории управления и навигации МГУ им. М.В. Ломоносова был разработан метод калибровки БИНС по первичным измерениям инерциальных датчиков [22], позволяющий получать оценки стандартного набора параметров инструментальных погрешностей (смещения нулевых сигналов, погрешности масштабных коэффициентов, малые углы неортогональностей осей чувствительности инерциальных датчиков) измерений инерциальных датчиков для БИНС в сборе (т.е. одновременно для ньютонометров и ДУС) путём обработки показаний датчиков в динамическом (т.е. с переменной угловой скоростью вращения платформы стенда) эксперименте на поворотном стенде именно с горизонтальной осью вращения. Ключевая особенность метода состоит в том, что он не требует ни точного соблюдения плана эксперимента, ни соблюдения или измерения стендом углов поворота осей и угловых скоростей вращения. В отличие от калибровочных экспериментов, включающих только статические положения, только вращения с постоянной угловой скоростью и только вращения на определенные углы, у этого подхода есть важное преимущество. Помимо снижения требований к точности испытательного стенда, динамика движения системы во время эксперимента становится ближе к реальной эксплуатации, что позволяет выявлять несоответствие реальных ошибок БИНС (погрешно-

стей БИНС) и их моделей и другие проблемы еще на стадии калибровки. В настоящее время используется или была апробирована на многих предприятиях — производителях БИНС, таких как: АО «Московский Институт Электромеханики и Автоматики», АО «Инерциальные технологии "Технокомплекса"», АО «Арзамасское научно-производственное предприятие ТЕМП-АВИА», научно-производственное объединение «Регион», ЗАО «Нефтегазкомплектсервис». В работах [36,37] исследована возможность учета смещения БИНС от центра вращения станда при калибровке (что позволяет исключить требование близкого расположения системы к оси вращения, и, например, проводить калибровку нескольких блоков одновременно на одном станде). Другим направлением развития описанного подхода является учет дополнительной информации о движении платформы станда (скорость вращения, углы поворота и пр.), который подробно изложен в работах [34, 38]. Учет дополнительной информации позволяет сократить время на проведение экспериментов и увеличить потенциальную точность калибровки. В работе [39] предложены модификации методики для калибровки систем различного класса точности. Представленная работа является естественным продолжением описанных выше исследований и посвящена учету температурного влияния на показания инерциальных датчиков в рамках описанного подхода.

Важно заметить, что в отличие от подавляющего большинства существующих методик калибровки БИНС, состоящих из отдельных стадий, этапов и алгоритмов, предлагаемая методика калибровки предусматривает единый алгоритм обработки всего массива данных калибровочного эксперимента, подходящий для систем различного класса точности.

Актуальность темы. Точность инерциальных датчиков (и как следствие, навигационного решения БИНС) обуславливается взаимодействием внешних и внутренних физических процессов (механические, электромагнитные, температурные и пр.). Как и любые другие измерительные приборы, инерциальные датчики подвержены влиянию температуры. Это влияние сказывается в первую очередь на точности показаний инерциальных датчиков и, как следствие, на качестве получаемого навигационного решения. Отметим, что во время эксплуатации, БИНС могут подвергаться широкодиапазонной температурной на-

грузке. Диапазон рабочих температур БИНС навигационного¹ класса точности может варьироваться в пределах от -60 до $+85$ °С, при этом скорость изменения температуры может достигать $20 - 30$ °С/ч, а пространственные температурные градиенты $10 - 20$ °С/м. Известно [7, 14, 15, 33, 40–51], что различные типы инерциальных датчиков подвержены различным типам температурного воздействия, это зависит, в первую очередь, от геометрических размеров датчика и физических принципов, лежащих в основе работы инерциального датчика [33, 40]. Например, на показания волоконно-оптических и лазерных ДУС большое влияние оказывают скорость измерения температуры и пространственный градиент температуры [33]. Далее под «температурным воздействием», если не оговорено иное, будем считать совокупное влияние температуры, скорости изменения температуры (производной температуры по времени) и пространственного градиента температуры. Современные высокие требования к точности БИНС влекут за собой высокие требования к качеству инерциальных датчиков и калибровки. С другой стороны, жесткие требования к компактности систем приводят к тому, что различные элементы БИНС располагаются близко друг к другу, температура между ними распределяется неравномерно, возникают существенные пространственные градиенты температуры [44], сказывающиеся на точности систем. В связи с этим, качественная температурная калибровка и последующая компенсация температурных зависимостей становятся одними из ключевых вопросов при создании БИНС навигационного и тактического² класса точности.

Среди основных источников температурного воздействия можно выделить следующие.

1. Изменение температуры окружающей среды. Например, при взлете самолета температура окружающей среды за минуты полета может изменяться на десятки градусов. Аналогичная ситуация может происходить при движении спутника на орбите Земли [52, 53].
2. Тепло, выделяемое элементами БИНС: вычислителем (аналого-цифровым преобразователем) и блоком питания.

¹Система навигационного класса точности — дрейф $< 0,01$ град/ч

²Тактический класс точности — дрейф порядка $0.1 - 0.5$ град/ч

Проблема температурной калибровки активно исследуется в различных источниках. Основные подходы, предполагающие снижение влияния температурного воздействия на показания инерциальных датчиков, можно классифицировать следующим образом:

- **термостатирование и термостабилизация БИНС и/или отдельных частей БИНС** [54, 55]; современные многоконтурные системы термостатирования позволяют существенно³ снизить изменение температуры внутри БИНС, тем не менее, этот способ, с одной стороны, является дорогостоящим и энергозатратным, а с другой, не решает полностью проблему термоизоляции БИНС [33];
- **оптимизация конструкции БИНС**; данный подход предполагает снижение влияния температуры на работу БИНС за счет использования материалов с низким коэффициентом линейного температурного расширения (инвар, ситалл, кварц), а также оптимизации расположения элементов БИНС, с целью минимизации температурных градиентов внутри системы; подход предусматривает анализ математических моделей тепловых процессов, протекающих внутри БИНС [40], численное моделирование тепловых режимов работы БИНС [44, 54] и выбор оптимального расположения элементов системы; известным конструктивным решением для ВОГ является квадрупольная намотка оптоволокна, обеспечивающая одинаковый нагрев участков волокна, равноудаленных от середины оптического контура;
- **разработка и исследование температурных моделей инструментальных погрешностей измерений инерциальных датчиков**; установка температурных датчиков вблизи инерциальных датчиков внутри БИНС; проведение специальных температурных калибровочных экспериментов и алгоритмическая компенсация температурных погрешностей во время эксплуатации БИНС; преимуществом этого подхода являются отсутствие в необходимости каких-либо изменений в технологии производства и эксплуатации БИНС.

³1–2 °С при изменении внешней температуры в пределах от –40 до +40 °С

Последние два пункта обычно называют «пассивными» методами снижения влияния температурного воздействия, а первый, соответственно «активным».

Для исследования температурного влияния на показания датчиков БИНС на платформах калибровочных стендов устанавливают термокамеры; в них можно создавать изменение температуры по заданному профилю, управлять скоростью изменения температуры и, реже, создавать пространственные градиенты. Также использование термокамеры позволяет проводить калибровочные эксперименты при фиксированной температуре. Современные термокамеры [56] имеют следующие характеристики:

- диапазон температуры: $-55 \dots +100^{\circ}\text{C}$;
- скорость нагрева: $< +4^{\circ}\text{C}/\text{мин.}$;
- скорость охлаждения: $> -4^{\circ}\text{C}/\text{мин.}$;
- стабильность: $\pm 1^{\circ}\text{C}$.

Наиболее распространенным вариантом температурной калибровки БИНС является проведение калибровочных экспериментов в различных температурных «точках» в рабочем диапазоне температур с шагом $10 - 15^{\circ}\text{C}$. В работах [7, 41, 42] предлагается проведение калибровки при различных температурах в диапазоне от -60 до 60°C . Далее результаты калибровки аппроксимируют, например, полиномами 2 — 3 порядка, получая таким образом значения параметров модели погрешностей измерений инерциальных датчиков при различных значениях температуры. Основными недостатками этого подхода являются:

- требуется проводить много экспериментов при различных температурах;
- перед каждым экспериментом требуется ожидать установления постоянной температуры внутри термокамеры;
- невозможно оценить влияние скорости изменения температуры и пространственного градиента температуры на параметры априорной модели погрешностей инерциальных датчиков.

Известен ряд методик [41, 50, 51], предполагающих проведение отдельных температурных экспериментов для определения коэффициентов зависимости

от температуры. Большинство из них подразумевают выдержку системы в статическом положении при изменяющейся температуре. Такой подход, как правило, не позволяет оценить коэффициенты влияния температурного воздействия для отдельных параметров модели погрешностей измерений инерциальных датчиков (смещений нулевых сигналов, погрешностей масштабных коэффициентов, малых углов перекосов). Например для волоконно-оптических гироскопов (ВОГ) зависимость от температуры погрешности масштабного коэффициента, обусловленная только изменением площади оптического контура, может составлять до 1 ppm при изменении температуры на 1°C [57, 58]. В ряде работ [59, 60] упоминаются значительные (порядка угловых минут) зависимости от температуры перекосов осей чувствительности ньютонометров и ДУС.

В работе [33] исследуется задача калибровки БИНС на базе ВОГ морского назначения, в том числе исследуются вопросы, связанные с температурной калибровкой. Рассматриваемая методика предполагает проведение двух экспериментов, в одном из которых при фиксированной температуре определяется стандартный набор погрешностей измерений инерциальных датчиков и отдельного эксперимента продолжительностью 45 ч. при переменной температуре для определения коэффициентов зависимостей от температуры и производной температуры по времени для смещений нулевых сигналов, погрешностей масштабных коэффициентов инерциальных датчиков и углов перекосов осей чувствительности. При этом, модель температурных зависимостей постулируется в виде полинома, степень которого определяется на основе критерия минимума дисперсии ошибки оценки. В работе показано, что такой подход позволяет выполнять калибровку системы класса 0.001 град/ч.

Целью диссертации является разработка и обоснование метода калибровки БИНС, позволяющего учесть температурные вариации погрешностей измерений инерциальных датчиков и не требующего установления температурного равновесия в системе (в отличие от большинства других методик); при этом температурные вариации включают зависимости от температуры, скорости изменения температуры и компонент пространственного градиента температуры.

Для достижения поставленных целей решались следующие **задачи**.

1. Разработать математические модели погрешностей измерений инерциальных датчиков, учитывающие зависимости от температуры, производной температуры по времени и пространственного градиента температуры.
2. Сформулировать математическую постановку задачи температурной калибровки и исследовать наблюдаемость в соответствующей задаче оценивания.
3. Провести полунатурное численное моделирование с целью проведения ковариационного анализа и проверки выводов аналитического исследования.
4. Решить задачу оценки производной температуры по времени внутри БИНС по показаниям датчиков температуры, с учетом особенностей измерений.
5. Проверить работоспособность методики при калибровке реальных систем различного класса точности.
6. Модифицировать предложенную в работе методику для случая калибровки блока ДУС без ньютонометров.

Методология и методы исследования. Задача температурной калибровки БИНС и сопутствующие ей задачи решены при помощи следующих методов.

1. Методы оптимального оценивания (численно устойчивая реализация дискретного фильтра Калмана методом корня из ковариационной матрицы, его модификация с исключением устаревших измерений, метод градиентного спуска).
2. Методы исследования наблюдаемости и оцениваемости линейных динамических систем (разложение измерений линейной динамической системы по базису линейно независимых функций, ковариационный анализ).
3. Численные методы решения дифференциальных уравнений.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. В случае калибровки БИНС в трех циклах вращения вокруг каждой из приборных осей в плоскости горизонта, необходимым и достаточным условием наблюдаемости параметров расширенной модели погрешностей инерциальных датчиков является линейная независимость функций температуры, производной температуры по времени и компонент пространственного градиента температуры как функций времени.
2. Разработанная методика температурной калибровки БИНС позволяет в разы сократить время, затрачиваемое на проведение калибровочных экспериментов.
3. Разработанный метод оценки скорости изменения температуры по измерениям термодатчиков позволяет получить оценку производной температуры с необходимой точностью в реальном времени, когда шаг квантования измерений термодатчиков велик, и, как следствие, ошибка измерений принципиально отличается от традиционной модели белого шума.
4. Модификация предложенной методики калибровки БИНС позволяет осуществлять с необходимой точностью температурную калибровку блока ДУС без ньютометров при наличии измерений калибровочного стенда.

Достоверность и обоснованность результатов аналитических выводов обусловлена использованием строгих математических методов механики управляемых систем, теории оценивания, обыкновенных дифференциальных уравнений и др. Алгоритмы представленные в работе проверены при помощи численного моделирования и при обработке реальных экспериментов с системами различного класса точности.

Научная новизна. Основные результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми. Впервые разработанная в лаборатории управления и навигации МГУ имени М.В.Ломоносова методика калибровки на грубых стендах модифицирована для калибровки БИНС при переменной температуре. Эта модификация нетривиальна. Особенность предлагаемого метода состоит в том, что, в отличие от большинства работ по температурной калибровке, коэффициенты температурных зависимостей оцениваются одновременно со стандартным

набором погрешностей измерений инерциальных датчиков по результатам калибровочного эксперимента при изменяющейся температуре. Такой подход позволяет существенно сократить время калибровки, при этом обеспечивая необходимую точность калибровки. В диссертации получены следующие **новые результаты**:

- разработана, исследована и обоснована методика температурной калибровки БИНС, предполагающая оценку коэффициентов температурного влияния на показания инерциальных датчиков внутри БИНС одновременно с оценкой стандартного набора инструментальных погрешностей инерциальных датчиков по результатам калибровочного эксперимента при изменяющейся температуре;
- подтверждена эффективность рассматриваемой методики по результатам калибровки реальных систем различного класса точности по предложенной методике; проведен сравнительный анализ точности навигационного решения БИНС до и после калибровки;
- проведено аналитическое исследование наблюдаемости коэффициентов температурного влияния и исчерпывающее численное моделирование; сформулированы необходимые и достаточные условия наблюдаемости в соответствующей задаче оценивания;
- впервые сформулирована задача оценивания скорости изменения температуры в реальном времени по измерениям датчиков температуры с большим шагом квантования; предложен и обоснован соответствующий алгоритм оценивания, представляющий собой модификацию классического фильтра Калмана; при помощи качественного анализа решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности обосновано использование экспоненциальных функций в качестве формирующего уравнения для фазового вектора;
- решена задача температурной калибровки блока ДУС без использования ньютонометров (частный случай) по измерениям датчиков точного калибровочного стенда, с учетом возможного временного рассогласования

показаний датчиков БИНС и стенда; по результатам численного моделирования для системы тактического класса точности проведен ковариационный анализ, установлена наблюдаемость инструментальных погрешностей инерциальных датчиков и коэффициентов температурного влияния, также подтверждена возможность их оценки с точностью, соответствующей классу системы.

Теоретическая ценность и практическая значимость. Теоретическая ценность работы состоит в разработке и анализе математической модели температурной калибровки БИНС, доработке существующих моделей погрешностей измерений инерциальных датчиков с целью учета температурного влияния на показания инерциальных датчиков. Аналитическом и численном анализе наблюдаемости параметров температурного влияния и обусловленности их оценок.

Практическая ценность результатов работы состоит в том, что предложенная в работе методика калибровки БИНС в эксперименте с изменяющейся температурой позволяет сократить время проведения калибровочных экспериментов в несколько раз. Более того, методика предполагает учет различных коэффициентов зависимости для каждого типа инструментальных погрешностей, что повышает потенциальную точность калибровки в целом. Методика опробована при калибровке БИНС-РТ, производства АО «Инерциальные Технологии Технокомплекса» (г. Раменское); БЧЭММ-1 и БИНС-СП2, производства АО «Московский институт электромеханики и автоматики»; систем разработки АО «Арзамасское научно-производственное предприятие ТЕМП-АВИА» и др.

Апробация работы. Результаты работы прошли апробацию на международных и всероссийских научных конференциях:

- XXI Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам, Государственный научный центр Российской Федерации АО «КОНЦЕРН «ЦНИИ «ЭЛЕКТРОПРИБОР» Санкт-Петербург, Россия, май 2014;
- XXIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам, Государственный научный центр

Российской Федерации АО «КОНЦЕРН «ЦНИИ «ЭЛЕКТРОПРИБОР»
Санкт-Петербург, Россия, май 2016;

- XXIV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам, Государственный научный центр Российской Федерации АО «КОНЦЕРН «ЦНИИ «ЭЛЕКТРОПРИБОР» Санкт-Петербург, Россия, май 2017;
- 8th International Conference on Recent Advances in Space Technologies (RAST). — IEEE Istanbul, Turkey, June 2017.

Публикации по теме диссертации. По материалам диссертации подготовлены публикации в **12** печатных изданиях, **7** из которых изданы в рецензируемых журналах (**5** из которых индексируются в международных системах Scopus и Web Of Science) и **5** в тезисах трудов конференций.

Личный вклад автора. Все выносимые на защиту результаты и положения получены лично автором или при его непосредственном участии. Научные руководители А.А. Голован и А.В. Козлов предложили постановку задач и методы их исследования, осуществляли общее руководство работой и контролировали достоверность полученных результатов. Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены непосредственно автором. Лично автором разработаны все алгоритмы используемые в работе для численного моделирования, а также решения поставленных задач.

Вклад соискателя в работы, опубликованные в соавторстве (согласно списку «Публикаций автора по теме диссертации в журналах, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus») характеризуется следующим образом. В работе [61] вклад автора является основополагающим: математическая постановка задачи, аналитическое исследование наблюдаемости, численное моделирование и подготовка статьи к публикации выполнены автором лично. В работе [62] авторский вклад соискателя составляет $1/2$ и состоит в проведении, описании и интерпретации результатов численного моделирования, подготовке статьи к публикации. В работе [63] авторский вклад составляет $1/4$ и состоит в подготовке и анализе результатов численного моделирования.

Содержание диссертации. Диссертационная работа состоит из четырех главы, введения, заключения и списка литературы. В первой главе рассматри-

ваются классические модели погрешностей измерений инерциальных датчиков и их модификация, позволяющая учесть температурное влияние. Описывается математическая постановка задачи калибровки и план калибровочного эксперимента. Задача сводится к оценке вектора состояния линейной динамической системы по вектору измерений, который линейно связан с вектором состояния. Проводится анализ наблюдаемости добавленных в модель параметров. Формулируются достаточные условия наблюдаемости коэффициентов зависимостей от температуры, производной температуры по времени и пространственного градиента температуры для смещений нулевых сигналов, погрешностей масштабных коэффициентов и углов перекосов осей чувствительности ньютонометров и ДУС.

Во второй главе рассматриваются особенности калибровки зависимостей параметров модели погрешностей измерений инерциальных датчиков от скорости изменения температуры. Описываются характерные трудности, препятствующие оценке производной температуры по времени непосредственно из показаний датчиков температуры. Решена задача аппроксимации показаний датчиков температуры в постобработке и в реальном времени. Ставится и решается задача определения скорости изменения температуры по показаниям датчиков температуры.

В третьей главе приводятся практические примеры проведенных калибровок БИНС по описанной в первой главе методике. В частности, калибровка точной БИНС на базе кольцевых лазерных гироскопов (КЛГ) и калибровка грубого блока чувствительных элементов (БЧЭ) на базе микромеханических гироскопов. Проводится сравнительный анализ навигационных решений до и после компенсации погрешностей измерений.

В четвертой главе описана задача калибровки блока чувствительных элементов, состоящего из трех ДУС с использованием информации об углах поворота платформы двухосного калибровочного стенда. Вводится параметрическая модель погрешностей измерений углов поворота платформы стенда и формулируется математическая постановка задачи калибровки. Далее вводится вектор состояния системы и ставится задача оптимального оценивания. Проведено исследование наблюдаемости системы при помощи ковариационного анализа.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность Козлову Александру Владимировичу и Головану Андрею Андреевичу за научное руководство и помощь на всех этапах работы; Болотину Юрию Владимировичу и Матасову Александру Ивановичу за ценные замечания и конструктивную критику.

Обозначения

Большая часть используемых обозначений соответствует обозначениям, используемым в [2], [22].

Система координат обозначается заглавной и строчными буквами, например, $O\xi$ ($O\xi_1\xi_2\xi_3$), где заглавная буква обозначает начало координат, а строчные буквы — наименования осей. Все рассматриваемые системы координат правые и ортогональные. Синонимом термина «система координат» является термин «координатный трехгранник» или просто «трехгранник».

Векторы обозначаются строчными буквами с нижним индексом, обозначающим, в какой системе координат задан вектор. Например, запись a_ξ обозначает, что вектор a задан своими проекциями в осях системы координат $O\xi$.

Пусть β — вектор с координатами $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Символом $\widehat{\beta}$ обозначается кососимметрическая матрица соответствующая координатам вектора:

$$\begin{bmatrix} 0 & \beta_3 & -\beta_2 \\ -\beta_3 & 0 & \beta_1 \\ \beta_2 & -\beta_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Этот символ удобно использовать для записи векторного произведения:

$$y = \beta \times x = -\widehat{\beta}x,$$

где β, x — некоторые векторы, y — результат векторного произведения.

Матрица взаимной ориентации двух систем координат обозначается заглавной буквой с двумя нижними индексами, например, $A_{\xi\eta}$ — матрица взаимной ориентации систем координат $O\xi$ и $O\eta$, причем

$$a_\xi = A_{\xi\eta}a_\eta.$$

Опорная (навигационная) система координат

Пусть точка M — неподвижная точка пересечения осей поворотного стенда (из-

мерительный центр). Нормальную проекцию точки M на поверхность модельного земного эллипсоида обозначим через N . Внешняя нормаль к поверхности эллипсоида в этой точке называется географической вертикалью. Введем трехгранник $Mx_1x_2x_3$ таким образом, что орт оси Mx_3 совпадает с направлением географической вертикали, ось Mx_2 направлена на Север, а ось Mx_1 дополняет оси Mx_3 и Mx_2 до правой системы координат и направлена на Восток. В опорной системе координат векторы силы тяжести g_x и угловой скорости Земли u_x имеют вид

$$g_x = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta g_n \\ -g_0 \end{bmatrix}, \quad u_x = \begin{bmatrix} 0 \\ u \cos \varphi \\ u \sin \varphi \end{bmatrix},$$

где u — угловая скорость Земли, g_0 — величина ускорения свободного падения и φ — географическая широта в месте проведения калибровки. Уклонением силы тяжести (компонентой Δg_n) обычно пренебрегают.

Приборная (инструментальная) система координат

Ортогональная правая система координат $Mz_1z_2z_3$. Оси Mz_1 , Mz_2 , Mz_3 с точностью до инструментальных погрешностей сонаправлены с осями чувствительности ньютонометров и ДУС. Исторически сложилось так, что приборную систему координат связывают с осями чувствительности ньютонометров. Расположить оси чувствительности строго ортогонально практически невозможно, поэтому построение приборной системы координат для определенности будем выполнять следующим образом: первая ось строго совпадает с первой осью чувствительности первого ньютонометра, вторая приборная ось лежит в плоскости, образованной первой и второй осями чувствительности и получается поворотом оси чувствительности второго ньютонометра на малый угол (для ортогонализации первой и второй осей), третья ось дополняет первые две до правой тройки и получается двумя поворотами оси чувствительности третьего ньютонометра.

Матрицу перехода (ориентации) от опорной системы координат к приборной обозначим L_{zx} , далее, для краткости, будем писать L_z . По определению эта матрица ортогональна и может быть представлена при помощи углов курса ψ ,

крена γ и тангажа θ :

$$Mx \begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{\pi}{2} - \psi} \\ \xrightarrow{-\theta} \\ \xrightarrow{\gamma} \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{3} \\ \xrightarrow{2} \\ \xrightarrow{1} \end{array} Mz ,$$

что соответствует представлению в матричном виде:

$$\begin{aligned} L_z(\psi, \gamma, \theta) &= \\ &= \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sin\psi \cos\theta & \sin\psi \sin\theta \sin\gamma - \cos\psi \cos\gamma & \cos\psi \sin\gamma + \sin\psi \sin\theta \cos\gamma \\ \cos\psi \cos\theta & \sin\psi \cos\gamma + \cos\psi \sin\theta \sin\gamma & \cos\psi \sin\theta \cos\gamma - \sin\psi \sin\gamma \\ -\sin\theta & \cos\theta \sin\gamma & \cos\theta \cos\gamma \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Модельная система координат

Модельная система координат $Mz'_1z'_2z'_3$ получается при численном интегрировании дифференциальных уравнений ориентации твердого тела. При численном интегрировании кинематических уравнений ориентации можно выделить три основных источника ошибок: погрешность начальных условий, вычислительные погрешности и погрешности измерений инерциальных датчиков. При отсутствии этих погрешностей модельная система координат совпадает с приборной. Матрицу перехода (ориентации) от опорной системы координат к модельной обозначим L'_z . Будем считать, что переход между приборной и модельной системами координат с точностью до членов второго порядка малости можно описать соотношением

$$l_{z'} = (E + \widehat{\beta}_z)l_z,$$

где E — единичная матрица, l — произвольный вектор, β_z — вектор малого поворота в проекциях на оси приборной системы координат Mz (по теореме Эйлера о конечном повороте). Физический смысл вектора β_z состоит в том, что его компоненты представляют собой малые углы поворота вокруг соответствующих приборных осей, приводящие приборный трехгранник к модельному, причем, в силу малости углов, повороты могут выполняться в любой последо-

вательности. Вектор малого поворота β называется кинематической ошибкой ориентации.

Квазимодельная система координат

Квазимодельная система координат Mz^x получается из модельной при помощи ортогонального преобразования L_z^T . По определению вектор малого поворота β_x описывает поворот от опорной к квазимодельной системе координат. Несложно показать, что $\beta_x = L_z^T \beta_z$. Вектор малого поворота β_x называется кинематической ошибкой в проекциях на оси опорной системы координат. По сути, квазимодельная система координат является вычисленным в БИНС представлением опорной системы Mx . Введенные системы координат изображены на рис. 1.

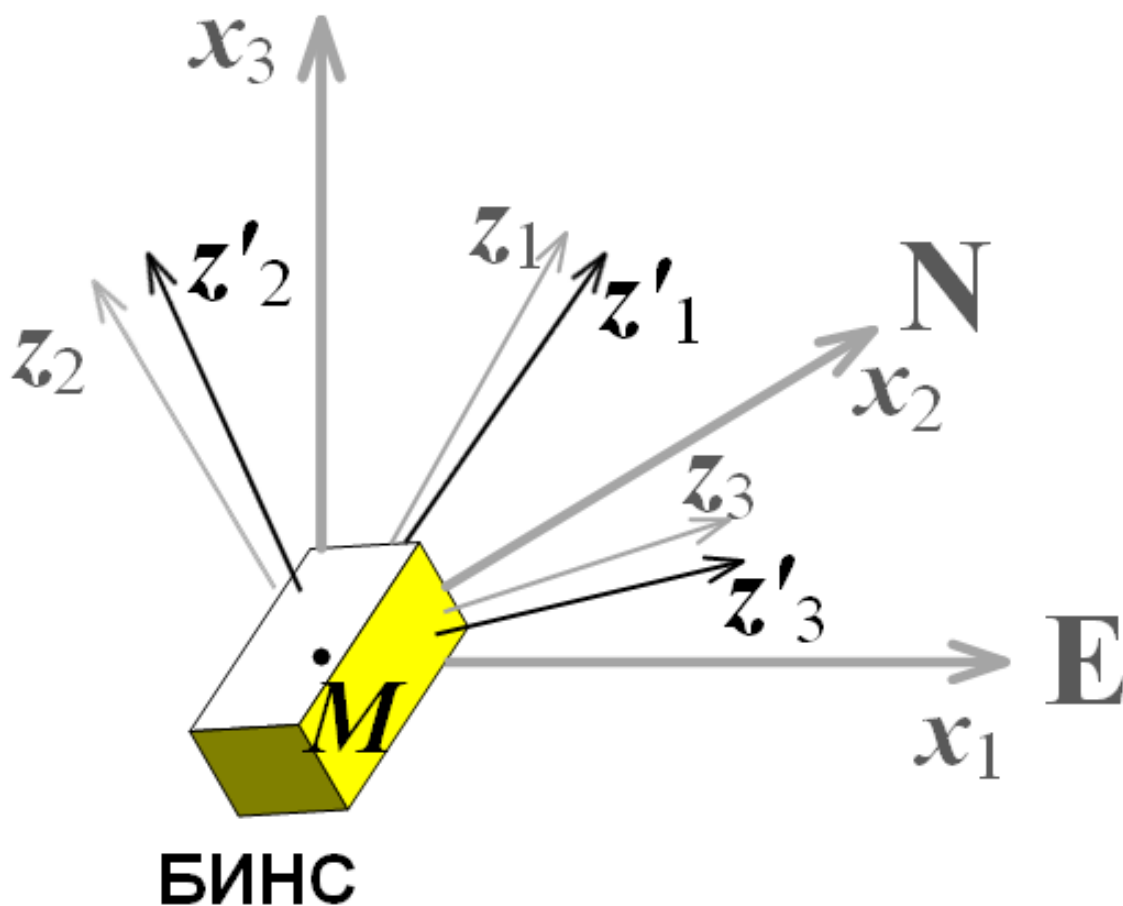


Рис. 1: Системы координат: опорная Mx (толстые серые линии), приборная Mz (тонкие серые линии) и модельная Mz' (тонкие черные линии). Последние две системы близки друг к другу.

Стендовая система координат

Будем рассматривать двухосный поворотный стенд. Выберем трехгранник $Mr_1p_2p_3$, жестко связанный с планшайбой стенда, таким образом, что ось Mr_3 связана с внешней осью вращения стенда, а другие две оси лежат в плоскости планшайбы. Измерения ζ'_1, ζ'_2 датчиков, установленных на стенде соответствуют углам поворота планшайбы ζ_1, ζ_2 вокруг внешней и внутренней осей стенда. Измерения содержат аддитивные случайные ошибки $\delta\zeta_1, \delta\zeta_2$. При нулевых значениях углов поворота опорная и стендовая системы координат совпадают с достаточной точностью. Матрицу перехода от опорной системы координат к стендовой обозначим через L_p . Матрица L_p получается в результате последовательности поворотов вокруг внутренней и внешней осей поворотного стенда:

$$Mx \begin{array}{cc} \xrightarrow{\zeta_1} & \xrightarrow{\zeta_2} \\ & \xrightarrow{1} \quad \xrightarrow{3} \end{array} Mp .$$

В матричном виде эти повороты записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} L_p(\zeta_1, \zeta_2) &= \begin{bmatrix} \cos \zeta_2 & -\sin \zeta_2 & 0 \\ \sin \zeta_2 & \cos \zeta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \zeta_1 & -\sin \zeta_1 \\ 0 & \sin \zeta_1 & \cos \zeta_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \zeta_2 & -\cos \zeta_1 \sin \zeta_2 & \sin \zeta_1 \sin \zeta_2 \\ \sin \zeta_2 & \cos \zeta_1 \cos \zeta_2 & -\sin \zeta_1 \cos \zeta_2 \\ 0 & \sin \zeta_1 & \cos \zeta_1 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

БИНС устанавливается на стенде таким образом (рис. 2), что приборная система координат совпадает со стендовой с точностью до малых углов-ошибок установки системы (углов юстировки). Обозначим через κ_p вектор малого поворота от стендовой системы координат к приборной. Измерения ζ'_1, ζ'_2 используются для построения модельной матрицы ориентации планшайбы стенда относительно опорной системы координат $L'_p = L_p(\zeta'_1, \zeta'_2)$. Пусть вектор малого поворота δ_p задает переход от модельной системы координат Mz' к модельной стендовой Mp' . Отметим, что в отличие от вектора малого поворота κ_p , который описывает рассогласование между истинными матрицами ориентации, вектор

малого поворота δ_p описывает рассогласование между модельными матрицами ориентации. В линейном приближении выполняется соотношение:

$$\delta_p = \kappa_p + \beta_p - \xi_p \approx \kappa_p + \beta_z - \xi_p,$$

что соответствует записи в опорной системе Mx :

$$\delta_x = \beta_x + L_p^T(\kappa_p - \xi_p) \approx \beta_x + L_z'^T(\kappa_p - \xi_p).$$

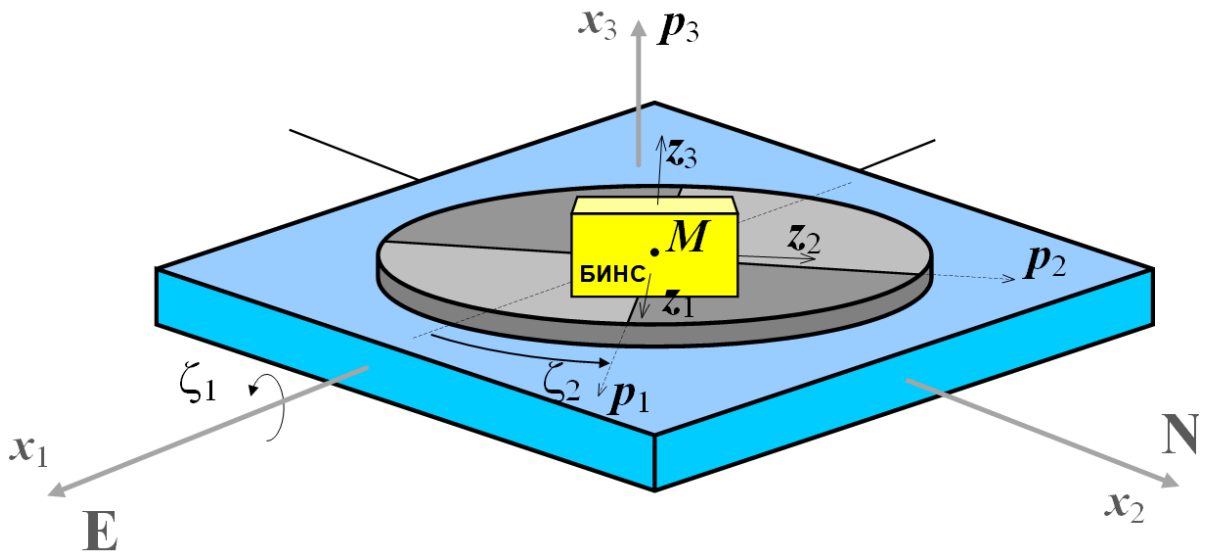


Рис. 2: Схематическое расположение БИНС на стенде: опорная Mx (толстые серые линии), приборная Mz (тонкие черные линии) и стендовая Mp (тонкие черные штрихованные линии). Последние две системы близки друг к другу.

На рис.3 представлены взаимосвязи между системами координат (переходы вида $E + \hat{\beta}$ верны в линейном приближении).

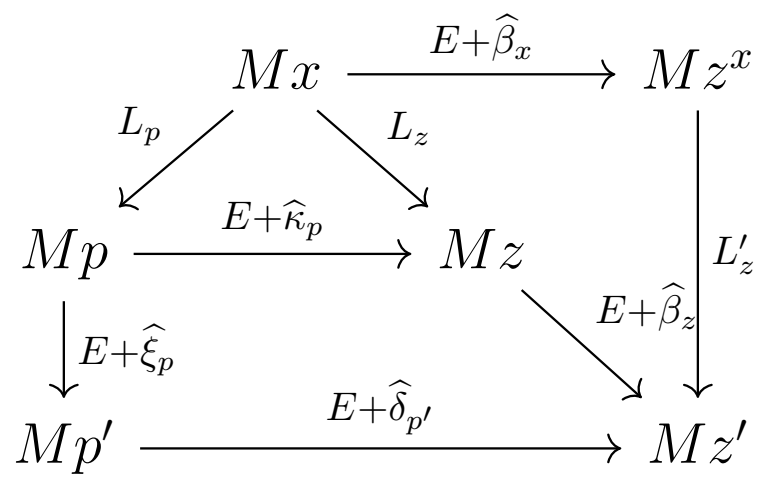


Рис. 3: Взаимосвязи между системами координат.

Глава 1

Модели погрешностей измерений инерциальных датчиков

В главе рассматриваются традиционные модели погрешностей измерений инерциальных датчиков и их модификации, учитывающие зависимости от температуры, производной температуры по времени и компонент пространственного градиента температуры. Модели дополняются набором соответствующих температурных коэффициентов. Формулируется математическая постановка задачи калибровки в виде задачи оценивания вектора состояния линейной динамической системы на основе вектора измерений, линейно связанного с вектором состояния. Исследуется наблюдаемость параметров расширенной модели погрешностей измерений инерциальных датчиков и формулируются достаточные условия наблюдаемости коэффициентов зависимостей от температуры, производной температуры по времени и компонент пространственного градиента температуры для смещений нулевых сигналов, погрешностей масштабных коэффициентов и углов перекосов осей чувствительности ньютонометров и ДУС. Далее, при помощи ковариационного анализа ошибок оценок перечисленных параметров, определяются минимальные требования к уровню шумов инерциальных датчиков БИНС навигационного класса для обеспечения ожидаемой точности оценок параметров модели погрешностей измерений инерциальных датчиков на

При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [61, 63–67]

уровне, соответствующем классу системы (0.01 град/ч для смещений нулевых сигналов (дрейфов) ДУС и тд.).

1.1 Параметризация моделей погрешностей измерений инерциальных датчиков

Модели погрешностей измерений инерциальных датчиков вводятся для описания ошибок выходного сигнала инерциальных датчиков и описывают связь выходного сигнала датчиков с измеряемыми величинами и параметрами внешней среды. В самом общем виде эта зависимость может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned}f'_z &= F(f_z, a_f, p_f) + f_z^s, \\ \omega'_z &= W(\omega_z, a_\omega, p_\omega) + \nu_z^s,\end{aligned}$$

здесь F, W — неизвестные обратимые функции, f_z, ω_z — полезные сигналы измерений, a_f, a_ω — векторы внешних факторов влияющих на показания датчиков (внешняя сила для микромеханических гироскопов, магнитное поле, температура и др.), p_f, p_ω — векторы параметров функций F, W соответственно, f_z^s, ν_z^s — случайные погрешности измерений.

При выборе модели погрешностей измерений инерциальных датчиков необходимо учитывать следующие аспекты:

- модель должна включать в себя только те факторы, которые существенно влияют на погрешности выходных сигналов датчиков;
- модель должна обеспечивать возможность компенсации систематических составляющих погрешностей измерений.

Задача калибровки состоит в получении оценок $\tilde{p}_f, \tilde{p}_\omega$ параметров p_f, p_ω введенной модели измерений. Далее эти оценки используются для компенсации систематической составляющей погрешностей измерений:

$$f_z \approx f_z'' = F_f^{-1}(f_z', a_f', \tilde{p}_f),$$

$$\omega_z \approx \omega_z'' = W_\omega^{-1}(\omega_z', a_\omega', \tilde{p}_\omega),$$

где f_z'', ω_z'' — измерения датчиков после компенсации систематических составляющих; F_f^{-1}, W_ω^{-1} получаются обращением функции F и W по аргументам f_z и ω_z . Отметим, что в большинстве случаев функции F и W обратимы по своим аргументам.

1.1.1 Традиционная модель погрешностей измерений

Наиболее распространенная [68, 69] модель погрешностей измерений инерциальных датчиков при постоянных параметрах окружающей среды в проекциях на оси приборной системы координат Mz имеет следующий вид:

$$f_z' = f_z + \Delta f_z + \Delta f_z^s, \quad (1.1)$$

$$\omega_z' = \omega_z - \nu_z + \nu_z^s,$$

где $f_z = [f_z^1, f_z^2, f_z^3]^T$ — вектор истинной удельной силы, действующей на приведенную чувствительную массу ньютометров (измерительный центр БИНС), записанный в проекциях на оси приборной системы координат Mz ;

$\omega_z = [\omega_z^1, \omega_z^2, \omega_z^3]^T$ — вектор истинной абсолютной угловой скорости приборного трехгранника Mz ;

f_z' — показания ньютометров;

ω_z' — показания ДУС;

Δf_z — систематическая составляющая погрешности измерений ньютометров;

ν_z — систематическая составляющая погрешности измерений ДУС (дрейф);

Δf_z^s — случайная составляющая погрешности измерений ньютометров;

ν_z^s — случайная составляющая погрешности ДУС.

Предполагается также, что регулярные составляющие погрешностей измерений инерциальных датчиков включают в себя: постоянные смещения нулевых

сигналов, погрешности масштабных коэффициентов и малые углы неортогональности (перекосов) осей чувствительности. Запишем это следующим образом:

$$\begin{aligned}\Delta f_z &= \Delta f_z^0 + \Gamma f_z, \\ \nu_z &= \nu_z^0 + \Theta \omega_z,\end{aligned}\tag{1.2}$$

здесь Δf_z^0 — вектор смещений нулевых сигналов ньютонометров.

ν_z^0 — вектор смещений нулевых сигналов ДУС;

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1^1 & 0 & 0 \\ \Gamma_2^1 & \Gamma_2^2 & 0 \\ \Gamma_3^1 & \Gamma_3^2 & \Gamma_3^3 \end{bmatrix}$$

— матрица погрешностей масштабных коэффициентов (Γ_i^i , $i = 1, 2, 3$) и малых углов перекосов (Γ_i^j , $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$) осей чувствительности ньютонометров. Нижнетреугольный вид матрицы обусловлен выбором приборной системы координат (которая была введена выше).

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1^1 & \Theta_1^2 & \Theta_1^3 \\ \Theta_2^1 & \Theta_2^2 & \Theta_2^3 \\ \Theta_3^1 & \Theta_3^2 & \Theta_3^3 \end{bmatrix}$$

— матрица малых углов перекосов осей чувствительности и погрешностей масштабных коэффициентов ДУС. В отличие от матрицы Γ , матрица Θ имеет все ненулевые компоненты, поскольку по построению приборная система связана с осями чувствительности ньютонометров.

Перечисленные компоненты Δf_z^0 , ν_z^0 , Γ , Θ являются параметрами p_f , p_ω модели погрешностей измерений инерциальных датчиков, подлежащими оценке в калибровке. При постоянных факторах внешней среды a_f , a_ω их рассматривают как неизвестные постоянные случайные величины. После калибровки, алгоритмическая компенсация погрешностей выполняется согласно формулам:

$$\begin{aligned}f_z &\approx f_z'' = (E + \tilde{\Gamma})^{-1}(f_z' - \Delta \tilde{f}_z^0), \\ \omega_z &\approx \omega_z'' = (E + \tilde{\Theta})^{-1}(\omega_z' - \tilde{\nu}_z^0),\end{aligned}$$

Тип датчика	Чувствительность к температуре, град/ч/°С
Волновой твердотельный гироскоп	$10^{-4} \dots 10^{-6}$
Микромеханический гироскоп	$10^{-1} \dots 1$
Волоконно-оптический гироскоп	$10^{-1} \dots 1$
Лазерный гироскоп	$10^{-3} \dots 10^{-2}$

Таблица 1.1: Чувствительность дрейфов различных ДУС к температуре

где E — единичная матрица.

В литературе рассматриваются расширенные модели погрешностей измерений инерциальных датчиков, учитывающие дополнительные компоненты модели погрешностей измерений характерные для различных типов датчиков. Например, нелинейности масштабных коэффициентов инерциальных датчиков [70, 71], динамические дрейфы механических ДУС [72], динамические перекосы осей чувствительности лазерных ДУС [73], асимметричность различных параметров в зависимости от знака измеряемого сигнала [63], в том числе температурные вариации показаний датчиков [14, 33, 41, 48–51]. Предметом диссертации является исследование температурных зависимостей погрешностей измерений инерциальных датчиков.

