МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Лата Александр Николаевич

Производные структуры унарных алгебр

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научные руководители:

Артамонов Вячеслав Александрович
доктор физико-математических наук, профессор

Зайцев Михаил Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор

Михалёв Александр Васильевич
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:

Степанова Алёна Андреевна,
доктор физико-математических наук, профессор, Дальневосточный федеральный университет, профессор департамента математики

Туганбаев Аскар Аканович,
доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский университет «МЭИ», профессор кафедры высшей математики

Шашков Олег Владимирович,
кандидат физико-математических наук, доцент, Финансовый университет, доцент департамента математики

Защита диссертации состоится 18 ноября 2022 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 (МГУ.01.17) Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: sbgashkov@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций Фундаментальной библиотеки Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: https://istina.msu.ru/dissertations/496389181/

Автореферат разослан 18 октября 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
МГУ.011.4 (МГУ.01.17),
доктор физико-математических наук,
профессор С. Б. Гашков

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Работа посвящена изучению производных структур и объектов унарных алгебр. *Производной структурой* данной алгебры A (см. например,[1]) называется универсальная алгебра $D(A)$, однозначно определяемая по A и несущая в себе информацию о строении алгебры A. При этом элементы производных структур алгебры A называют *производными объектами* на A. К наиболее распространенным производным структурам алгебр относятся их решетки подалгебр $\mathrm{Sub}A$, конгруэнций $\mathrm{Con}A$, топологий $\mathrm{Top}A$, группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}A$, полугруппы эндоморфизмов $\mathrm{End}A$, решетки частичных порядков алгебр $\mathrm{Ord}A$, квазипорядков $\mathrm{Qord}A$ и другие.

Исследованиям производных структур и объектов алгебр посвящен ряд монографий: для линейных алгебр — Р. Бэр[2]; для групп — М. Судзуки[3], Б. И. Плоткин[4], П. А. Крылов, А. В. Михалёв и А. А. Туганбаев[5]; для полугрупп — Л. Н. Шеврин и А. Я. Овчинников[6], Ж. Лаллеман[7], Дж. М. Хауи[8]; для полигонов над моноидами — У. Кнауэр, М. Кильп и А. В. Михалёв[9], И. Б. Кожухов, А. В. Михалёв и А. В. Тищенко[10]; для решеток — Г. Гретцер[11], Г. Биркгоф[12], В. Н. Салий[13]; для универсальных алгебр — А. Г. Пинус[14],

---

[1] *Пинус, А. Г.* Производные структуры универсальных алгебр / А. Г. Пинус. Новосибирск : Издательство НГТУ, 2007. 204 с.

[2] *Бэр, Р.* Линейная алгебра и проективная геометрия / Р. Бэр. М. : ИЛ, 1955. 399 с.

[3] *Судзуки, М.* Строение группы и строение структуры ее подгрупп / М. Судзуки. М. : ИЛ, 1960. 158 с.

[4] *Плоткин, Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем / Б. И. Плоткин. М. : Наука, 1966. 603 с.

[5] *Крылов, П. А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов / П. А. Крылов, А. В. Михалёв, А. А. Туганбаев. М. : Факториал Пресс, 2006. 512 с.

[6] *Шеврин, Л. Н.* Полугруппы и их полугрупповые решетки. Ч.1. Полугруппы с некоторыми типами решеток подполугрупп и решеточные характеристики классов полугрупп / Л. Н. Шеврин, А. Я. Овсянников. Свердловск : Уральский гос. университет, 1990. 238 с.

[7] *Лаллеман, Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения: Пер. с англ. / Ж. Лаллеман ; под ред. Л. Н. Шеврина. М. : Мир, 1985. 440 с.

[8] *Howie, J. M.* Fundamentals of Semigroup Theory. London Mathematical Society Monographs. New Series, 12 / J. M. Howie. Oxford : The Clarendon Press, 1995. x+351 p.

[9] *Kilp, M.* Monoids, acts and categories. With applications to wreath products and graphs. A handbook for students and researchers / M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev. Berlin : Walter de Gruyter, 2000. xvii + 529 p.

[10] *Кожухов, И. Б.* Избранные вопросы теории полугрупп: представления и многообразия полугрупп / И. Б. Кожухов, А. В. Михалёв, А. В. Тищенко. М. : Национальный Открытый Университет "ИНТУИТ", 2021. 160 с.