1.1.2 Расширенная температурная модель погрешностей измерений инерциальных датчиков

Как упоминалось ранее, модель (1.1) описывает погрешности измерений при фиксированной температуре. В условиях реальной эксплуатации температура внутри БИНС может изменяться в широком диапазоне температур, тепловое воздействие оказывает влияние на значения инструментальных погрешностей. Например, в таблице 1.1 приведена чувствительность¹ дрейфов различных ДУС в соответствии с источниками [3, 7, 40]. Одним из наиболее распространенных

¹Дрейф 0.01 град/час/°С приблизительно соответствует ошибке в 1 км за один час работы в режиме навигации при условии равномерного изменения температуры на 1 °С

методов температурной калибровки является калибровка в температурных точках. Основная идея этого метода состоит в следующем: в рабочем диапазоне температур БИНС выбирается набор дискретных точек. Как правило, шаг между ними составляет 10–15 °С. В каждой из точек с помощью термокамеры задается фиксированная температура, некоторое время уходит на стабилизацию температуры внутри системы, и далее выполняется калибровочный эксперимент. Всего выполняется несколько калибровочных экспериментов при разных температурах. Данные экспериментов обрабатываются независимо, затем полученные результаты калибровки аппроксимируются, например, полиномами 3 степени. Таким образом полученные результаты калибровки интерполируются на все остальные точки внутри рабочего диапазона температур системы. Среди основных преимуществ этого подхода отметим его простоту: не требуется изменять существующий план эксперимента и алгоритмы калибровки. Тем не менее, этот метод обладает рядом недостатков: во-первых, время, затрачиваемое на проведение и обработку результатов экспериментов, многократно увеличивается (проводится много экспериментов и много времени уходит на стабилизацию температуры); во-вторых при калибровке при фиксированной температуре принципиально невозможно оценить параметры зависимостей инструментальных погрешностей инерциальных датчиков от скорости изменения температуры внутри системы, а также от пространственного градиента температуры – эти зависимости проявляются только при переменной температуре.

В достаточно общем виде, зависимость инструментальных погрешностей от температурного воздействия может быть выражена следующим образом:

$$\begin{aligned}\Delta f_z(T_f, \dot{T}_f, \nabla T_f) &= \Delta f_z^0(T_f, \dot{T}_f, \nabla T_f) + \Gamma(T_f, \dot{T}_f, \nabla T_f) f_z, \\ \nu_z(T_\omega, \dot{T}_\omega, \nabla T_\omega) &= \nu_z^0(T_\omega, \dot{T}_\omega, \nabla T_\omega) + \Theta(T_\omega, \dot{T}_\omega, \nabla T_\omega) \omega_z,\end{aligned}$$

где $T_f = [T_f^1, T_f^2, T_f^3]^T$ — температуры ньютометров,

$T_\omega = [T_\omega^1, T_\omega^2, T_\omega^3]^T$ — температуры ДУС;

$\dot{T}_f, \dot{T}_\omega$ — производные температур по времени;

$$\nabla T_f = \begin{bmatrix} \nabla_1 T_f^1 & \nabla_1 T_f^2 & \nabla_1 T_f^3 \\ \nabla_2 T_f^1 & \nabla_2 T_f^2 & \nabla_2 T_f^3 \\ \nabla_3 T_f^1 & \nabla_3 T_f^2 & \nabla_3 T_f^3 \end{bmatrix}$$

– пространственные градиенты температур ньютонометров;

∇T_ω – пространственные градиенты температур ДУС.

Примем следующие предположения, позволяющие перейти в линеаризованным моделям:

- температура, скорость изменения температуры и пространственный градиент температуры датчиков при проведении эксперимента изменяется в диапазоне, в котором температурные зависимости датчиков близки к линейным с достаточной точностью; таким образом, калибровка выполняется не в температурных точках, а на температурных интервалах;
- температура, скорость изменения температуры и пространственный градиент температуры измеряются с точностью, которая обеспечивает требуемую точность компенсации температурных зависимостей погрешностей инерциальных датчиков.

С учетом сделанных предположений, представим линеаризованную модель зависимостей инструментальных погрешностей измерений инерциальных датчиков от температуры в скалярном виде. В модели предполагается суммирование по индексам, повторяющимся в произведениях снизу и сверху (обозначение для суммирования Эйнштейна):

$$\begin{aligned}
\Delta f_z^{0i}(T_f, \dot{T}_f, \nabla T_f) &= \Delta f_z^0(T_f^0, 0, 0) + K_{\Delta f}^i (T_f^i - T_f^{0i}) + \\
&\quad + \Lambda_{\Delta f}^i \dot{T}_f^i + \Pi_{\Delta f}^{ij} \nabla_j T_f^i, \\
\Gamma_j^i(T_f, \dot{T}_f, \nabla T_f) &= \Gamma_j^i(T_f^0, 0, 0) + K_{\Gamma_j}^i (T_f^i - T_f^{0i}) + \\
&\quad + \Lambda_{\Gamma_j}^i \dot{T}_f^i + \Pi_{\Gamma_j}^{ik} \nabla_k T_f^i, \\
\nu_z^{0i}(T_\omega, \dot{T}_\omega, \nabla T_\omega) &= \nu_z^0(T_\omega^0, 0, 0) + K_\nu^i (T_\omega^i - T_\omega^{0i}) + \\
&\quad + \Lambda_\nu^i \dot{T}_\omega^i + \Pi_\nu^{ij} \nabla_j T_\omega^i, \\
\Theta_j^i(T_\omega, \dot{T}_\omega, \nabla T_\omega) &= \Theta_j^i(T_\omega^0, 0, 0) + K_{\Theta_j}^i (T_\omega^i - T_\omega^{0i}) + \\
&\quad + \Lambda_{\Theta_j}^i \dot{T}_\omega^i + \Pi_{\Theta_j}^{ik} \nabla_k T_\omega^i, \\
i, j, k, &= 1, 2, 3,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где T_f^{0i} — некоторые заранее выбранные температуры ньютонометров, в окрестности которых с достаточной точностью справедлива линейная модель. Далее, без ограничения общности, если не оговорено противное, примем $T_f^{0i} = 0$, $T_\omega^{0i} = 0$, $i = 1, 2, 3$;

T_ω^{0i} — некоторые заранее выбранные температуры ДУС, в окрестности которых с достаточной точностью справедлива линейная модель:

$K_{\Delta f} = [K_{\Delta f}^1, K_{\Delta f}^2, K_{\Delta f}^3]^T$ — коэффициенты зависимости от температуры смещений нулевых сигналов ньютонометров;

$K_\nu = [K_\nu^1, K_\nu^2, K_\nu^3]^T$ — коэффициенты зависимости от температуры смещений нулевых сигналов ДУС;

$K_{\Gamma_j}^i$ — коэффициенты зависимости от температуры масштабных коэффициентов и малых углов перекосов осей чувствительности ньютонометров;

$K_{\Theta_j}^i$ — коэффициенты зависимости от температуры масштабных коэффициентов и малых углов перекосов осей чувствительности ДУС;

$\Lambda_{\Delta f}^i$ — коэффициенты зависимости от производной температуры по времени нулевых сигналов ньютонометров;

Λ_ν^i — коэффициенты зависимости от производной температуры по времени нулевых сигналов ДУС;

$\Lambda_{\Gamma_j}^i$ — коэффициенты зависимости от производной температуры по времени масштабных коэффициентов и малых углов перекосов ньютонометров;

$\Lambda_{\Theta_j}^i$ — коэффициенты зависимости от производной температуры по времени масштабных коэффициентов и малых углов перекосов ДУС;

$\Pi_{\Delta f}^{ij}$ — коэффициенты зависимости от компонент пространственного градиента температуры нулевых сигналов ньютонометров;

Π_{ν}^{ij} — коэффициенты зависимости от компонент пространственного градиента температуры нулевых сигналов ДУС;

$\Pi_{\Gamma_j}^{ik}$ — коэффициенты зависимости от компонент пространственного градиента температуры масштабных коэффициентов и малых углов перекосов осей чувствительности ньютонометров;

$\Pi_{\Theta_j}^{ik}$ — коэффициенты зависимости от компонент пространственного градиента температуры масштабных коэффициентов и малых углов перекосов осей чувствительности ДУС.

В общем случае модель (1.3) включает в себя 45 коэффициентов температурного влияния для ньютонометров и 60 коэффициентов для ДУС. На практике как правило реализуется только часть из приведенного набора зависимостей. Например, для микромеханических гироскопов и ньютонометров, в силу их небольших размеров и низкой точности, целесообразно учитывать только коэффициенты зависимости от температуры [15, 47]. Для волоконно-оптических гироскопов важно учитывать производную температуры по времени и компоненты пространственного градиента [33, 43].

С учетом сказанного выше, а также введенных коэффициентов температурного влияния (1.3), модель погрешностей измерений (1.2) инерциальных датчиков может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta f_z^i &= \Delta f_z^{0i} + K_{\Delta f}^i T_f^i + \Lambda_{\Delta f}^i \dot{T}_f^i + \Pi_{\Delta f}^{ij} \nabla_j T_f^i + \\ &\quad + (\Gamma_j^i + K_{\Gamma_j}^i T_f^i + \Lambda_{\Gamma_j}^i \dot{T}_f^i + \Pi_{\Gamma_j}^{ik} \nabla_k T_f^i) f_z^j, \\ \nu_z^i &= \nu_z^{0i} + K_{\nu}^i T_{\omega}^i + \Lambda_{\nu}^i \dot{T}_{\omega}^i + \Pi_{\nu}^{ij} \nabla_j T_{\omega}^i + \\ &\quad + (\Theta_j^i + K_{\Theta_j}^i T_{\omega}^i + \Lambda_{\Theta_j}^i \dot{T}_{\omega}^i + \Pi_{\Theta_j}^{ik} \nabla_k T_{\omega}^i) \omega_z^j, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$i, j, k, = 1, 2, 3.$$

1.2 Идентификация параметров модели погрешностей и их наблюдаемость

Выбор подходящей модели погрешностей измерений инерциальных датчиков является первым шагом при разработке методики калибровки. Далее формулируется математическая постановка задачи оценивания параметров выбранной модели погрешностей измерений инерциальных датчиков. Окончательная модель выбирается исходя из особенностей используемых инерциальных датчиков (эвристически), а также по результатам калибровок с различными моделями (эмпирически).

1.2.1 Математическая постановка задачи калибровки

Предлагаемая методика калибровки БИНС подразумевает угловое движение системы во время эксперимента. Это движение обеспечивается калибровочным стендом, на подвижной платформе которого устанавливается система. В процессе движения платформы стенда изменяется ориентация приборной системы координат Mz . Кинематическое уравнение Пуассона описывает изменение матрицы ориентации приборной системы координат Mz относительно опорной Mx :

$$\dot{L}_z = \widehat{\omega}_z L_z - L_z \widehat{u}_x, \quad L_z(0) = L_0, \quad (1.5)$$

где L_z — матрица ориентации приборного трехгранника относительно опорного. При численном интегрировании уравнения (1.5) можно выделить три основных источника ошибок: погрешность начальных условий, методические погрешности численного интегрирования и погрешности измерений инерциальных датчиков. L'_z — модельная (вычисленная в БИНС) матрица ориентации приборного трехгранника относительно опорного. Начальное условие L'_0 определяется на основе алгоритма начальной выставки БИНС. При наличии идеальной информации о векторе угловой скорости ω_z и о начальной ориентации $L_z(t_0)$, матрицы L_z и L'_z совпадают. В реальности эта информация содержит в себе разного рода ошибки и связь между матрицами ориентации описывается следующим

соотношением (в линейном приближении):

$$L'_z = (E + \widehat{\beta}_z)L_z,$$

здесь β_z — вектор малого поворота (кинематическая ошибка ориентации). Поскольку $\omega'_z = \omega_z - \nu_z + \nu_z^s$, вектор $\nu_z - \nu_z^s$ задает относительную угловую скорость (с точностью до малых второго порядка) трехгранника Mz относительно трехгранника Mz' и он же является полной производной от вектора $\beta_{z'}$, причем дифференцирование осуществляется в подвижной системе координат. Поэтому, по теореме о производной вектора в подвижной системе координат, справедливо соотношение:

$$\dot{\beta}_z = \widehat{\omega}'_z \beta_z + \nu_z + \nu_z^s.$$

Перепишем последнее уравнение в осях опорной системы координат Mx :

$$\dot{\beta}_x = \widehat{u}_x \beta_x + \nu_x + \nu_x^s, \quad \nu_x = L_z^T \nu_z.$$

Составим вектор состояния из компонент вектора β_x и параметров модели погрешностей измерений инерциальных датчиков:

$$\begin{aligned} y = & [\beta_x^i, \nu_z^{0i}, \Delta f_z^{0i}, \Gamma_j^i, \Theta_i^j, K_{\Delta f}^i, K_{\Gamma}^i, K_{\nu}^i, K_{\Theta}^i, \\ & \Lambda_{\Delta f}^i, \Lambda_{\nu}^i, \Lambda_{\Gamma}^i, \Lambda_{\Theta}^i, \Pi_{\Delta f}^{ij}, \Pi_{\nu}^{ij}, \Pi_{\Gamma}^{ik}, \Pi_{\Theta}^{ik}]^T, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$i, j, k = 1, 2, 3.$$

Вектор состояния y подчиняется следующей динамической системе:

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_x^1 &= u_x^3 \beta_x^2 - u_x^2 \beta_x^3 + \nu_x^1 \\ \dot{\beta}_x^2 &= -u_x^3 \beta_x^1 + u_x^1 \beta_x^3 + \nu_x^2 \\ \dot{\beta}_x^3 &= u_x^2 \beta_x^1 - u_x^1 \beta_x^2 + \nu_x^3 \\ \Delta \dot{f}_z^{0i} &= 0 \\ \dot{\nu}_z^{0i} &= 0 \\ \dot{\Gamma}_j^i &= 0 \\ \dot{\Theta}_j^i &= 0 \\ \dot{K}_{\Delta f}^i &= 0 \\ \dot{K}_{\Gamma}^i &= 0 \\ \dot{K}_{\nu}^i &= 0 \\ \dot{K}_{\Theta}^i &= 0 \\ \dot{\Lambda}_{\Delta f}^i &= 0 \\ \dot{\Lambda}_{\Gamma}^i &= 0 \\ \dot{\Lambda}_{\nu}^i &= 0 \\ \dot{\Lambda}_{\Theta}^i &= 0 \\ \dot{\Pi}_{\Delta f}^{ij} &= 0 \\ \dot{\Pi}_{\nu}^{ij} &= 0 \\ \dot{\Pi}_{\Gamma}^{ik} &= 0 \\ \dot{\Pi}_{\Theta}^{ik} &= 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Вектор измерений w_{acc} строится как разность фактической и измеренной силы тяжести в квазимодельной системе координат Mz^x :

$$w_{acc} = L_z'^T f_z' - [0, 0, g_0]^T \approx \hat{\beta}_x [0, 0, g_0]^T + L_z'^T (\Delta f_z + \Delta f_z^s). \quad (1.8)$$

Модель справа от приближенного равенства (1.8) справедлива для неподвижного измерительного центра, когда $f_z = L_z^T [0, 0, g_0]^T$, с точностью до слагаемых второго порядка малости.

В процессе обработки записей калибровочного эксперимента в каждый момент времени вычисляется текущее значение модельной матрицы ориентации L_z' и вектор измерений w^{acc} . Для шумов ν_z^s и Δf_z^s , которые соответствуют шумам в линейной динамической системе (1.7) и измерениях (1.8) примем соглашение, что они являются некоррелированными между собой процессами типа белого шума, с априорно известными интенсивностями Q_ν и R . Ортогональное преобразование L_z^T не изменяет перечисленных свойств.

Задача калибровки состоит в том, чтобы используя модель динамики (1.7) и модель измерений (1.8) построить оценки параметров модели погрешностей измерений инерциальных датчиков (1.4), оптимальные в смысле минимума следа ковариационной матрицы ошибок оценок [74]. Таким образом, задача калибровки сводится к задаче оптимального оценивания вектора состояния (1.6) линейной динамической системы (1.7) по вектору измерений (1.8), линейно связанному с вектором состояния. Для решения такой задачи используется фильтр Калмана.

1.2.2 Описание калибровочного эксперимента

Для решения задачи калибровки проводят специальные эксперименты. Во время эксперимента БИНС устанавливается на платформу калибровочного стенда, которая в последствии вращается по заранее определенному закону. Показания инерциальных датчиков регистрируются во время эксперимента, затем они обрабатываются алгоритмом оценивания. Обычно калибровочный эксперимент состоит из двух этапов.

1. Начальная выставка. На интервале начальной выставки система неподвижна, показания датчиков и азимут оси вращения используются для определения начальной ориентации системы $L_z'(t_0)$.

2. Последовательность вращений платформы стенда.

В рамках сформулированной математической постановки задачи калибровки план калибровочного эксперимента должен удовлетворять критериям:

- программа движений стенда и изменения температуры должны быть реализуемыми на практике;
- программа движений стенда и изменения температуры должны обеспечивать наблюдаемость всех компонент вектора состояния.

В работах [34, 38, 75] рассматривается эксперимент, программа движений которого состоит из трех последовательных циклов вращения вокруг оси лежащей в плоскости близкой (с точностью до погрешностей установки БИНС на стенде) к плоскости горизонта рис. 1.1. При этом, на каждом цикле каждая ось приборной системы координат Mz последовательно совмещается с осью вращения стенда (с точностью до погрешностей установки и инструментальных погрешностей инерциальных датчиков). Доказано, что при таком движении обеспечивается наблюдаемость вектора состояния задачи (1.7), а также доказано, что потенциальная точность калибровки при таком вращении заведомо выше, чем в эксперименте с последовательными вращениями вокруг вертикальной оси. Отметим, что в приведенных выше работах предполагается, что эксперимент проводится при постоянной температуре внутри БИНС.

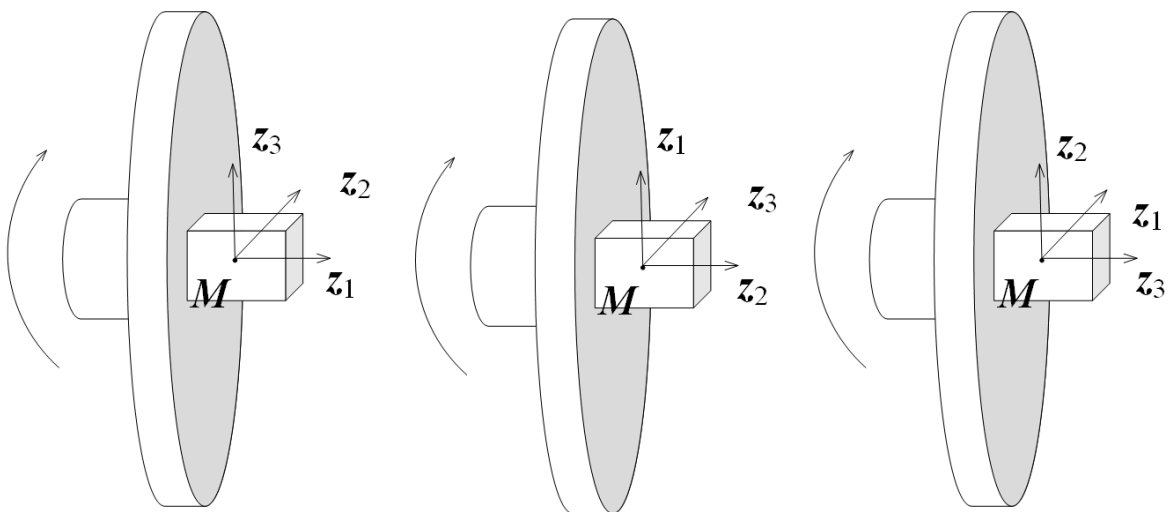


Рис. 1.1: Схематическое изображение вращений БИНС на стенде

1.2.3 Исследование наблюдаемости в задаче температурной калибровки

Рассмотрим линейную динамическую систему с измерениями:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t), \\ z(t) &= H(t)x(t),\end{aligned}\tag{1.9}$$

где

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, z(t) \in \mathbb{R}^m, A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, H(t) \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

здесь $x(t)$ — вектор состояния системы, $z(t)$ — вектор измерений. Поскольку далее проводится исследование наблюдаемости, стохастические слагаемые в модели (1.9) исключены.

Определение [76]. Система вида (1.9) называется *наблюдаемой* на отрезке $[t_0, t_1]$, если по измерениям на этом отрезке $z(t)$ можно определить начальное состояние системы $x(t_0)$.

В нашем случае система (1.9) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\beta}_z(t) &= \widehat{\omega}_z \beta_z(t) + \nu_z(t), \\ w_{acc}(t) &= -\widehat{g}_z \beta_z(t) + \Delta f_z(t), \\ \Delta f_z^i(t) &= \Delta f_z^{0i} + K_{\Delta f}^i T_f^i + \Lambda_{\Delta f}^i \dot{T}_f^i + \Pi_{\Delta f}^{ij} \nabla_j T_f^i + \\ &\quad + (\Gamma_j^i + K_{\Gamma_j}^i T_f^i + \Lambda_{\Gamma_j}^i \dot{T}_f^i + \Pi_{\Gamma_j}^{ik} \nabla_k T_f^i) f_z^j, \\ \nu_z^i(t) &= \nu_z^{0i} + K_{\nu}^i T_{\omega}^i + \Lambda_{\nu}^i \dot{T}_{\omega}^i + \Pi_{\nu}^{ij} \nabla_j T_{\omega}^i + \\ &\quad + (\Theta_j^i + K_{\Theta_j}^i T_{\omega}^i + \Lambda_{\Theta_j}^i \dot{T}_{\omega}^i + \Pi_{\Theta_j}^{ik} \nabla_k T_{\omega}^i) \omega_z^j, \\ i, j, k &= 1, 2, 3.\end{aligned}\tag{1.10}$$

Система (1.10) является нестационарной. Классический подход с использованием грамиана наблюдаемости [77] в условиях поставленной задачи является очень громоздким и трудоемким. Заметим, что большинство параметров в векторе состояния являются постоянными случайными величинами. Это обстоятельство позволяет в частном случае получить условия, накладываемые на функции $T(t), \dot{T}(t), \nabla_1 T(t), \nabla_2 T(t), \nabla_3 T(t)$, которые являются необходимыми и достаточными условиями наблюдаемости в системе (1.10). Анализ наблюдаемости для системы (1.10) в эксперименте схожим с 1.2.2 в отсутствии температур-

ных зависимостей был проведен в работе [78]. В упомянутой работе аналитическое исследование наблюдаемости отсутствует, а результаты работы опираются на ковариационный анализ. Далее в работе [34] был проведен аналитический анализ наблюдаемости для расширенной системы (1.10), включающей погрешности установки системы на планшайбу стенда и дополнительный вектор измерений стенда, в предположении, что калибровка проводится на экваторе. В этом случае исследуемая система принимает стационарный вид и допускает решение в явном виде. В работе [79] проведен строгий анализ наблюдаемости в системе (1.10) при отсутствии температурных зависимостей, в основе анализа лежат методы приведения нестационарных систем к стационарному виду [80].

Рассмотрим калибровочный эксперимент состоящий из трех циклов вращения, описанный в разделе 1.2.2, и сделаем следующие предположения:

1. $\psi = \varphi = 0$, где ψ — угол курса оси вращения, φ — географическая широта, то есть, калибровка проводится на экваторе и ось вращения стенда направлена на Север;
2. угловая скорость вращения платформы стенда на каждом из циклов является кусочно-постоянной:

$$\Omega_{tt}^k(t) = \begin{cases} \Omega, & t_{k-1} \leq t < \frac{t_k - t_{k-1}}{2}; \\ -\Omega, & \frac{t_k - t_{k-1}}{2} \leq t \leq t_k, \quad \Omega = \text{const} \neq 0 \neq u, \end{cases}$$

где t_0 — начальный момент времени, t_k — конец k -го цикла вращений, $k = 1, 2, 3$;

3. $T_\omega^i = T_f^i = T(t)$, $\dot{T}_\omega^i = \dot{T}_f^i = \dot{T}(t)$, $\nabla_j T_\omega^i = \nabla_j T_f^i = \nabla_j T(t)$, $i, j = 1, 2, 3$ и имеется возможность управления этими функциями при помощи термокамеры;
4. функции $T(t), \dot{T}(t), \nabla_1 T(t), \nabla_2 T(t), \nabla_3 T(t)$ являются многочленами.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. При выполнении условий 1–4 для наблюдаемости в системе (1.10) на отрезке $t \in [t_0, t_3]$ необходимо и достаточно линейной независимости системы функций $1, T(t), \dot{T}(t), \nabla_1 T(t), \nabla_2 T(t), \nabla_3 T(t)$ при $t \in [t_0, t_3]$.

Доказательство теоремы: При доказательстве теоремы воспользуемся методом, изложенным в работе [34]. Для этого потребуется следующее утверждение.

Утверждение 1. Для наблюдаемости в системе вида $\dot{y} = 0$, $w = h(t)y$, $y \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^m$, $n, m > 0$ необходимо и достаточно чтобы столбцы матрицы h были линейно независимыми вектор-функциями времени.

Доказательство. Приведено в [77].

Вернемся к доказательству теоремы. Рассматриваемая система может быть представлена в виде $\dot{y} = 0$, если выписать ее решение в явном виде и подставить в выражение для измерений. Без ограничения общности положим $t_0 = 0$. Решение системы (1.10) записывается в виде суммы решения для однородной части и частного решения (формула Коши):

$$\beta_z(t) = \exp(\widehat{\omega}_z t) \left(\beta_0 + \int_0^t \exp(-\widehat{\omega}_z \tau) \nu_z(\tau) d\tau \right). \quad (1.11)$$

Рассмотрим **первый цикл** вращения. Без ограничения общности будем считать, что при $t = 0$ вторая приборная ось направлена вверх, тогда:

$$u_x = \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \omega_z = \begin{bmatrix} \Omega + u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_z = g_z = g_0 \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \Omega t \\ -\sin \Omega t \end{bmatrix}.$$

$$\dot{\beta}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega + u \\ 0 & -(\Omega + u) & 0 \end{bmatrix} \beta_z + \nu_z, \quad \beta_z(0) = \beta_{0I}. \quad (1.12)$$

Подставим решение (1.12) в вектор измерений (1.10) и запишем его компоненты в приборной системе:

$$L_z w_{acc} = -\widehat{g}_z \exp(\widehat{\omega}_z t) \left(\beta_{0I} + \int_0^t \exp(-\widehat{\omega}_z \tau) \nu_z(\tau) d\tau \right) + \Delta f_z = \quad (1.13)$$

$$= -g_0 \begin{bmatrix} 0 & \sin ut & -\cos ut \\ \sin \Omega t & 0 & 0 \\ \cos \Omega t & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\beta_{0I} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega \tau & -\sin \omega \tau \\ 0 & \sin \omega \tau & \cos \omega \tau \end{bmatrix} \nu_z(\tau) d\tau \right) + \Delta f_z.$$

Распишем подробно подынтегральное выражение:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega \tau & -\sin \omega \tau \\ 0 & \sin \omega \tau & \cos \omega \tau \end{bmatrix} \nu_z(\tau) = \\
& = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega \tau & -\sin \omega \tau \\ 0 & \sin \omega \tau & \cos \omega \tau \end{bmatrix} \left(\nu_z(\tau) + \Theta(\tau) \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \\
& = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega \tau & -\sin \omega \tau \\ 0 & \sin \omega \tau & \cos \omega \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_z^1(\tau) + \Theta_1^1(\tau)\omega \\ \nu_z^2(\tau) + \Theta_1^2(\tau)\omega \\ \nu_z^3(\tau) + \Theta_1^3(\tau)\omega \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} \nu_z^1(\tau) + \Theta_1^1(\tau)\omega \\ \cos \omega \tau (\nu_z^2(\tau) + \Theta_1^2(\tau)\omega) - \sin \omega \tau (\nu_z^3(\tau) + \Theta_1^3(\tau)\omega) \\ \sin \omega \tau (\nu_z^2(\tau) + \Theta_1^2(\tau)\omega) + \cos \omega \tau (\nu_z^3(\tau) + \Theta_1^3(\tau)\omega) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Утверждение 2. Пусть $P_n(t)$ – произвольный многочлен степени n , $\omega = \text{const} \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
\int_0^t P_n(\tau) \sin \omega \tau d\tau &= -S_{P_n}(t) \cos \omega t + C_{P_{n-1}}(t) \sin \omega t; \\
\int_0^t P_n(\tau) \cos \omega \tau d\tau &= S_{P_n}(t) \sin \omega t + C_{P_{n-1}}(t) \cos \omega t,
\end{aligned}$$

где $S_{P_n}(t), C_{P_{n-1}}(t)$ – некоторые многочлены степени n и $n - 1$ соответственно.

Доказательство. Является прямым следствием правила интегрирования по частям. Действительно, рассмотрим интеграл для старшей степени многочлена, имеем:

$$\begin{aligned}
\int_0^t t^n \sin \omega t dt &= -\frac{t^n}{\omega} \cos \omega t + \frac{n}{\omega} \int_0^t t^{n-1} \cos \omega t dt = \\
&= \sum_{k=0}^{2k \leq n} (-1)^{k+1} \frac{t^{n-2k}}{\omega^{1+2k}} \frac{n!}{(n-2k)!} \cos \omega t + \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} (-1)^k \frac{t^{n-1-2k}}{\omega^{2+2k}} \frac{n!}{(n-2k-1)!} \sin \omega t,
\end{aligned}$$

в полученном выражении при старшей степени многочлена стоит коэффициент $-\frac{\cos \omega t}{\omega}$; при степени $n - 1$: $\frac{n \sin \omega t}{\omega^2}$. Аналогичные рассуждения справедливы для интеграла от степени $n - 1$. Таким образом степени многочле-

нов $S_{P_n}(t), C_{P_{n-1}}(t)$ напрямую определяются степенью исходного многочлена $P_n(t)$ и не зависят от его коэффициентов.

Утверждение 3. Пусть функции $1, T(t), \dot{T}(t), \nabla_1 T(t), \nabla_2 T(t), \nabla_3 T(t)$ линейно независимы, $\omega = \text{const} \neq 0$. Тогда линейно независимы следующие функции:

1.

$$t, \int_0^t T(\tau) d\tau, \int_0^t \dot{T}(\tau) d\tau, \int_0^t \nabla_1 T(\tau) d\tau, \int_0^t \nabla_2 T(\tau) d\tau, \int_0^t \nabla_3 T(\tau) d\tau;$$

2.

$$\int_0^t T(\tau) \sin \omega \tau d\tau, \int_0^t \dot{T}(\tau) \sin \omega \tau d\tau, \int_0^t \nabla_1 T(\tau) \sin \omega \tau d\tau, \int_0^t \nabla_2 T(\tau) \sin \omega \tau d\tau, \int_0^t \nabla_3 T(\tau) \sin \omega \tau d\tau.$$

Доказательство: Является прямым следствием линейности интеграла. Приведем доказательство для первой системы функций. Допустим функции линейно зависимы, тогда существуют такие константы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$, что $\forall t$:

$$\alpha_1 t + \alpha_2 \int_0^t T(\tau) d\tau + \alpha_3 \int_0^t \dot{T}(\tau) d\tau + \alpha_4 \int_0^t \nabla_1 T(\tau) d\tau + \alpha_5 \int_0^t \nabla_2 T(\tau) d\tau + \alpha_6 \int_0^t \nabla_3 T(\tau) d\tau = 0,$$

при условии

$$\sum_{i=0}^6 \alpha_i^2 \neq 0.$$

Тогда в силу линейности интеграла имеем $\forall t$

$$\int_0^t \left(\alpha_1 + \alpha_2 T(\tau) + \alpha_3 \dot{T}(\tau) + \alpha_4 \nabla_1 T(\tau) + \alpha_5 \nabla_2 T(\tau) + \alpha_6 \nabla_3 T(\tau) \right) d\tau = 0,$$

что возможно, только если подынтегральное выражение тождественно равно нулю, что противоречит условию утверждения. Для второй системы функций доказательство аналогично.

Вернемся к доказательству теоремы. Далее для краткости будем использовать обозначения:

$$\int_0^t P(\tau) d\tau = I_P(t);$$

$$\int_0^t P(\tau) \sin \omega \tau d\tau = -S_P(t) \cos \omega t + C_P(t) \sin \omega t,$$

где $P(t)$ – произвольный многочлен, $\omega = \text{const} \neq 0$.

В соответствии с введенными обозначениями компоненты подынтегрального выражения принимают вид:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \nu_z^i(\tau) d\tau = \nu_z^{0i} t + K_\nu^i \int_0^t T(\tau) d\tau + \Lambda_\nu^i \int_0^t \dot{T}(\tau) d\tau + \Pi_\nu^{ij} \int_0^t \nabla_j T(\tau) d\tau + \\
& + \left(\Theta_1^i t + K_{\Theta_1}^i \int_0^t T(\tau) d\tau + \Lambda_{\Theta_1}^i \int_0^t \dot{T}(\tau) d\tau + \Pi_{\Theta_1}^{ik} \int_0^t \nabla_k T(\tau) d\tau \right) (\Omega + u) = \\
& = (\nu_z^{0i} + \Theta_1^i (\Omega + u)) t + (K_\nu^i + K_{\Theta_1}^i (\Omega + u)) I_T(t) + \\
& + (\Lambda_\nu^i + \Lambda_{\Theta_1}^i (\Omega + u)) T(t) + (\Pi_\nu^{ik} + \Pi_{\Theta_1}^{ik} (\Omega + u)) I_{\nabla_k T}(t). \\
\\
& - \sin ut \left(K_\nu^i \int_0^t T(\tau) \cos \omega \tau d\tau - K_\nu^j \int_0^t T(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right) + \\
& + \cos ut \left(K_\nu^i \int_0^t T(\tau) \sin \omega \tau d\tau + K_\nu^j \int_0^t T(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right) = \\
& = - \sin ut (K_\nu^i (S_T(t) \sin \omega t + C_T(t) \cos \omega t) - K_\nu^j (-S_T(t) \cos \omega t + C_T(t) \sin \omega t)) + \\
& + \cos ut (K_\nu^i (-S_T(t) \cos \omega t + C_T(t) \sin \omega t) + K_\nu^j (S_T(t) \sin \omega t + C_T(t) \cos \omega t)) = \\
& = \sin \Omega t (S_T(t) K_\nu^j + C_T(t) K_\nu^i) + \cos \Omega t (C_T(t) K_\nu^j - S_T(t) K_\nu^i) = \\
& = K_\nu^i (C_T(t) \sin \Omega t - S_T(t) \cos \Omega t) + K_\nu^j (S_T(t) \sin \Omega t + C_T(t) \cos \Omega t).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& - \sin ut \left(\int_0^t \nu_z^i(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \int_0^t \nu_z^j(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right) + \\
& + \cos ut \left(\int_0^t \nu_z^i(\tau) \sin \omega \tau d\tau + \int_0^t \nu_z^j(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right) = \\
& - (\nu_z^{0i} + \Theta_1^i (\Omega + u)) \cos \Omega t + (\nu_z^{0j} + \Theta_1^j (\Omega + u)) \sin \Omega t + \\
& + (K_\nu^i + K_{\Theta_1}^i (\Omega + u)) (C_T(t) \sin \Omega t - S_T(t) \cos \Omega t) + \\
& + (K_\nu^j + K_{\Theta_1}^j (\Omega + u)) (S_T(t) \sin \Omega t + C_T(t) \cos \Omega t) + \\
& + (\Lambda_\nu^i + \Lambda_{\Theta_1}^i (\Omega + u)) (C_{\dot{T}}(t) \sin \Omega t - S_{\dot{T}}(t) \cos \Omega t) + \\
& + (\Lambda_\nu^j + \Lambda_{\Theta_1}^j (\Omega + u)) (S_{\dot{T}}(t) \sin \Omega t + C_{\dot{T}}(t) \cos \Omega t) + \\
& + (\Pi_\nu^{ik} + \Pi_{\Theta_1}^{ik} (\Omega + u)) (C_{\nabla_k T}(t) \sin \Omega t - S_{\nabla_k T}(t) \cos \Omega t) + \\
& + (\Pi_\nu^{jk} + \Pi_{\Theta_1}^{jk} (\Omega + u)) (S_{\nabla_k T}(t) \sin \Omega t + C_{\nabla_k T}(t) \cos \Omega t).
\end{aligned}$$

Третье слагаемое в (1.13) по определению (см. (1.4)) является суммой следующих компонент:

$$\begin{aligned} \Delta f_z^i &= \Delta f_z^{0i} + K_{\Delta f}^i T(t) + \Lambda_{\Delta f}^i \dot{T}(t) + \Pi_{\Delta f}^{ik} \nabla_k T(t) + \\ &+ g_0 \cos \Omega t \left(\Gamma_2^i + K_{\Gamma_2}^i T(t) + \Lambda_{\Gamma_2}^i \dot{T}(t) + \Pi_{\Gamma_2}^{ik} \nabla_k T(t) \right) - \\ &- g_0 \sin \Omega t \left(\Gamma_3^i + K_{\Gamma_3}^i T(t) + \Lambda_{\Gamma_3}^i \dot{T}(t) + \Pi_{\Gamma_3}^{ik} \nabla_k T(t) \right). \end{aligned}$$

Тогда, с учетом (1.13), измерения на первом цикле вращения при $t \in [0, \frac{t_1}{2}]$ принимают вид

$$\begin{aligned} w_I^1 &= -g_0 \sin ut \beta_{0I}^2 + g_0 \cos ut \beta_{0I}^3 - (\nu_z^{02} + \Theta_1^2(\Omega + u)) \cos \Omega t + (\nu_z^{03} + \Theta_1^3(\Omega + u)) \sin \Omega t + \\ &+ (K_\nu^2 + K_{\Theta_1}^2(\Omega + u)) (C_T(t) \sin \Omega t - S_T(t) \cos \Omega t) + \\ &+ (K_\nu^3 + K_{\Theta_1}^3(\Omega + u)) (S_T(t) \sin \Omega t + C_T(t) \cos \Omega t) + \\ &+ (\Lambda_\nu^2 + \Lambda_{\Theta_1}^2(\Omega + u)) (C_{\dot{T}}(t) \sin \Omega t - S_{\dot{T}}(t) \cos \Omega t) + \\ &+ (\Lambda_\nu^3 + \Lambda_{\Theta_1}^3(\Omega + u)) (S_{\dot{T}}(t) \sin \Omega t + C_{\dot{T}}(t) \cos \Omega t) + \\ &+ (\Pi_\nu^{2k} + \Pi_{\Theta_1}^{2k}(\Omega + u)) (C_{\nabla_k T}(t) \sin \Omega t - S_{\nabla_k T}(t) \cos \Omega t) + \\ &+ (\Pi_\nu^{3k} + \Pi_{\Theta_1}^{3k}(\Omega + u)) (S_{\nabla_k T}(t) \sin \Omega t + C_{\nabla_k T}(t) \cos \Omega t) + \\ &+ \Delta f_z^{01} + K_{\Delta f}^1 T + \Lambda_{\Delta f}^1 \dot{T} + \Pi_{\Delta f}^{1k} \nabla_k T; \\ w_I^2 &= g_0 \sin \Omega t \beta_{0I}^1 + (\nu_z^{01} + \Theta_1^1(\Omega + u)) t \sin \Omega t + (K_\nu^1 + K_{\Theta_1}^1(\Omega + u)) I_T(t) \sin \Omega t + \\ &+ (\Lambda_\nu^1 + \Lambda_{\Theta_1}^1(\Omega + u)) T(t) \sin \Omega t + (\Pi_\nu^{1k} + \Pi_{\Theta_1}^{1k}(\Omega + u)) I_{\nabla_k T}(t) \sin \Omega t + \\ &+ \Delta f_z^{02} + K_{\Delta f}^2 T(t) + \Lambda_{\Delta f}^2 \dot{T}(t) + \Pi_{\Delta f}^{2k} \nabla_k T(t) + \\ &+ g_0 \left(\Gamma_2^2 \cos \Omega t + K_{\Gamma_2}^2 T(t) \cos \Omega t + \Lambda_{\Gamma_2}^2 \dot{T}(t) \cos \Omega t + \Pi_{\Gamma_2}^{2k} \nabla_k T(t) \cos \Omega t \right); \\ w_I^3 &= g_0 \cos \Omega t \beta_{0I}^1 + (\nu_z^{01} + \Theta_1^1(\Omega + u)) t \cos \Omega t + (K_\nu^1 + K_{\Theta_1}^1(\Omega + u)) I_T(t) \cos \Omega t + \\ &+ (\Lambda_\nu^1 + K_{\Gamma_3}^2 + \Lambda_{\Theta_1}^1(\Omega + u)) T(t) \cos \Omega t + (\Pi_\nu^{1k} + \Pi_{\Theta_1}^{1k}(\Omega + u)) I_{\nabla_k T}(t) \cos \Omega t + \\ &+ \Delta f_z^{03} + K_{\Delta f}^3 T(t) + \Lambda_{\Delta f}^3 \dot{T}(t) + \Pi_{\Delta f}^{3k} \nabla_k T(t) + \\ &+ g_0 \left(\Gamma_3^2 \cos \Omega t + \Lambda_{\Gamma_3}^2 \dot{T}(t) \cos \Omega t + \Pi_{\Gamma_3}^{2k} \nabla_k T(t) \cos \Omega t \right) - \\ &- g_0 \left(\Gamma_3^3 \sin \Omega t + K_{\Gamma_3}^3 T(t) \sin \Omega t + \Lambda_{\Gamma_3}^3 \dot{T}(t) \sin \Omega t + \Pi_{\Gamma_3}^{3k} \nabla_k T(t) \sin \Omega t \right). \end{aligned}$$

Заметим, что все сделанные выше выкладки справедливы и при $\Omega_{tt}^1(t) = -\Omega$. Тогда при $t \in [\frac{t_1}{2}, t_1]$ измерения выше получаются заменой Ω на $-\Omega$. Заметим, что в измерения w_I^1 и w_I^2 входят различные компоненты вектора состояния, в то же время, общими компонентами в паре измерений w_I^2 и w_I^3 являются компоненты $\beta_{0I}^1, \nu_z^{01}, \Theta_1^1$ и соответствующие им температурные коэффициенты. Рассмотрим выражение для w_I^1 , где коэффициенты перед компонентами вектора

состояния представляют собой набор линейно независимых функций:

$$\begin{aligned}
& 1, \sin ut, \cos ut, \cos \Omega t, \sin \Omega t, (\Omega + u) \sin \Omega t, (\Omega + u) \cos \Omega t, \\
& C_T(t) \sin \Omega t - S_T(t) \cos \Omega t, S_T(t) \sin \Omega t + C_T(t) \cos \Omega t, \\
& (\Omega + u) (C_T(t) \sin \Omega t - S_T(t) \cos \Omega t), (\Omega + u) (S_T(t) \sin \Omega t + C_T(t) \cos \Omega t), \\
& C_{\dot{T}}(t) \sin \Omega t - S_{\dot{T}}(t) \cos \Omega t, S_{\dot{T}}(t) \sin \Omega t + C_{\dot{T}}(t) \cos \Omega t, \\
& (\Omega + u) (C_{\dot{T}}(t) \sin \Omega t - S_{\dot{T}}(t) \cos \Omega t), (\Omega + u) (S_{\dot{T}}(t) \sin \Omega t + C_{\dot{T}}(t) \cos \Omega t), \\
& C_{\nabla_1 T}(t) \sin \Omega t - S_{\nabla_1 T}(t) \cos \Omega t, S_{\nabla_1 T}(t) \sin \Omega t + C_{\nabla_1 T}(t) \cos \Omega t, \\
& (\Omega + u)(C_{\nabla_1 T}(t) \sin \Omega t - S_{\nabla_1 T}(t) \cos \Omega t), (\Omega + u) S_{\nabla_1 T}(t) \sin \Omega t + C_{\nabla_1 T}(t) \cos \Omega t), \\
& C_{\nabla_2 T}(t) \sin \Omega t - S_{\nabla_2 T}(t) \cos \Omega t, S_{\nabla_2 T}(t) \sin \Omega t + C_{\nabla_2 T}(t) \cos \Omega t, \\
& (\Omega + u)(C_{\nabla_2 T}(t) \sin \Omega t - S_{\nabla_2 T}(t) \cos \Omega t), (\Omega + u)(S_{\nabla_2 T}(t) \sin \Omega t + C_{\nabla_2 T}(t) \cos \Omega t), \\
& C_{\nabla_3 T}(t) \sin \Omega t - S_{\nabla_3 T}(t) \cos \Omega t, S_{\nabla_3 T}(t) \sin \Omega t + C_{\nabla_3 T}(t) \cos \Omega t, \\
& (\Omega + u)(C_{\nabla_3 T}(t) \sin \Omega t - S_{\nabla_3 T}(t) \cos \Omega t), (\Omega + u)(S_{\nabla_3 T}(t) \sin \Omega t + C_{\nabla_3 T}(t) \cos \Omega t), \\
& T(t), \dot{T}, \nabla_1 T(t), \nabla_2 T(t), \nabla_3 T(t).
\end{aligned}$$

Наблюдаемыми являются следующие компоненты вектора состояния:

$\beta_{0I}^2, \beta_{0I}^3, \nu_z^{02}, \nu_z^{03}, \Theta_1^2, \Theta_1^3, \Delta f_z^{01}$ и соответствующие им коэффициенты зависимостей от температуры, производной температуры по времени и компонент пространственного градиента температуры. Коэффициенты перед компонентами вектора состояния в измерении w_I^2 представляют собой набор линейно независимых функций: $1, \sin \Omega t, t \sin \Omega t, I_T(t) \sin \Omega t, T(t) \sin \Omega t$ и тд. Наблюдаемыми являются следующие компоненты вектора состояния: $\beta_{0I}^1, \nu_z^{01}, \Delta f_0^{02}, \Gamma_2^2$ и соответствующие им коэффициенты зависимостей от температуры, производной температуры по времени и компонент пространственного градиента температуры. Аналогичным образом раскладывается измерение w_I^3 , в дополнение к наблюдаемым компонентам в измерении w_I^2 наблюдаются $\Delta f_z^{03}, \Gamma_3^2, \Gamma_3^3$ и соответствующие им коэффициенты зависимостей от температуры, производной температуры по времени и компонент пространственного градиента температуры.

На **втором цикле** вращения измеряемые величины имеют вид:

$$u_x = \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \omega_z = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega + u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_z = g_z = g_0 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ 0 \\ -\cos \Omega t \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Тогда с учетом (1.15) система (1.10) принимает вид:

$$\dot{\beta}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(\Omega + u) \\ 0 & 0 & 0 \\ \Omega + u & 0 & 0 \end{bmatrix} \beta_z + \nu_z, \quad \beta_z(t_1) = \beta_{II},$$

где t_1 – конец первого цикла вращения. Измерения (1.8) имеют вид:

$$\begin{aligned} w_{II}^1 &= g_0 \cos \Omega t \beta_{II}^2 + (\nu_z^{02} + \Theta_2^2(\Omega + u)) t \cos \Omega t + (K_\nu^2 + K_{\Theta_2^2}(\Omega + u)) I_T(t) \cos \Omega t + \\ &+ (\Lambda_\nu^2 + \Lambda_{\Theta_2^2}(\Omega + u)) T(t) \cos \Omega t + (\Pi_\nu^{2k} + \Pi_{\Theta_2^{2k}}(\Omega + u)) I_{\nabla_k T}(t) \cos \Omega t + \\ &+ \Delta f_z^{01} + K_{\Delta f}^1 T(t) + \Lambda_{\Delta f}^1 \dot{T}(t) + \Pi_{\Delta f}^{1k} \nabla_k T(t) + \\ &+ g_0 \left(\Gamma_1^1 \sin \Omega t + K_{\Gamma_1^1} T(t) \sin \Omega t + \Lambda_{\Gamma_1^1} \dot{T}(t) \sin \Omega t + \Pi_{\Gamma_1^{1k}} \nabla_k T(t) \sin \Omega t \right); \\ w_{II}^2 &= -g_0 \cos \Omega t \beta_{II}^1 + g_0 \sin \Omega t \beta_{II}^3 - (\nu_z^{01} + \Theta_2^1(\Omega + u)) \cos \Omega t + (\nu_z^{03} + \Theta_2^3(\Omega + u)) \sin \Omega t + \\ &+ (K_\nu^1 + K_{\Theta_2^1}(\Omega + u)) (C_T(t) \sin \Omega t - S_T(t) \cos \Omega t) + \\ &+ (K_\nu^3 + K_{\Theta_2^3}(\Omega + u)) (S_T(t) \sin \Omega t + C_T(t) \cos \Omega t) + \\ &+ (\Lambda_\nu^1 + \Lambda_{\Theta_2^1}(\Omega + u)) (C_{\dot{T}}(t) \sin \Omega t - S_{\dot{T}}(t) \cos \Omega t) + \\ &+ (\Lambda_\nu^3 + \Lambda_{\Theta_2^3}(\Omega + u)) (S_{\dot{T}}(t) \sin \Omega t + C_{\dot{T}}(t) \cos \Omega t) + \\ &+ (\Pi_\nu^{1k} + \Pi_{\Theta_2^{1k}}(\Omega + u)) (C_{\nabla_k T}(t) \sin \Omega t - S_{\nabla_k T}(t) \cos \Omega t) + \\ &+ (\Pi_\nu^{3k} + \Pi_{\Theta_2^{3k}}(\Omega + u)) (S_{\nabla_k T}(t) \sin \Omega t + C_{\nabla_k T}(t) \cos \Omega t) + \\ &+ \Delta f_z^{02} + K_{\Delta f}^2 T + \Lambda_{\Delta f}^2 \dot{T} + \Pi_{\Delta f}^{2k} \nabla_k T + \\ &+ g_0 \left(\Gamma_2^1 \sin \Omega t + K_{\Gamma_2^1} T(t) \sin \Omega t + \Lambda_{\Gamma_2^1} \dot{T}(t) \sin \Omega t + \Pi_{\Gamma_2^{1k}} \nabla_k T(t) \sin \Omega t \right); \\ w_{II}^3 &= g_0 \sin \Omega t \beta_{II}^2 + (\nu_z^{02} + \Theta_2^2(\Omega + u)) t \sin \Omega t + (K_\nu^2 + K_{\Theta_2^1}(\Omega + u)) I_T(t) \sin \Omega t + \\ &+ (\Lambda_\nu^2 + K_{\Gamma_3^2} + \Lambda_{\Theta_2^2}(\Omega + u)) T(t) \sin \Omega t + (\Pi_\nu^{2k} + \Pi_{\Theta_2^{2k}}(\Omega + u)) I_{\nabla_k T}(t) \sin \Omega t + \\ &+ \Delta f_z^{03} + K_{\Delta f}^3 T(t) + \Lambda_{\Delta f}^3 \dot{T}(t) + \Pi_{\Delta f}^{3k} \nabla_k T(t) - \\ &- g_0 \left(\Gamma_3^3 \cos \Omega t + \Lambda_{\Gamma_3^3} \dot{T}(t) \cos \Omega t + \Pi_{\Gamma_3^{3k}} \nabla_k T(t) \cos \Omega t \right) + \\ &+ g_0 \left(\Gamma_3^1 \sin \Omega t + K_{\Gamma_3^1} T(t) \sin \Omega t + \Lambda_{\Gamma_3^1} \dot{T}(t) \sin \Omega t + \Pi_{\Gamma_3^{1k}} \nabla_k T(t) \sin \Omega t \right). \end{aligned}$$

Поскольку измерения на втором цикле вращения имеют аналогичную структуру, для них применимы выводы для первого цикла. В дополнение к наблюдаемым на первом цикле параметрам добавляются следующие: $\Theta_2^1, \Theta_2^2, \Theta_2^3, \Gamma_1^1, \Gamma_2^1, \Gamma_3^1$ и соответствующие коэффициенты температурных зависимостей.

На **третьем цикле** вращения измеряемые величины имеют вид:

$$u_x = \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \omega_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega + u \end{bmatrix}, \quad f_z = g_z = g_0 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ -\cos \Omega t \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

Тогда с учетом (1.16) система (1.10) принимает вид:

$$\dot{\beta}_z = \begin{bmatrix} 0 & \Omega + u & 0 \\ -(\Omega + u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \beta_z + \nu_z, \quad \beta_z(t_2) = \beta_{III},$$

где t_2 — конец второго цикла вращений. Измерения (1.8) имеют вид:

$$\begin{aligned} w_{III}^1 &= g_0 \cos \Omega t \beta_{III}^3 + (\nu_z^{03} + \Theta_3^3(\Omega + u)) t \cos \Omega t + (K_\nu^3 + K_{\Theta_3^3}(\Omega + u)) I_T(t) \cos \Omega t + \\ &+ (\Lambda_\nu^3 + \Lambda_{\Theta_3^3}(\Omega + u)) T(t) \cos \Omega t + (\Pi_\nu^{3k} + \Pi_{\Theta_3^3}(\Omega + u)) I_{\nabla_k T}(t) \cos \Omega t + \\ &+ \Delta f_z^{01} + K_{\Delta f}^1 T(t) + \Lambda_{\Delta f}^1 \dot{T}(t) + \Pi_{\Delta f}^{1k} \nabla_k T(t) + \\ &+ g_0 \left(\Gamma_1^1 \sin \Omega t + K_{\Gamma_1^1} T(t) \sin \Omega t + \Lambda_{\Gamma_1^1} \dot{T}(t) \sin \Omega t + \Pi_{\Gamma_1^1}^{1k} \nabla_k T(t) \sin \Omega t \right); \\ w_{III}^2 &= g_0 \sin \Omega t \beta_{III}^3 + (\nu_z^{03} + \Theta_3^3(\Omega + u)) t \sin \Omega t + (K_\nu^3 + K_{\Theta_3^3}(\Omega + u)) I_T(t) \sin \Omega t + \\ &+ (\Lambda_\nu^2 + K_{\Gamma_3^2} + \Lambda_{\Theta_2^2}(\Omega + u)) T(t) \sin \Omega t + (\Pi_\nu^{2k} + \Pi_{\Theta_2^2}(\Omega + u)) I_{\nabla_k T}(t) \sin \Omega t + \\ &+ \Delta f_z^{02} + K_{\Delta f}^2 T(t) + \Lambda_{\Delta f}^2 \dot{T}(t) + \Pi_{\Delta f}^{2k} \nabla_k T(t) - \\ &- g_0 \left(\Gamma_2^2 \cos \Omega t + \Lambda_{\Gamma_2^2} \dot{T}(t) \cos \Omega t + \Pi_{\Gamma_2^2}^{2k} \nabla_k T(t) \cos \Omega t \right) + \\ &+ g_0 \left(\Gamma_2^1 \sin \Omega t + K_{\Gamma_2^1} T(t) \sin \Omega t + \Lambda_{\Gamma_2^1} \dot{T}(t) \sin \Omega t + \Pi_{\Gamma_2^1}^{1k} \nabla_k T(t) \sin \Omega t \right); \\ w_{III}^3 &= -g_0 \cos \Omega t \beta_{III}^1 + g_0 \sin \Omega t \beta_{III}^2 - (\nu_z^{01} + \Theta_3^1(\Omega + u)) \cos \Omega t + (\nu_z^{03} + \Theta_3^3(\Omega + u)) \sin \Omega t + \\ &+ (K_\nu^1 + K_{\Theta_3^1}(\Omega + u)) (C_T(t) \sin \Omega t - S_T(t) \cos \Omega t) + \\ &+ (K_\nu^3 + K_{\Theta_3^2}(\Omega + u)) (S_T(t) \sin \Omega t + C_T(t) \cos \Omega t) + \\ &+ (\Lambda_\nu^1 + \Lambda_{\Theta_3^1}(\Omega + u)) (C_{\dot{T}}(t) \sin \Omega t - S_{\dot{T}}(t) \cos \Omega t) + \\ &+ (\Lambda_\nu^3 + \Lambda_{\Theta_3^2}(\Omega + u)) (S_{\dot{T}}(t) \sin \Omega t + C_{\dot{T}}(t) \cos \Omega t) + \\ &+ (\Pi_\nu^{1k} + \Pi_{\Theta_3^1}(\Omega + u)) (C_{\nabla_k T}(t) \sin \Omega t - S_{\nabla_k T}(t) \cos \Omega t) + \\ &+ (\Pi_\nu^{2k} + \Pi_{\Theta_3^2}(\Omega + u)) (S_{\nabla_k T}(t) \sin \Omega t + C_{\nabla_k T}(t) \cos \Omega t) + \\ &+ \Delta f_z^{03} + K_{\Delta f}^3 T + \Lambda_{\Delta f}^3 \dot{T} + \Pi_{\Delta f}^{3k} \nabla_k T(t) - \\ &- g_0 \left(\Gamma_3^2 \cos \Omega t + \Lambda_{\Gamma_3^2} \dot{T}(t) \cos \Omega t + \Pi_{\Gamma_3^2}^{2k} \nabla_k T(t) \cos \Omega t \right) + \\ &+ g_0 \left(\Gamma_3^1 \sin \Omega t + K_{\Gamma_3^1} T(t) \sin \Omega t + \Lambda_{\Gamma_3^1} \dot{T}(t) \sin \Omega t + \Pi_{\Gamma_3^1}^{1k} \nabla_k T(t) \sin \Omega t \right). \end{aligned}$$

Измерения на третьем цикле вращения имеют структуру аналогичную первым двум циклам, поэтому в дополнение к уже наблюдаемым параметрам добавляются следующие: Θ_3^1 , Θ_3^2 , Θ_3^3 и соответствующие коэффициенты зависимостей от температуры, производной температуры по времени и пространственного градиента температуры. Отметим, что по совокупности трех циклов вращения наблюдаемы все компоненты вектора состояния. Таким образом, было показано, что вектор состояния (1.6) линейной динамической системы (1.10) наблюдаем в эксперименте, состоящем из трех циклов вращения вокруг каждой из прибор-

ных осей с кусочно-постоянной угловой скоростью, при $\varphi = \psi = 0$. Теорема доказана.

Пример. Пусть $T(t) = t^4, \dot{T}(t) = 4t^3, \nabla_1 T(t) = (t-1)^3, \nabla_2 T(t) = (t-2)^3, \nabla_3 T(t) = t^2$. Нетрудно убедиться, что рассматриваемые функции удовлетворяют условию теоремы.

Прежде чем выписать выражения для измерений, вычислим ключевые соотношения, связанные с температурными функциями.

$$\begin{aligned}
I_T(t) &= \int_0^t \tau^4 d\tau = \frac{t^5}{5}, & I_{\nabla_1 T}(t) &= \int_0^t (\tau-1)^3 d\tau = \frac{(t-1)^4}{4}; \\
I_{\nabla_2 T}(t) &= \int_0^t (\tau-2)^3 d\tau = \frac{(t-2)^4}{4}, & I_{\nabla_3 T}(t) &= \int_0^t \tau^2 d\tau = \frac{t^3}{3}; \\
\int_0^t \tau^4 \cos \omega \tau d\tau &= \frac{4\Omega t (\omega^2 t^2 - 6) \cos \omega t + (\omega^4 t^4 - 12\omega^2 t^2 + 24) \sin \omega t}{\omega^5}; \\
\int_0^t \tau^4 \sin \omega \tau d\tau &= \frac{4\Omega t (\omega^2 t^2 - 6) \sin \omega t - (\omega^4 t^4 - 12\omega^2 t^2 + 24) \cos \omega t + 24}{\omega^5}; \\
S_T &= \frac{\omega^4 t^4 - 12\omega^2 t^2 + 24}{\omega^5}, & C_T &= \frac{\omega t (\omega^2 t^2 - 6)}{\omega^5}; \\
S_{\dot{T}} &= \frac{4\omega t (\omega^2 t^2 - 6)}{\omega^4}, & C_{\dot{T}} &= \frac{12 (\omega^2 t^2 - 2)}{\omega^4}; \\
S_{\nabla_1 T} &= \frac{\omega(t-1)(\omega^2(t-1)^2 - 6)}{\omega^4}, & C_{\nabla_1 T} &= \frac{3(\omega^2(t-1)^2 - 2)}{\omega^4}; \\
S_{\nabla_2 T} &= \frac{\omega(t-2)(\omega^2(t-2)^2 - 6)}{\omega^4}, & C_{\nabla_2 T} &= \frac{3(\omega^2(t-2)^2 - 2)}{\omega^4}; \\
S_{\nabla_3 T} &= \frac{\omega^2 t^2 - 2}{\omega^3}, & C_{\nabla_3 T} &= \frac{2\omega t}{\omega^3},
\end{aligned}$$

тогда с учетом выражений выше, измерение w_I^1 раскладывается по набору линейно независимых функций:

$$\begin{aligned}
& 1, \sin ut, \cos ut, \sin \Omega t, \cos \Omega t, \omega \sin \Omega t, \omega \cos \Omega t, \\
& \frac{\omega t (\omega^2 t^2 - 6)}{\omega^5} \sin \Omega t - \frac{\omega^4 t^4 - 12\omega^2 t^2 + 24}{\omega^5} \cos \Omega t, \\
& \frac{\omega t (\omega^2 t^2 - 6)}{\omega^5} \cos \Omega t + \frac{\omega^4 t^4 - 12\omega^2 t^2 + 24}{\omega^5} \sin \Omega t, \\
& \frac{12 (\omega^2 t^2 - 2)}{\omega^4} \sin \Omega t - \frac{4\omega t (\omega^2 t^2 - 6)}{\omega^4} \cos \Omega t, \\
& \frac{12 (\omega^2 t^2 - 2)}{\omega^4} \cos \Omega t + \frac{4\omega t (\omega^2 t^2 - 6)}{\omega^4} \sin \Omega t, \\
& \frac{3(\omega^2(t-1)^2 - 2)}{\omega^4} \sin \Omega t - \frac{\omega(t-1)(\omega^2(t-1)^2 - 6)}{\omega^4} \cos \Omega t, \\
& \frac{3(\omega^2(t-1)^2 - 2)}{\omega^4} \cos \Omega t + \frac{\omega(t-1)(\omega^2(t-1)^2 - 6)}{\omega^4} \sin \Omega t, \\
& \frac{3(\omega^2(t-2)^2 - 2)}{\omega^4} \sin \Omega t - \frac{\omega(t-1)(\omega^2(t-1)^2 - 6)}{\omega^4} \cos \Omega t, \\
& \frac{3(\omega^2(t-2)^2 - 2)}{\omega^4} \cos \Omega t + \frac{\omega(t-2)(\omega^2(t-2)^2 - 6)}{\omega^4} \sin \Omega t, \\
& \frac{2\omega t}{\omega^3} \sin \Omega t - \frac{\omega^2 t^2 - 2}{\omega^3} \cos \Omega t, \\
& \frac{2\omega t}{\omega^3} \cos \Omega t - \frac{\omega^2 t^2 - 2}{\omega^3} \sin \Omega t, \\
& t^4, 4t^3, (t-1)^3, (t-2)^3, t^2,
\end{aligned}$$

с учетом $\omega = \Omega + u$. Аналогичным образом раскладываются измерения на других циклах. Рассматриваемая система является наблюдаемой.

Замечание 1. Условие 1) в теореме дано для наглядности, в этом случае наблюдаемые наблюдаемые комбинации компонент вектора (1.6) выписываются в явном виде без громоздких выкладок. В случае калибровки на произвольной широте предложенный метод требует более сложного исследования линейной независимости столбцов (вектор-функций) матрицы H .

Замечание 2. Доказанная теорема дает необходимые и достаточные условия, накладываемые на функции температуры, ее производной и компонент пространственного градиента, которые могут быть легко реализованы на практике при наличии термокамеры.

1.2.4 Методика численного моделирования

Для подтверждения полученных в предыдущем разделе результатов проведено полунатурное численное моделирование. Моделирование проводилось для системы навигационного класса точности. Именно для таких систем целесообразно рассматривать коэффициенты зависимостей от производной температуры по времени и пространственного градиента температуры в дополнение к коэффициентам зависимостей от температуры. Модельные данные создавались при помощи специальной программы-имитатора. Опишем кратко методику моделирования:

- моделируются показания инерциальных датчиков в калибровочном эксперименте с системой навигационного класса точности на двухосном поворотном стенде с термокамерой; заданы широта φ , векторы угловой скорости Земли u_x и силы тяжести g_x в месте проведения калибровки;
- в начальный момент времени система ориентирована так, что приборный трехгранник Mz совпадает опорным Mx (с точностью до инструментальных погрешностей);
- вектор абсолютной угловой скорости приборного трехгранника ω_z является заданной функцией времени (рис. 1.2, левый верхний график); эксперимент состоит из последовательных коротких вращений (3 минуты) вокруг каждой из приборных осей, причем ось вращения всегда находится в плоскости горизонта; вращения выполняются с постоянной угловой скоростью -10 или 10 град/сек (выполняется по 3 вращения вокруг каждой из приборных осей в обе стороны, в результате которых система приходит в начальное положение); эксперимент смоделирован так, чтобы не требовалась переустановка системы на планшайбе двухосного поворотного стенда; согласно результатам раздела 1.2.3 для обеспечения наблюдаемости коэффициентов зависимостей от производной температуры, производная должна изменяться во время каждого из вращений, поэтому на интервале максимально динамичного изменения температуры должно приходиться вращение вокруг каждой из приборных осей;

- поскольку вращение моделируется, матрица ориентации L_z известна, и она используется для формирования вектора удельной силы $f_z = -L_z g_x$ в приборных осях;
- считается, что в каждом инерциальном датчике расположен датчик температуры; показания датчиков температуры являются измерениями реальных термодатчиков в системе БИНС–РТ во время статического эксперимента в термокамере на температурном переходе (рис. 1.2, правый верхний график);
- показания термодатчиков аппроксимируются аналитическими функциями (глава II); при моделировании аппроксимирующие функции считаются показаниями датчиков температуры;
- производные температуры по времени \dot{T}_ω , \dot{T}_f определяется при помощи дифференцирования аппроксимирующих показания датчиков температуры функций (рис. 1.2, левый нижний график);
- пространственные градиенты температуры ∇T_ω , ∇T_f смоделированы как отношения разностей показаний некоторых датчиков температуры к разнице соответствующих координат в приборном трехграннике; считается, что во всех точках системы градиенты одинаковые (рис. 1.2, правый нижний график);
- показания ω'_z , f'_z ДУС и ньютонометров формировались согласно модели (1.4); априорно задавались различного рода инструментальные погрешности измерений инерциальных датчиков, такие как: смещение нулевых сигналов ньютонометров и ДУС, масштабные коэффициенты и малые углы несоосности ньютонометров и ДУС, а также коэффициенты зависимости от температуры, производной температуры по времени и пространственного градиента температуры соответствующие по порядку классу точности системы; для СКО шумов измерений ДУС и ньютонометров приняты следующие величины $\sigma_\nu = 0.01$ [град/ч] и $\sigma_f = 1$ [мм/сек²], соответствующие характерным значениям для систем навигационного класса точности;

- частота регистрации показаний инерциальных датчиков и датчиков температуры – 400 Гц;
- общая продолжительность эксперимента составляет 7 часов (значение выбрано эмпирически, как время за которое оценки СКО ошибок оценки становятся близкими к постоянным);
- предполагается, что рассматриваемая система является предварительно откалиброванной $\nu_z < 0.1$ [град/ч].

Представленные температуры являются реальными измерениями датчиков температуры в системе БИНС-РТ² в статическом эксперименте в термокамере (температурный переход от 0 °С к 20 °С). Наибольшие температуры соответствуют температурам лазерных ДУС, а наименьшие – кварцевым ньютонетрам. Всего за 7 часов, изменение температуры составляет 18 °С. Экспериментально установлено, что производная температуры по времени изменяется в максимальных пределах в течение первого часа после начала эксперимента; затем, когда температура постепенно выходит на постоянное значение, производная стремится к нулю. Нетрудно убедиться, что рассматриваемый профиль изменения температуры соответствует требованию из предыдущего раздела, т.е. для каждого инерциального датчика функции $T(t)$, $\dot{T}(t)$, $\nabla T(t)$ являются линейно независимыми. В работах [50], [51] исследуются зависимости совокупного дрейфа БИНС на базе лазерных гироскопов от температуры, производной температуры по времени и компонент пространственного градиента температуры. Определяются параметры температурных зависимостей дрейфа в статических экспериментах с изменяющейся температурой. В обеих работах используется важное предположение, об однородности температурного поля вдоль оси перпендикулярной плоскости резонатора лазерного гироскопа, которое по утверждению авторов подтверждается на практике. В соответствии с этими работами, вместо трех компонент пространственного градиента температуры, будем рассматривать только две компоненты, лежащие в плоскости резонатора лазерного гироскопа. Отметим, что аналогичное утверждение справедливо и для ВОГ [33].

²Производства АО «Инерциальные технологии Технокомплекса» (ИТТ)

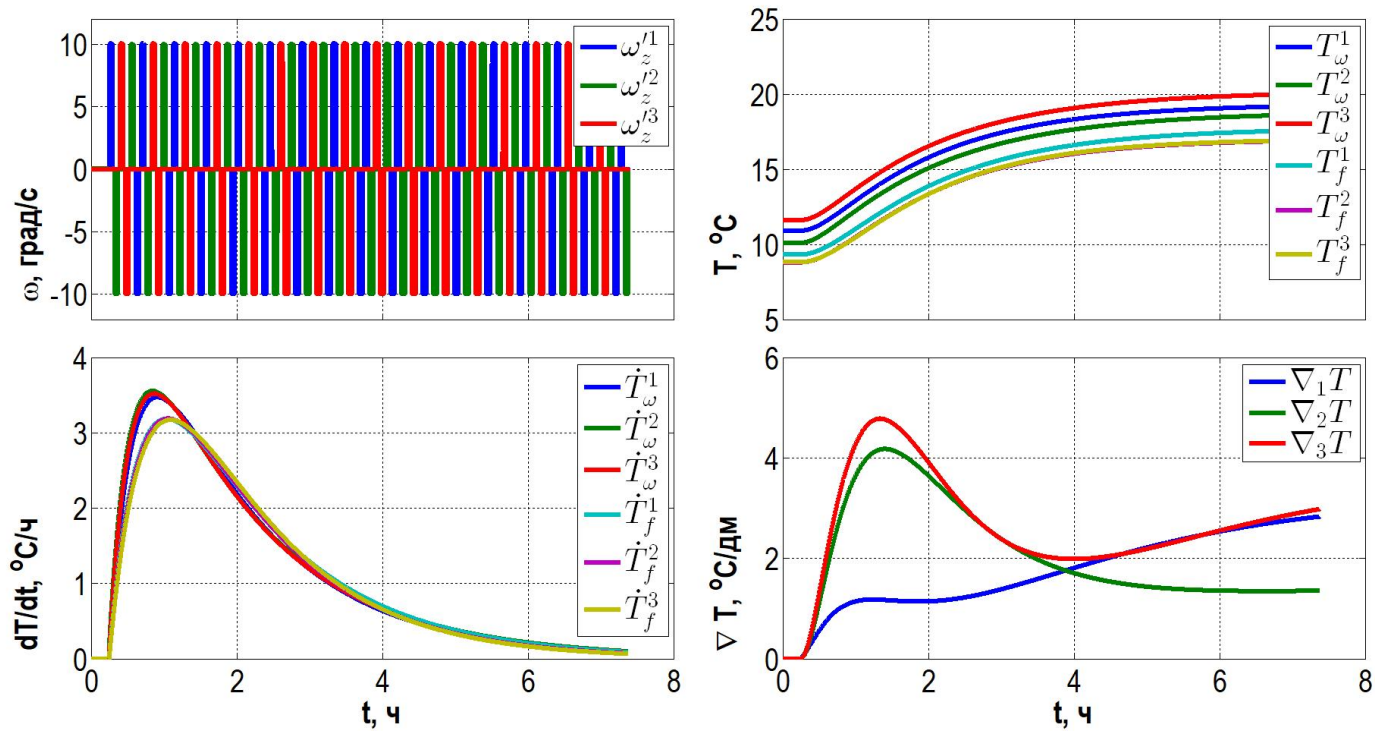


Рис. 1.2: Профиль изменения угловой скорости и функции изменения температуры

При моделировании важно учитывать характеристики шумов, присутствующих в системе, поскольку от них зависят предельные значения ковариаций. Одна из задач моделирования состояла в определении минимальных требований к уровню шумов инерциальных датчиков БИНС для обеспечения ожидаемой точности оценок параметров модели погрешностей измерений инерциальных датчиков, например, на уровне, соответствующем классу системы, т.е. 0.01 град/ч для смещений нулевых сигналов (дрейфов) ДУС и тд. Здесь делается акцент на смещениях нулевых сигналов ДУС, поскольку эмпирически установлено, что при обеспечении СКО смещений нулевых сигналов на заданном уровне, требуемые уровни СКО остальных погрешностей соблюдаются автоматически.

1.2.5 Ковариационный анализ на модельных данных

Для построения оценок компонент вектора состояния и соответствующих оценок СКО использовалась численно устойчивая реализация фильтра Калмана методом квадратного корня из ковариационной матрицы [2, 22]. По результатам обработки модельных данных проводился ковариационный анализ ошибок

оценок. Модельные данные подавались на вход алгоритма оценивания, при помощи которого вычислялись ковариации и оценка вектора состояния. Ковариационный анализ предполагает исследование изменения во времени оценок СКО для компонент вектора состояния, подлежащих оценке. Результаты обработки модельных данных приведены на рис. 1.3 – 1.8. Начальные СКО и их оценки в конечный момент времени для различных параметров ньютонометров и ДУС приведены в таблице 1.2 – 1.3. Оценки СКО определялись как квадратный корень из соответствующих диагональных элементов ковариационной матрицы. Из приведенных таблиц и графиков следует, что оценки компонент вектора состояния уточняются (в 2.5 раза для смещений нулевых сигналов ДУС и в 100 раз для смещений нулевых сигналов ньютонометров, для большинства остальных параметров более чем на порядок) по сравнению с априорными в модели (1.4), что подтверждает выводы аналитического исследования.

Описанная выше процедура моделирования была выполнена многократно с различным значениями СКО шумов ДУС и ньютонометров. Установлено, что для обеспечения оценок СКО в конечный момент времени смещений нулевых сигналов ДУС на уровне 0.01 град/ч, СКО шумов ДУС и ньютонометров должны соответствовать $\sigma_v = 0.0001$ [град/ч] и $\sigma_f = 0.1$ [мм/сек²].

Результаты приведены для конкретного профиля вращения и изменения температуры внутри системы 1.2, однако описанная методика 1.2.4 позволяет получить подобные оценки СКО для любого другого эксперимента с вращениями аналогичного типа.

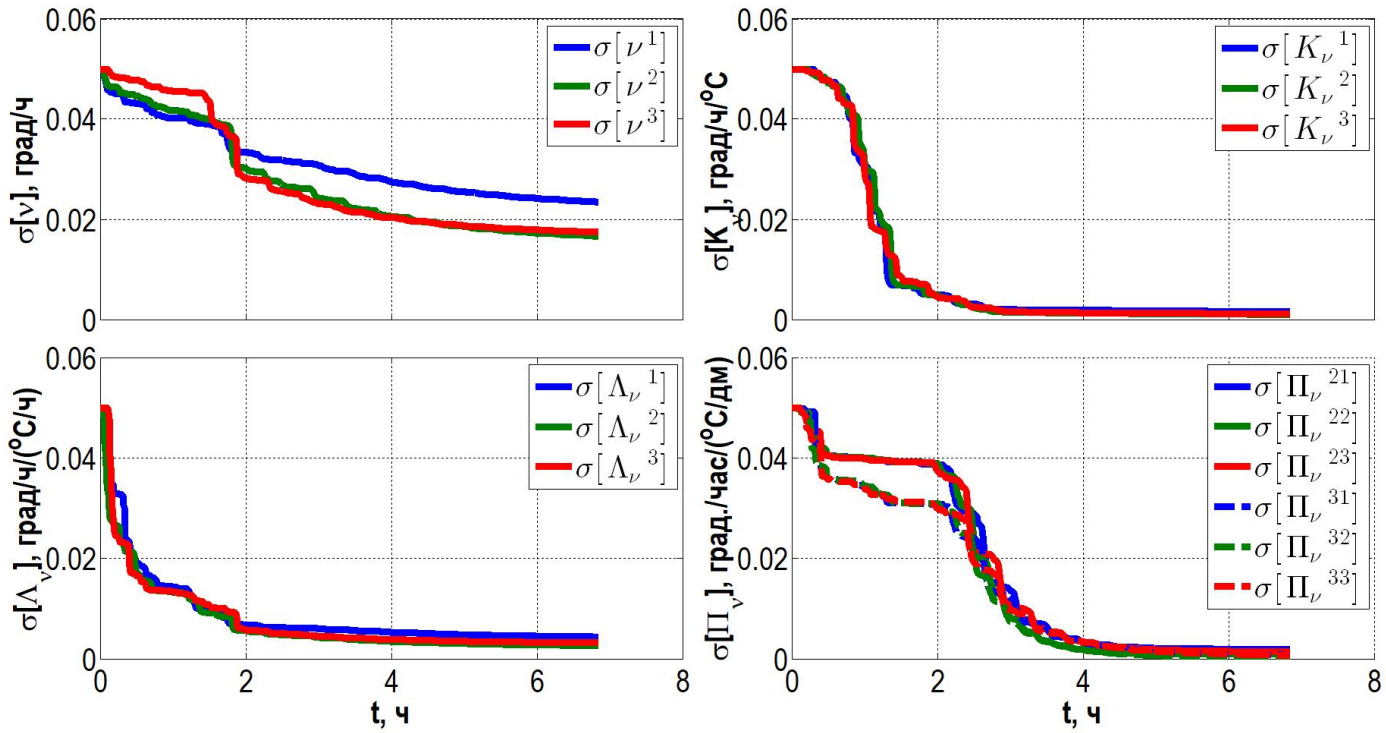


Рис. 1.3: Оценки СКО для оценок смещений нулевых сигналов ДУС и соответствующих температурных зависимостей

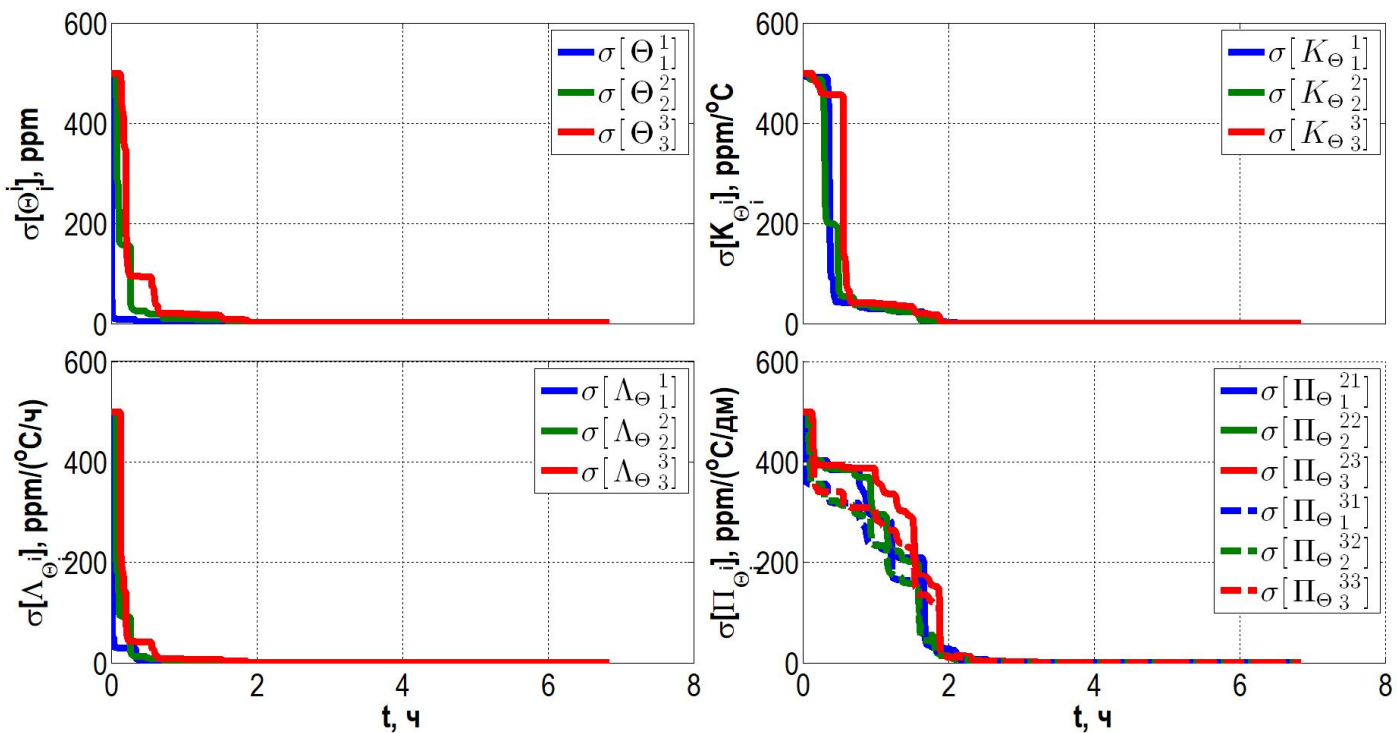


Рис. 1.4: Оценки СКО для оценок масштабных коэффициентов ДУС и соответствующих температурных зависимостей

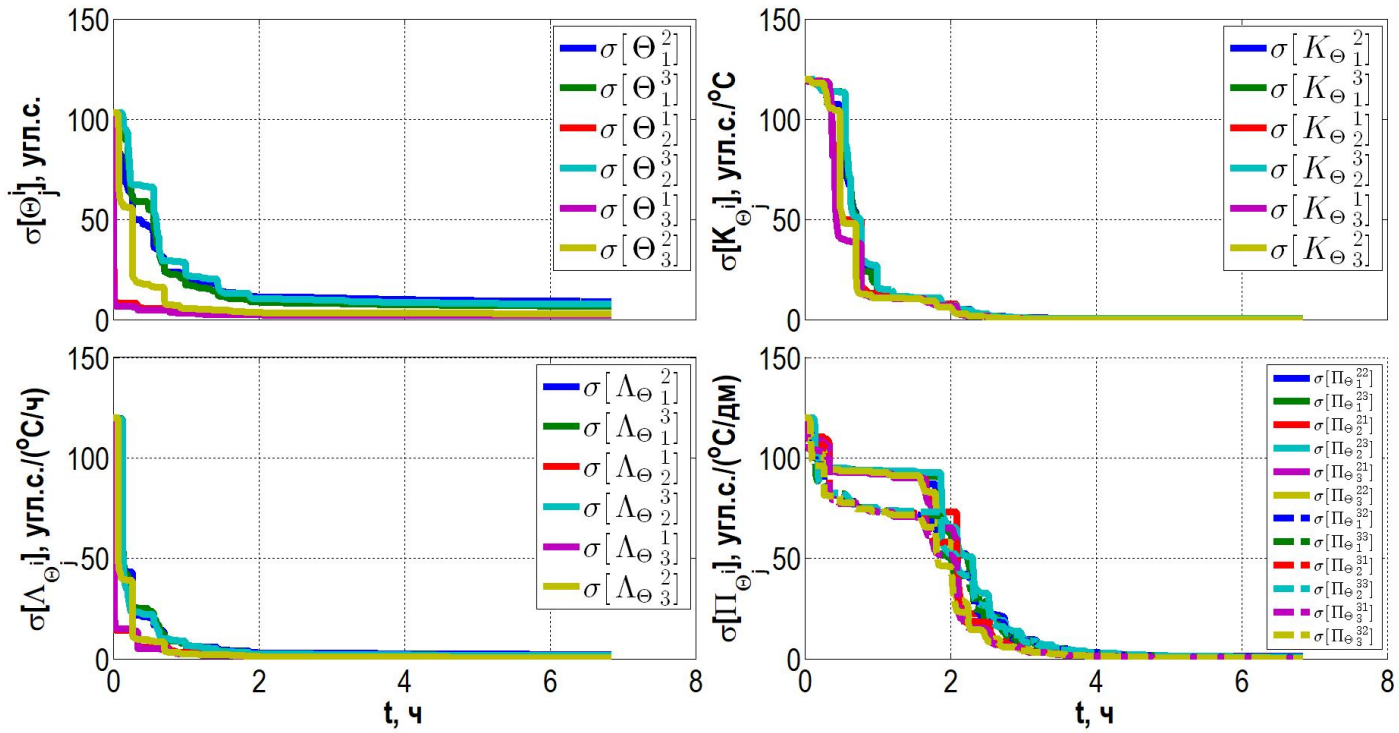


Рис. 1.5: Оценки СКО для оценок углов перекоса ДУС и соответствующих температурных зависимостей

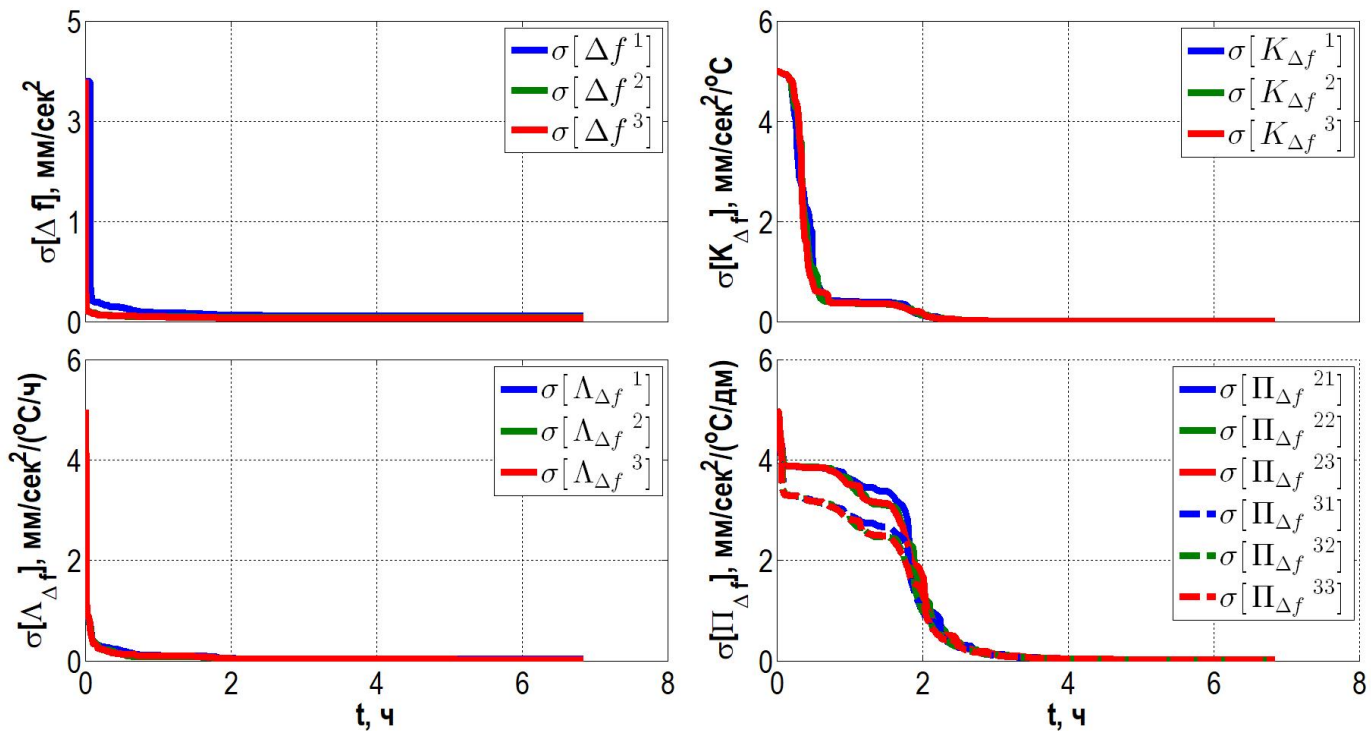


Рис. 1.6: Оценки СКО для оценок смещений нулевых сигналов ньютометров и соответствующих температурных зависимостей