[11] *Гретцер, Г.* Общая теория решеток: Пер. с англ. / Г. Гретцер ; под ред. В. М. Смирнова. М. : Мир, 1982. 456 с.

[12] *Биркгоф, Г.* Теория решеток: Пер. с англ. / Г. Биркгоф. М. : Наука, 1984. 568 с.

[13] *Салий, В. Н.* Решетки с единственными дополнениями / В. Н. Салий. М. : Наука, 1984. 128 с.

[14] *Пинус, А. Г.* Производные структуры универсальных алгебр / А. Г. Пинус. Новосибирск : Издательство НГТУ, 2007. 204 с.

Х. Ленгер, И. Хайда и Г. Эйгенталер[15], Е. И. Бунина, А. В. Михалёв и А. Г. Пинус[16]; и другие.

Унарной алгеброй (*уноидом*) называется универсальная алгебра, все операции которой унарны. *Унаром* (*моноунарной алгеброй, 1-уноидом* и т.п.) называют унарную алгебру с одной унарной операцией.

В обзоре Л. А. Скорнякова[17] проанализированы работы, в которых рассматриваются различные аспекты изучения унаров, и ставится задача изучения производных структур и объектов унаров. Более поздний обзор В. К. Карташова[18], посвящен некоторым результатам и нерешенным задачам теории унарных алгебр.

Унарные алгебры имеют глубокие связи с другими разделами универсальной алгебры. В частности, любая унарная алгебра $A = \langle A, \Omega \rangle$ является S-полигоном, где S — полугруппа, порожденная операциями из Ω относительно композиции отображений. И, наоборот, всякий S-полигон A является унарной алгеброй, заданной на множестве A, где унарные операции — это умножение на элементы полугруппы S.

Классификации моноидов по свойствам категории полигонов над ним посвящены работы Л. А. Скорнякова[19,20,21], А. В. Михалёва[22,23,24], У. Кнауэра[25],

---

[15] *Chajda, I.* Congruence classes in universal algebra / I. Chajda, G. Eigenthaler, H. Länger. Lemgo : Heldermann Verlag, 2003. 218 p.

[16] *Бунина, Е. И.* Элементарная и близкие к ней логические эквивалентности классических и универсальных алгебр / Е. И. Бунина, А. В. Михалёв, А. Г. Пинус. М. : МЦНМО, 2015. 360 с.

[17] *Skornjakov, L. A.* Unars / L. A. Skornjakov // Colloq. Math. Soc. János Bolyai. 1982. Vol. V 29. Universal Algebra (Esztergom 1977). P. 735—743.

[18] *Карташов, В. К.* О некоторых результатах и нерешенных задачах теории унарных алгебр / В. К. Карташов // Чебышевский сб. 2011. Т. 12, выпуск 2. С. 18—26.

[19] *Скорняков, Л. А.* О гомологической классификации моноидов / Л. А. Скорняков // Сиб. матем. журн. 1969. Т. 10, №5. С. 1139—1143.

[20] *Скорняков, Л. А.* Об инъективности всех упорядоченных левых полигонов над моноидом / Л. А. Скорняков // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 1986. №3. С. 17—19.

[21] *Скорняков, Л. А.* Обобщения модулей / Л. А. Скорняков // Модули III. Препринт. Новосибирск. 1973. С. 22—27.

[22] *Kilp, M.* Monoids, acts and categories. With applications to wreath products and graphs. A handbook for students and researchers / M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev. Berlin : Walter de Gruyter, 2000. xvii + 529 p.

[23] Теоретико-модельные свойства регулярных полигонов / А. В. Михалёв [и др.] // Фунд. и прикл. матем. 2004. Т. 10, выпуск 4. С. 107—157.

[24] Теоретико-модельные свойства свободных, проективных и плоских S-полигонов / В. Гоулд [и др.] // Фунд. и прикл. матем. 2008. Т. 14, выпуск 7. С. 63—110.

[25] *Kilp, M.* Monoids, acts and categories. With applications to wreath products and graphs. A handbook for students and researchers / M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev. Berlin : Walter de Gruyter, 2000. xvii + 529 p.