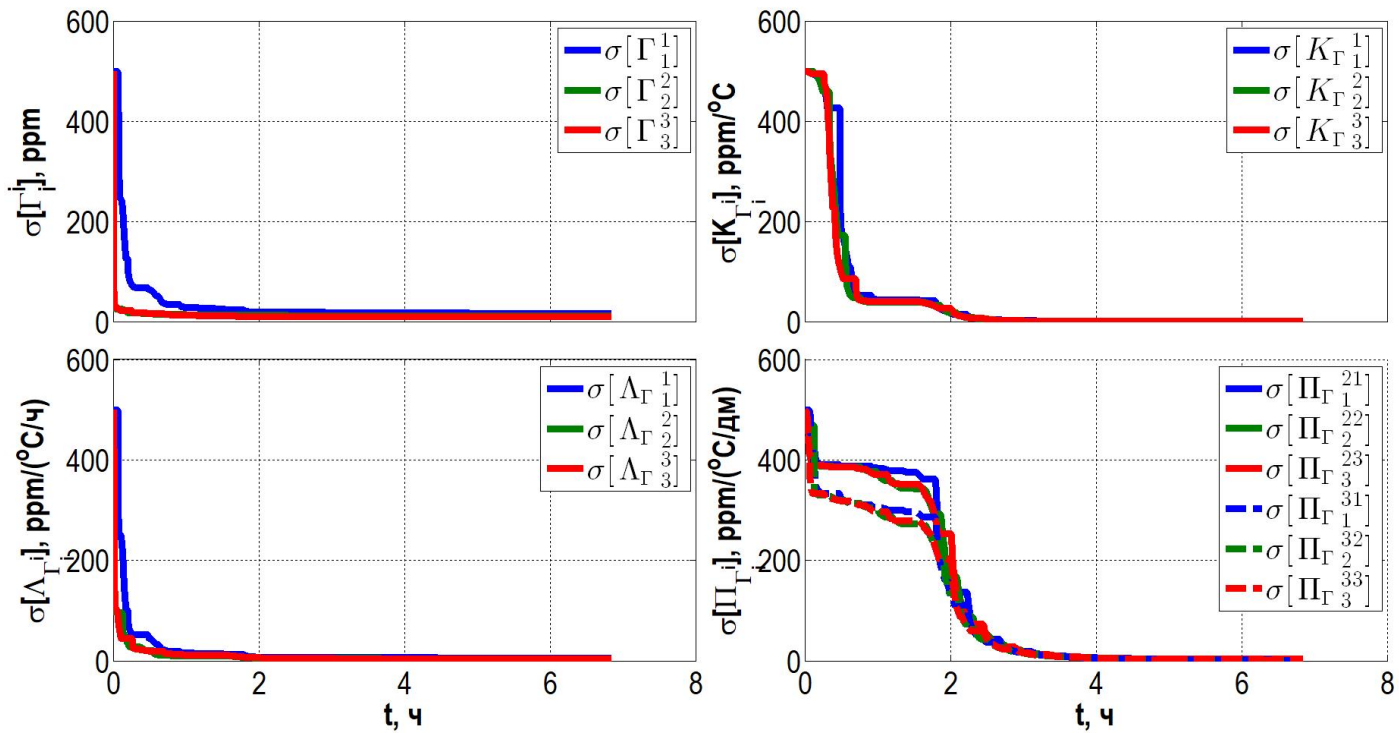


Рис. 1.7: Оценки СКО для оценок масштабных коэффициентов ньютонометров и соответствующих температурных зависимостей

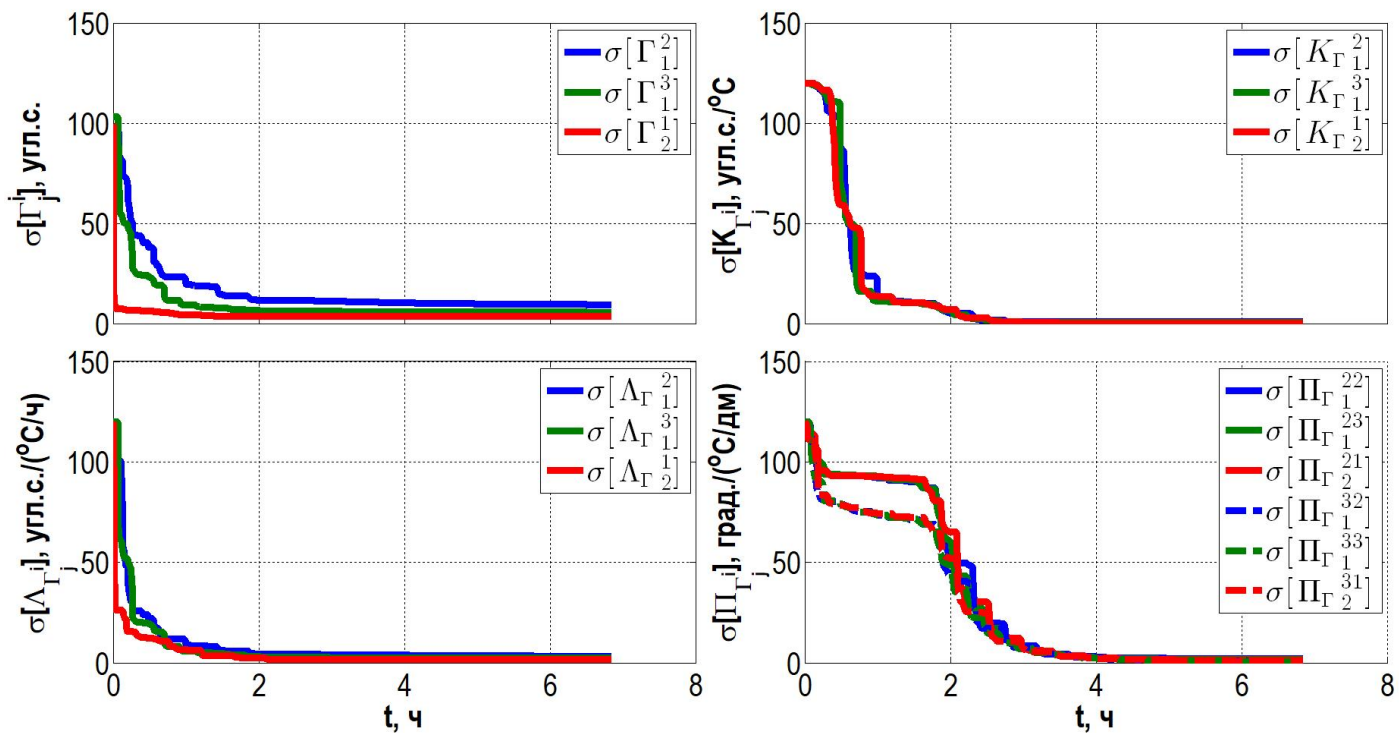


Рис. 1.8: Оценки СКО для оценок углов перекоса акселерометров и соответствующих температурных зависимостей

парам.	Δf_z^{01}	Δf_z^{02}	Δf_z^{03}	Γ_1^1	Γ_2^2	Γ_3^3	Γ_2^1	Γ_3^1	Γ_3^2
разм.	мм/сек ²			ppm			угл.сек.		
σ_o	5.000	5.000	5.000	500	500	500	100.00	100.00	100.00
σ_k	0.107	0.078	0.069	16	12	9	9.43	5.67	3.51
парам.	$K_{\Delta f}^1$	$K_{\Delta f}^2$	$K_{\Delta f}^3$	$K_{\Gamma_1^1}$	$K_{\Gamma_2^2}$	$K_{\Gamma_3^3}$	$K_{\Gamma_2^1}$	$K_{\Gamma_3^1}$	$K_{\Gamma_3^2}$
разм.	мм/сек ² /°C			ppm/°C			угл.сек./°C		
σ_o	5.000	5.000	5.000	500.0	500.0	500.0	120.00	120.00	120.00
σ_k	0.009	0.007	0.006	1.3	1.0	0.9	0.80	0.51	0.33
парам.	$\Lambda_{\Delta f}^1$	$\Lambda_{\Delta f}^2$	$\Lambda_{\Delta f}^3$	$\Lambda_{\Gamma_1^1}$	$\Lambda_{\Gamma_2^2}$	$\Lambda_{\Gamma_3^3}$	$\Lambda_{\Gamma_2^1}$	$\Lambda_{\Gamma_3^1}$	$\Lambda_{\Gamma_3^2}$
разм.	мм/сек ² /(°C/ч)			ppm/(°C/ч)			угл.сек./°C/ч)		
σ_o	5.000	5.000	5.000	500.0	500.0	500.0	120.00	120.00	120.00
σ_k	0.037	0.029	0.029	5.5	4.2	4.1	3.32	2.31	1.58
парам.	$\Pi_{\Delta f}^{21}$	$\Pi_{\Delta f}^{22}$	$\Pi_{\Delta f}^{23}$	$\Pi_{\Gamma_1^1}^{21}$	$\Pi_{\Gamma_2^2}^{22}$	$\Pi_{\Gamma_3^3}^{23}$	$\Pi_{\Gamma_2^1}^{21}$	$\Pi_{\Gamma_3^1}^{21}$	$\Pi_{\Gamma_3^2}^{22}$
разм.	мм/сек ² /(°C/дм)			ppm/(°C/дм)			угл.сек./°C/дм)		
σ_o	5.000	5.000	5.000	500.0	500.0	500.0	120.00	120.00	120.00
σ_k	0.025	0.021	0.023	3.8	3.1	3.2	2.23	1.74	1.31
парам.	$\Pi_{\Delta f}^{31}$	$\Pi_{\Delta f}^{32}$	$\Pi_{\Delta f}^{33}$	$\Pi_{\Gamma_1^1}^{31}$	$\Pi_{\Gamma_2^2}^{32}$	$\Pi_{\Gamma_3^3}^{33}$	$\Pi_{\Gamma_2^1}^{31}$	$\Pi_{\Gamma_3^1}^{31}$	$\Pi_{\Gamma_3^2}^{32}$
разм.	мм/сек ² /(°C/дм)			ppm/(°C/дм)			угл.сек./°C/дм)		
σ_o	5.000	5.000	5.000	500.0	500.0	500.0	120.00	120.00	120.00
σ_k	0.010	0.009	0.009	1.4	1.3	1.3	0.64	0.59	0.57

Таблица 1.2: Начальные СКО и их оценки в конечный момент времени ошибок оценок смещений нулевых сигналов, масштабных коэффициентов, углов перекосов ньютометров и соответствующих температурных коэффициентов

парам.	ν_z^{01}	ν_z^{02}	ν_z^{03}	Θ_1^1	Θ_2^2	Θ_3^3	Θ_1^2	Θ_1^3	Θ_2^1	Θ_2^3	Θ_3^1	Θ_3^2
разм.	град/ч			ppm			угл.сек.					
σ_o	0.050	0.050	0.050	500.0	500.0	500.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
σ_k	0.023	0.017	0.017	1.1	1.3	2.0	9.0	6.7	2.7	7.6	2.1	3.0
парам.	K_ν^1	K_ν^2	K_ν^3	$K_{\Theta_1^1}$	$K_{\Theta_2^2}$	$K_{\Theta_3^3}$	$K_{\Theta_1^2}$	$K_{\Theta_1^3}$	$K_{\Theta_2^1}$	$K_{\Theta_2^3}$	$K_{\Theta_3^1}$	$K_{\Theta_3^2}$
разм.	град/ч/°C			ppm/°C			угл.сек./°C					
σ_o	0.0500	0.0500	0.0500	500.00	500.00	500.00	120.00	120.00	120.00	120.00	120.00	120.00
σ_k	0.0016	0.0010	0.0012	0.08	0.09	0.14	0.69	0.52	0.19	0.54	0.16	0.22
парам.	Λ_ν^1	Λ_ν^2	Λ_ν^3	$\Lambda_{\Theta_1^1}$	$\Lambda_{\Theta_2^2}$	$\Lambda_{\Theta_3^3}$	$\Lambda_{\Theta_1^2}$	$\Lambda_{\Theta_1^3}$	$\Lambda_{\Theta_2^1}$	$\Lambda_{\Theta_2^3}$	$\Lambda_{\Theta_3^1}$	$\Lambda_{\Theta_3^2}$
разм.	град/ч/(°C/ч)			ppm/(°C/ч)			угл.сек./(°C/ч)					
σ_o	0.0500	0.0500	0.0500	500.00	500.00	500.00	120.00	120.00	120.00	120.00	120.00	120.00
σ_k	0.0044	0.0026	0.0032	0.26	0.27	0.43	2.19	1.68	0.61	1.62	0.54	0.70
парам.	Π_ν^{21}	Π_ν^{22}	Π_ν^{23}	$\Pi_{\Theta_1^1}^{21}$	$\Pi_{\Theta_2^2}^{22}$	$\Pi_{\Theta_3^3}^{23}$	$\Pi_{\Theta_1^2}^{22}$	$\Pi_{\Theta_1^3}^{23}$	$\Pi_{\Theta_2^1}^{21}$	$\Pi_{\Theta_2^3}^{23}$	$\Pi_{\Theta_3^1}^{21}$	$\Pi_{\Theta_3^2}^{22}$
разм.	град/ч/(°C/дм)			ppm/(°C/дм)			угл.сек./(°C/дм)					
σ_o	0.0500	0.0500	0.0500	500.00	500.00	500.00	120.00	120.00	120.00	120.00	120.00	120.00
σ_k	0.0019	0.0009	0.0015	0.18	0.16	0.22	1.23	1.05	0.48	0.99	0.42	0.46
парам.	Π_ν^{31}	Π_ν^{32}	Π_ν^{33}	$\Pi_{\Theta_1^1}^{31}$	$\Pi_{\Theta_2^2}^{32}$	$\Pi_{\Theta_3^3}^{33}$	$\Pi_{\Theta_1^2}^{32}$	$\Pi_{\Theta_1^3}^{33}$	$\Pi_{\Theta_2^1}^{31}$	$\Pi_{\Theta_2^3}^{33}$	$\Pi_{\Theta_3^1}^{31}$	$\Pi_{\Theta_3^2}^{32}$
разм.	град/ч/(°C/дм)			ppm/(°C/дм)			угл.сек./(°C/дм)					
σ_o	0.0500	0.0500	0.0500	500.00	500.00	500.00	120.00	120.00	120.00	120.00	120.00	120.00
σ_k	0.0007	0.0003	0.0007	0.12	0.11	0.13	0.65	0.63	0.38	0.71	0.33	0.32

Таблица 1.3: Начальные СКО и их оценки в конечный момент времени ошибок оценок смещений нулевых сигналов, масштабных коэффициентов, углов перекосов ДУС и соответствующих температурных коэффициентов

Заключение к главе

В главе рассмотрена расширенная температурная модель погрешностей измерений инерциальных датчиков и сформулирована задача оценки параметров модели как задача оптимального оценивания. В модели учитываются температурные зависимости инструментальных погрешностей измерений инерциальных датчиков, в частности, коэффициенты зависимости от температуры, производной температуры по времени и компонент пространственного градиента температуры. Сформулируем основные выводы.

1. Проведено аналитическое исследование наблюдаемости в поставленной задаче оценивания, сформулированы необходимые и достаточные условия, накладываемые на функции температуры, производной температуры по времени и компонент пространственного градиента температуры, при которых система наблюдаема при калибровке на Экваторе.
2. Проведен ковариационный анализ ошибок оценок компонент вектора состояния по результатам полунатурного численного моделирования. Установлено, что СКО ошибок оценок уточняются по сравнению с априорными.
3. Определены минимальные требования к уровню шумов инерциальных датчиков БИНС для обеспечения ожидаемой точности оценок параметров модели погрешностей измерений на уровне соответствующем классу системы.

Глава 2

Особенности оценки производной температуры по времени

В предыдущей главе при анализе наблюдаемости коэффициентов температурного влияния предполагалось, что информация о температуре внутри БИНС идеальна и, как следствие, идеальна информация о скорости изменения температуры и компонентах пространственного градиента температуры. Эта информация необходима для оценки коэффициентов зависимостей от температуры, ее производной и пространственного градиента в модели погрешностей измерений инерциальных датчиков. Для измерения температуры вблизи/внутри инерциальных датчиков в БИНС используются датчики температуры. В зависимости от типа и физических размеров, на один инерциальный датчик может приходиться от 1 до 10 термодатчиков [33, 51]. Большое количество термодатчиков температуры характерно систем на базе для лазерных, волоконно-оптических и твердотельных волновых гироскопов. Сравнительно большие габариты таких датчиков и неравномерное распределение температуры по элементам датчика приводят к тому, что возникающие температурные производные и градиенты оказывают влияние их выходной сигнал. Например, если говорить про лазерные ДУС, то термодатчики обычно устанавливаются на фотоприемнике, в разных местах на корпусе резонатора и оптическом усилителе. Иногда, в силу особен-

При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [61, 62, 81–83]

ностей измерений датчиков температуры, их выходной сигнал не может быть использован напрямую при калибровке зависимостей от производной температуры. В связи с этим, возникает задача об производной температуры внутри БИНС с помощью измерений термодатчиков. Эта задача является важной вспомогательной задачей при калибровке БИНС с учетом температурных зависимостей, ей посвящена данная глава.

Литература посвященная дифференцированию цифровых сигналов весьма обширна, поэтому приведем лишь некоторые ключевые работы релевантные для нашего исследования. В работе [84] предложен широко известный фильтр Савицкого-Голея, использующий полиномиальную оконную регрессию для вычисления производной сигнала в скользящем окне. Другим важным источником является книга [85], которая представляет собой общепризнанный стандарт в области обработки сигналов. В этой книге представлены различные методы дифференцирования, включая методы на основе преобразований Фурье и методы на основе конечных разностей. В работе [86] подробно описаны различные техники обработки сигналов, включая дифференцирующие фильтры, подробно обсуждаются преимущества и недостатки различных методов. Наконец, в работе [87] представлены более сложные методы дифференцирования, включая методы на основе вейвлетов и методы, использующие адаптивные фильтры. В контексте дифференцирующих фильтров в реальном времени имеет смысл отметить работу [88], где автор представляет общий подход к линейной оценке производной сигнала при помощи фильтра Калмана, также в работе обсуждаются методы оптимизации таких фильтров для различных приложений. В работе [89] предложен фильтр Калмана с затухающей памятью, который предназначен для оптимальной оценки состояния динамической системы на основе наблюдений, содержащих шум, однако, в отличие от классического фильтра Калмана, он включает параметр затухания, который уменьшает влияние старых наблюдений на текущую оценку состояния системы, увеличивая важность новых данных. Общая идея затухающей памяти состоит в том, что важность информации о состоянии убывает с течением времени. Говоря об оценке температуры на основе зашумленных измерений термодатчиков, можно отметить работу [90], где для оценки температуры используется фильтр Калмана, однако производная температуры в работе не оценивается.

Приведем краткое содержание настоящей главы.

1. Описание типовых свойств показаний датчиков температуры, затрудняющих непосредственное вычисление скорости изменения температуры.
2. Анализ математической постановки начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности, в окрестности точки внутри БИНС, где измеряется температура. Исследование аналитического решения этой задачи, с целью использования его свойств для решения задачи оценки производной температуры по времени внутри БИНС по измерениям термодатчиков.
3. Обзор практических задач обработки показаний датчиков температуры для определения скорости изменения температуры и способов их решения в постобработке и реальном времени:
 - задача оценки производной температуры на основе показаний термодатчиков при помощи численного дифференцирования и осредняющих фильтров;
 - задача оценки производной температуры при помощи оконной аппроксимации.

В главе приведены результаты проверки предложенных подходов для модельных данных, а также для системы навигационного класса точности БИНС-РТ, производства АО «Инерциальные технологии Технокомплекса» (г. Раменское).

2.1 Типовые свойства измерений датчиков температуры

На основе опыта обработки показаний термодатчиков БИНС, с которыми встречался автор, можно сформулировать следующие типовые свойства показаний датчиков температуры:

- величина шага дискретизации (квантования) показаний термодатчиков q_T на порядки больше характерного изменения температуры за такт съема;

- неприменимость модели белого шума к ошибке измерений температуры, возникающей из-за квантования.

Перечисленные свойства делают определение производной температуры непосредственно из показаний термодатчиков нетривиальной задачей. Напомним, что в БИНС авиационного назначения скорость изменения температуры, в зависимости от внешних условий, может варьироваться в пределах $0 - 20 \text{ }^\circ\text{C/ч}$, при этом, величина шага дискретизации (квантования) показаний датчиков температуры q_T обычно составляет $0.05 - 0.2 \text{ }^\circ\text{C}$. Такого шага дискретизации вполне достаточно для определения температуры с точностью, необходимой для компенсации температурных зависимостей, однако, как правило, его недостаточно для определения производной температуры с необходимой для компенсации точностью.

Пример. На рис. 2.1 представлены измерения датчика температуры внутри системы БИНС-РТ во время саморазогрева. При приближении на графике заметны выраженные скачки показаний, связанные с шагом дискретизации датчика при возрастающей температуре. При этом, такие скачки часто сопровождаются переходным процессом, когда показания датчика переключаются вверх и вниз с одного уровня квантования на другой при медленно возрастающей температуре. Далее, при приближении различных участков графика заметно, что скорость изменения температуры на этих участках может отличаться на порядки.

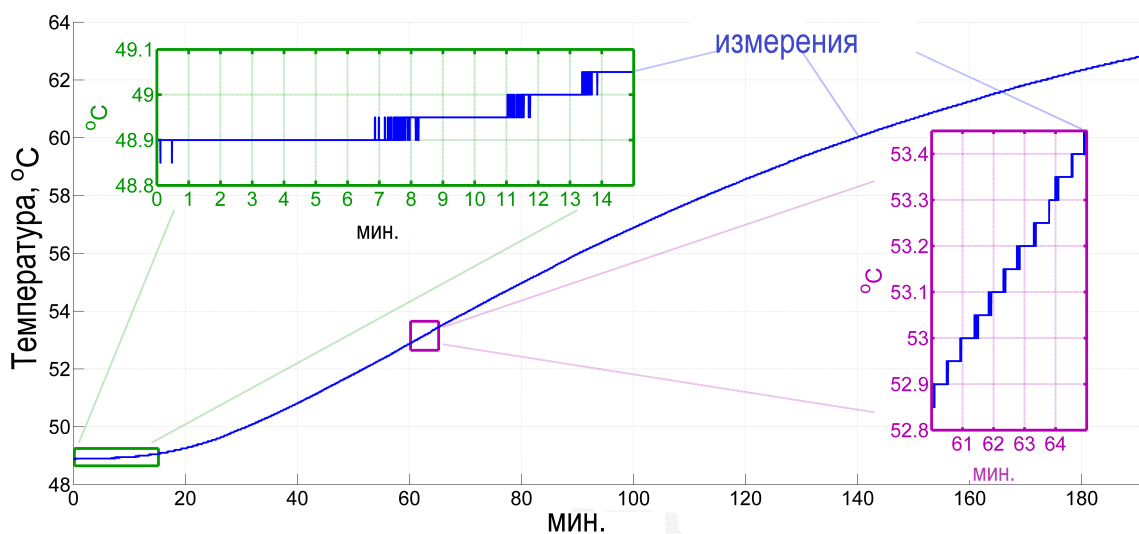


Рис. 2.1: Пример показаний датчика температуры

2.2 Динамика тепловых процессов в БИНС

Поскольку перечисленные особенности показаний термодатчиков не позволяют определять скорость изменения температуры при помощи простого численного дифференцирования, воспользуемся качественными свойствами тепловых процессов протекающих в БИНС, которые описываются уравнением теплопроводности. Для начала отметим эмпирическое наблюдение [91], что функции вида:

$$\tau(t) \approx \tilde{\tau}(t) = \alpha + \beta_1 e^{-k_1 t} + \beta_2 e^{-k_2 t}, \quad (2.1)$$

в определенных ситуациях аппроксимируют показания датчиков температуры с достаточной точностью. Здесь $\tau(t)$ — измеренная температура, $\tilde{\tau}(t)$ — оценка температуры; $\alpha, \beta_1, \beta_2, k_1 > 0, k_2 > 0$ — некоторые постоянные. К этим ситуациям относится саморазагрев системы и температурный переход в термокамере от одного значения температуры к другому в условиях неподвижности корпуса БИНС. Другими словами, это тепловые процессы, протекающие при стационарных внешних условиях.

В случае нестационарных внешних условий обычно выполняется численное моделирование. Отметим, что моделирование тепловых процессов в БИНС является нетривиальной задачей, поскольку БИНС представляют собой сложные устройства, состоящие из различных термоизолированных компонент из разных материалов. В работах [44, 51, 54] приводятся результаты численного моделирования тепловых процессов, протекающих в БИНС. В моделировании учитываются различные источники тепла, точные геометрические размеры элементов БИНС, коэффициенты теплопроводности и пр. В работе ограничимся качественным локальным аналитическим исследованием динамики тепловых процессов происходящих вблизи точки, где измеряется температура, чтобы использовать свойства тепловых процессов при оценке производной температуры в реальном времени.

Рассмотрим малую шаровую окрестность радиуса R точки, в которой измеряется температура и покажем, что в любой точке этой окрестности поведение температуры может быть описано функцией вида (2.1). Будем считать, что внутри рассматриваемой окрестности среда однородна.

Нормализованное уравнение теплопроводности в сферических координатах (r, φ, ψ) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \tau}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \tau}{\partial \psi} \right) + \delta(r, \varphi, \psi), \quad (2.2)$$

где $\delta(r, \varphi, \psi)$ — функция источника тепла. Искомая функция $\tau = \tau(r, \varphi, \psi, t)$ задает нормализованную температуру в точке с координатами (r, φ, ψ) в момент времени t . Уравнение теплопроводности дополняется начальным и краевым условиями. Начальное условие (задает распределение температуры в начальный момент времени):

$$\tau(r, \varphi, \psi, 0) = \tau_0(r, \varphi, \psi). \quad (2.3)$$

Краевое условие 2-го рода (через границу области происходит теплоотдача потоком с плотностью $q(\varphi, \psi)$):

$$\frac{\partial \tau}{\partial r}(1, t) = -q(\varphi, \psi). \quad (2.4)$$

Сделаем следующие предположения:

- для начальной температуры выполнено условие центральной симметрии $\tau_0(r, \varphi, \psi, t) = \tau_0(r, t)$;
- в центре рассматриваемой области расположен точечный источник тепла постоянной плотности δ ;
- теплоотдача через границу области происходит с потоком постоянной плотности q .

Условия выше позволяют свести пространственную задачу к одномерной. То есть $\tau(r, \varphi, \psi, t) = \tau(r, t)$, а задача (2.2), (2.3), (2.4) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} + \delta, & 0 \leq r < 1, \quad t > 0; \\ \tau(r, 0) = \tau_0(r), & 0 \leq r < 1; \\ \frac{\partial \tau}{\partial r}(1, t) = -q. \end{cases} \quad (2.5)$$

Для решения задачи (2.5) необходимо избавиться от неоднородности в граничном условии. Воспользуемся заменой $v(r, t) = \tau(r, t) + \frac{q}{2}r^2 + 3qt$, тогда:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \delta, & 0 \leq r < 1, \quad t > 0; \\ v(r, 0) = \tau_0(r) + \frac{q}{2}r^2 = f(r), & 0 \leq r < 1; \\ \frac{\partial v}{\partial r}(1, t) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

После замены $m = rv$ задача (2.6) принимает окончательный вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial^2 m}{\partial r^2} + \delta r, & 0 \leq r < 1, \quad t > 0; \\ m(r, 0) = rf(r) = r\tau_0(r) + \frac{q}{2}r^3, & 0 \leq r < 1; \\ \frac{\partial m}{\partial r}(1, t) - m(1, t) = 0, \quad m(0, t) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Задачи вида (2.7) решаются при помощи метода разделения переменных (метод Фурье) [92]:

$$m(r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(r)T_n(t). \quad (2.8)$$

После подстановки (2.8) в (2.7) решение записывается в линейной комбинации собственных функций оператора Штурма-Лиувилля, коэффициенты разложения определяются исходя из начальных условий в задаче (2.5):

$$m(r, t) = \left(3 \int_0^1 \rho^2 f(\rho) d\rho + \delta t \right) r + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 \rho f(\rho) \sin \pi n \rho d\rho \right) \sin(\pi n r) e^{-(\pi n)^2 t}. \quad (2.9)$$

С учетом сделанных замен окончательно получим:

$$\tau(r, t) = -\frac{q}{2}r^2 - 3qt + \left(3 \int_0^1 \rho^2 f(\rho) d\rho + \delta t \right) + \frac{2}{r} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 \rho f(\rho) \sin \pi n \rho d\rho \right) \sin(\pi n r) e^{-(\pi n)^2 t}. \quad (2.10)$$

Таким образом показано, что функции вида (2.1) являются частью общего решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности. Этот

факт, с одной стороны, объясняет почему функций (2.1) подходят для аппроксимации показаний датчиков температуры в частных случаях, а с другой стороны, позволит использовать выражение (2.10) для аппроксимации показаний в более общих ситуациях. Рассмотрим два случая:

- динамика температуры при стационарных внешних условиях (саморазогрев или температурный переход при неподвижном корпусе системы);
- динамика температуры при нестационарных внешних условиях (произвольные движения системы при произвольно изменяющейся внешней температуре).

Оба случая являются типовыми при температурной калибровке БИНС и последующей эксплуатации.

2.3 Аппроксимация показаний датчиков температуры в постобработке

2.3.1 Аппроксимация показаний датчиков температуры при стационарных внешних условиях

Воспользуемся выражением (2.10) для аппроксимации показаний датчиков температуры при стационарных внешних условиях, с учетом предположений:

- в (2.10) ограничимся двумя слагаемыми, в связи с тем, что слагаемые с большим номером представляют собой более быстрые изменения температуры, которые не проявляются на практике при эксплуатации БИНС;
- в (2.10) коэффициентом при t является разность $\delta - 3q$, что приводит к бесконечному росту температуры с течением времени. Однако известно, что при постоянной внешней температуре, через некоторое время после включения системы, наступает термостабилизация, т.е. с некоторого момента времени температура принимает постоянное значение. Значит приток тепла внутри области уравнивается рассеиванием тепла на границе, то есть $\delta - 3q = 0$

С учетом сделанных предположений выражение (2.10) принимает вид (2.1).

Далее рассмотрим задачу аппроксимации показаний датчиков температуры и определения производной температуры при помощи функции вида (2.1). Введем вектор с параметрами функции (2.1), подлежащими определению:

$$x = [\alpha, \beta_1, \beta_2, k_1, k_2]^T, \quad (2.11)$$

Задача определения вектора (2.11) сводится к решению нелинейной оптимизационной задачи с ограничениями вида:

$$\sum_{0 \leq t_i \leq l} (\alpha + \beta_1 e^{-k_1 t_i} + \beta_2 e^{-k_2 t_i} - \tau'(t_i))^2 = \sum_{0 \leq t_i \leq l} (\tilde{\tau}(x, t_i) - \tau'(t_i))^2 \longrightarrow \min_x,$$

с учетом ограничений:

$$k_1 \geq 0, \quad k_2 \geq 0,$$

где $\tau'(t_i)$ — измерения датчика температуры, t_i — моменты регистрации показаний, l — продолжительность записи. Задача такого типа может быть решена, например, при помощи метода доверительных областей [93] или метода проективного градиентного спуска. Согласно (2.1) оценка производной температуры по времени принимает вид:

$$\dot{\tilde{\tau}}(x, t) = -\tilde{k}_1 \tilde{\beta}_1 e^{-\tilde{k}_1 t} - \tilde{k}_2 \tilde{\beta}_2 e^{-\tilde{k}_2 t},$$

где $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2$ — оценки соответствующих коэффициентов.

Пример. Рассмотрим один из примеров, когда функций вида (2.1) аппроксимируют показания датчиков температуры на рис. 2.2. В качестве исходных данных использовались показания термодатчика одного из ДУС в статическом эксперименте в термокамере на переходе с -10 до 0 °С. В течение трехчасового эксперимента изменение температуры внутри БИНС составило порядка 7 °С. Аппроксимирующая показания функция имеет вид:

$$\tau(t) = 19.32 + 2.3e^{-2.94t} - 10.77e^{-0.62t}.$$

На рис. 2.2 видно, что ошибка аппроксимации во всех точках не превышает половины шага квантования показаний $q_\tau/2$, что можно считать наилучшей возможной аппроксимацией показаний. Аналогичные результаты наблюдаются

при аппроксимации показаний датчиков температуры в статических экспериментах на других температурных переходах и при саморазогреве системы. При обработке измерений датчиков температуры в других системах наблюдается такая же картина. Оценка производной температуры для этого примера пред-

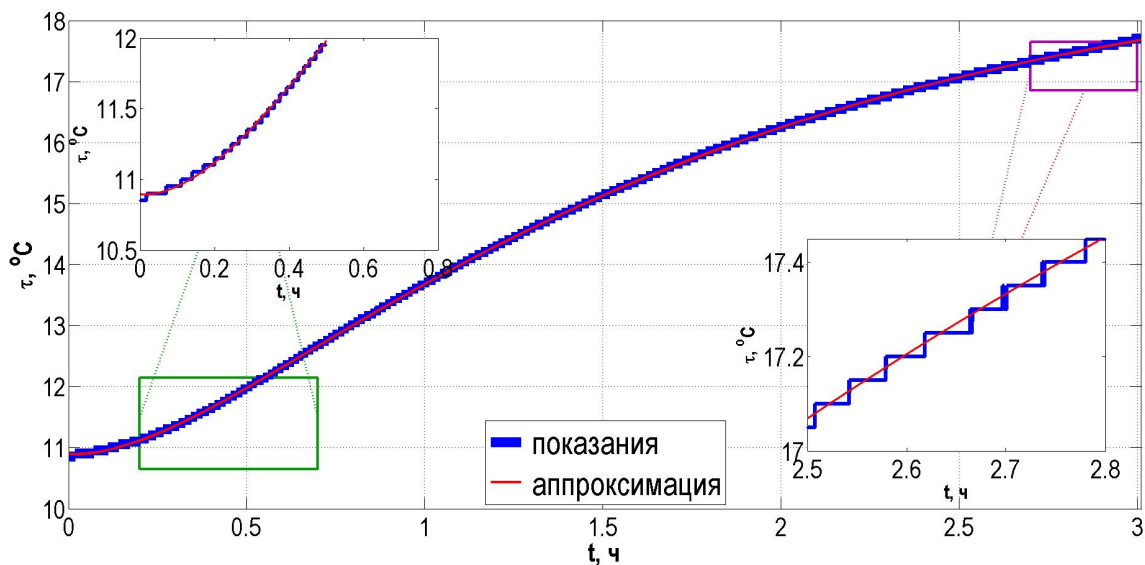


Рис. 2.2: Аппроксимация показаний датчика температуры

ставлена на рис. 2.3. Производная температуры достигает своего максимального значения через 0.5 часа после начала нагрева.

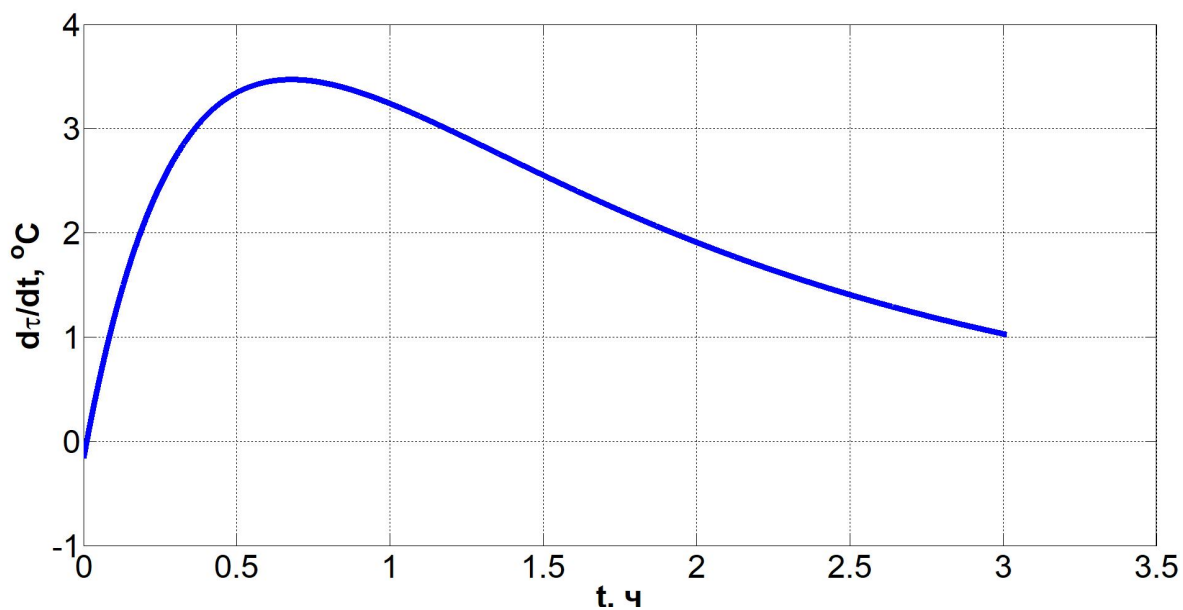


Рис. 2.3: Аппроксимация производной температуры

2.3.2 Оконная аппроксимация показаний датчиков температуры при нестационарных внешних условиях

Заметим, что в случае нестационарной внешней температуры глобальная аппроксимация вида (2.1) может допускать большую ошибку, а изменение температуры внутри БИНС может представлять собой более сложный процесс.

Пример. На рис. 2.4 представлена температура одного из ньютометров в динамическом эксперименте на температурном переходе. В отличие от представленных ранее профилей изменения температуры здесь наблюдаются флуктуации температуры, связанные с тем, что в течение эксперимента выполнялось вращение БИНС и флуктуации вызваны перемещением воздушных масс в термокамере и самой системе. В случае эксплуатации БИНС в режиме навигации, внешняя температура может изменяться весьма произвольным образом, но при этом изменение температуры внутри системы всегда является непрерывным и достаточно гладким, что позволяет сделать предположение о возможности локальной аппроксимации показаний датчиков температуры при помощи функций вида (2.10).

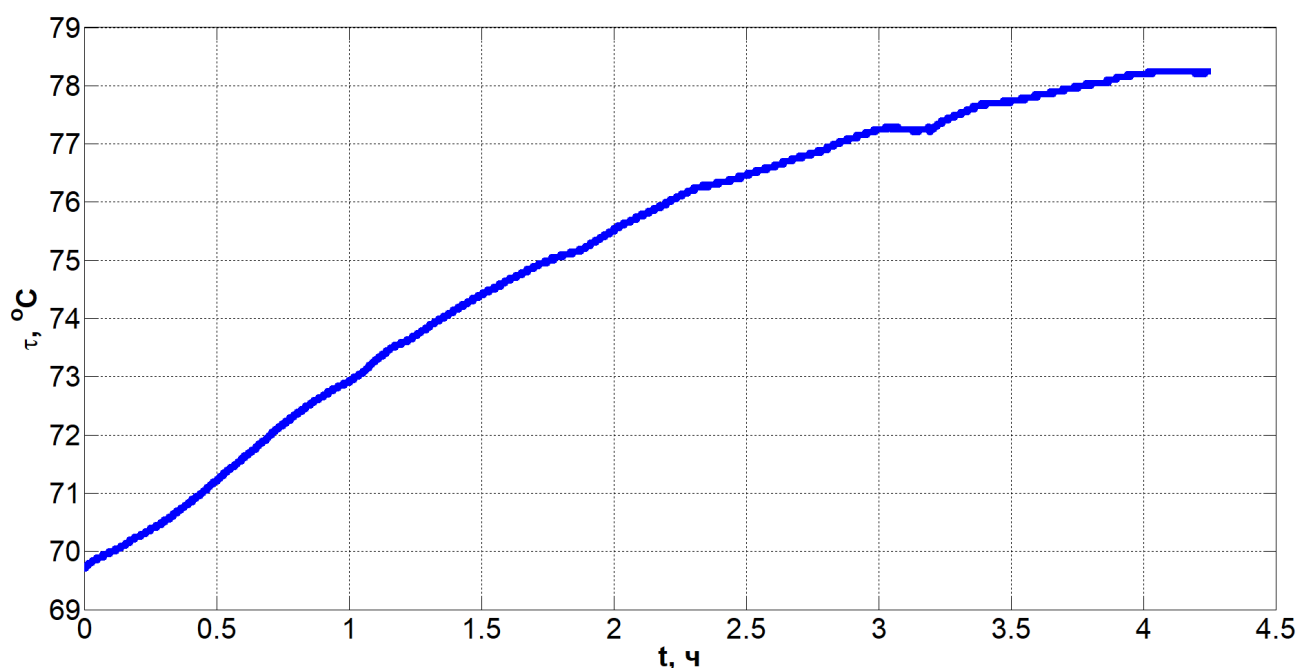


Рис. 2.4: Пример: профиль температуры с флуктуациями

Рассмотрим аппроксимацию показаний датчиков температуры в симметричном окне ширины t_w с использованием функции вида:

$$\tau(t) \approx \tilde{\tau}(t) = \alpha + \beta \frac{t}{t^*} + \gamma e^{-t/t^*}, \quad (2.12)$$

где параметры t^* , α , β , γ подлежат оценке по набору измерений датчика температуры внутри окна. Вид функции (2.12) соответствует выражению (2.10) с одной экспонентой в сумме. Отметим, что условие постоянного оттока тепла на границе (2.4), вообще говоря, нарушается. Однако, поскольку процессы теплообмена системы с внешней средой протекают достаточно медленно, можно считать условие выполненным на коротких интервалах времени (несколько минут). Оценка производной определяется в соответствии с выражением:

$$\dot{\tau}(t) \approx \dot{\tilde{\tau}}(t) = \beta \frac{1}{t^*} - \gamma \frac{e^{-t/t^*}}{t^*}. \quad (2.13)$$

Оконная аппроксимация как задача линейного оценивания при фиксированном параметре времени t^*

Задача определения параметров в модели (2.12) может быть сведена к линейной задаче оценивания, если считать параметр времени t^* известной величиной. Сформулируем задачу оценивания: введем вектор состояния x :

$$x = [\alpha, \beta, \gamma]^T, \quad t \in [0, t_w]. \quad (2.14)$$

На отрезке $[0, t_w]$ доступен набор измерений $\tilde{\tau}'(t_1), \dots, \tilde{\tau}'(t_k)$. Вектор состояния связан с измерениями следующим соотношением:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\tau}'(t_1) \\ \vdots \\ \tilde{\tau}'(t_k) \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t_1}{t^*} & e^{-\frac{t_1}{t^*}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{t_k}{t^*} & e^{-\frac{t_k}{t^*}} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Задача (2.15) решается, например, при помощи метода наименьших квадратов (МНК):

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = (H^T H)^{-1} H^T \begin{bmatrix} \tilde{\tau}'(t_1) \\ \vdots \\ \tilde{\tau}'(t_k) \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

МНК дополнительно к оценке вектора (2.14) позволяет получить соответствующее значение СКО:

$$P = (H^T H)^{-1} \sigma_0, \quad (2.17)$$

где σ_0 соответствует ошибке измерений $\tau'(t_j)$, для которой можно принять $\sigma_0 = q_\tau/4$. Оценка производной температуры в момент времени t будет выражаться:

$$\dot{\hat{\tau}}(t) = \frac{\partial h}{\partial t} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \left[0, \frac{1}{t^*}, -\frac{1}{t^*} e^{-\frac{t}{t^*}} \right], \quad (2.18)$$

далее, выражение для оценки СКО производной температуры в свою очередь принимает вид:

$$\sigma[\dot{\hat{\tau}}] = \sqrt{\frac{\partial h}{\partial t} P \frac{\partial h^T}{\partial t}}. \quad (2.19)$$

Пример. Рассмотрим один из примеров результатов работы описанного выше алгоритма рис. 2.5. Рассматривается профиль температуры с возмущениями, общая вариация температуры за 6 часов эксперимента составила около 12 °С. Для этого примера ширина окна принята $t_w = 6$ мин., а постоянная времени $t^* = 30$ мин. Подробные рекомендации по выбору этих априорных параметров будут даны ниже, пока будем считать, что они выбраны опытным путем. Оконная аппроксимация дает качественную оценку температуры, во всех точках ошибка аппроксимации составляет менее $q_\tau/2$. Оценка производной для этого примера представлена на рис. 2.6. Будем использовать полученный результат в качестве эталона при оценке качества работы алгоритма для определения производной температуры в реальном времени.

Оконная аппроксимация как нелинейная задача оптимизации

В большинстве случаев оконный фильтр с фиксированной постоянной времени t^* дает результат приемлемой точности, однако, как упоминалось ранее, такой подход не позволяет аппроксимировать быстрые вариации температуры. Это особенно заметно при быстром нагревании или охлаждении системы в термокамере. Поэтому задача (2.12) в общем виде заслуживает отдельного внимания. Вектор состояния (2.14) дополняется параметром времени t^* , который уже

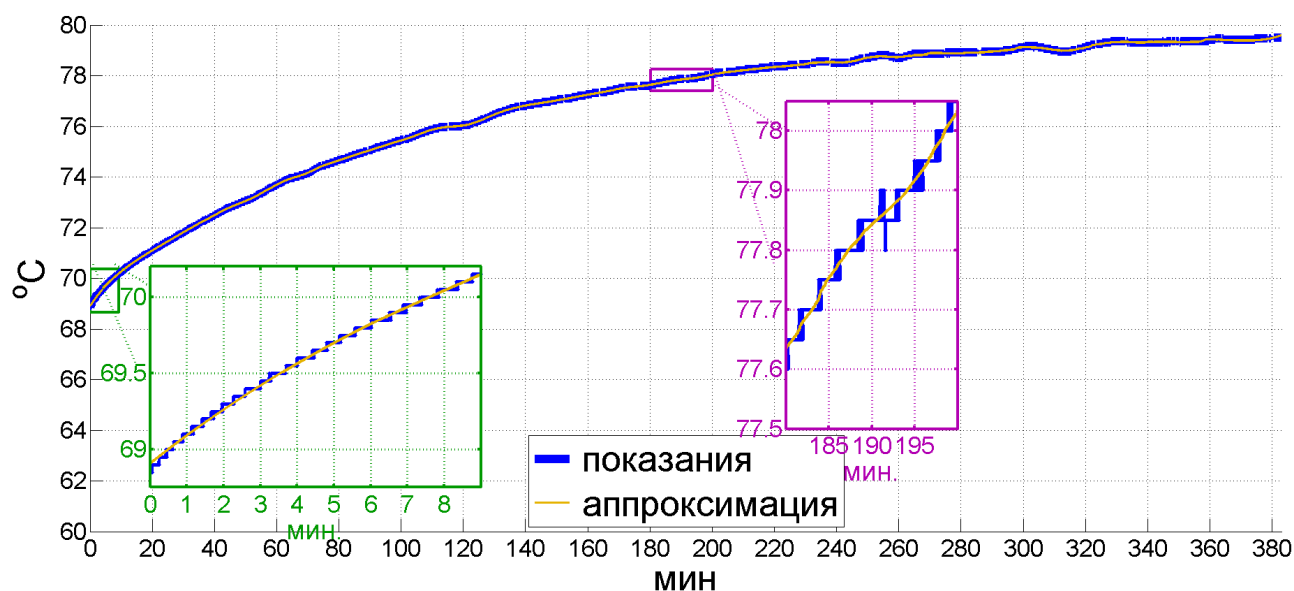


Рис. 2.5: Пример: локальная аппроксимация показаний термодатчика ньютонометра скользящим окном

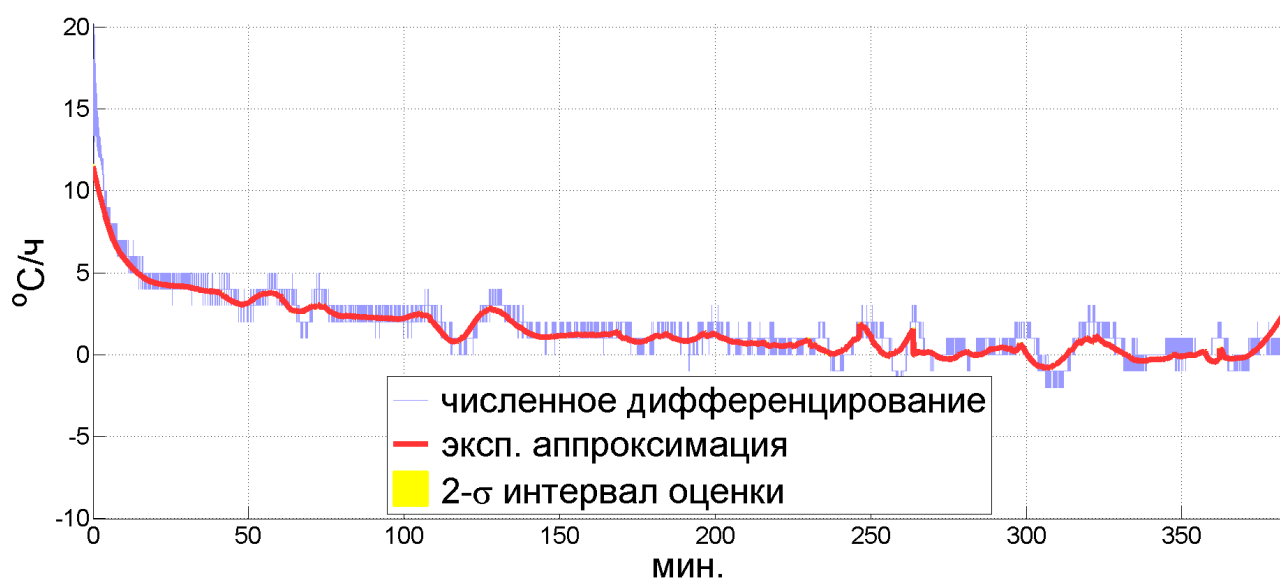


Рис. 2.6: Пример: оценка производной температуры ньютонометра при помощи скользящего окна с экспоненциальной моделью

не является известным:

$$x = [\alpha, \beta, \gamma, t^*]^T, \quad t \in [0, t_w]. \quad (2.20)$$

На отрезке $[0, t_w]$ доступен набор измерений $\tilde{\tau}'(t_1), \dots, \tilde{\tau}'(t_k)$. Оценка вектора состояния (2.20) определяется согласно критерию:

$$\sum_{0 \leq t_i \leq T_w} (\tau'(t_i) - \tilde{\tau}(x, t_i))^2 \longrightarrow \min_x. \quad (2.21)$$

Задача (2.21) дополняется естественным ограничением $t^* \geq 0$. Сформулированная задача является задачей нелинейной оптимизации с ограничением. Задача такого типа может быть решена, например, при помощи метода доверительных областей. Оценка производной температуры имеет вид:

$$\dot{\tau}(t) = \beta \frac{1}{t^*} - \gamma \frac{e^{-t/t^*}}{t^*}. \quad (2.22)$$

Пример. Рассмотрим пример (рис. 2.7) оценки производной при помощи нелинейного оконного фильтра и сравним результат с линейным оконным фильтром. В общих чертах кривые повторяют друг друга, однако на кривой, полученной с помощью нелинейного оконного фильтра, видны небольшие флуктуации производной, которые не заметны при аппроксимации линейным оконным фильтром. Если сравнивать полученные кривые с результатом численного дифференцирования, можно убедиться, что в точках перегиба производной температуры результат нелинейного оконного фильтра расположен ближе к нему, причем отличие может составлять 1–2 °С/ч.

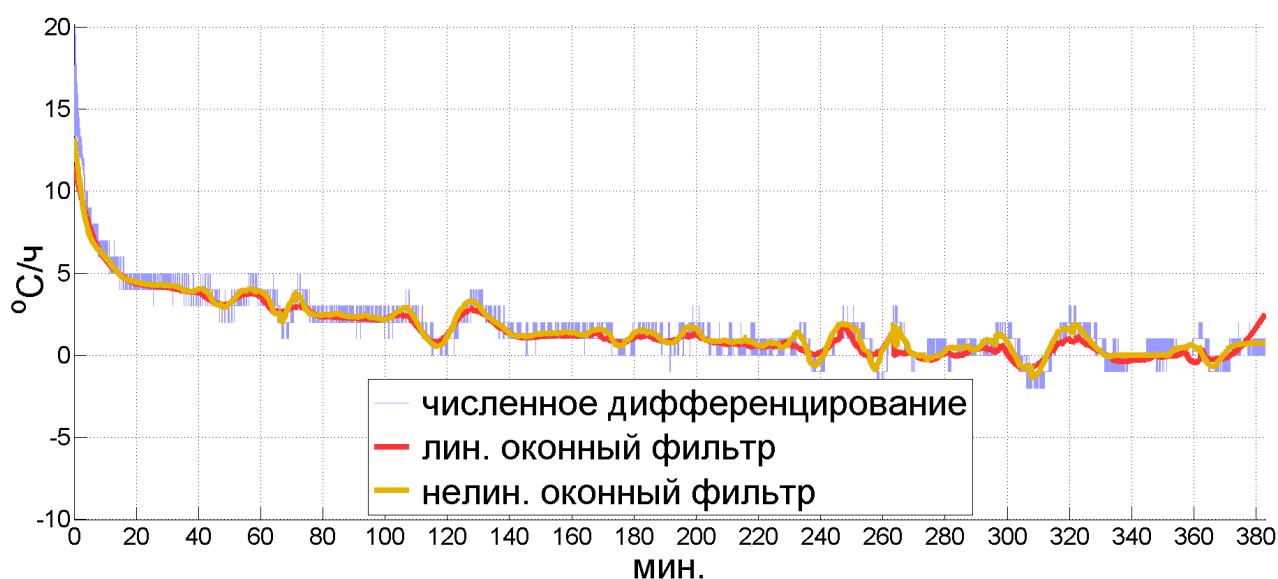


Рис. 2.7: Сравнение: оценка производной температуры ньютонометра при помощи скользящего окна с фиксированным параметром времени и со свободным параметром времени

2.4 Аппроксимация показаний датчиков температуры в реальном времени

При работе БИНС в режиме навигации, алгоритмическая компенсация параметров в модели погрешностей измерений инерциальных датчиков должна выполняться в реальном времени. Если модель погрешностей включает в себя коэффициенты зависимостей от производной температуры по времени, то определение производной температуры в реальном времени становится ключевой задачей. При разработке алгоритма оценки производной температуры в реальном времени, примем во внимание следующие обстоятельства:

- характер изменения температуры существенно изменяется с течением времени, что делает нецелесообразным использование всех накопленных измерений в оценке;
- с другой стороны, даже в современных БИНС нет возможности хранить достаточно продолжительную (десятки минут) полную историю измерений датчиков температуры;
- оценка производной температуры не должна иметь резких скачков, которые приведут к росту ошибок в навигационном решении при компенсации;
- как было сказано ранее, ошибки квантования датчика не соответствуют модели процесса белого шума.

Таким образом, будем рассматривать оконные алгоритмы аппроксимации, допускающие реализацию в рекуррентном виде.

2.4.1 Простейший дифференцирующий фильтр

Для начала рассмотрим простой дифференцирующий фильтр, определяющий среднее значение производной температуры на отрезке длиной l :

$$\hat{\tau}'(t) = \frac{1}{N} \sum_{t-l < t_i \leq t} \frac{\tau'(t_i) - \tau'(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \approx \frac{\tau'(t) - \tau'(t-l)}{l}, \quad (2.23)$$

здесь N — число измерения на отрезке, $\hat{\tau}(t)$ — оценка производной температуры по времени в момент t . Заметим, что значения производной в узлах сетки аппроксимируются первыми разностями и при равномерной сетке времени формула (2.23) упрощается до первой разности на концах отрезка.

Пример. На рис. (2.8) представлен пример оценки производной температуры по времени при помощи двух описанных выше подходов. Для дифференцирующего фильтра использовалось окно шириной 3 минуты. Оба подхода дают схожую оценку производной температуры, однако можно заметить два основных недостатка численного дифференцирования.

1. Оценка, полученная при помощи дифференцирующего фильтра склонна к «скачкам» на 1 °С/ч. или, в некоторые моменты времени, 2 °С/ч, в то время как фактический процесс нагрева является гладким и непрерывным. С учетом того, что общая вариация производной в этом примере составляет около 4 °С/ч, подобные скачки составляют $25 - 50$ % от этой вариации. Уменьшение ширины окна может усилить эти скачки.
2. Наблюдается запаздывание оценки дифференцирующего фильтра относительно оценки с помощью экспоненциальной модели. Запаздывание достигает нескольких минут в период интенсивного разогрева. Увеличение ширины окна приводит к увеличению запаздывание.

Рассмотренный алгоритм численного дифференцирования не является единственно возможным. Другим подходом к определению производной является аппроксимация показаний датчиков внутри симметричного окна линейной функцией при помощи МНК. Далее, коэффициент наклона прямой берется в качестве производной. Этот подход будет рассмотрен в разделе 2.4.5.

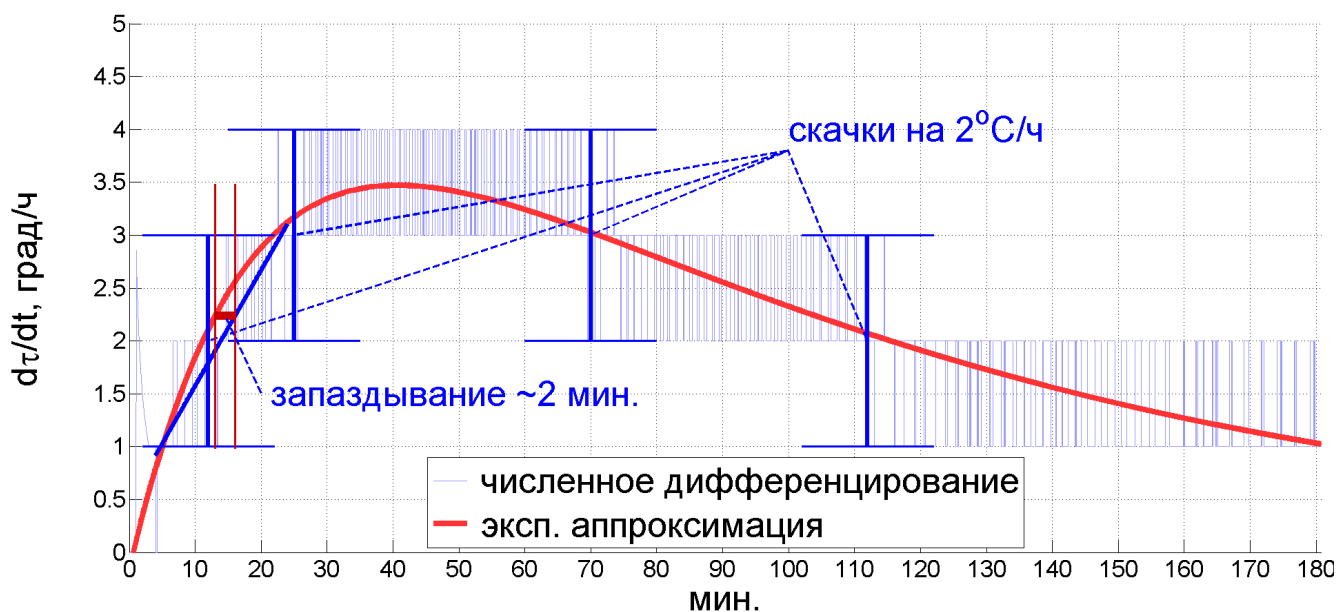


Рис. 2.8: Дифференцирующий фильтр и глобальная аппроксимация экспоненциальной моделью

2.4.2 Оконная экспоненциальная регрессия

Как отмечалось ранее, одной из особенностей измерений датчиков температуры является сравнительно большой шаг квантования измерений. С учетом того, что температура внутри БИНС изменяется достаточно медленно и гладко, в зависимости от скорости изменения температуры, показания датчиков могут сохранять одно и то же значение (оставаться на одном и том же уровне квантования) продолжительные интервалы времени (минуты и десятки минут). В то же время, реальная температура имеет значение выше или ниже этого уровня. В момент перехода измерений с одного уровня квантования на другой будем считать, что реальное значение температуры находится близко к среднему значению двух уровней. Обозначим такие измерения через $\tilde{\tau}'(t)$:

$$\tau'(t - \Delta t) \neq \tau'(t) \quad \implies \quad \tilde{\tau}'(t) = \frac{\tau'(t - \Delta t) + \tau'(t)}{2}, \quad (2.24)$$

где Δt соответствует шагу по времени датчика температуры. Подобный подход к формированию измерений позволяет существенно сократить число измерений и, с другой стороны, повысить их точность за счет осреднения. После преобразования измерений для ошибки будем использовать модель белого шума.

Для определения коэффициентов модели будем использовать модификацию фильтра Калмана [88].

В вектор состояния системы в входят только постоянные случайные величины, поэтому формирующее уравнение системы примет тривиальный вид:

$$\dot{x} = 0,$$

уравнение дополняется начальным значением вектора состояния $\tilde{x}(0)$, и начальной матрицей ковариаций $P(0)$. В каждый момент времени t_j , когда поступает новое измерение z , его связь с вектором состояния описывается уравнением:

$$z(t_j) = h(t_j)x + r(t_j),$$

где r — случайная ошибка измерения. Мы предполагаем, что случайные ошибки независимы и имеют соответствующую матрицу ковариаций ошибок измерений σ_0 . Далее, рассмотрим рекуррентный процесс получения оценки вектора состояния \tilde{x}^+ и соответствующей оценки матрицы ковариаций P^+ на основе нового $(k+1)$ -го измерения для оценок вектора состояния \tilde{x}^- и матрицы ковариаций P^- , полученных на предыдущем шаге k :

$$\tilde{x}^+ = \tilde{x}^- + \frac{P^- h^T (z - h \tilde{x}^-)}{\sigma_0^2 + h P^- h^T}, \quad P^+ = P^- - \frac{P^- h^T h P^-}{\sigma_0^2 + h P^- h^T}. \quad (2.25)$$

На практике приведенная выше формула редко используется, что связано с тем, что из-за численных ошибок матрица ковариаций P перестает быть положительно определенной. Численно устойчивая реализация фильтра Калмана предполагает факторизацию матрицы ковариаций, например, при помощи разложения Холецкого:

$$P = S S^T, \quad S_{ij} = 0 \quad \forall i > j, \quad (2.26)$$

здесь S является верхнетреугольной матрицей. Тогда второе выражение в формуле (2.25) принимает вид:

$$S^+ = S^- \left(E - \frac{S^{-T} h^T h S^-}{\sigma_0^2 + h S^- S^{-T} h^T} \right)^*, \quad (2.27)$$

где E — единичная матрица, операция $*$ обозначает матрицу, полученную в результате разложения Холецкого.

Алгоритм исключения устаревших измерений из оценки:

$$\tilde{x}^- = \tilde{x}^+ - \frac{P^+ h^T (z - h \tilde{x}^+)}{\sigma_0^2 - h P^+ h^T}, \quad S^- = S^+ \left(E + \frac{S^{+T} h^T h S^+}{\sigma_0^2 - h S^+ S^{+T} h^T} \right)^*. \quad (2.28)$$

По сути, уравнения (2.28) являются обратными к уравнениям (2.25). Отметим, что уравнения (2.28) должны использоваться только в том случае, когда остающихся измерений достаточно, чтобы сохранить обусловленность оценки вектора состояния.

Для определения производной температуры в реальном времени модифицируем модель (2.12) так, чтобы избежать ситуации, когда слагаемое с экспонентой становится пренебрежимо малым из-за больших величин времени. Дополнительно, оставим минимальное число слагаемых, необходимых для аппроксимации температуры на интервале в несколько минут:

$$\tau(t) \approx \tilde{\tau}(t) = \alpha + \beta \frac{t - t_0}{t^*} + \gamma e^{-(t-t_0)/t^*}, \quad (2.29)$$

где t_0 соответствует началу окна, в котором выполняется аппроксимация. В векторной форме задача оценивания производной температуры имеет вид:

$$\tilde{\tau}(t) = h(t)x, \quad h(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t-t_0}{t^*} & e^{-(t-t_0)/t^*} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \implies \dot{\tilde{\tau}} = \frac{\partial h}{\partial t} x, \quad (2.30)$$

где параметры α , β , γ , t_0 , и t^* считаются локально постоянными, но могут изменяться на протяжении всего интервала обработки. Постоянная времени t^* может рассматриваться в качестве компоненты вектора состояния в нелинейной постановке задачи оценивания. Результаты обработки множества различных экспериментов при изменяющейся температуре показали, что достаточно рассматривать t^* в качестве постоянной, чтобы получать приемлемые результаты оценки производной температуры. Описание алгоритма оценки производной температуры по времени дано в приложении.

2.4.3 Численное моделирование производной температуры по времени

Для проверки описанного алгоритма оценки производной температуры в реальном времени были смоделированы показания датчика температуры, в ко-

торые добавлено квантование $q_\tau = 0.05$ °C. Моделирование является полунатурным, поскольку в основе смоделированных показаний лежит функция, обеспечивающая глобальную аппроксимацию показаний датчика температуры БИНС-РТ. Профиль температуры соответствует изменению температуры в БИНС-РТ в статическом эксперименте в термокамере на температурном переходе, куда были добавлены флуктуации изменяющиеся по синусоиде и соответствующие реальным флуктуациям температуры, возникающим в БИНС-РТ при вращении в термокамере. Смоделированные показания датчика температуры представлены на рис. 2.9 (верхний график), продолжительность модельного эксперимента составляет 3 часа.

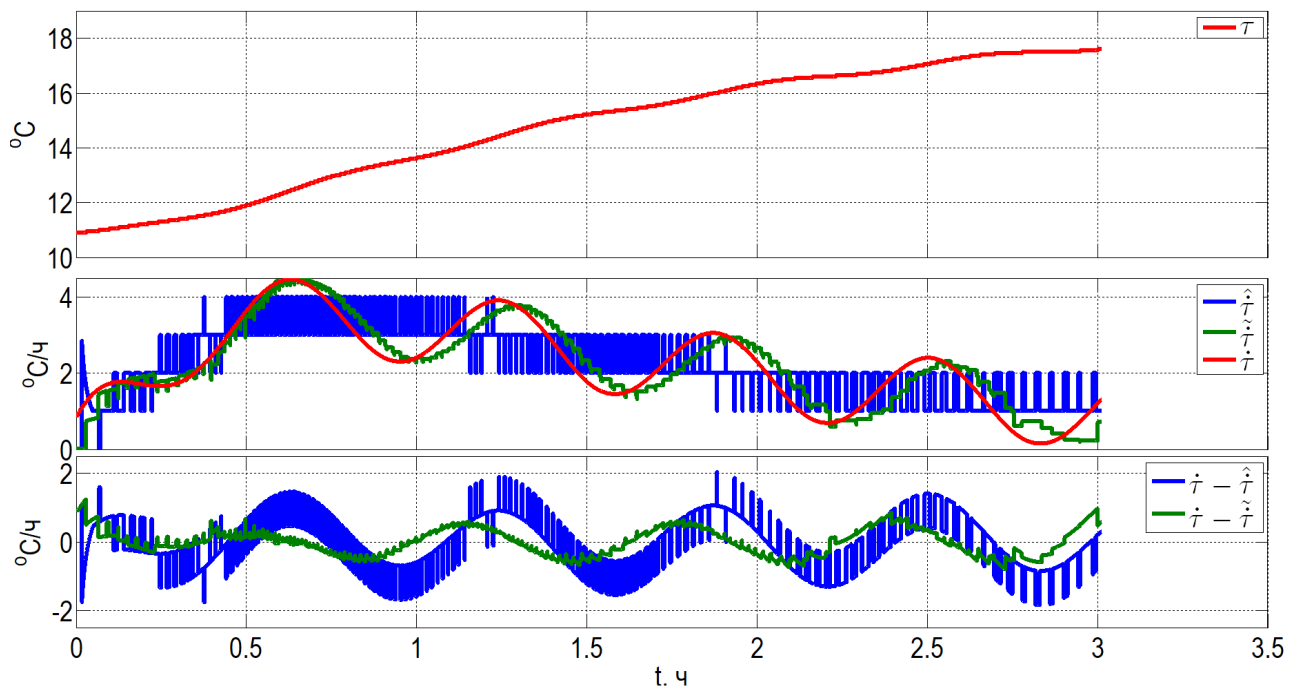


Рис. 2.9: Модельные показания датчика температуры, оценка производной температуры фильтром реального времени и дифференцирующим фильтром, а также ошибки оценки производной температуры

На рис. 2.9 (средний график) представлены фактическая производная температуры по времени (красная кривая) и оценки при помощи дифференцирующего фильтра (синяя кривая) и рассматриваемого алгоритма (зеленый график). Для дифференцирующего фильтра ширина окна принята равной трем минутам, для алгоритма оценивания использовались параметры $t_w = 6$ мин, $t^* = 3$ мин. На графике видно, что оценка производной фильтром реального времени повторяет эталон с хорошей точностью, средняя абсолютная ошибка оценки со-

ставляет $0.32 \text{ }^\circ\text{C}/\text{ч}$, аналогичная величина для дифференцирующего фильтра составляет $0.67 \text{ }^\circ\text{C}/\text{ч}$. Таким образом, оценка полученная при помощи дифференцирующего фильтра хуже примерно в 2 раза, что хорошо видно на рис. 2.9 (нижний график), где приведены ошибки оценок двух алгоритмов.

2.4.4 Результаты обработки экспериментальных данных

Алгоритм оценки температуры и производной температуры в реальном времени был опробован при обработке более 100 записей датчиков температуры БИНС-РТ в различных экспериментах при изменяющейся температуре с системой, вращающейся в термокамере. Большинство экспериментов представляют собой температурные переходы с подвижной системой из одной температурной точки в другую, продолжительностью около часа. В таблице 2.1 представлены сводные характеристики проведенных экспериментов. Эксперименты покрывают весь рабочий диапазон температур системы и возникающие в реальных условиях скорости изменения температуры.

При оценке качества работы алгоритма оценивания производной температуры в реальном времени эталонной информацией являлись результаты обработки тех же записей при помощи метода оконной аппроксимации. Дополнительно производная оценивалась при помощи дифференцирующего фильтра.

Пример. Рассмотрим один из примеров работы алгоритма (рис. 2.10), где оценивается производная температуры одного из ньютометров. Для этого примера ширина окна t_w принималась равной 3 мин. и постоянная времени t_0 равной 2 мин. На графике можно заметить, что оценка производной температуры фильтром реального времени во всех точках находится близко к эталону, однако наблюдается запаздывание в 1 – 2 минуты. Как и в предыдущем примере, здесь наблюдается запаздывание оценки на 1 – 2 минуты, при этом отклонение от эталона во всех точках находится в пределах допустимого диапазона q_T . Подобное запаздывание проявлялось при обработке множества экспериментов с различными значениями t_w и t_0 , тем не менее, такое запаздывание можно считать допустимым в связи с тем, что тепловые процессы внутри БИНС развиваются достаточно медленно и сказываются на погрешностях датчиков с близким по величине запаздыванием. Более подробно выбор параметров t_w и t_0

обсуждается ниже. В таблице 2.2 приведены результаты обработки серии экспериментов.

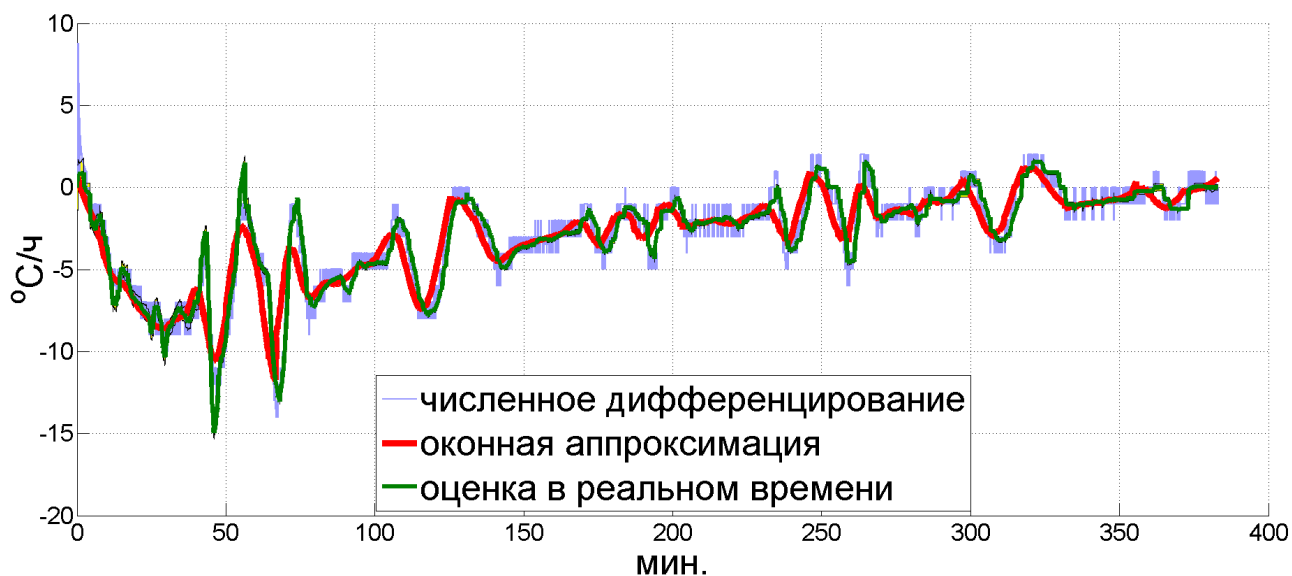


Рис. 2.10: Пример: оценка производной температуры в реальном времени для одного из ньютометров БИНС-РТ

С учетом приведенных графиков и результатов работы алгоритма в различных условиях можно сделать вывод, что предложенный алгоритм решает поставленную задачу определения производной температуры инерциальных датчиков с требуемой точностью.

Характеристика	Значение
Число экспериментов	121
Средняя продолжительность, ч	1
Совокупный диапазон изменения температуры, °C	100
Среднее абсолютное изменение температуры за эксперимент, °C	15
Максимальная вариация производной температуры за эксперимент, °C/ч	20
Средняя вариация производной температуры за эксперимент, °C/ч	8

Таблица 2.1: Сводная статистика по характеристикам экспериментов

Метрика	Значение
Среднее (по точкам) отклонение от эталонной оценки, °C/ч.	0.02
Среднее абсолютное отклонение, °C/ч.	0.9
Стандартное отклонение ошибки оценки, °C/ч.	1.3
Средняя оценка запаздывания, мин	1.9

Таблица 2.2: Сводная статистика по результатам обработки серии экспериментов при изменяющейся температуре, за исключением начального переходного процесса

2.4.5 Редукция температурной модели

В разделе исследуется вопрос, является ли предложенная модель (2.30) избыточной. Для этого проведено сравнение результатов оценивания производной температуры согласно предложенной модели и простой линейной модели без слагаемого, содержащего экспоненту. Во втором случае модель содержит

всего 2 компоненты для определения и исчезает необходимость для обновления значений для t_0 :

$$\tilde{\tau}(t) = \alpha' + \beta' \frac{t}{T_0}. \quad (2.31)$$

Параметры модели (2.31) определялись при помощи описанного ранее алгоритма оценивания. Результаты работы двух алгоритмов с t_w равным 5 мин. приведены на рис. 2.11. На графике видно, что после прохождения максимального значения производной результаты практически неразличимы, однако отличия проявляются в первые минуты после начала оценивания. Эти минуты играют важную роль при компенсации зависимостей от производной температуры в режиме навигации, потому что именно в этот период производная температуры имеет максимальную вариацию. Основные свойства оценки с использованием линейной модели следующие:

- СКО оценки с линейной моделью заметно меньше, чем с экспоненциальной, при этом отклонение от эталона больше; это наблюдение говорит о несоответствии линейной модели реальному процессу;
- линейная модель склонна проявлять большее запаздывание, по сравнению с экспоненциальной;
- примерно с 40ой минуты, оценки, полученные двумя способами близки друг к другу; отметим, что это отличие в первые 40 минут играет важную роль, поскольку именно в этот период времени производная температуры достигает максимальной вариации, которая необходима для хорошей обусловленности оценок коэффициентов зависимости от производной температуры по времени в модели (1.4).

Таким образом, можно заключить, что экспоненциальная модель является более предпочтительной, так как имеет меньшее запаздывание и меньшую ошибку оценки в сравнении с линейной моделью.

2.4.6 Выбор априорных параметров фильтра

Важным является вопрос о выборе ширины окна t_w и параметра времени t^* . Результаты обработки серии экспериментов показали, что эти параметры

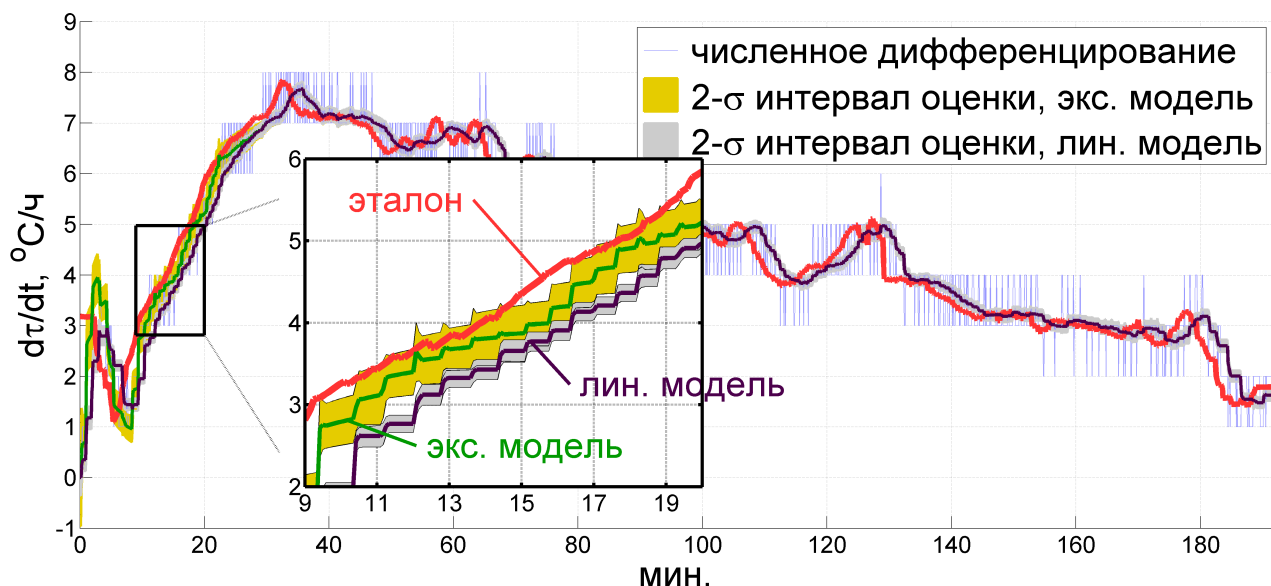


Рис. 2.11: Сравнение оценок производной температуры, полученные при использовании различных температурных моделей

можно считать постоянными характеристиками, определяемыми конструкцией БИНС конкретного типа. Эти параметры должны уточняться при переходе от одной системы к другой. Основываясь на имеющемся опыте можно сформулировать несколько рекомендаций по выбору этих параметров.

1. При выборе ширины окна t_w необходимо руководствоваться тем фактом, что быстрые вариации температуры с характерным временем меньше половины t_w будут осредняться во время аппроксимации. С другой стороны, чрезмерное уменьшение размера окна приводит к тому, что при медленных изменениях температуры в окне может оказаться недостаточно измерений. Основываясь на опыте, процессы нагревания/охлаждения, проходящие внутри систем навигационного класса точности являются достаточно медленными, поэтому начальные значения для t_w рекомендуется выбирать в диапазоне от 3 до 10 минут. Дополнительным фактором, который необходимо принять во внимание является тип инерциального датчика, вблизи/внутри которого измеряется температура. В примере, в системе БИНС-РТ используются лазерные гироскопы и кварцевые ньютонметры. Чувствительные элементы лазерных гироскопов расположены внутри стеклянного корпуса, заполненного инертный газом под низким давлением, поэтому быстрые температурные флуктуации для ДУС про-

являются заметно меньше, чем у ньютонометров, которые в разы меньше и сделаны почти полностью из металла. Поэтому для ньютонометров в данном случае выбрана ширина окна t_w примерно в 2 раза меньше.

2. Связь между ошибкой измерений температуры q_τ , шириной окна t_w и ошибкой оценки производной выражается следующим образом.

$$\Delta \dot{\tau} \sim q_\tau / t_w.$$

На практике, автору встречались различные значения q_τ : 0.05 °C, 0.1 °C, 0.2 °C. В примерах, представленных в этой главе, $\Delta \dot{\tau} \sim 0.05$ °C/3 мин = 1 °C/ч. На рис. 2.12 представлено сравнение результатов оценки производной температуры в реальном времени с разными значениями ширины окна t_w (3 мин, 5 мин) и нелинейной оконной аппроксимации в постобработке. В данном случае оба варианта аппроксимации можно считать приемлемыми, так как в обоих случаях отклонение от оконной аппроксимации несущественно (менее 0.5 °C/ч). Увеличение t_w приводит к увеличению запаздывания оценки и усилению сглаживания быстрых температурных вариаций.

3. Параметр t^* должен быть в несколько раз меньше t^* для обеспечения хорошей обусловленности оценки вектора состояния. На рис. 2.13 представлено сравнение результатов оценки производной температуры в реальном времени с разными значениями параметра времени t^* (2 мин, 3 мин) и нелинейной оконной аппроксимации. В этом случае результаты практически неразличимы между собой. Меньшему значению параметра соответствует бóльшая ширина интервала ошибки оценки.

Таким образом, в приведенных примерах, значимая разница между результатами оценки производной температуры в реальном времени с разными значениями параметров t_w и t^* отсутствует (в рамках априорно заданных диапазонов).

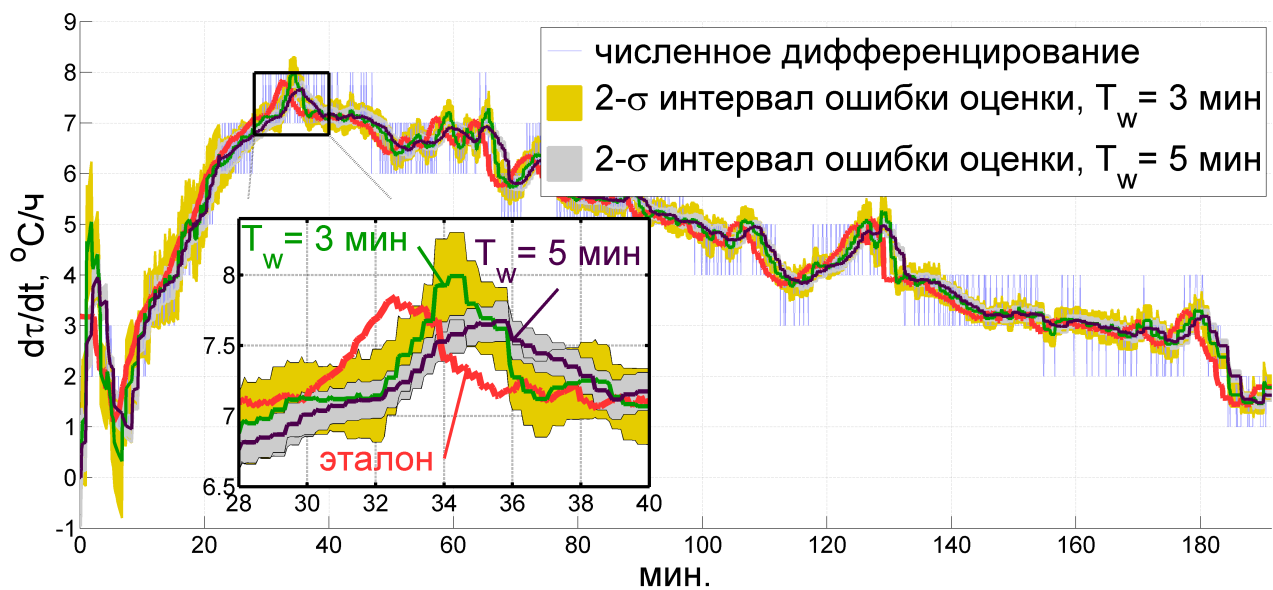


Рис. 2.12: Оценки производной температуры по времени при различных значениях ширины окна t_w

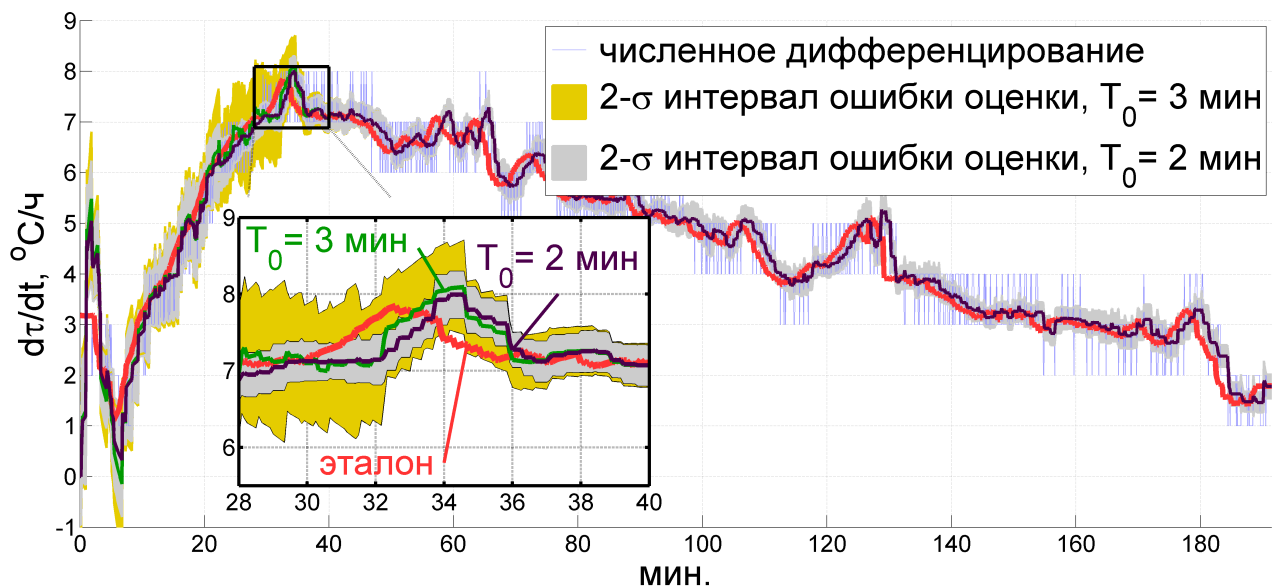


Рис. 2.13: Оценки производной температуры по времени при различных значениях параметра времени t^*

Заключение к главе

В главе рассмотрена задача определения производной температуры по измерениям датчиков температуры (в условиях квантования) в постобработке и реальном времени. Перечислим основные результаты.