М. Кильпа[26,27], И. Б. Кожухова[28,29,30] и других авторов. Основные понятия и известные к 2000 г. результаты теории полигонов над полугруппами изложены в монографии[31]. И. Б. Кожухов и А. В Михалёв[32] представили обзор результатов, полученных в основном в последние два десятилетия в ряде направлений теории полигонов над полугруппами.

Отметим, что возможна интерпретация унарной алгебры как автомата без выхода[33,34,35,36]. Элементы алгебры при этом рассматриваются в качестве внутренних состояний такого автомата, а операции – как входные сигналы.

Унарные алгебры используются при изучении других алгебраических систем. Г. Гретцер и Е. Т. Шмидт[37] доказали, что для любой универсальной алгебры A существует унарная алгебра B такая, что $\mathrm{Con}A \cong \mathrm{Con}B$. В отличие от произвольных универсальных алгебр, где конгруэнции подалгебры могут не продолжаться до конгруэнций алгебры, конгруэнции подалгебры унарной алгебры всегда продолжаются до конгруэнций унарной алгебры, и, вообще, решетка конгруэнций подалгебры унарной алгебры изоморфно вкладывается в решетку конгруэнций унарной алгебры[38].

Диссертационная работа посвящена изучению решеток подалгебр (подалгебр) и решеток конгруэнций (конгруэнций) унарных алгебр и алгебр с оператором.

---

[26] *Кильп, М.* К гомологической классификации моноидов / М. Кильп // Сиб. матем. журн. 1972. Т. 13, №3. С. 578—586.

[27] *Kilp, M.* Monoids, acts and categories. With applications to wreath products and graphs. A handbook for students and researchers / M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev. Berlin : Walter de Gruyter, 2000. xvii + 529 p.

[28] *Кожухов, И. Б.* Полугруппы, над которыми все полигоны резидуально конечны / И. Б. Кожухов // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4, №4. С. 1335—1344.

[29] *Кожухов, И. Б.* Проективные и инъективные полигоны над вполне простыми полугруппами / И. Б. Кожухов, А. О. Петриков // Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21, №1. С. 123—133.

[30] *Кожухов, И. Б.* Инъективные и проективные полигоны над вполне 0-простой полугруппой / И. Б. Кожухов, А. О. Петриков // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, выпуск 4. С. 65—78.

[31] *Kilp, M.* Monoids, acts and categories. With applications to wreath products and graphs. A handbook for students and researchers / M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev. Berlin : Walter de Gruyter, 2000. xvii + 529 p.

[32] *Кожухов, И. Б.* Полигоны над полугруппами: избранные вопросы структурной теории / И. Б. Кожухов, А. В. Михалёв // Фундамент. и прикл. матем. 2020. Т. 23, вып. 3. С. 141—199.

[33] *Imreh, B.* On finite nilpotent automata / B. Imreh // Acta Cybernetica. 1981. Vol. 5, No. 3. P. 281—293.

[34] *Imreh, B.* On finite definite automata / B. Imreh // Acta Cybernetica. 1985. Vol. 7, No. 1. P. 61—65.

[35] *Bogdanović, S.* The lattice of subautomata of an automaton: A survey / S. Bogdanović, M. Ćirić, T. Petković // Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. 1998. Vol. 64, No. 78. P. 165—182.

[36] *Bogdanović, S.* Lattices of subautomata and direct sum decompositions of automata / S. Bogdanović, M. Ćirić // Algebra Colloq. 1999. Vol. 6, No. 1. P. 71—88.

[37] *Grätzer, G.* Characterizations of congruence lattices of abstract algebras / G. Grätzer, E. T. Schmidt // Acta Sci. Math. 1963. Vol. 24. P. 34—59.

[38] *Кожухов, И. Б.* Избранные вопросы теории полугрупп: представления и многообразия полугрупп / И. Б. Кожухов, А. В. Михалёв, А. В. Тищенко. М. : Национальный Открытый Университет "ИНТУИТ", 2021. 160 с., с. 21.

Алгеброй с операторами (см., например,[39]) называется универсальная алгебра с дополнительной системой операторов — унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно основных операций (перестановочных с основными операциями). Если f— унарная операция из сигнатуры Ω, то *унарным редуктом* алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ называется унар $\langle A, f\rangle$.