1. Предложен метод аппроксимации показаний датчиков температуры при помощи эмпирической модели. Установлена качественная связь предложенной модели с динамикой теплового процесса, протекающего внутри БИНС. Доказано, что такие функции формируют решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с краевыми условиями 2-го рода.
2. Рассмотрены случаи, допускающие глобальную аппроксимацию показаний термодатчиков в постобработке при стационарных внешних условиях: статический саморазогрев системы и температурные переходы в термокамере. Приведены результаты аппроксимации, оценка качества аппроксимации и сравнение с осредняющим дифференцирующим фильтром.
3. Разработан алгоритм оценки производной температуры в реальном времени при помощи модификации фильтра Калмана. Описана работа алгоритма, приведены основные соотношения, описывающие процесс оценивания. Показано, что предложенный алгоритм решает поставленную задачу на модельных данных.
4. Все перечисленные алгоритмы опробованы при обработке реальных экспериментов с системой навигационного класса точности БИНС-РТ. Показано, что предложенные подходы решают сформулированную в начале главы задачу с требуемой точностью.
5. Исследована целесообразность дальнейшего упрощения экспоненциальной модели, а также выбор используемых в алгоритме оценивания априорных параметров.

Глава 3

Практические примеры температурной калибровки

В главе приведены результаты температурной калибровки двух различных БИНС при помощи математических моделей и алгоритмов, рассмотренных в предыдущих главах. В первом случае рассмотрены результаты калибровки системы навигационного класса точности — БИНС-РТ производства АО «Инерциальные технологии Технокомплекса» (г. Раменское). В другом примере представлены результаты калибровки системы низкого класса точности — микромеханической курсовертикали БЧЭММ-1 разработки АО «Московский институт электромеханики и автоматики». В обоих случаях приводятся оценки температурных коэффициентов и соответствующих СКО. Для оценки качества калибровки приводятся результаты навигационного счисления (в части ошибок счисления) до и после калибровки системы.

При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [66, 81]

3.1 Точная БИНС на базе кольцевых лазерных гироскопов

Рассматривается инерциальная система авиационного назначения навигационного класса точности на базе кольцевых лазерных гироскопов и кварцевых ньютометров (БИНС-РТ производства АО «Инерциальные технологии Технокомплекса», г. Раменское). Характеристики системы приведены в таблице 3.1.

Характеристика	значение
СКО шумов измерений ДУС, [град/ч]/ $\sqrt{\Gamma\text{ц}}$	2
Стабильность нулевого сигнала ДУС, град/ч.	0.01
Стабильность масштабного коэффициента ДУС, ppm	3
СКО шумов измерений ньютометров [мм/сек ²]/ $\sqrt{\Gamma\text{ц}}$	3
Стабильность нулевого сигнала ньютометров, мм/сек ²	0.5

Таблица 3.1: Основные характеристики БИНС-РТ

3.1.1 Математические модели задачи калибровки

В качестве модели погрешностей измерений инерциальных датчиков у производителя принята модель (1.4), в предположении отсутствия зависимостей от производной температуры по времени, пространственного градиента температуры, а также зависимостей от температуры для малых углов перекосов осей чувствительности¹:

$$\begin{aligned}\Delta f_z^i &= \Delta f_z^{0i} + K_{\Delta f}^i T_f^i + \Gamma_j^i f_z^j + K_{\Gamma_i}^i T_f^i f_z^j, \\ \nu_z^i &= \nu_z^{0i} + K_\nu^i T_\omega^i + \Theta_j^i \omega_z^j + K_{\omega_i}^i T_\omega^i \omega_z^i, \quad i, j = 1, 2, 3.\end{aligned}\quad (3.1)$$

Поскольку калибровка БИНС-РТ выполнялась на точном двухосном испытательном стенде Acutronic с термокамерой, характеристики которого приведены в таблице 3.2, стало возможным использование дополнительной информации об углах поворота платформы стенда в корректирующих измерениях [38]. Будем считать, что с планшайбой стенда жестко связана система координат Mr (ось Mr_z связана с внешней осью вращения стенда, а другие две оси лежат в плоскости планшайбы). БИНС устанавливается на стенде таким образом (рис. 2), что приборная система координат совпадает со стендовой с точностью до малых углов-ошибок установки системы (углов юстировки) κ_p . Датчики, установленные на стенде, измеряют углы поворота планшайбы вокруг внешней и внутренней осей вращения. Для измерений датчиков стенда в проекциях на оси системы координат Mr используется следующая модель:

$$\begin{aligned}\zeta_1' &= \zeta_1 + \zeta_1^s, \\ \zeta_2' &= \zeta_2 + \zeta_2^s,\end{aligned}\quad (3.2)$$

где ζ_1, ζ_2 — истинные значения углов поворота платформы стенда вокруг внешней и внутренней осей вращения; ζ_1', ζ_2' — измеренные значения углов поворота платформы стенда; ζ_1^s, ζ_2^s — случайные составляющие погрешностей измерений. По измерениям стенда строится модельная матрица L_p' ориентации планшайбы стенда относительно опорной системы координат Mx . Вектор малого поворота δ задает переход от модельной системы координат к модельной стендовой.

¹Следует заметить, что зависимости малых углов перекосов осей чувствительности от температуры имеют место, однако в рассматриваемых экспериментах, когда изменение температуры за один эксперимент составляет около 10–13 °С, эти зависимости можно считать несущественными.

Характеристика	Значение
Максимальная скорость вращения (внешняя/внутренняя оси), град./сек	400/1000
Точность задания углового положения, угл. сек.	± 1
Ортогональность осей, угл. сек	± 1
Рабочий диапазон термокамеры, °C	$-60 \dots 70$
Скорость нагрева/охлаждения, °C/мин	± 2
Способ охлаждения	Воздушное

Таблица 3.2: Характеристики двухосного стенда Acutronic

Взаимосвязи между используемыми системами координат отражены на рис. 3. Измерения датчиков стенда позволяют, помимо вектора корректирующих измерений (1.8), построить дополнительный вектор измерений w_{tt} :

$$w_{tt} = \begin{bmatrix} (L'_z{}^T L'_p)_{23} \\ (L'_z{}^T L'_p)_{31} \\ (L'_z{}^T L'_p)_{12} \end{bmatrix} \approx \delta_x \approx \beta_x + L'_z{}^T (\kappa_p - \xi_p). \quad (3.3)$$

Случайную составляющую в векторе измерений w^{tt} будем считать несмещенным случайным процессом типа белого шума.

Дополнительно отметим, что при калибровке системы учитывались пространственные отнесения чувствительных масс ньютометров от центра вращения стенда [37]. Поясним, что ранее модель измерений ньютометров (1.4) строилась в предположении, что их чувствительные массы расположены на оси вращения и единственной измеряемой силой является сила реакции опоры, противодействующая силе тяжести. В более общем случае возникают дополнительные силы реакции связи, которые необходимо учитывать в модели. Этими силами являются центростремительная сила f_z^{cp} , направленная к оси вращения, обеспечивающая движение по окружности и танциальная сила f_z^t , направленная по касательной к траектории движения, возникающая при наличии углового ускорения планшайбы стенда. Аналитические выражения для центростремительной и тангенциальной сил имеют вид:

$$f_z^{cp} = \begin{bmatrix} -(\omega_2'^2 + \omega_3'^2)r_{11} + \omega_1'\omega_2'r_{12} + \omega_3'\omega_1'r_{13} \\ \omega_1'\omega_2'r_{21} - (\omega_3'^2 + \omega_1'^2)r_{22} + \omega_2'\omega_3'r_{23} \\ \omega_3'\omega_1'r_{31} + \omega_3'\omega_2'r_{32} - (\omega_1'^2 + \omega_2'^2)r_{33} \end{bmatrix}, \quad f_z^t = \begin{bmatrix} -\dot{\omega}_3'r_{12} + \dot{\omega}_2'r_{13} \\ \dot{\omega}_3'r_{21} + \dot{\omega}_1'r_{23} \\ -\dot{\omega}_2'r_{31} + \dot{\omega}_1'r_{32} \end{bmatrix},$$

где r_{ij} — координаты чувствительной массы j -го ньютометра в приборных осях относительно измерительного центра. Таким образом, если они известны заранее, центростремительная и тангенциальная компоненты силы реакции могут быть скомпенсированы по формуле:

$$f_z'' = f_z' - f_z^{cp} - f_z^t,$$

где f_z'' — измерения ньютометров после компенсации. В рассматриваемых калибровочных экспериментах считается, что координаты известны и компоненты силы реакции скомпенсированы заранее. Далее вектор состояния дополняется компонентами S^i являющимися координатами измерительного центра в приборных осях относительно центра вращения (точки M). В отличие от (1.8) теперь имеем:

$$f_z = L_z^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + (\Phi^{cp} + \Phi^t) \begin{bmatrix} S^1 \\ S^2 \\ S^3 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\Phi^{cp} = \begin{bmatrix} -(\omega_2'^2 + \omega_3'^2) + \omega_1'\omega_2' + \omega_3'\omega_1' \\ \omega_1'\omega_2' - (\omega_3'^2 + \omega_1'^2) + \omega_2'\omega_3' \\ \omega_3'\omega_1' + \omega_3'\omega_2' - (\omega_1'^2 + \omega_2'^2) \end{bmatrix}, \quad \Phi^t = \begin{bmatrix} -\dot{\omega}_3' + \dot{\omega}_2' \\ \dot{\omega}_3' + \dot{\omega}_1' \\ -\dot{\omega}_2' + \dot{\omega}_1' \end{bmatrix}.$$

В работе [37] показано, что для обеспечения наблюдаемости поправок S , описанная процедура калибровки не требует внесения изменений в план эксперимента. Таким образом, в рассматриваемой задаче, вектор состояния y принимает вид:

$$y = [\beta_x^i, \nu_z^{0i}, \Delta f_z^{0i}, \Gamma_j^i, \Theta_i^j, K_{\Delta f}^i, K_{\Gamma}^i, K_{\nu}^i, K_{\Theta}^i, S^i, \kappa_z^i]^T \in \mathbb{R}^{42}. \quad (3.5)$$

Всего вектор состояния содержит 42 параметра для оценки. С учетом дополнительных параметров, добавленных в вектор состояния, линейная динамическая

система (1.7) принимает вид:

$$\begin{aligned}
\dot{\beta}_x^1 &= u_x^3 \beta_x^2 - u_x^2 \beta_x^3 + \nu_x^1 \\
\dot{\beta}_x^2 &= -u_x^3 \beta_x^1 + u_x^1 \beta_x^3 + \nu_x^2 \\
\dot{\beta}_x^3 &= u_x^2 \beta_x^1 - u_x^1 \beta_x^2 + \nu_x^3 \\
\Delta \dot{f}_z^{0i} &= 0 \\
\dot{i}_z^{0i} &= 0 \\
\dot{\Gamma}_j^i &= 0 \\
\dot{\Theta}_j^i &= 0 \\
\dot{K}_{\Delta f}^i &= 0 \\
\dot{K}_{\Gamma i}^i &= 0 \\
\dot{K}_{\nu}^i &= 0 \\
\dot{K}_{\Theta i}^i &= 0 \\
\dot{\kappa}_p^i &= 0 \\
\dot{S}^i &= 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Модель вектора измерений в (1.8) принимает вид:

$$w_{acc} = \widehat{\beta}_x \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + L_z^T (\Delta f_z + (\Phi^{cp} + \Phi^t) \begin{bmatrix} S^1 \\ S^2 \\ S^3 \end{bmatrix} + \Delta f_z^s). \tag{3.7}$$

К набору измерений ньютометров добавляются измерения (3.3). Аналогично рассуждениям в главе I, задача калибровки сводится к задаче оценивания вектора состояния (3.5) линейной динамической системы (3.6) по векторам измерений (3.7) и (3.3).

3.1.2 Описание калибровочного эксперимента

План калибровочного эксперимента содержал 3 последовательных цикла вращения и полностью соответствует плану, который был описан в главе I (рис. 3.1). Для определения начальной матрицы ориентации каждый цикл начинается с интервала неподвижности продолжительностью в 5 минут, когда система выставляется по сторонам света. Далее следуют последовательные вращения

вокруг каждой из приборных осей со скоростями порядка скоростей реального применения БИНС в течение нескольких часов. Каждая из осей при вращении вокруг неё располагается примерно горизонтально. Профиль вращения на каждом цикле представляет собой кусочно-постоянное изменение угловой скорости по «синусоиде» в течение 20 минут, когда угловая скорость варьируется в пределах от -35 град/сек до 35 град/сек, после которых следуют 8 статических положений продолжительностью по две минуты, с углами крена, кратными 45 град. Описанная последовательность вращений исторически принята в АО «Инерциальные технологии Технокомплекса». Первое вращение выполняется вокруг внешней оси стенда, направленной на Север. В то же самое время, независимо от вращений, постепенно изменяется температура в термокамере стенда, что приводит к изменению температуры внутри БИНС на $5 - 10$ °С. Моделирование, проведенное в предыдущей главе, а также практический опыт показывают, что в таком эксперименте линейная динамическая система является наблюдаемой, и все компоненты вектора состояния оцениваются с приемлемой точностью.

Помимо собственно вращений с горизонтальной осью в каждый цикл также входят короткие статические интервалы в различных положениях, и только на этих интервалах показания датчиков углов поворота осей стенда являются достоверными из-за асинхронности канала передачи информации между регистрирующей аппаратурой и стендом Acutronic. Таким образом, коррекция вектора состояния по вектору измерений w^{tt} выполнялась только на интервалах неподвижности системы.

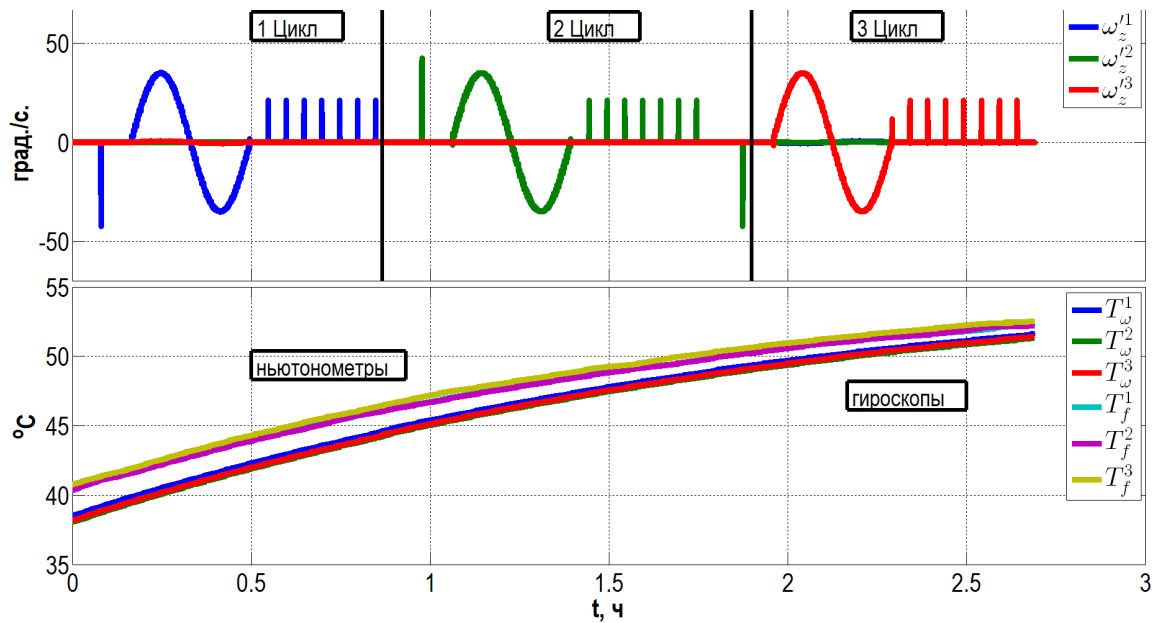


Рис. 3.1: Показания ДУС и датчиков температуры во время эксперимента

3.1.3 Результаты калибровки

Рассмотрим подробно результаты обработки описанного выше калибровочного эксперимента с системой БИНС-РТ. Ввиду нерегулярной рассинхронизации показаний стенда и системы, корректирующие измерения (3.3) использовались только во время интервалов неподвижности системы. На графиках 3.2, 3.3, 3.4 приведено изменение во времени оценок СКО оценок компонент вектора состояния (смещения нулевых сигналов, масштабные коэффициенты, малые углы перекося и соответствующие температурные коэффициенты). Из всех приведенных графиков следует, что в рамках рассматриваемого эксперимента оценки СКО ошибок оценок компонент вектора состояния уточняются, в частности, уточняются оценки СКО ошибок оценок коэффициентов температурных зависимостей. В таблице 3.3 представлены априорные СКО и соответствующие им оценки СКО в конечный момент времени, а также сами оценки перечисленных компонент вектора состояния. На основе представленных значений оценок можно сделать вывод, что температурные зависимости параметров лазерных гироскопов БИНС-РТ малы и наиболее значительными являются температурные вариации смещений нулевых сигналов ньютонометров. Поскольку во время третьего цикла вращения изменение температуры не такое существенное, параметры наблюдаемые только на третьем цикле оценились заметно хуже (мас-

штабный коэффициент третьего ДУС и соответствующий температурный коэффициент). Заметим, что если бы в процессе эксперимента обеспечивалось более динамичное изменение температуры при помощи термокамеры, то ожидаемая точность оценок этих параметров могла быть выше. Дополнительно отметим, что оценки СКО в конечный момент времени зависят от априорных значений СКО шумов в уравнениях (1.6) и (3.7), используемых алгоритмом оценивания. Последние завышены и реальные получаемые точности оценок выше, чем в таблице 3.3. Это подтверждается результатами обработки серии экспериментов в разделе 3.1.4.

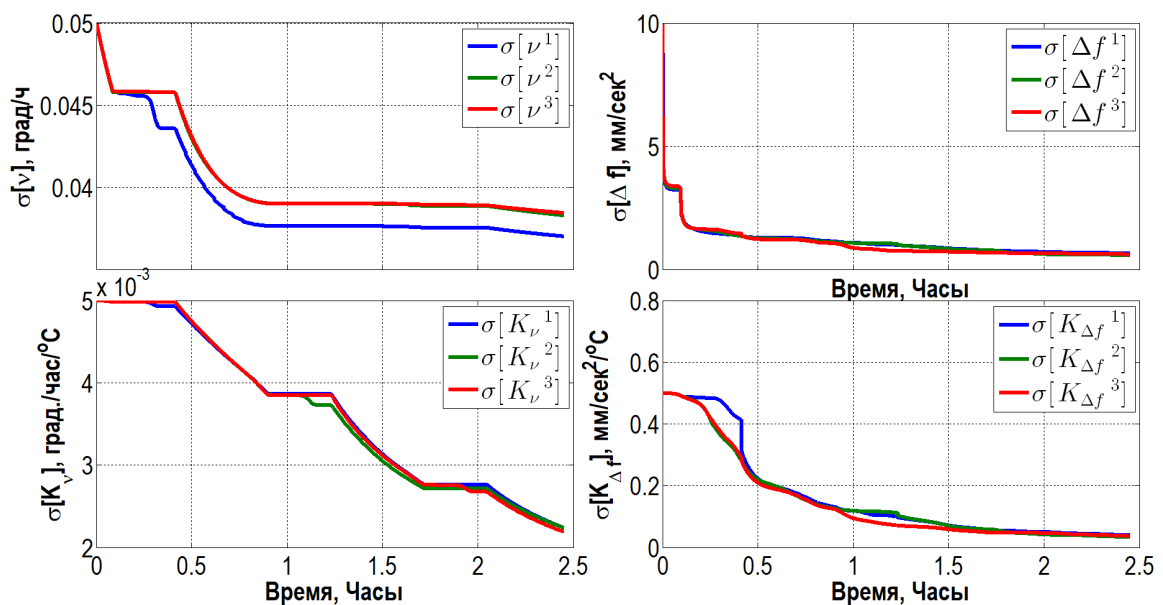


Рис. 3.2: Оценки СКО оценок смещений нулевых сигналов ДУС, ньютонометров и соответствующих температурных коэффициентов

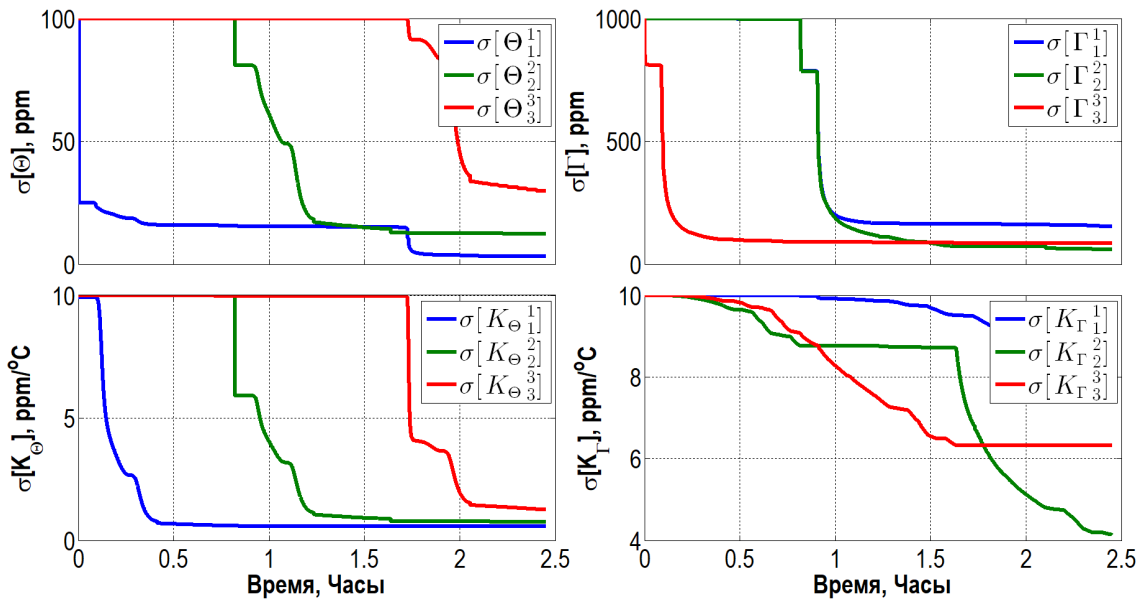


Рис. 3.3: Оценки СКО оценок масштабных коэффициентов ДУС, ньютонометров и соответствующих температурных коэффициентов

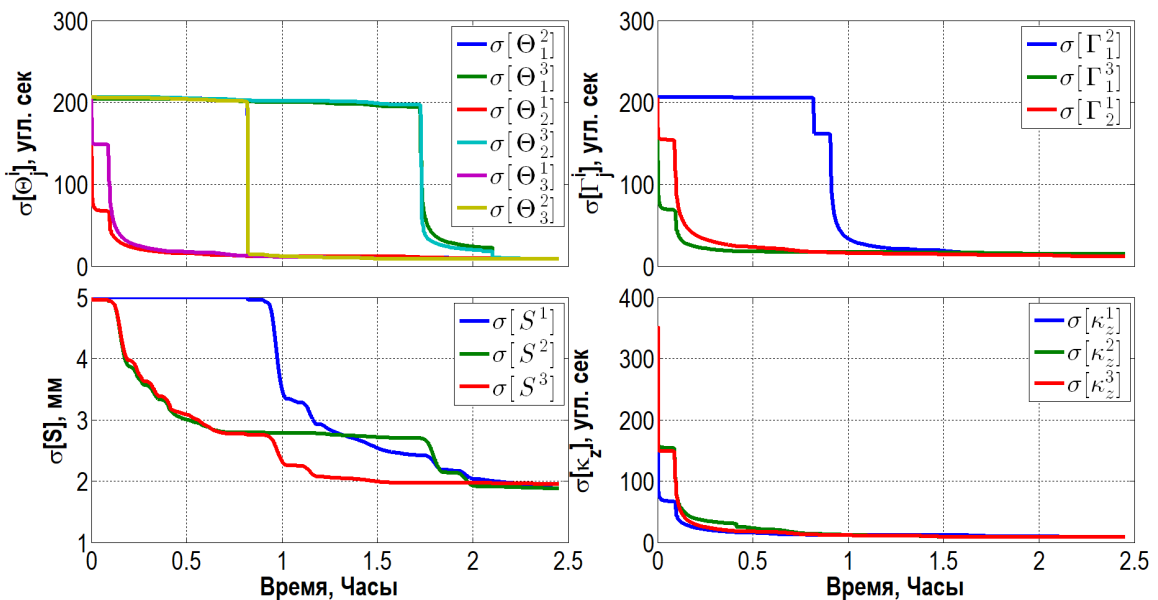


Рис. 3.4: Оценки СКО оценок углов перекосов осей чувствительности ДУС, ньютонометров, отнесений чувствительных масс ньютонометров от центра вращения и углов-ошибок установки системы на планшайбе

парам.	ν_z^{01}	ν_z^{02}	ν_z^{03}	Θ_1^1	Θ_2^2	Θ_3^3	Θ_1^2	Θ_1^3	Θ_2^1	Θ_2^3	Θ_3^1	Θ_3^2
разм.	град/ч			ppm			угл.сек.					
σ_o	0.050	0.050	0.050	100.0	100.0	100.0	200.0	200.0	200.0	200.0	200.0	200.0
σ_k	0.037	0.038	0.038	3.1	12.3	29.6	8.4	8.9	8.4	8.9	8.8	8.7
\tilde{y}_k	-0.024	0.029	-0.002	363.4	633.1	-193.4	-132.5	-564.3	-68.9	-61.4	641.2	18.0
парам.	K_ν^1	K_ν^2	K_ν^3	$K_{\Theta_1^1}$	$K_{\Theta_2^2}$	$K_{\Theta_3^3}$						
разм.	град/ч/°C			ppm/°C								
σ_o	0.005	0.005	0.005	10.0	10.0	10.0						
σ_k	0.002	0.002	0.002	0.6	0.7	1.3						
\tilde{y}_k	0.080	0.033	-0.132	-0.5	-0.4	-2.7						
парам.	Δf_z^{01}	Δf_z^{02}	Δf_z^{03}	Γ_1^1	Γ_2^2	Γ_3^3	Γ_2^1	Γ_3^1	Γ_3^2			
разм.	мм/сек ²			ppm			угл.сек.					
σ_o	10.00	10.00	10.00	1000	1000	1000	200.0	200.0	200.0			
σ_k	0.64	0.58	0.60	153	70	85	11.9	12.1	11.6			
\tilde{y}_k	1.65	-57.43	-58.63	-2128	-7923	-9459	76.3	253.4	58.4			
парам.	$K_{\Delta f}^1$	$K_{\Delta f}^2$	$K_{\Delta f}^3$	$K_{\Gamma_1^1}$	$K_{\Gamma_2^2}$	$K_{\Gamma_3^3}$						
разм.	мм/сек ² /°C			ppm/°C								
σ_o	0.500	0.500	0.500	10	10	10						
σ_k	0.038	0.033	0.036	8	4	6						
\tilde{y}_k	0.078	0.002	0.034	141	99	73						

Таблица 3.3: Начальные СКО и их оценки в конечный момент времени ошибок оценок смещений нулевых сигналов, масштабных коэффициентов, углов перекосов инерциальных датчиков и соответствующих температурных коэффициентов

3.1.4 Результаты обработки серии экспериментов

Всего с системой БИНС-РТ было проведено 13 экспериментов при различных температурах. Эксперименты проведены согласно плану, описанному в разделе 3.1.2 и в совокупности покрывают диапазон температур от -50 до $+40$ °С. Эксперименты выполнялись последовательно на температурных переходах с шагом в 20 °С. Совокупное изменение температуры за время всех проведенных экспериментов представлено на рис. 3.5. На графике видно, что часть экспериментов выполнена при убывающей температуре, другая часть при возрастающей.

Оценки параметров зависящих от температуры и соответствующие им оценки температурных коэффициентов приведены на рис. 3.6. Оценки соединены между собой при помощи кусочно-линейной интерполяции. На графиках видно, что для большинства параметров проявляются заметные зависимости от температуры. Например, для смещения нулевого сигнала одного из ньютометров температурная зависимость достигает 0.2 мм/°С. Дополнительно отметим, что для погрешностей ньютометров наблюдается повторяемость оценок параметров на температурных проходах. Черными отрезками обозначено изменение базовых оценок при вариации температуры на несколько градусов в соответствии с оценками температурных коэффициентов. Видно, что в большинстве точек направление черных отрезков совпадает с направлением кусочно-линейной интерполяции (на границах из-за небольшого изменения температуры, оценки получаются заметно хуже). На рис. 3.7 изображены оценки параметров, для которых в модели (3.1) не вводились температурные коэффициенты, на графиках видно, что для этих параметров температурные зависимости малы.

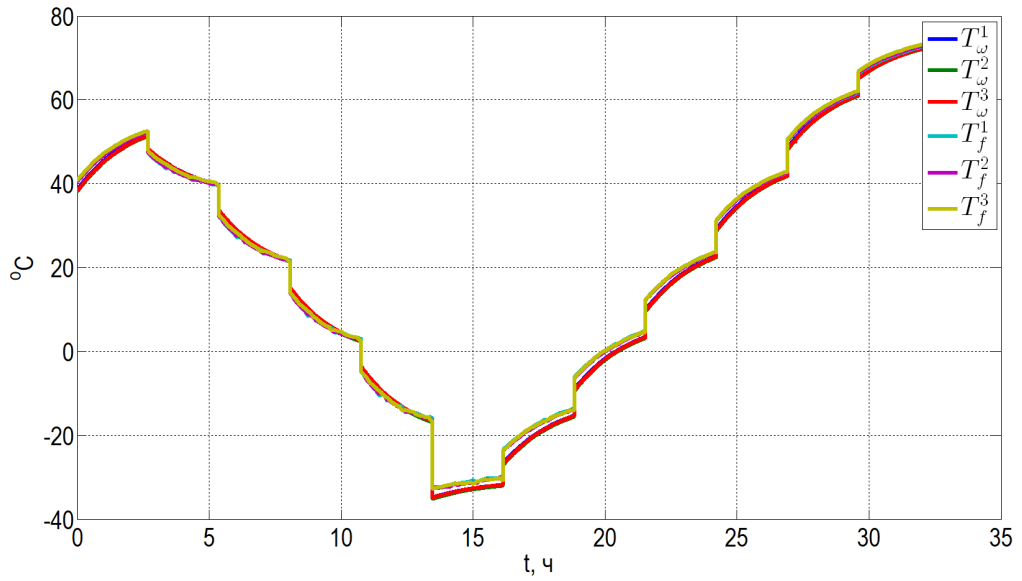


Рис. 3.5: Показания датчиков температуры во время серии экспериментов. Сначала выполняется эксперимент при возрастающей температуре, затем 4 эксперимента при убывающей температуре и остальные при возрастающей.

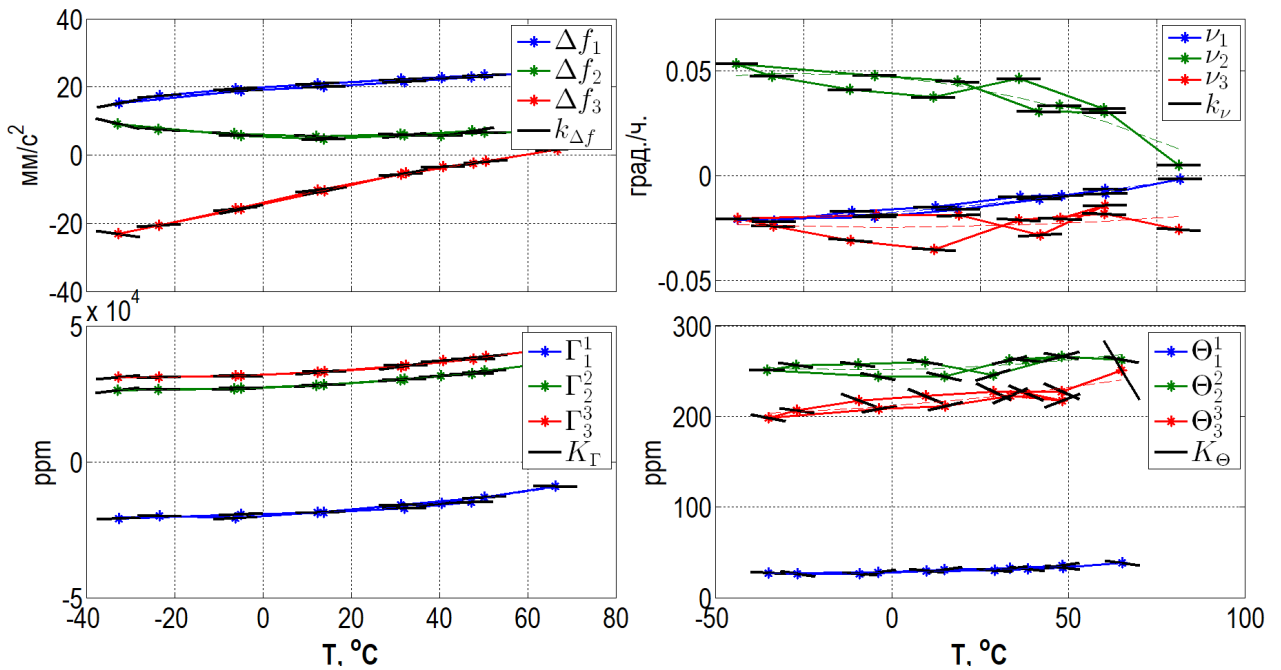


Рис. 3.6: Оценки параметров модели погрешностей измерений датчиков, зависящих от температуры (приведенные к начальным температурам экспериментов). Черные отрезки имеют наклон соответствующий оценкам температурных коэффициентов.

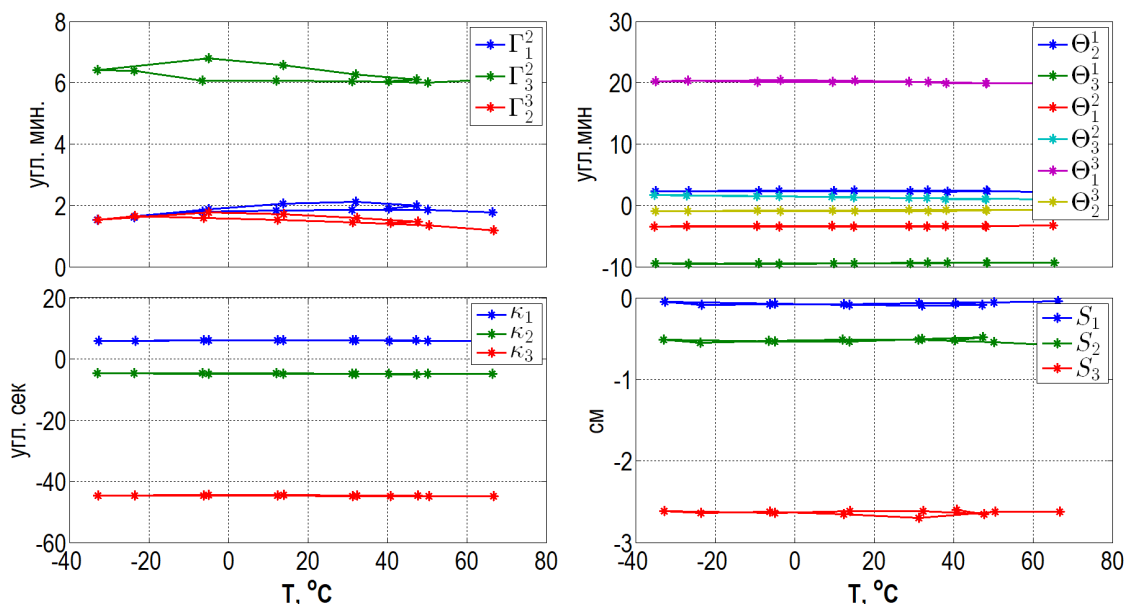


Рис. 3.7: Оценки параметров модели погрешностей измерений датчиков, независящих от температуры. На графиках видно, что приведенные параметры действительно не зависят от температуры

3.1.5 Оценка качества калибровки

Для оценки качества калибровки будем использовать величину круговой ошибки навигационного решения при обработке проверочного эксперимента после компенсации погрешностей. Заметим, что данные проверочного эксперимента не использовались для оценки погрешностей. Проверочный эксперимент продолжительностью 1 час состоит из трех статических положений системы, с короткими (6 секунд) поворотами между ними. В первом и последнем положениях система ориентирована таким образом, что одна из осей параллельна вектору угловой скорости Земли, другая направлена на Восток и третья дополняет первые две до правой тройки. В промежуточном положении первая ось направлена на Север, а вторая на Восток. В течение эксперимента температура изменяется на 10 °С. Для компенсации воспользуемся вычисленными параметрами в калибровочном эксперименте с наиболее близкой начальной температурой. Будем сравнивать компенсацию, включающую коэффициенты температурных зависимостей погрешностей измерений инерциальных датчиков и не включающую эти коэффициенты. Во втором случае компенсируются только постоянные параметры $\nu_z^0, \Delta f_z^0, \Gamma, \Theta$, рассчитанные по формулам (1.3) для температуры в начале проверочного эксперимента.

На рис. 3.8 приведены два графика круговой ошибки. График свидетельствует, что в данном эксперименте, при полной температурной компенсации круговая ошибка заметно меньше, при этом с увеличением времени и температуры ошибка увеличивается. При полной температурной компенсации круговая ошибка соответствует заявленному классу системы.

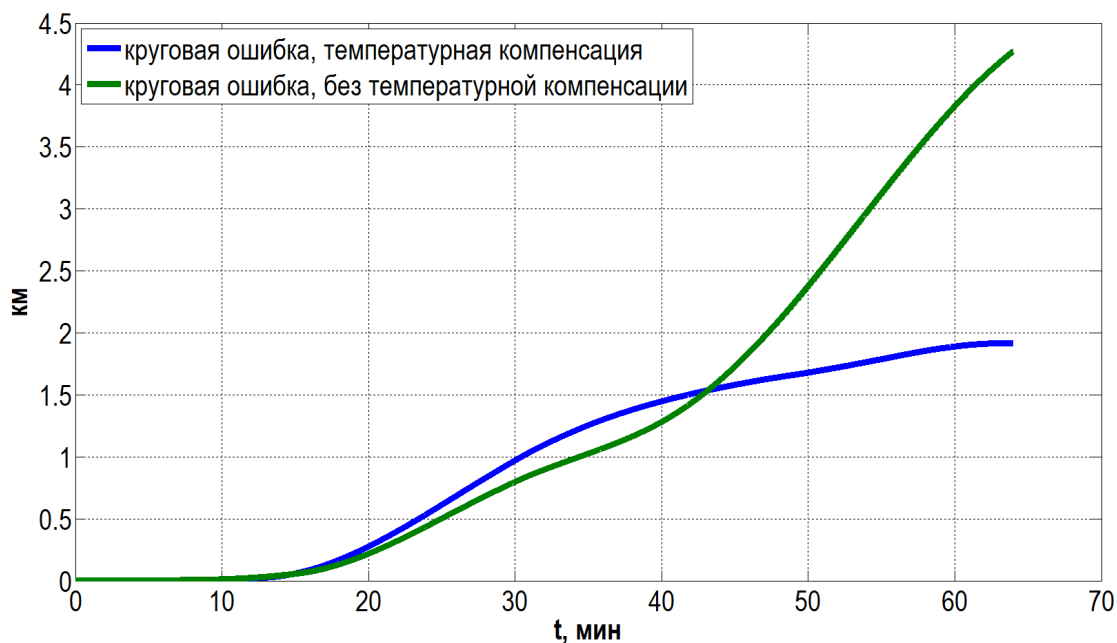


Рис. 3.8: Сравнение двух различных подходов к компенсации температурных погрешностей: полная температурная компенсация и приведение значений погрешностей к температуре, соответствующей началу эксперимента

3.2 Блок чувствительных элементов на базе микромеханических датчиков

В качестве еще одного примера, рассмотрим калибровку блока чувствительных элементов, построенного на базе микромеханических инерциальных датчиков. Как упоминалось ранее, для систем низкого класса точности нецелесообразно учитывать коэффициенты зависимости от производной и пространственного градиента температуры по двум причинам.

1. Зависимости от производной температуры достаточно малы и практически неразличимы на фоне случайной (немоделируемой) составляющей модели погрешностей измерений датчиков. На рис. 3.9 представлена зависимость осредненных на интервале в 10 секунд показаний инерциальных датчиков БЧЭММ-1 от производной температуры после компенсации температурных зависимостей. Как видно из графика, зависимости от производной температуры неразличимы на фоне случайных вариаций показаний датчиков.

2. Одним из основных преимуществ таких систем является низкая стоимость и небольшие габариты; как следствие, в них располагают минимальное число датчиков температуры низкой точности. Оценить компоненты пространственного градиента температуры в таких системах практически невозможно.

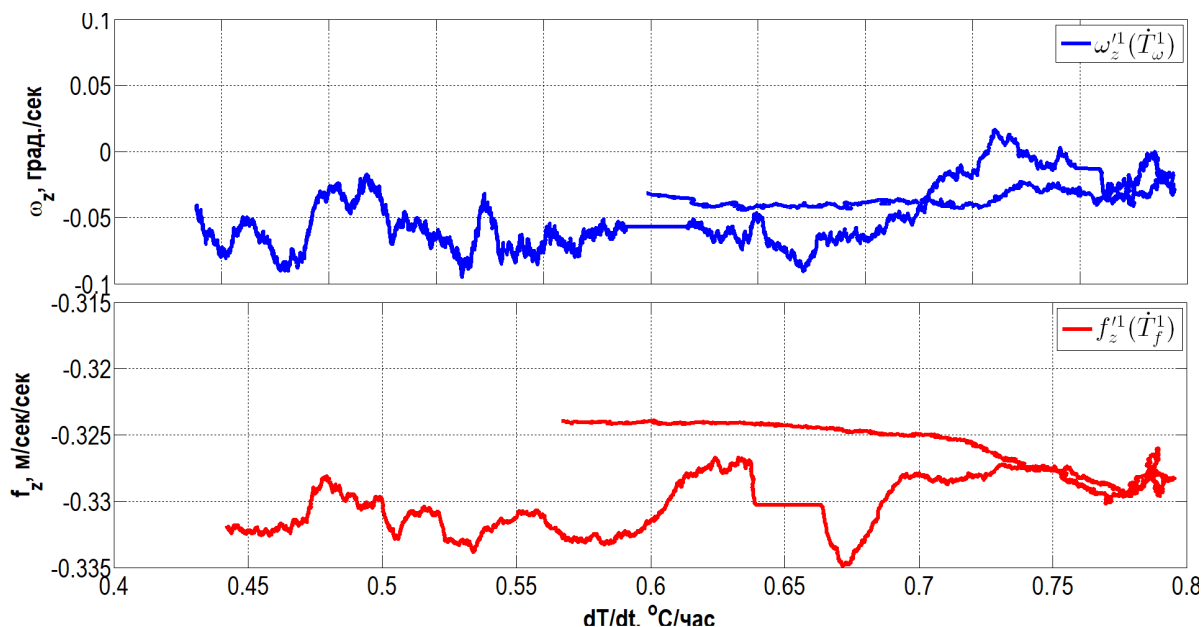


Рис. 3.9: График зависимости осредненных (окно 10 секунд) показаний инерциальных датчиков БЧЭММ-1 от производной температуры после компенсации температурных зависимостей.

Характеристики рассматриваемой системы приведены в таблице 3.4.

Характеристика	значение
СКО шумов измерений ДУС, [град/сек]/ $\sqrt{\text{Гц}}$	0.05
Стабильность нулевого сигнала ДУС, град/сек	0.03
СКО шумов измерений ньютометров, [мм/сек ²]/ $\sqrt{\text{Гц}}$	5
Стабильность нулевого сигнала ньютометров, мм/сек ²	2

Таблица 3.4: Основные характеристики датчиков в БЧЭММ-1

3.2.1 Математические модели задачи калибровки

В качестве модели погрешностей измерений использовалась модифицированная модель 1.1, учитывающая коэффициенты зависимости от температуры K_ν , $K_{\Delta f}$, K_Γ , K_Θ , а также коэффициенты динамических дрейфов ДУС, формирующие матрицу D :

$$\begin{aligned}\Delta f_z^i &= \Delta f_z^{0i} + K_{\Delta f}^i T_f^i + \Gamma_j^i f_z^j + K_{\Gamma_i}^i T_f^i f_z^j, \\ \nu_z^i &= \nu_z^{0i} + K_\nu^i T_\omega^i + \Theta_j^i \omega_z^j + K_{\omega_i}^i T_\omega^i \omega_z^i + D_j^i \frac{f_z^j}{g_0}, \quad i, j = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

$$D = \begin{bmatrix} D_1^1 & D_1^2 & D_1^3 \\ D_2^1 & D_2^2 & D_2^3 \\ D_3^1 & D_3^2 & D_3^3 \end{bmatrix}$$

— матрица коэффициентов динамических дрейфов ДУС.

При калибровке систем низкого класса точности на грубых одноосных калибровочных стендах для удержания кинематических ошибок БИНС в линейной зоне в кинематические уравнения Пуассона вводятся обратные связи (то есть используется вариант коррекции с обратными связями [94]), а вектор состояния дополняется малыми углами отклонения \varkappa первой оси приборной системы координат Mz от орта оси вращения (повороты выполняются вокруг второй и третьей приборных осей). Однако для удержания азимутальной ошибки в линейной зоне этого недостаточно, поэтому в дополнение к стандартным измерениям (1.8) необходимо использовать измерения об орте оси вращения [72]. Модель измерений основана на том, что с точностью до углов \varkappa первая приборная ось направлена горизонтально с известным углом азимута. Таким образом, при использовании измерений об орте необходимо знать азимут оси вращения стенда ψ_0 , а негоризонтальность оси вращения начинает вносить систематическую ошибку в результаты калибровки. Измерения об орте оси вращения имеют вид:

$$w_{ort} = \begin{bmatrix} \cos \psi_0 \\ \sin \psi_0 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \hat{\beta}_x \begin{bmatrix} \cos \psi_0 \\ \sin \psi_0 \\ 0 \end{bmatrix} + L'_z \begin{bmatrix} 0 \\ -\varkappa_z^3 \\ \varkappa_z^2 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Таким образом вектор состояния (1.6) дополняется компонентами матрицы динамических дрейфов ДУС и малыми углами \varkappa :

$$y = [\beta_x^i, \nu_z^{0i}, \Delta f_z^{0i}, \Gamma_j^i, \Theta_i^j, K_{\Delta f}^i, K_{\Gamma_i}^i, K_\nu^i, K_{\Theta_i}^i, D_j^i, \varkappa_z^i]^T \in \mathbb{R}^{47}. \quad (3.9)$$

Всего вектор состояния включает 47 компонент, подлежащих определению, среди которых 12 коэффициентов зависимости от температуры. С учетом дополнительных параметров, добавленных в вектор состояния, линейная динамическая система (1.7) принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_x^1 &= u_x^3 \beta_x^2 - u_x^2 \beta_x^3 + \nu_x^1 \\ \dot{\beta}_x^2 &= -u_x^3 \beta_x^1 + u_x^1 \beta_x^3 + \nu_x^2 \\ \dot{\beta}_x^3 &= u_x^2 \beta_x^1 - u_x^1 \beta_x^2 + \nu_x^3 \\ \Delta \dot{f}_z^{0i} &= 0 \\ \dot{i}_z^{0i} &= 0 \\ \dot{\Gamma}_j^i &= 0 \\ \dot{\Theta}_j^i &= 0 \\ \dot{K}_{\Delta f}^i &= 0 \\ \dot{K}_{\Gamma_i}^i &= 0 \\ \dot{K}_\nu^i &= 0 \\ \dot{K}_{\Theta_i}^i &= 0 \\ \dot{\varkappa}_z^i &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Аналогично рассуждениям в первой главе, задача калибровки сводится к задаче оценивания вектора состояния (3.9) линейной динамической системы (3.10) по векторам измерений (1.6) и (3.8).

3.2.2 Описание калибровочного эксперимента

Калибровочный эксперимент проводился согласно методике, описанной в I главе и состоял из трех последовательных циклов вращения вокруг каждой из приборных осей с угловой скоростью приблизительно равной ± 10 град./сек. Продолжительность каждого цикла вращения составляла 15 минут, из которых начальная выставка — 3 минуты, частота регистрации показаний датчиков —

152 Гц. Профиль угловой скорости и измерения датчиков температуры изображены на рис. 3.10. В течение эксперимента происходил естественный нагрев системы (термокамера не использовалась, система нагревалась за счет нагрева отдельных компонент после включения питания). Видно, что на первых двух циклах температура изменяется в пределах 4 – 6 °С, на третьем практически не изменяется. Это существенно сказалось на сходимости ковариаций для оценок тех температурных коэффициентов, которые являются наблюдаемыми только при вращении вокруг оси Mz_3 .

Перед обработкой показания датчиков температуры сглаживались с помощью алгоритма из главы II.

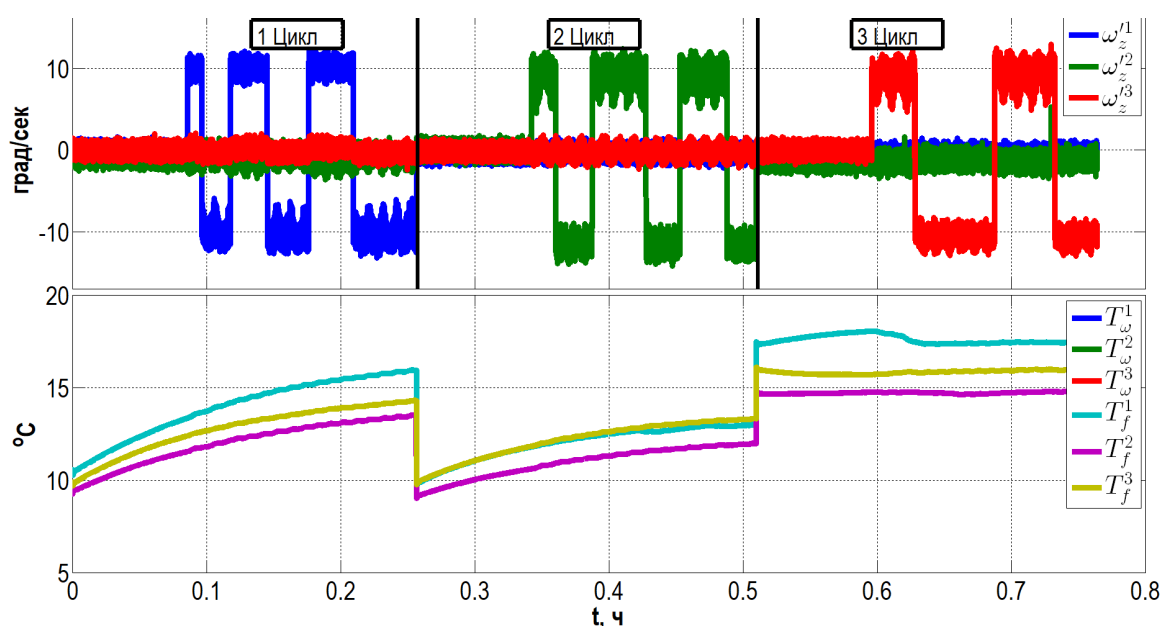


Рис. 3.10: Измерения ДУС и соответствующих датчиков температуры во время эксперимента

3.2.3 Результаты калибровки

Рассмотрим результаты обработки калибровочного эксперимента с системой БЧЭММ-1. Оценки СКО оценок компонент вектора состояния (3.9) приведены на графиках 3.11 – 3.13. Значения начальных СКО и соответствующие им оценки СКО в конечный момент времени, также сами оценки компонент вектора состояния представлены в таблице 3.5. Из приведенных таблицы и графиков следует, что оценки СКО ошибок оценки компонент вектора состояния

уменьшаются относительно априорных. Отметим, что оценки СКО в конечный момент времени соответствуют заявленному классу системы, при этом температурные коэффициенты оценились с достаточной точностью, исключение составили параметры, наблюдаемые только на третьем цикле вращения, ввиду недостаточного изменения температуры.

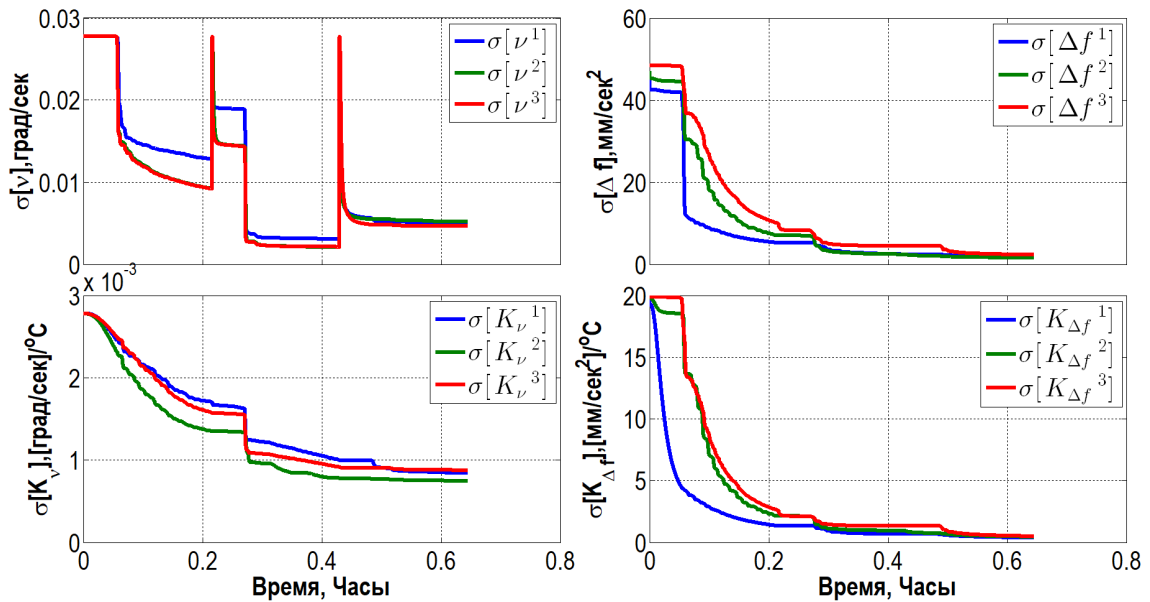


Рис. 3.11: Оценки СКО оценок смещений нулевых сигналов ДУС, ньютонометров и соответствующих температурных коэффициентов

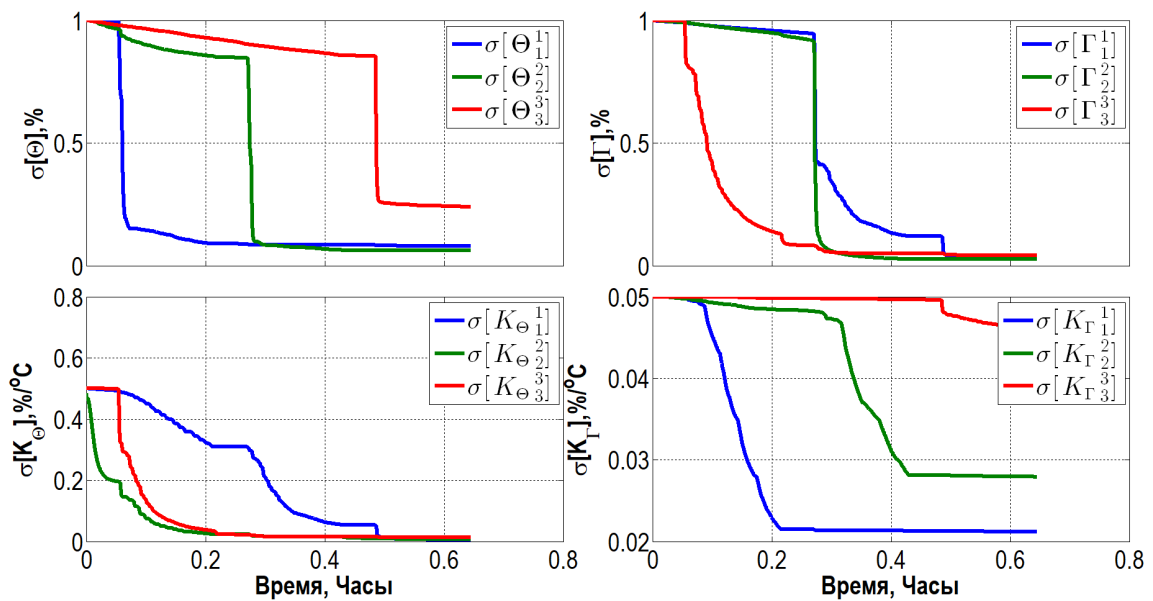


Рис. 3.12: Оценки СКО оценок масштабных коэффициентов ДУС, ньютонометров и соответствующих температурных коэффициентов

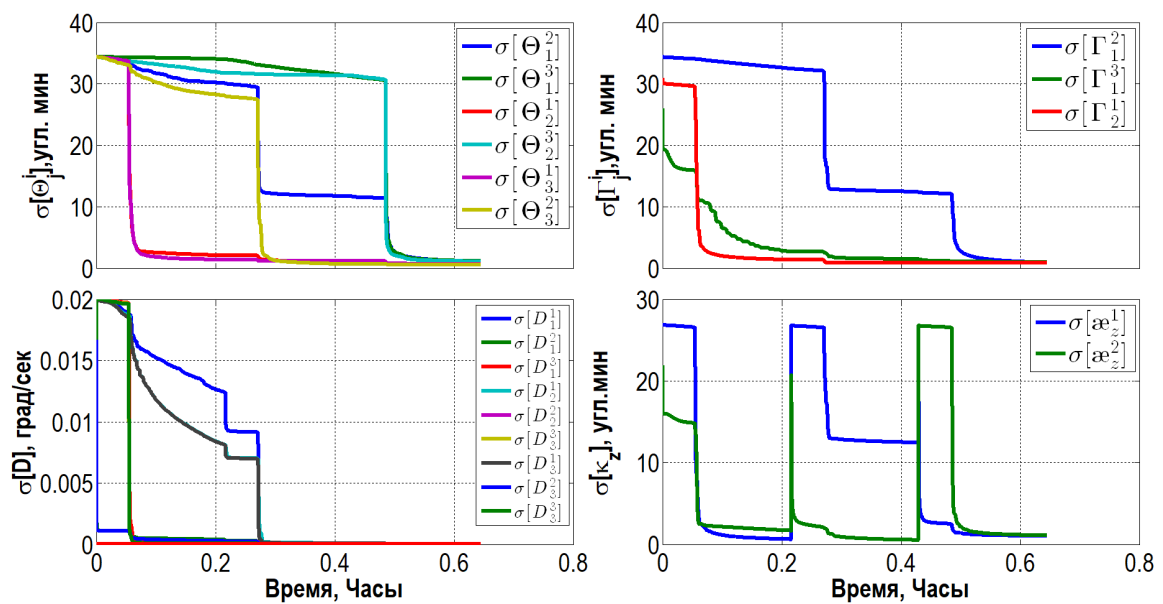


Рис. 3.13: Оценки СКО оценок углов перекосов осей чувствительности ДУС, ньютометров и соответствующих температурных коэффициентов

парам.	ν_z^{01}	ν_z^{02}	ν_z^{03}	Θ_1^1	Θ_2^2	Θ_3^3	Θ_1^2	Θ_1^3	Θ_2^1	Θ_2^3	Θ_3^1	Θ_3^2
разм.	град/сек			%			угл.мин					
σ_o	0.030	0.030	0.030	1.00	1.00	1.00	30.0	30.0	30.0	30.0	30.0	30.0
σ_k	0.005	0.005	0.005	0.08	0.07	0.25	1.2	1.1	0.6	1.1	0.7	0.6
\tilde{y}_k	-0.132	-0.504	0.001	3.10	5.96	5.03	-97.7	-53.9	34.4	-42.8	106.7	14.2
парам.	K_ν^1	K_ν^2	K_ν^3	$K_{\Theta_1^1}$	$K_{\Theta_2^2}$	$K_{\Theta_3^3}$						
разм.	град/сек/°C			%/°C								
σ_o	0.003	0.003	0.003	2.00	2.00	2.00						
σ_k	0.001	0.001	0.001	0.75	1.04	1.62						
\tilde{y}_k	-0.044	-0.110	-0.009	-0.07	0.25	-0.73						
парам.	Δf_z^{01}	Δf_z^{02}	Δf_z^{03}	Γ_1^1	Γ_2^2	Γ_3^3	Γ_2^1	Γ_3^1	Γ_3^2			
разм.	мм/сек ²			%			угл.мин					
σ_o	50.0	50.0	50.0	1.00	1.00	1.00	30.0	30.0	30.0			
σ_k	1.8	1.6	2.3	0.03	0.03	0.04	0.9	0.9	0.9			
\tilde{y}_k	-133.9	55.0	-13.0	0.12	0.03	-0.18	16.2	29.2	-138.9			
парам.	$K_{\Delta f}^1$	$K_{\Delta f}^2$	$K_{\Delta f}^3$	$K_{\Gamma_1^1}$	$K_{\Gamma_2^2}$	$K_{\Gamma_3^3}$						
разм.	мм/сек ² /°C			%/°C								
σ_o	20.0	20.0	20.0	0.50	0.50	0.50						
σ_k	0.4	0.4	0.5	0.01	0.01	0.01						
\tilde{y}_k	15.0	-12.9	4.4	-0.03	-0.00	0.03						

Таблица 3.5: Начальные СКО и их оценки в конечный момент времени ошибок оценок смещений нулевых сигналов, масштабных коэффициентов, углов перекосов инерциальных датчиков и соответствующих температурных коэффициентов

параметр	I цикл		II цикл		III цикл	
	до	после	до	после	до	после
K_{ν}^2 , [град/сек]/°C	-0.1002	0.0099	-0.0926	0.0176	-0.1130	-0.0025
$\sigma(K_{\nu}^2)$, [град/сек]/°C	0.0002					
$K_{\Delta f}^1$, [м/сек ²]/°C	0.0159	0.0011	0.0130	-0.0021	0.0101	-0.0049
$\sigma(K_{\Delta f}^1)$, [м/сек ²]/°C	0.000012					

Таблица 3.6: Оценки температурных коэффициентов по МНК на интервалах неподвижности в трех калибровочных циклах до и после компенсации, а также соответствующие оценки СКО

3.2.4 Оценка качества калибровки

В случае системы низкого класса точности вычисление навигационного решения не имеет смысла ввиду быстрорастущей ошибки. Воспользуемся другим критерием качества калибровки и сопоставим показания инерциальных датчиков до и после компенсации погрешностей с использованием оценок из таблицы 3.5. На рис. 3.14 представлены осредненные на интервале в 1 секунду показания ДУС и ньютонометров на интервале неподвижности одного из циклов вращений. На графиках выделены линии тренда, отображающие зависимость измерений датчиков от температуры. При помощи метода наименьших квадратов были определены коэффициенты температурных зависимостей для одного ДУС и одного ньютонометра до и после компенсации всех систематических погрешностей, коэффициенты приведены в таблице 3.6. На графике видно, что после компенсации погрешностей, линии тренда становятся близкими к горизонтальной, соответствующие коэффициенты убывают на порядок. Проведенная компенсация погрешностей датчиков подтверждает, что полученные оценки коэффициентов температурной зависимости близки к реальным значениям.

Отметим, что при анализе показаний инерциальных датчиков на интервалах неподвижности трех циклов вращения, приведенном в таблице 3.6, было установлено, что из-за немоделируемой нестабильности в показаниях инерциальных датчиков оценки температурных коэффициентов имеют повторяемость на уровне 0.02 [град/сек]/°C для ДУС и 0.006 [м/сек²]/°C для ньютонометров. По этой причине компенсация принципиально не может быть улучшена.

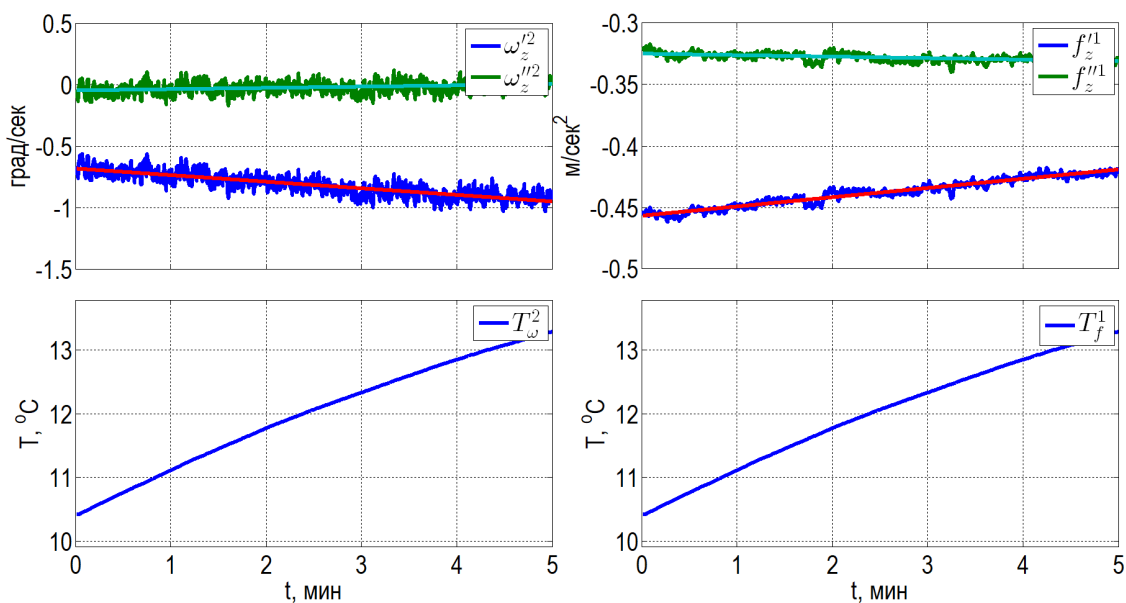


Рис. 3.14: Показания инерциальных датчиков на интервале неподвижности одного из циклов вращений до и после компенсации погрешностей

Заключение к главе

В главе рассмотрены практические результаты температурной калибровки инерциальных навигационных систем различного класса точности: БИНС-РТ авиационного назначения производства АО «Инерциальные технологии Технокомплекса» и грубой курсовертикали БЧЭММ-1 разработки АО «Московский институт электромеханики и автоматики». Приведены результаты обработки серии экспериментов с БИНС-РТ при различных температурах, один из экспериментов рассмотрен подробно, для БЧЭММ-1 представлены результаты обработки эксперимента с изменяющейся температурой. В обоих случаях проведен анализ качества калибровки. Сформулируем основные выводы.

1. Представленные результаты ковариационного анализа в обоих случаях подтверждают, что оценки СКО ошибок оценок соответствуют классам точности систем.
2. Для БИНС-РТ проведено сравнение круговых ошибок навигационного решения для двух различных способов компенсации систематических погрешностей измерений инерциальных датчиков: компенсации с учетом коэффициентов температурных зависимостей и без них. Для первого случая

круговая ошибка получилась в 2 раза меньше за час проверочного эксперимента.

3. Для БЧЭММ-1 представлено сравнение показаний инерциальных датчиков до и после калибровки на интервале неподвижности одного из циклов вращений. Установлено, что компенсация температурных зависимостей позволила на порядок уменьшить исходные температурные коэффициенты.

Глава 4

Калибровка блока ДУС с использованием измерений стенда

В главе рассматривается частный случай калибровки блока инерциальных датчиков, состоящего только из трех ДУС с привлечением дополнительной информации об углах поворота платформы стенда. Отсутствие ньютометров приводит к тому, что необходимо модифицировать разработанные ранее математические модели калибровки, при этом вопрос учета температурных зависимостей остается столь же актуальным. В настоящей главе решаются следующие задачи:

- модификация разработанной ранее методики калибровки для решения задачи температурной калибровки блока ДУС по измерениям углов поворота двухосного калибровочного стенда с термокамерой;
- исследование потенциальной точности предложенного подхода к калибровке при помощи полунатурного численного моделирования и ковариационного анализа для системы тактического класса точности.

Задача калибровки обособленного блока ДУС возникает, например, при калибровке БИНС космического назначения. При работе системы в условиях микрогравитации удельные силы, измеряемые ньютометрами, имеют величины

При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [95,96]

на порядок меньше, чем на Земле, поэтому в системах космического назначения используются нередко ньютонометры с узким диапазоном измерений, не включающим величину ускорения свободного падения на Земле. Эта особенность не позволяет использовать измерения таких ньютонометров в земных условиях при калибровке ДУС в соответствии с описанными ранее методиками. В то же время ДУС остаются неотъемлемой частью блоков чувствительных элементов и требуют предварительной калибровки. Другим примером является калибровка некоторых БИНС на базе лазерных гироскопов. В силу особенности конструкции, ввиду наличия работающих виброподвесов, возникающие дополнительные ускорения чувствительных масс ньютонометров достигают величины 1 м/с^2 , что фактически делает невозможным использование показаний ньютонометров во время калибровки БИНС для достижения требуемой её точности. Отметим при этом, что в двух приведенных примерах задача калибровки температурных погрешностей остается крайне актуальной. При движении космического аппарата по орбите температура внутри системы может варьироваться в пределах от -20 до $+70$ °С, сопровождаясь быстрыми перепадами температур [52, 53].

При калибровке БИНС с учетом измерений от сторонних систем (например, измерений стенда) критической задачей является синхронизация во времени показаний БИНС и дополнительных измерений. Степень синхронизации показаний влияет на качество калибровки. В случаях, когда рассинхронизация носит систематический характер, множество оцениваемых в задаче калибровки параметров может быть дополнено параметрами модели рассинхронизации показаний БИНС и других измерений. В рамках исследуемой задачи калибровки блока ДУС рассматривается модель временного рассогласования, предполагающая наличие постоянного малого рассогласования в измерениях.

Для построения математических моделей задачи калибровки потребуются следующие системы координат:

- географическая (опорная) система координат Mx (орт оси Mx_3 совпадает с направлением географической вертикали, орт оси Mx_2 направлена на Север, а ось Mx_1 дополняет оси Mx_3 и Mx_2 до правой системы координат и направлена на Восток);

- приборная система координат Mz (орт оси Mz_1 строго совпадает с осью чувствительности одного из ДУС, вторая приборная ось Mz_2 лежит в плоскости, образованной первой и второй осями чувствительности, и получается поворотом оси чувствительности другого ДУС на один малый угол, третья ось Mz_3 дополняет первые две до правой тройки и получается двумя поворотами оси чувствительности третьего ДУС); матрица ориентации L_z задает переход из опорной системы координат в приборную;
- модельная система координат Mz' (представляет собой вычисленную ориентацию приборного трехгранника Mz); матрица ориентации L'_z задает переход из опорной системы координат в модельную; вектор малого поворота β задает переход от приборной системы координат к модельной;
- стендовая система координат Mp (жестко связана с планшайбой двухосного калибровочного стенда таким образом, что ось Mp_3 сонаправлена с внешней осью вращения стенда, а другие две оси лежат в плоскости планшайбы); блок ДУС устанавливается на стенде таким образом (рис. 4.1), что приборная система координат совпадает со стендовой с точностью до малых углов-ошибок установки системы (углов юстировки) κ_p ; измерения ζ'_1, ζ'_2 датчиков, установленных на стенде, соответствуют углам поворота ζ_1, ζ_2 планшайбы вокруг внешней и внутренней осей стенда; будем считать, что измерения содержат малые некоррелированные аддитивные случайные ошибки ζ_1^s, ζ_2^s ;
- модельная стендовая система координат Mp' задается матрицей ориентации $L'_p = L_p(\zeta'_1, \zeta'_2)$; вектор малого поворота ξ задает переход от стендовой системы координат к модельной стендовой и связан с порождающими его погрешностями ζ_1^s, ζ_2^s следующим образом:

$$\xi_p = \begin{bmatrix} \cos \zeta_2 & 0 \\ \sin \zeta_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1^s \\ \zeta_2^s \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Для формирования вектора корректирующих измерений потребуется вектор малого поворота δ , задающий переход от модельной системы координат к мо-

дельной стендовой. Напомним, что в отличие от вектора малого поворота κ , который описывает рассогласование между истинными матрицами ориентации, вектор малого поворота δ описывает рассогласование между модельными матрицами ориентации, благодаря этому он доступен для непосредственного вычисления.

Взаимосвязи между различными системами координат представлены на рис. 4.2.

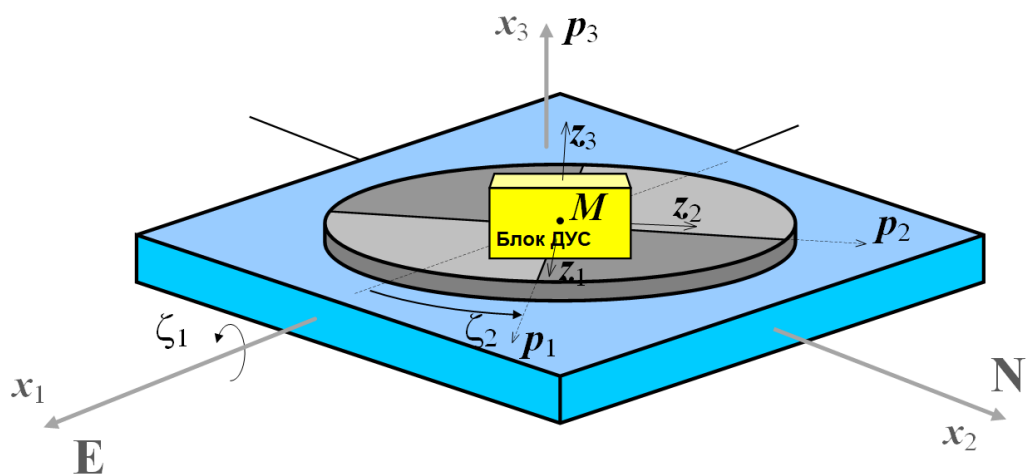


Рис. 4.1: Схематическое расположение блока ДУС на стенде: опорная Mx (толстые серые линии), приборная Mz (тонкие черные линии) и стендовая Mr (тонкие черные штрихованные линии). Последние две системы близки друг к другу.

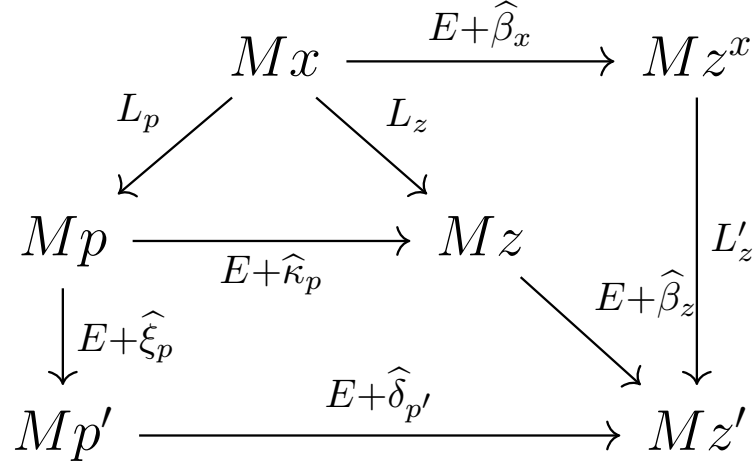


Рис. 4.2: Взаимосвязи между системами координат.

4.1 Математические модели задачи калибровки

В качестве модели измерений ДУС воспользуемся (1.4):

$$\nu_z^i = \nu_z^{0i} + K_\nu^i T_\omega^i + \Lambda_\nu^i \dot{T}_\omega^i + \Pi_\nu^{ij} \nabla_j T_\omega^i + (\Theta_j^i + K_{\Theta_j}^i T_\omega^i + \Lambda_{\Theta_j}^i \dot{T}_\omega^i + \Pi_{\Theta_j}^{ik} \nabla_k T_\omega^i) \omega_z^j, \quad (4.2)$$

$$i, j, k, = 1, 2, 3,$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1^1 & 0 & 0 \\ \Theta_2^1 & \Theta_2^2 & 0 \\ \Theta_3^1 & \Theta_3^2 & \Theta_3^3 \end{bmatrix}.$$

Модель (4.2) включает в себя стандартный набор параметров ошибок измерений ДУС (смещения нулевых сигналов, погрешности масштабных коэффициентов и малые углы перекосов осей чувствительности) и дополняется набором коэффициентов, характеризующих различные температурные зависимости (от температуры, производной температуры по времени и пространственного градиента температуры). Нижнетреугольный вид матрицы Θ порождается таким же методическим приемом параметризации ошибок, как и в случае с матрицей Γ для

блока ньютометров. Для измерений стенда воспользуемся моделью (3.2):

$$\begin{aligned}\zeta'_1 &= \zeta_1 + \zeta_1^s, \\ \zeta'_2 &= \zeta_2 + \zeta_2^s,\end{aligned}$$

будем считать, измерения стенда поступают с систематическим малым запаздыванием τ . С учетом систематического запаздывания τ , модель для вектора корректирующих измерений (3.3) принимает вид:

$$\delta_p = \kappa_p + \beta_p - (\omega_p - u_p)\tau - \xi_p \approx \kappa_p + L'_p\beta_x - (\omega'_z - u_z)\tau - \xi_p, \quad (4.3)$$

где слагаемое $(\omega'_z - u_z)\tau$ есть вектор малого поворота, возникающий ввиду систематической рассинхронизации показаний блока ДУС и стенда. С другой стороны, вектор корректирующих измерений вычисляется как соответствующие элементы кососимметрической матрицы $L'_p{}^T L'_z$:

$$\delta_p = \begin{bmatrix} (L_p L_z^T)_{23} \\ (L_p L_p^T)_{31} \\ (L_z L_p^T)_{12} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} (L'_p L_z'^T)_{23} \\ (L'_z L_p'^T)_{31} \\ (L'_p L_z'^T)_{12} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

В соответствии с (4.1) ошибки измерений в (4.3) коррелированы, их ковариационная матрица не является строго положительно определенной, что препятствует использованию этого вектора непосредственно в алгоритме оценивания. Составим декоррелированный вектор измерений w_{tt} :

$$w^{tt} = \begin{bmatrix} \cos \zeta_2 & \sin \zeta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \delta_p \approx \begin{bmatrix} \cos \zeta_2 & \sin \zeta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\kappa_p + L_p\beta_x - (\omega'_p - u_p)\tau) - \xi_p^*, \quad (4.5)$$

где ковариационная матрица ошибок измерений ξ_p^* имеет вид σE . Для случайной составляющей в векторе корректирующий измерений w^{tt} будем использовать модель несмещенного случайного процесса типа белого шума. С учетом дополнительных параметров, вектор состояния (1.6) принимает вид:

$$x = [\beta_x^i, \nu_z^{0i}, \Theta_i^j, K_\nu^i, K_{\Theta_j^i}, \Lambda_\nu^i, \Lambda_{\Theta_j^i}, \Pi_\nu^{ij}, \Pi_{\Theta_j^i}, \kappa_p^i, \tau]^T \in \mathbb{R}^{52}. \quad (4.6)$$

Вектору состояния (4.6) соответствует линейная динамическая система:

$$\begin{aligned}
 \dot{\beta}_x^1 &= u_x^3 \beta_x^2 - u_x^2 \beta_x^3 + \nu_x^1 \\
 \dot{\beta}_x^2 &= -u_x^3 \beta_x^1 + u_x^1 \beta_x^3 + \nu_x^2 \\
 \dot{\beta}_x^3 &= u_x^2 \beta_x^1 - u_x^1 \beta_x^2 + \nu_x^3 \\
 \dot{\nu}_z^{0i} &= 0 \\
 \dot{\Theta}_j^i &= 0 \\
 \dot{K}_\nu^i &= 0 \\
 \dot{K}_{\Theta j}^i &= 0 \\
 \dot{\Lambda}_\nu^i &= 0 \\
 \dot{\Lambda}_\Theta^i &= 0 \\
 \dot{\Pi}_\nu^{ij} &= 0 \\
 \dot{\Pi}_{\Theta j}^{ik} &= 0 \\
 \dot{\kappa}_p^i &= 0 \\
 \dot{\tau} &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Вектор состояния (4.6) с линейной динамической системой (4.7) и вектором корректирующих измерений (4.5) образуют задачу оценивания вектора состояния по вектору измерений, линейно связанного с вектором состояния. Задача решается при помощи дискретного фильтра Калмана. Далее проведем ковариационный анализ ошибок оценок компонент вектора состояния, по результатам полунатурного численного моделирования.

4.2 Численное моделирование

Моделирование выполнялось согласно методике 1.2.3, то есть, использовалась та же последовательность вращений, что и при калибровке БИНС в сборе. В модельном эксперименте имитировались угловые движения планшайбы двухосного поворотного стенда, которые представляют собой последовательность коротких вращений с угловой скоростью ± 10 град/сек вокруг каждой из приборных осей блока ДУС, при этом на каждом цикле ось вращения близка к плоскости горизонта. Имитация выполнена таким образом, что при практи-

ческой реализации предложенной последовательности вращений переустановка блока ДУС на планшайбе не требуется. Профиль изменения температуры соответствует показаниям термодатчиков во время реального эксперимента с системой при изменяющейся температуре в термокамере. Оценки производных температуры по времени получены при помощи методов из главы II. Характеристики системы для которой выполнялось моделирование приведены в таблице 4.1, прототипом моделируемой системы является малогабаритная курсовертикаль на базе твердотельно-волновых гироскопов (МБКВ-ТВГ) отечественного производства. Показания ДУС, датчиков температуры, а также рассчитанные производная температуры и компоненты пространственного градиента температуры представлены на рис. 4.3. Для СКО шумов измерений ДУС и стенда приняты следующие величины $\sigma_\nu = 0.5$ [град/ч] и $\sigma_f = 1$ [угл.с.], соответствующие характерным значениям для моделируемой системы и стенда. Частота регистрации данных - 100 Гц.

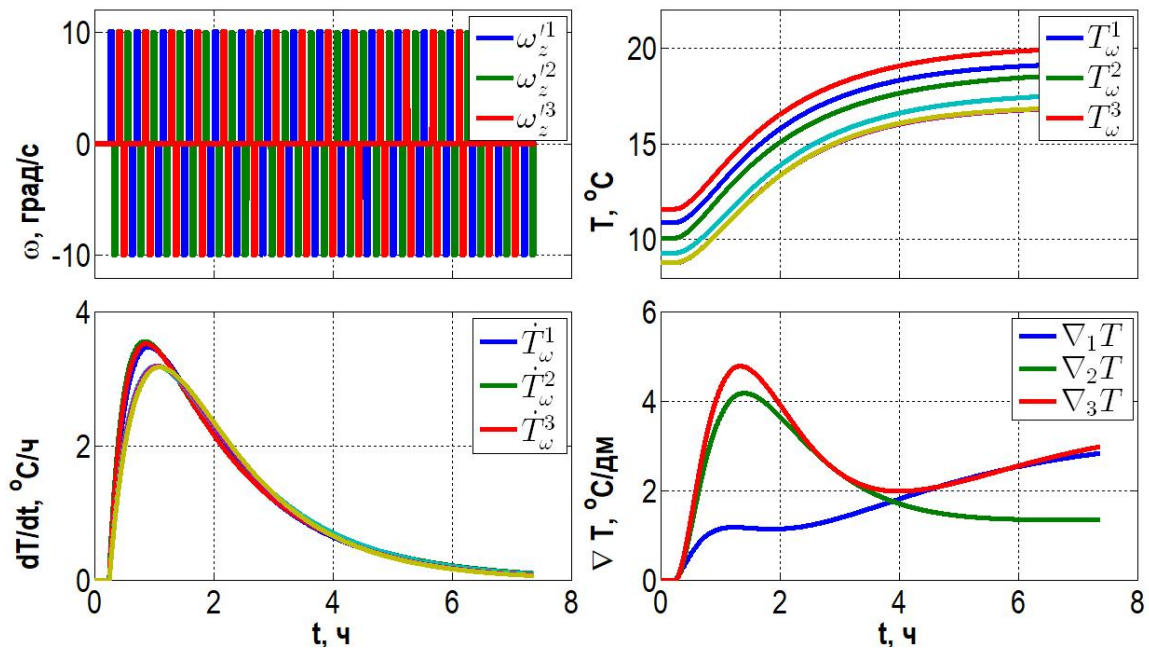


Рис. 4.3: Показания датчиков угловой скорости, температуры, а также производная температуры по времени и компоненты пространственного градиента температуры

По результатам имитации показаний датчиков стенда и блока ДУС запускается процесс обработки смоделированных данных, который, как и в случае с БИНС в сборе, состоит из двух этапов.

Характеристика	значение
СКО шумов измерений ДУС, [град/ч]/ $\sqrt{\Gamma_{\zeta}}$	5
Стабильность погрешности нулевого сигнала ДУС, град/ч	1.0
Стабильность погрешности масштабного коэффициента, ppm	500
СКО шумов измерений r_z , [угл. с.]/ $\sqrt{\Gamma_{\zeta}}$	10

Таблица 4.1: Характеристики модельной системы

1. Начальная выставка (определение начальной ориентации блока ДУС по измерениям углов стенда).
2. Основной цикл обработки показаний, в котором решаются следующие задачи:
 - определение матрицы ориентации L'_z посредством решения кинематических уравнений Пуассона (1.6);
 - определение матрицы ориентации L'_p на основе показаний датчиков углов поворота планшайбы стенда в соответствии с кинематической схемой стенда;
 - оценка вектора состояния (4.6) при помощи фильтра Калмана (шаг прогноза согласно (4.7) и коррекции по вектору измерений (4.5)).