Остановимся, кратко, на результатах указанных направлений.

Ж. К. Варле[40] нашел условия коммутативности моноида эндоморфизмов унаров с некоторыми ограничениями, а также описаны вполне инвариантные (вполне характеристические, то есть сохраняющиеся при эндоморфизме) конгруэнции. Дж. Берман[41] описал атомы в решетках конгруэнций унаров, а также унары с полумодулярной сверху, либо геометрической (в смысле Биркгофа) решеткой конгруэнций. Д. П. Егорова и Л. А. Скорняков[42] охарактеризовали унары, решетка конгруэнций которых является булевой, либо решеткой с дополнениями. А. П. Бощенко[43,44] описал унары, решетка конгруэнций которых является решеткой с псевдодополнениями и с копсевдодополнениями соответственно. А. В. Карташова[45] доказала, что конечность решетки конгруэнций (топологий) коммутативной унарной алгебры равносильна конечности самой алгебры. Также приведены примеры бесконечных некоммутативных унарных алгебр с конечными решетками конгруэнций и топологий. Ею в работе[46] охарактеризован класс всех коммутативных унарных алгебр, решетка конгруэнций которых линейно упорядочена. В. К. Карташов[47] показал, что для произвольных коммутативных унарных алгебр, сигнатура которых содержит более одной операции, проблема описания решетки конгруэнций, обладающей заданным свойством, является гораздо более сложной. В

[39] *Курош, А. Г.* Общая алгебра. Лекции 1969-1970 учебного года / А. Г. Курош. М. : Наука, 1974. 160 с.

[40] *Varlet, J. C.* Endomorphisms and fully invariant congruences in unary algebras <$A; f$> / J. C. Varlet // Bulletin de la Soc. Royale des Sciences de Liege. 1970. Vol. 39, №11—12. P. 575—589.

[41] *Berman, J.* On the congruence lattices of unary algebras / J. Berman // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 36, No. 1. P. 34—38.

[42] *Егорова, Д. П.* О структуре конгруэнций унарной алгебры / Д. П. Егорова, Л. А. Скорняков // Упорядоченные множества и решетки: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 1977. Вып. 4. С. 28—40.

[43] *Бощенко, А. П.* Псевдодополнения в решетке конгруэнций унаров / А. П. Бощенко // Алгебраические системы: : Межвуз. сб. научн. р. Волгоград: ВГПИ. 1989. С. 23—26.

[44] *Бощенко, А. П.* О копсевдодополнениях в решетках конгруэнций унаров / А. П. Бощенко // Универсальная алгебра и ее приложения: Тез. сообщ. участ. междунар. семинара, посвящ. памяти проф. Моск. гос. ун-та Л. А. Скорнякова. Волгоград: Перемена. 1999. С. 39—44.

[45] *Карташова, А. В.* О конечных решетках топологий коммутативных унарных алгебр / А. В. Карташова // Дискретная математика. 2009. Т. 21, №3. С. 119—131.

[46] *Карташова, А. В.* Коммутативные унарные алгебры с линейно упорядоченной решеткой конгруэнций / А. В. Карташова // Математические заметки. 2014. Т. 95, №1. С. 80—92.

[47] *Карташов, В. К.* Об условиях дистрибутивности и модулярности решеток конгруэнций коммутативных унарных алгебр / В. К. Карташов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, выпуск 4. С. 52—57.

этой работе приводится несколько необходимых условий дистрибутивности и модулярности таких решеток. Доказано также, что решетка всех подмножеств любого множества изоморфна решетке конгруэнций подходящей связной коммутативной унарной алгебры. Д. О. Птаховым и А. А. Степановой[48] охарактеризованы несвязные полигоны с модулярной или дистрибутивной решеткой конгруэнций. А. Р. Халиуллина[49,50] получила полное описание конгруэнций полигонов над группами и полигонов над полугруппами правых нулей. Ею в работе[51] получены необходимые и достаточные условия модулярности и дистрибутивности решётки конгруэнций полигона над полугруппой правых или левых нулей, а также условия, при которых решётка конгруэнций является цепью. Кроме того, описаны конгруэнции произвольного полигона над полугруппой левых нулей. В работах А. А. Степановой и М. С. Казака[52,53] приводится описание полигонов над линейно упорядоченными моноидами с линейной решеткой конгруэнций и полигонов над вполне упорядоченными моноидами, решетки конгруэнций которых дистрибутивны или модулярны. А. А. Степанова и С. Г. Чеканов[54] описали конгруэнц-перестановочные полигоны над моноидом S в случае, когда S — коммутативный моноид или группа.