4.3 Результаты моделирования

По результатам обработки модельных данных проводился ковариационный анализ, то есть анализ поведения во времени оценок СКО ошибок оценок компонент вектора состояния. Соответствующие числовые характеристики приведены в таблице 4.2, а также на графиках 4.4, 4.5, 4.6, 4.7. Из приведенных таблиц и графиков следует, что оценки компонент вектора состояния уточняются по сравнению с априорными в модели (4.7). Для смещений нулевых сигналов ДУС в 7 раз; более чем в 10 раз для погрешностей масштабных коэффициентов и углов пертогональности осей чувствительности ДУС; для остальных параметров более чем на порядок. Отметим различные характерные времена убывания оценок СКО для различных параметров: медленнее всех убывают оценки СКО для

смещений нулевых сигналов ДУС и связанных с ними коэффициентов температурных зависимостей, заметно быстрее убывают оценки СКО для погрешностей масштабных коэффициентов, углов перекосов осей чувствительности ДУС и соответствующих коэффициентов температурных зависимостей, почти мгновенно убывают оценки СКО для углов-ошибок установки блока ДУС на планшайбе и параметра рассинхронизации показаний блока ДУС и стенда.

Описанная выше процедура моделирования была выполнена многократно с различным значениями СКО шумов ДУС и погрешностей измерений стенда для определения требований к точности системы. Для обеспечения СКО ошибки оценки смещений нулевых сигналов ДУС на уровне 0.01 град/ч СКО шумов показаний ДУС, а также шумов в задаче оценивания должны быть на уровне не выше $0.01 \text{ [град/ч]} / \sqrt{\Gamma_{\text{ц}}}$ и $5 \text{ [угл. с.]} / \sqrt{\Gamma_{\text{ц}}}$ соответственно, а общая продолжительность эксперимента должна быть не менее 6 часов для выхода ковариаций на постоянные значения.

парам.	ν_z^{01}	ν_z^{02}	ν_z^{03}	Θ_1^1	Θ_2^2	Θ_3^3	Θ_2^1	Θ_3^1	Θ_3^2
разм.	град/ч			ppm			угл.сек.		
σ_o	5.000	5.000	5.000	500.0	500.0	500.0	100	100	100
σ_k	0.493	0.446	0.338	18.0	39.9	36.0	5.3	9.4	9.0
парам.	K_ν^1	K_ν^2	K_ν^3	$K_{\Theta_1}^1$	$K_{\Theta_2}^2$	$K_{\Theta_3}^3$	$K_{\Theta_2}^1$	$K_{\Theta_3}^1$	$K_{\Theta_3}^2$
разм.	град/ч/°C			ppm/°C			угл.сек./°C		
σ_o	0.5000	0.5000	0.5000	50.00	50.00	50.00	120.00	120.00	120.00
σ_k	0.0805	0.0710	0.0623	3.36	6.53	5.89	0.96	1.60	1.41
парам.	Λ_ν^1	Λ_ν^2	Λ_ν^3	$\Lambda_{\Theta_1}^1$	$\Lambda_{\Theta_2}^2$	$\Lambda_{\Theta_3}^3$	$\Lambda_{\Theta_2}^1$	$\Lambda_{\Theta_3}^1$	$\Lambda_{\Theta_3}^2$
разм.	град/ч/(°C/ч)			ppm/(°C/ч)			угл.сек./(°C/ч)		
σ_o	0.5000	0.5000	0.5000	50.00	50.00	50.00	120.00	120.00	120.00
σ_k	0.2222	0.1801	0.1598	8.83	16.91	16.15	2.69	4.64	3.82
парам.	Π_ν^{21}	Π_ν^{22}	Π_ν^{23}	$\Pi_{\Theta_1}^{21}$	$\Pi_{\Theta_2}^{22}$	$\Pi_{\Theta_3}^{23}$	$\Pi_{\Theta_2}^{21}$	$\Pi_{\Theta_3}^{21}$	$\Pi_{\Theta_3}^{22}$
разм.	град/ч/(°C/дм)			ppm/(°C/дм)			угл.сек./(°C/дм)		
σ_o	0.5000	0.5000	0.5000	500.00	500.00	500.00	120.00	120.00	120.00
σ_k	0.0276	0.0288	0.0278	1.57	2.45	1.69	0.34	0.42	0.38
парам.	Π_ν^{31}	Π_ν^{32}	Π_ν^{33}	$\Pi_{\Theta_1}^{31}$	$\Pi_{\Theta_2}^{32}$	$\Pi_{\Theta_3}^{33}$	$\Pi_{\Theta_2}^{31}$	$\Pi_{\Theta_3}^{31}$	$\Pi_{\Theta_3}^{32}$
разм.	град/ч/(°C/дм)			ppm/(°C/дм)			угл.сек./(°C/дм)		
σ_o	0.5000	0.5000	0.5000	500.00	500.00	500.00	120.00	120.00	120.00
σ_k	0.0599	0.0471	0.0470	2.90	4.36	3.97	0.78	1.22	0.89

Таблица 4.2: Начальные (априорные) и конечные оценки СКО оценок смещений нулевых сигналов, масштабных коэффициентов, углов перекосов ДУС и соответствующих температурных коэффициентов

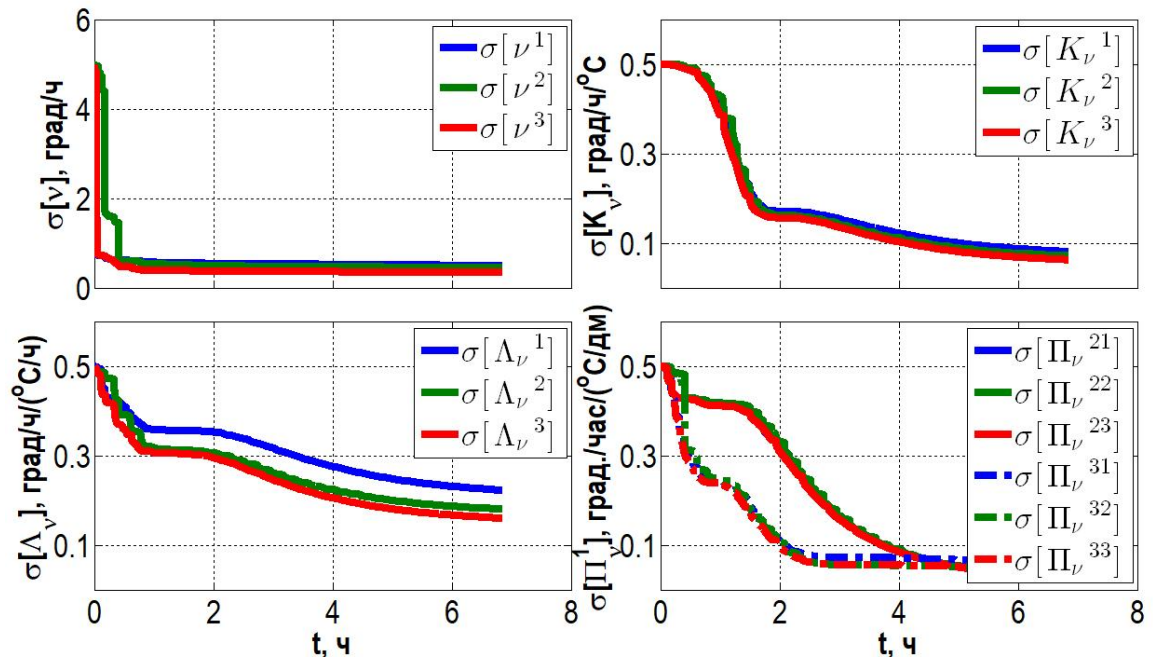


Рис. 4.4: Оценки СКО для оценок смещений нулевых сигналов ДУС и соответствующих коэффициентов зависимостей от температуры, производной температуры по времени и компонентов пространственного градиента температуры

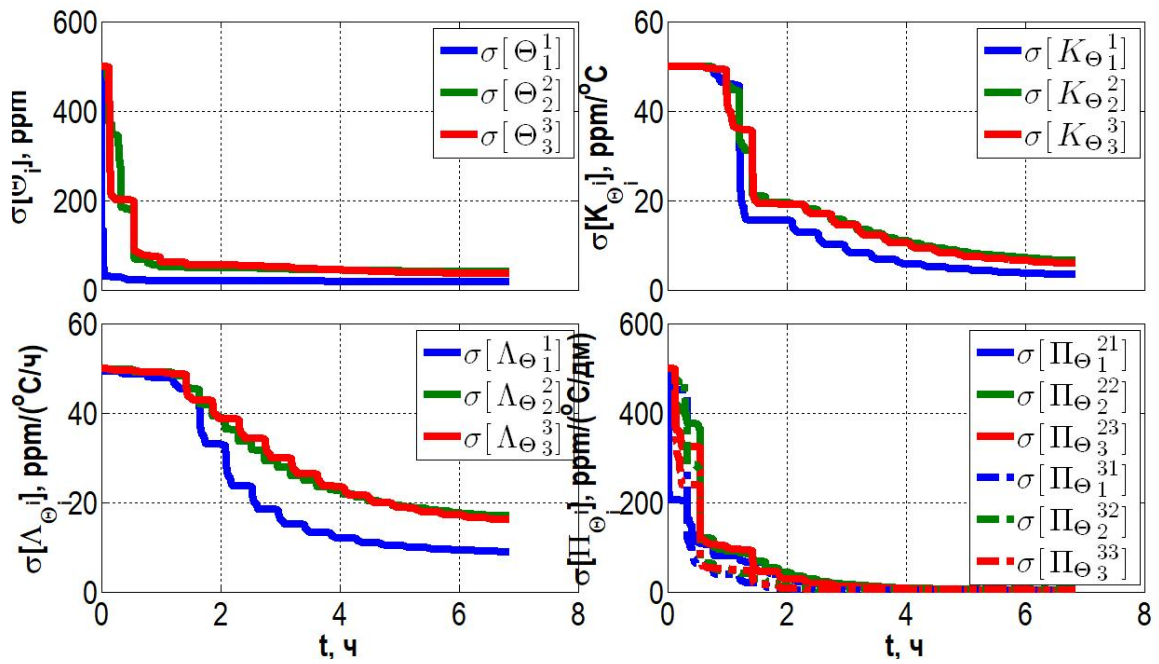


Рис. 4.5: Оценки СКО для оценок погрешностей масштабных коэффициентов ДУС и соответствующих коэффициентов зависимостей от температуры, производной температуры по времени и компонентов пространственного градиента температуры

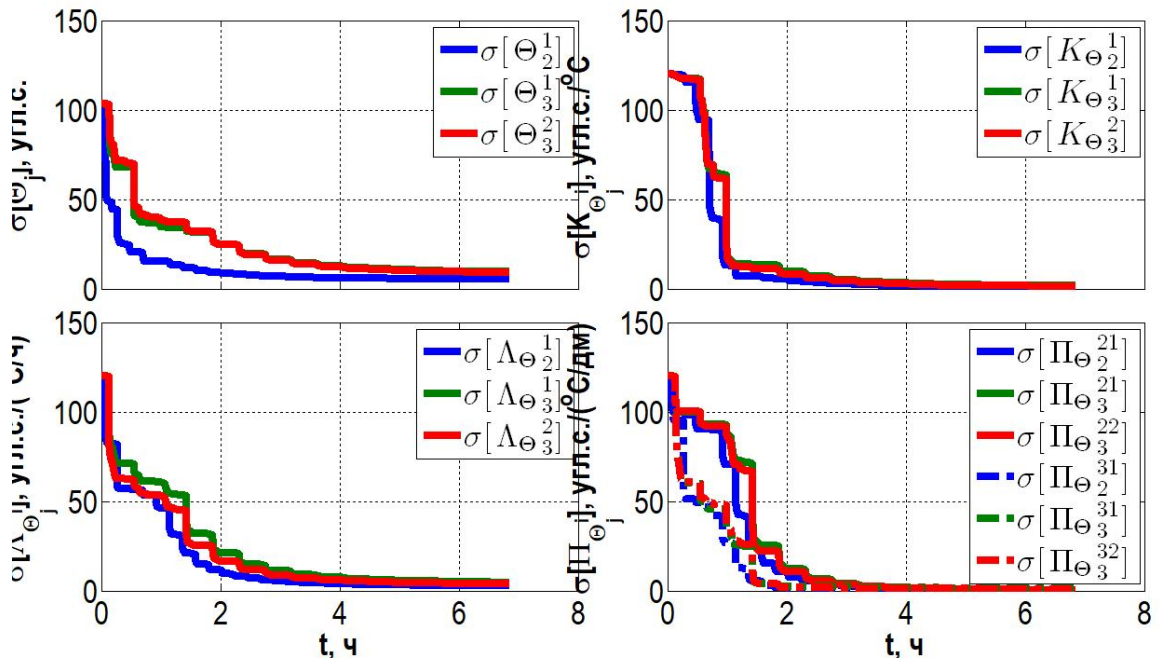


Рис. 4.6: Оценки СКО для оценок углов перекосов осей чувствительности ДУС и соответствующих коэффициентов зависимостей от температуры, производной температуры по времени и компонентов пространственного градиента температуры

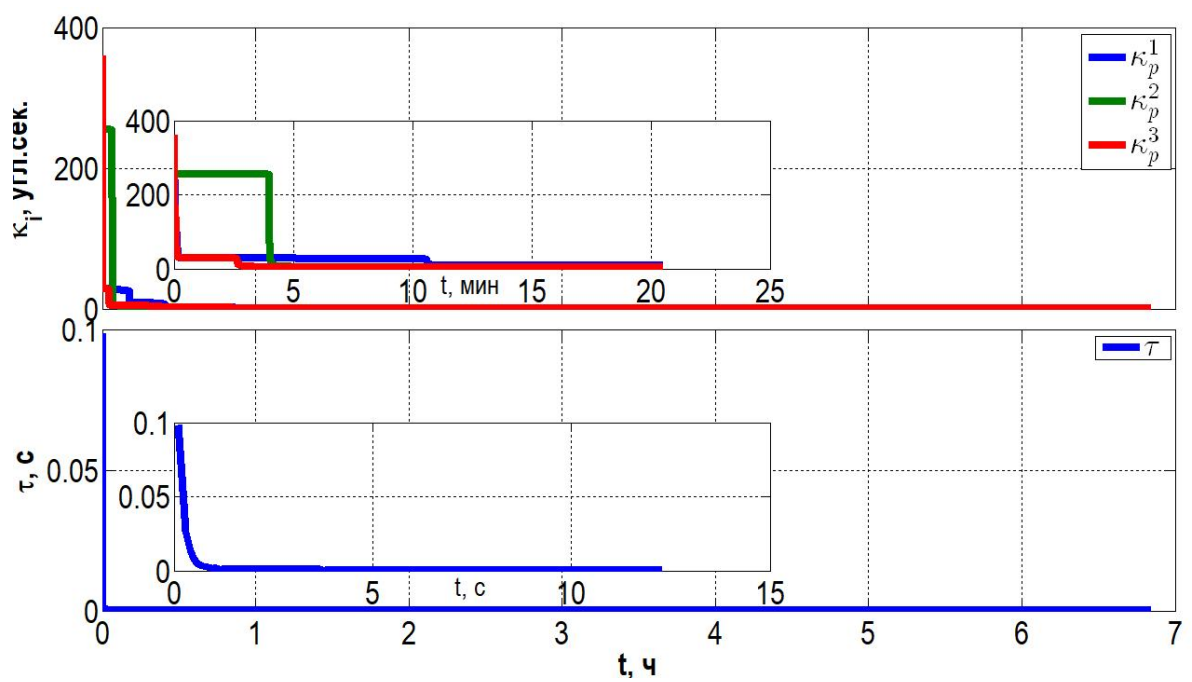


Рис. 4.7: Оценки СКО для оценок рассинхронизации по времени показаний блока ДУС и стенда, а также малых углов-ошибок установки системы

Заключение к главе IV

Рассмотрена задача калибровки инерциального измерительного блока, состоящего только датчиков угловой скорости при помощи измерений от двухосного калибровочного стенда. Выведена и обоснована модель измерений стенда, а также ключевые кинематические соотношения описывающие его движение. Сформулирована математическая постановка задачи калибровки как задачи оптимального оценивания. Поставленная задача потребовала включить в сводную модель задачи оценивания, помимо стандартных инструментальных погрешностей блока ДУС, угловые ошибки планшайбы стенда и параметр рассинхронизации измерений ДУС и стенда. Проведено численное моделирование плана калибровочных вращений стенда и последующий ковариационный анализ, позволивший сделать вывод о потенциальной точности оценок вектора состояния в сформулированной задаче оценивания в рамках рассматриваемого эксперимента. Несмотря на то, что моделирование выполнено для системы тактического класса точности, предложенная методика калибровки может быть использована при калибровке систем другого класса точности.

Выводы

Перечислим основные результаты полученные в диссертации.

1. Исследованная ранее другими авторами задача динамической калибровки БИНС на основе уравнений ошибок дополнена моделью температурных зависимостей, включающей в себя: коэффициенты зависимости от температуры, производной температуры по времени и пространственного градиента температуры. Исследована наблюдаемость параметров введенных температурных моделей, сформулированы достаточные условия наблюдаемости температурных коэффициентов. При помощи ковариационного анализа ошибок оценок показано, что задача температурной калибровки может быть решена при помощи рассматриваемой методики с необходимой точностью.
2. Исследована задача оценки скорости изменения температуры по измерениям датчиков температуры в реальном времени. Обоснованы математические модели динамики изменения температуры и соответствующий алгоритм оценивания, представляющий собой модификацию фильтра Калмана. Представлены результаты оценивания производной температуры для системы навигационного класса точности.
3. Проанализированы результаты температурной калибровки для двух систем различного класса точности. Проведено сравнение точности БИНС до и после компенсации погрешностей. Представленные результаты подтвердили эффективность предложенной методики калибровки для систем различного класса точности.
4. Рассмотрена задача калибровки БИНС, состоящей только из трех ДУС. Сформулирована математическая постановка задачи калибровки для бло-

ка ДУС с учетом информации об углах поворота платформы стенда. Результаты ковариационного анализа подтвердили, что задача такого типа может быть решена при помощи рассматриваемой методики с необходимой точностью.

Литература

1. Savage P. Strapdown Analytics (vol. 1). Strapdown Associates, 2000. 1556 p.
2. Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Часть II. Приложения методов оптимального оценивания к задачам навигации. М.: МАКС Пресс, 2012. 170 с.
3. Измайлов Е.А. Современные тенденции развития технологий инерциальных чувствительных элементов и систем летательных аппаратов // М.: Труды ФГУП «НПЦ АП». 2010. С. 30 – 43.
4. Бромберг П.В. Теория инерциальных систем навигации. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. 256 с.
5. Андреев В.Д. Теория инерциальной навигации (корректируемые системы). М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. 579 с.
6. Панов А.П. Математические основы теории инерциальной ориентации. Киев: Наукова думка, 1995. 280 с.
7. Пазычев Д.Б. Температурная калибровка бесплатформенной инерциальной навигационной системы, построенной на базе микромеханических чувствительных элементов // Машиностроение и компьютерные технологии. 2011. № 1. С. 5 – 6.
8. Ермаков В.С. Автоматизация калибровки бесплатформенных инерциальных навигационных систем на волоконно-оптических гироскопах. Диссертация на соискание степени кандидата наук: Пермский государственный технический университет. 2007. 143 с.

9. Веремеенко К. К., Галай И. А. Разработка алгоритма калибровки инерциальной навигационной системы на двухосном испытательном стенде // Электронный журнал "Труды МАИ". 2013. № 63. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=36139>.
10. Николаев С. Г., Ившина Ю.В. Калибровка бесплатформенных инерциальных навигационных систем по выходным сигналам модели ошибок // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. Выпуск 4(200). 2014. С. 95–105.
11. Акимов П.А., Деревянкин А.В., Матасов А.И. Гарантирующий подход и L1-аппроксимация в задачах оценивания параметров БИНС при стендовых испытаниях. 2012. 296 с.
12. Быковский А.В. Калибровка бесплатформенной инерциальной навигационной системы в режиме Навигация // Авиакосмическое приборостроение. 2014. № 1. С. 18–25.
13. Titterton H., Weston D. Strapdown inertial navigation technology. Institution of Engineering and Technology, 2004. Vol. 17. 558 p.
14. Bekkeng J. K. Calibration of a Novel MEMS Inertial Reference Unit // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. 2009. June. Vol. 58, № 6. P. 1967–1974.
15. Muhammad A. Correction of temperature and acceleration effects on MEMS gyro output signals. Ph.D. thesis: The graduate school of natural and applied sciences of Middle East Technical University. 2014. 133 p.
16. Shin E., El-Sheimy N. A new calibration method for strapdown inertial navigation systems // Z. Vermess. 2002. Vol. 127. P. 1–10.
17. A multi-position calibration method for consumer-grade accelerometers, gyroscopes, and magnetometers to field conditions / O. Särkkä, T. Nieminen, S. Surinemi et al. // IEEE Sensors Journal. 2017. June. Vol. 17, № 11. P. 3470–3481.

18. Syed Z., Aggarwal P. et al. A new multi-position calibration method for MEMS inertial navigation systems // Measurement Science and Technology. 2007. Vol. 18, № 7. p. 1897.
19. Nieminen T., Kangas J. et al. An enhanced multi-position calibration method for consumer-grade inertial measurement units applied and tested // Measurement Science and Technology. 2010. Vol. 21, № 10. URL: <http://stacks.iop.org/0957-0233/21/i=10/a=105204>.
20. Salychev O. Inertial systems in navigation and geophysics. Bauman MSTU Press Moscow, Russia, 1998. 352 p.
21. Syed Z. Design and implementation issues of a portable navigation system. Ph.D. thesis: University of Calgary. 2009. 210 p.
22. Парусников Н.А. Задача калибровки бескарданной инерциальной навигационной системы на стенде // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2009. № 4. С. 3–9.
23. Устюгов М.Н., Щипицына М.А. Калибровка акселерометра бесплатформенной инерциальной навигационной системы // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2006. № 14 (69). С. 140–143.
24. Измайлов Е.А., Лепе С.Н. [и др.]. Скалярный способ калибровки и балансировки бесплатформенных инерциальных навигационных систем // Юбилейная XV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам: сборник материалов. 2008. С. 145–154.
25. Аврутов В.В. О скалярной калибровке блока гироскопов и акселерометров // Вестник НТУУ "КПИ". Сер. Приборостроение. 2010. № 40. С. 10–17.
26. Лакоза СЛ, Мелешко ВВ. Скалярная калибровка акселерометров низкой и средней точности // Радиостроение. 2015. № 1. С. 9–28.
27. Дзуев А.А. Инвариантная калибровка блока акселерометров бесплатформенных инерциальных навигационных систем. Диссертация на соискание

- степени кандидата наук: Московский Государственный Технический Университет имени Н.Э. Баумана. 2019. 158 с.
28. Nayal A. Static calibration of the tactical grade inertial measurement units. Ph.D. thesis. The Ohio State University, 2010. 77 p.
 29. Шаймарданов И.Х., Дзуев А.А., Голиков В.П. Методы калибровки бесплатформенной навигационной системы (БИНС) различного класса точности // XXIII Санкт-Петербургская Международная Конференция по Интегрированным Навигационным Системам: сборник материалов. 2016. С. 46–51.
 30. Златкин Ю.М., Калногуз А.Н. [и др.]. Лазерная БИНС для ракеты-носителя «Циклон-4» // XIX Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам: сборник материалов. 2012. С. 68–77.
 31. Cai Q., Yang G., Song N. Systematic calibration for ultra-high accuracy inertial measurement units // Sensors. 2016. Т. 16, № 6. URL: <https://doi.org/10.3390/s16060940>.
 32. Bo X., Feng S. A FOG online calibration research based on high-precision three-axis turntable // 2009 International Asia Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics. Proceedings / IEEE. 2009. P. 454–458.
 33. Драницына Е.В. Калибровка измерительного модуля прецизионной БИНС на волоконно-оптических гироскопах. Диссертация на соискание степени кандидата наук: Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики. 2016. 146 с.
 34. Васинева И.А. Калибровка бескарданной инерциальной навигационной системы в сборе на точных стендах. Диссертация на соискание степени кандидата наук: Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова. 2017. 99 с.
 35. Атаманов Н.А., Троицкий В.А., Гусев И.В. Калибровка блока чувствительных элементов БИНС // XII Санкт-Петербургская международная конфе-

- ренция по интегрированным навигационным системам: сборник материалов. 2005. С. 162–164.
36. Kozlov A.V., Sazonov I.U, Vavilova N.B. IMU calibration on a low grade turntable: embedded estimation of the instrument displacement from the axis of rotation // Inertial Sensors and Systems (ISISS), 2014 International Symposium. 2014. С. 1–4.
 37. Козлов А. В., Сазонов И.Ю. Калибровка инерциальных навигационных систем на грубых стендах с учетом разнесения чувствительных масс ньютонометров // Научный вестник МГТУ ГА. 2013. Т. 189, № 3. С. 27–35.
 38. Вавилова Н.Б., Парусников Н.А., Васинева И.А. О стендовой калибровке авиационных бескарданных инерциальных навигационных систем // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/o-stendovoy-kalibrovke-aviatsionnyh-beskardannyh-inertsialnyh-navigatsionnyh-sistem>.
 39. Шаймарданов И.Х. Методика стендовой калибровки бесплатформенных инерциальных навигационных систем различного класса точности. Диссертация на соискание степени кандидата наук: Московский Государственный Технический Университет имени Н.Э. Баумана. 2018. 174 с.
 40. Джашитов В.Э., Панкратов В. М. Математические модели теплового дрейфа гироскопических датчиков инерциальных систем. СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2001. 150 с.
 41. Niu X., Li Y. et al. Fast thermal calibration of low-grade inertial sensors and inertial measurement units // Sensors. 2013. Vol. 13, № 9. P. 12192–12217.
 42. Wang X., Wu W. et al. Temperature drift compensation for hemispherical resonator gyro based on natural frequency // Sensors. 2012. Vol. 12, № 5. P. 6434–6446.
 43. Shupe D. Thermally induced nonreciprocity in the fiber-optic interferometer // Applied optics. 1980. Vol. 19, № 5. P. 654–655.

44. Молчанов А. В., Климанов В.В., Чиркин М.В. Тепловая модель бесплатформенной инерциальной навигационной системы на лазерных гироскопах // Труды московского института электромеханики и автоматики. 2013. № 7. С. 60–69.
45. Галянин К.С., Ошивалов М.А. [и др.]. Расчётный прогноз теплового дрейфа волоконно-оптического гироскопа // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2012. № 32. С. 127–140.
46. Галянин К.С., Ошивалов М.А. [и др.]. Термометрия блока чувствительности волоконного оптического гироскопа в условиях теплового дрейфа // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2010. № 30. С. 27–40.
47. Trusov A., Shkel A. et al. Thermal calibration of silicon MEMS gyroscope // 8th International Conference and Exhibition on Device Packaging. 2012. P. 30–32.
48. Wang Q., Li Y., Niu X. Thermal calibration procedure and thermal characterisation of low-cost inertial measurement units // Journal of Navigation. 2015. Vol. 1. P. 1–18.
49. Berman Z. Inertial Sensors — A New Approach for Low Cost Calibration and Testing // Symposium Gyro Technology / Institute of Systems Optimization. Vol. 19. 2011. P. 1–8.
50. Li J., Wang W. et al. A nonlinear multiparameters temperature error modeling and compensation of POS applied in airborne remote sensing system // Journal of Applied Mathematics. 2014. Vol. 2014. P. 1–11.
51. Li G., Zhang P. et al. Multiple-point temperature gradient algorithm for ring laser gyroscope bias compensation // Sensors. 2015. Vol. 15, № 12. P. 29910–29922.
52. De Parolis M.N., Pinter-Krainer W. Current and future techniques for spacecraft thermal control // ESA Bulletin. 1996. № 87. URL: <https://www.esa.int/esapub/bulletin/bullet87/paroli87.htm>.
53. Gilmore D. Spacecraft Thermal Control Handbook. Aerospace Press, 2002. 836 p.

54. Громов Д.С. Тепловая защита и термостабилизация волоконно-оптического гироскопа в составе бесплатформенной инерциальной навигационной системы // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2014. № 2 (90). С. 137–142.
55. Бордачев Д.А. Теоретическое и экспериментальное исследование системы термостатирования прецизионного измерителя вектора угловой скорости на поплавковых гироскопах. Диссертация на соискание степени кандидата наук: Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет). 2017. 127 с.
56. Datasheet 2-Axis Rate Table AC2267-TC. URL: <http://www.hoyateq.com/Datasheet/AC2267-TC.pdf>.
57. Мешковский И.К., Мирошниченко Г.П. [и др.]. Исследование влияния тепловых воздействий на работу волоконно-оптического датчика угловой скорости. XXI Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам: сборник материалов. – СПб.: ОАО "Концерн "ЦНИИ"Электроприбор 2014. С. 191–202.
58. Шарков И.А. Исследование и пути компенсации тепловых воздействий на сигнал волоконно-оптического гироскопа. Диссертация на соискание степени кандидата наук: ИА Шарков СПб. 2013. 112 с.
59. Фомичев А.В., Кухтевич С.Е., Измайлов Е.А. Результаты совершенствования программно-математического обеспечения системы БИНС-СП-2 по материалам летных испытаний // Труды МИЭА. Навигация и управление летательными аппаратами. 2013. № 7. С. 19–29.
60. Кутовой В.М., Маслова О.И., Перепелкина С.Ю. Исследование характеристик бесплатформенного инерциального блока на базе волоконно-оптических гироскопов в процессе наземной отработки // XVIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам: сборник материалов. 2011. С. 143–151.

61. Tarygin I., Kozlov A. Calibration of inertial measurement unit with simultaneous estimation of the temperature time-derivative variations // *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace (MESA)*. 2019. Vol. 10, № 4. P. 715–723.
62. Tarygin I., Kozlov A. Real-time estimation of temperature time derivative in inertial measurement unit by finite-impulse-response exponential regression on updates // *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace (MESA)*. 2020. Vol. 20, № 5. <https://doi.org/10.3390/s20051299>.
63. Голован А.А., Матасов А.И., Тарыгин И.Е. Калибровка блока ньютонометров с асимметричными моделями показаний чувствительных элементов // *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*. 2022. № 2. С. 107–119. = Golovan, A.A. Matasov A.I., Tarygin I.E. Calibration of an Accelerometer Unit with Asymmetric Models of Readings of Sensors // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2022. Vol. 61, № 2. P. 240–252. <https://doi.org/10.1134/S1064230722020071>.
64. Козлов А.В., Тарыгин И.Е. Анализ наблюдаемости в задаче калибровки температурных моделей погрешностей инерциальных датчиков авиационной навигационной системы // *Труды МАИ*. 2016. № 89. <https://cyberleninka.ru/article/n/analiz-nablyudaemosti-v-zadache-kalibrovki-temperaturnyh-modeley-pogreshnostey-inertsialnyh-datchikov-aviatsionnoy-navigatsionnoy>.
65. Козлов А.В., Парусников Н.А., Вавилова Н.Б., Тарыгин И.Е., Голован А.А. Динамическая стендовая калибровка бескарданных инерциальных навигационных систем в сборе // *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2018. Т. 195, № 1. С. 241–257.
66. Голован А.А., Козлов А.В., Тарыгин И.Е. Калибровка инерциальных измерительных блоков на грубых стендах с оценкой температурных зависимостей по эксперименту с переменной температурой // XXI Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам: сборник материалов. Государственный научный центр Российской Федерации АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». 2014. С. 319–322. = Kozlov A.V., Tarygin I.E., Golovan A.A. Calibration of inertial

- measurement units on a low-grade turntable with simultaneous estimation of temperature coefficients. // Proceedings of the 21st Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, Concern CSRI Elektropribor, JSC Saint-Petersburg. 2014. P. 376–379.
67. Голован А.А., Козлов А.В., Тарыгин И.Е. Калибровка инерциальных измерительных блоков на грубых одноосных стендах: оценка коэффициентов зависимости от производной температуры // XXIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам: сборник материалов. Государственный научный центр Российской Федерации АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». 2016. С. 55–61. = Kozlov A.V., Tarygin I.E., Golovan A.A. Calibration of inertial measurement unit on a low-grade turntable: Estimation of temperature time derivative coefficients. // Proceedings of the 23rd Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. Proceedings. State Research Center of the Russian Federation Concern CSRI Elektropribor, JSC. 2016. P. 76–80.
68. IEEE Standard for Inertial Systems Terminology // IEEE Std 1559-2009. 2009. P. 1–40.
69. IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros // IEEE Std 952-1997. 1998. P. 1–84.
70. Hutchings T. J., Stjern D. C. Scale factor non-linearity of a body dither laser gyro // NAECON'78; Proceedings of the National Aerospace and Electronics Conference. 1978. Vol. 2. P. 549–555.
71. Shim K.-M., Lee Y.-S. A Study on the relation between the scale factor non-linearity and dither noise form of ring laser gyroscope // Journal of the Korea Institute of Military Science and Technology. 2007. Vol. 10. P. 107–115.
72. Вавилова Н. Б., Парусников Н. А., Сазонов И. Ю. Калибровка бескарданных инерциальных навигационных систем при помощи грубых одностепенных стендов // Современные проблемы математики и механики. 2009. Т. 1. С. 212–223.

73. Diesel J. Calibration of a ring laser gyro inertial navigation system // Thirteenth Biennial Guidance Test Symposium. Holloman Air Force Base, New Mexico. 1987. Vol. 1. P. 1–37.
74. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. Наука, 1978. 396 с.
75. Vavilova N., Vasineva I. et al. Calibration problem in inertial navigation // Journal of Mathematical Sciences. 2021. Vol. 253, № 6. P. 818–836.
76. Александров В.В., Лемак С.С., Парусников Н. А. Лекции по механике управляемых систем. МАКС Пресс Москва, 2012. 240 с.
77. Красовский Н.Н. Теория управления движением. 1968. 476 с.
78. Сазонов И.Ю. Задача идентификации инструментальных погрешностей (калибровки) бескарданной инерциальной навигационной системы в сборе при помощи грубых одностепенных стендов. Диссертация на соискание степени кандидата наук: Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова. 2012. 87 с.
79. Morozov V., Baklanov F. Practical Methods to Investigate Observability of Linear Time-Varying Systems // Journal of Mathematical Sciences. 2021. Vol. 253. P. 908–919.
80. Каленова В., Морозов В. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. Литрес, 2022. 207 с.
81. Голован А.А., Козлов А.В., Тарыгин И.Е. и др. Калибровка инерциальных измерительных блоков с оценкой температурных зависимостей по эксперименту с переменной температурой: результаты калибровки БИНС-РТ // XXIV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам: сборник материалов. – Государственный научный центр Российской Федерации АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». 2017. С. 225–228. = Kozlov A.V., Tarygin I.E., Golovan A.A. Calibration of an inertial measurement unit at changing temperature with simultaneous estimation of temperature variation coefficients: a case study on BINS-RT // 24th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation

- Systems. Proceedings. — State Research Center of the Russian Federation Concern CSRI Elektropribor, JSC, 2017. — P. 314–317.
82. Тарыгин И.Е. К задаче калибровки инерциальных датчиков при изменяющейся температуре // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2019. № 1. С. 64–68. = Tarygin I.E. Calibration of inertial sensors in the case of varying temperature // Moscow University Mechanics Bulletin. 2019. Vol. 74, № 1. P. 24–28. <http://dx.doi.org/10.3103/s0027133019010059>.
83. Kozlov A., Tarygin I. Extensive validation of a real-time time derivative filter for quantized temperature measurements // 2020 IEEE SENSORS Proceedings. Piscataway, NJ, United States. 2020. <https://doi.org/10.1109/sensors47125.2020.9278525>.
84. Savitzky A., Golay M. Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures. // Analytical chemistry. 1964. Vol. 36, № 8. P. 1627–1639.
85. Oppenheim A., Schaffer R., Buck J. Discrete-time Signal Processing. Prentice Hall international editions. Prentice Hall, 1999. 870 p.
86. Lyons R. Understanding Digital Signal Processing. Prentice Hall professional technical reference. Prentice Hall/PTR, 2004. 665 p.
87. Proakis J., Manolakis D. Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications. Macmillan, 1992. 969 p.
88. Kailath T. Linear systems. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1980. Vol. 156. 682 p.
89. Maybeck P. Stochastic models, estimation, and control. Academic press, 1982. 291 p.
90. Li X., Ou X. et al. Online temperature estimation for noisy thermal sensors using a smoothing filter-based Kalman predictor // Sensors. 2018. Vol. 18, № 2. URL: <https://doi.org/10.3390/s18020433>.

91. Матасов А.И., Тихомиров В.В. Калибровка бесплатформенной инерциальной навигационной системы при повороте вокруг вертикальной оси // Электронный журнал "Труды МАИ". 2016. № 89. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/kalibrovka-besplatformennoy-inertsialnoy-navigatsionnoy-sistemy-pri-povorote-vokrug-vertikalnoy-osi>.
92. Петровский И. Лекции об уравнениях с частными производными. Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 400 с.
93. Conn A., Gould N., Toint P. Trust Region Methods. MPS-SIAM Series on Optimization. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000. 951 p.
94. Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А. К вопросу об информационно эквивалентных функциональных схемах в корректируемых ИНС // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2008. № 3. С. 90–101.
95. Тарыгин И.Е. Методика калибровки тепловой модели блока чувствительных элементов, состоящего из трех датчиков угловой скорости // Гиропсия и навигация. 2019. Т. 27, № 4. С. 88–102. = Tarygin I.E. Calibration of the Thermal Model of an Inertial Measurement Unit with Three Angular Rate Sensors // Gyroscopy and Navigation 2020. Vol. 11, № 1. P. 25–33. <https://doi.org/10.1134/S2075108720010125>.
96. Golovan A., Kozlov A., Tarygin I. Calibration of a 3-axis hemispherical resonator gyro assembly // Proceeding of 8th International Conference on Recent Advances in Space Technologies. IEEE Istanbul, Turkey. 2017. P. 36–39.

Приложение

Описание алгоритма оценки производной температуры по времени

Опыт обработки экспериментальных данных показал, что в алгоритме оценки производной температуры по времени необходимо выделять 5 шагов, из которых 2 – 5 выполняются в цикле:

- инициализация;
- проверка наличия новых измерений τ' и актуализация оценки вектора состояния при их наличии;
- проверка наличия устаревших измерений и удаление их из оценки вектора состояния при их наличии;
- изменение значения для t_0 при необходимости;
- определение оценки температуры и производной температуры.

Отметим, что сам по себе описанный алгоритм является достаточно простым для реализации в аппаратном обеспечении БИНС. Рассмотрим каждый из шагов алгоритма более подробно.

Инициализация

Для инициализации вектора состояния достаточно иметь несколько измерений τ' , однако, с учетом перечисленных ранее особенностей, может произойти ситуация, когда измерения температуры не изменяются на начальном этапе измерений или, напротив, набор измерений может быть расположен в очень коротком интервале времени, что приведет к плохой обусловленности задачи определения начальных значений. В этом случае, для корректной инициализации вектора состояния создадутся фиктивные измерения, которым будут соответствовать отрицательные моменты времени. Например, для модели с $n = 3$

создается $2n$ измерений, равных первому действительному измерению с интервалом в 1 минуту:

$$\tilde{\tau}'(t_k) \equiv \tau_0 = \tau'(0), \quad k = -2n, \dots, -1, \quad t_k = k \text{ мин.} \quad (4.8)$$

Начальное значение вектора состояния принимается равным 0, а матрицы ковариаций некоторому большому числу (например, 10^6 °C). Далее выполняются шаги коррекции алгоритма по фиктивным измерениям. В результате получаются начальное значение вектора состояния $\tilde{x}(0)$ и соответствующая начальная матрица ковариаций $P(0)$. Заметим, что такой процедуре соответствует нулевое значение производной температуры в момент включения системы, что в большинстве случаев имеет место на практике. В противном случае (например, перезапуска системы), реальные измерения позволят оценке быстро сойтись к фактическому значению производной.

Обработка измерений и коррекция вектора состояния

По определению измерений $\tilde{\tau}'$ новое измерение поступает каждый раз, когда показания датчика переходят с одного уровня квантования на другой. Дополнительно коррекция требуется в том случае, когда прогноз на основе температурной модели начинает слишком сильно отличаться от поступающих измерений температуры. В таком случае вновь поступившее показание датчика температуры будет рассматриваться в качестве измерения $\tilde{\tau}'$, на основе которого будет выполнена коррекция. Допустимый уровень отклонения при этом определяется пороговым условием:

$$|h(t)x - \tau'(t)| > q_\tau \quad \implies \quad t_k = t, \quad \tilde{\tau}'(t_k) = \tau'(t). \quad (4.9)$$

Измерение поступившее в момент времени $t = t_k$ согласно (2.24) или (4.9) подается на вход алгоритма фильтрации, который был описан ранее с матрицей измерений $h = h(t_k)$ и априорным значением СКО ошибки измерения равным $\sigma_0 = q_\tau/4$. Но выходе получают обновленную оценку вектора состояния \tilde{x} и корня из матрицы ковариаций S .

Удаление устаревших измерений

Удаление устаревших измерений из оценки вектора состояния требуется для обеспечения вариативности его компонент. Обычно эта проблема решается при помощи задания СКО шумов для формирующей системы, однако в нашем случае подобрать подходящие шумы оказалось весьма трудной задачей, поскольку

коэффициенты в модели (2.29) в некотором роде абстрактны и сочетают в себе различные характеристики температурного поля, а поэтому их величины трудно анализировать и интерпретировать. Кроме того, их производная не является процессом типа белого шума, что подразумевает стандартная калмановская модель. Наиболее простым решением этой задачи является явное удаление устаревших измерений из оценки вектора состояния. Априорно задается ширина окна T_w и измерение $\tilde{\tau}'(t_k)$ считается устаревшим, если выполняется одно из условий:

1. измерение находится вне рассматриваемого окна T_w : $t - t_k > T_w$;
2. измерение $\tilde{\tau}'(t_{k+1})$, следующее за рассматриваемым измерением $\tilde{\tau}'(t_k)$ находится на границе или за границей окна: $t_l - t_k \geq T_w$, где t_l соответствует времени последнего измерений;
3. число измерений после удаления составляет не меньше $2n$: $l - k + 1 > 2n$, где n — размерность вектора состояния.

Условия 2 и 3 обеспечивают обусловленность оценки вектора состояния после удаления измерения $\tilde{\tau}'(t_k)$. При выполнении всех трех условий измерение $\tilde{\tau}'(t_k)$ исключается из оценки вектора состояния при помощи процедуры (2.28).

Изменение значения t_0

Значение t_0 изменяется, когда все устаревшие измерения удалены из оценки вектора состояния. Если не выполнять эту операцию, то спустя некоторое время после старта алгоритма компоненты вектора состояния становятся сильно несбалансированными по порядку величинами, что приводит к росту вычислительных погрешностей.

Пусть $\tilde{\tau}'(t_o)$ является самым старым измерением из тех, которые на текущий момент используются для оценки. Тогда t_0 заменяется на t_o согласно формулам:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t_o - t_0}{T_0} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(t_o - t_0)/T_0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}|_{t_o} = C \tilde{x}|_{t_0}, \quad S|_{t_o} = \text{chol}(C S|_{t_0} S|_{t_0}^T C^T). \quad (4.10)$$

Далее значение t_o используется до тех пор, пока измерение $\tilde{\tau}'(t_o)$ не будет исключено из оценки \tilde{x} .

Определение оценок температуры и производной температуры

Определение оценок температуры и производной температуры выполняется в каждый момент времени согласно (2.30) на основе актуальной оценки вектора состояния, независимо от вновь поступившего или удаленного измерения. Оценки СКО оценок для температуры и производной температуры определяются при помощи выражений:

$$\sigma[\tilde{\tau}(t)] = \sqrt{h(t)SS^Th(t)^T}, \quad \sigma[\dot{\tilde{\tau}}(t)] = \sqrt{\frac{\partial h(t)}{\partial t}SS^T\frac{\partial h(t)^T}{\partial t}}. \quad (4.11)$$