Следует отметить, что описание подпрямо неразложимых алгебр равносильно описанию алгебр, решетки конгруэнций которых имеют наименьшую конгруэнцию, отличную от отношения равенства (см. например,[55]). Г. Х. Венцель[56] описал подпрямо неразложимые унары. Е. Н. Ройз[57] доказал, что подпрямо неразложимые полигоны имеют не более двух нулей. Получение

[48] *Птахов, Д. О.* Решетки конгруэнций полигонов / Д. О. Птахов, А. А. Степанова // Дальневост. матем. журн. 2013. Т. 13, номер 1. С. 107—115.

[49] *Халиуллина, А. Р.* Конгруэнции полигонов над группами / А. Р. Халиуллина // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, номер 4(2). С. 133—137.

[50] *Халиуллина, А. Р.* Конгруэнции полигонов над полугруппами правых нулей / А. Р. Халиуллина // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, номер 3. С. 142—146.

[51] *Халиуллина, А. Р.* Условия модулярности решётки конгруэнций полигона над полугруппой правых или левых нулей / А. Р. Халиуллина // Дальневост. матем. журн. 2015. Т. 15, номер 1. С. 102—120.

[52] *Казак, М. С.* Решетки конгруэнций полигонов над вполне упорядоченным моноидом / М. С. Казак, А. А. Степанова // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16. С. 1147—1157.

[53] *Степанова, А. А.* S-полигоны над вполне упорядоченным моноидом с модулярной решеткой конгруэнций / А. А. Степанова // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2021. Т. 35. С. 87—102.

[54] *Степанова, А. А.* Конгруэнц-перестановочные полигоны / А. А. Степанова, С. Г. Чеканов // Сиб. матем. журн. 2022. Т. 63, №1. С. 202—208.

[55] *Кожухов, И. Б.* Избранные вопросы теории полугрупп: представления и многообразия полугрупп / И. Б. Кожухов, А. В. Михалёв, А. В. Тищенко. М. : Национальный Открытый Университет "ИНТУИТ", 2021. 160 с., с. 29.

[56] *Wenzel, G. H.* Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $<A; f>$ / G. H. Wenzel // Archiv der Mathematik. 1970. Vol. 21. P. 256—264.

[57] *Ройз, Е. Н.* О подпрямо неразложимых монарах / Е. Н. Ройз // Упорядоченные множества и решетки: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 1974. Т. 21, Выпуск 2. С. 80—84.

характеристик для подпрямо неразложимых унарных алгебр, имеющих неодноэлементное множество сигнатурных операций, — намного более сложная задача[58,59], решаемая для конкретных видов алгебр[60,61,62,63]. И. Б. Кожухов и А. Р. Халиуллина[64] охарактеризовали подпрямо неразложимые полигоны над группами. Также ими[65] были описали подпрямо неразложимые полигоны с двумя нулями и свели характеризацию полигона без нуля или с одним нулём к строению его наименьшего нетривиального подполигона. В этой же работе были описаны подпрямо неразложимые полигоны над прямоугольными связками (т.е. прямыми произведениями полугрупп правых и левых нулей).

Интерес исследователей к тернарной мальцевской операции обусловлен ее ролью в изучении связей решеток конгруэнций алгебр данного многообразия с термальными операциями на этих алгебрах. Начало этих исследований было положено работой А. И. Мальцева[66], в которой доказано, что многообразие является конгруэнц-перестановочным тогда и только тогда, когда существует тернарный терм p от основных операций, такой, что на данном многообразии выполнены тождества

$$p(x,x,y) = p(y,x,x) = y. \tag{1}$$

Эти идеи получили развитие в работах А. Дея[67], Б. Йонссона[68], О. Ф. Пиксли[69], в которых найдены аналогичные условия, характеризующие конгруэнц-модулярные, конгруэнц-дистрибутивные и арифметические многообразия.

---

[58] *Bogdanović, S.* Traps, cores, extensions and subdirect decompositions of unary algebras / S. Bogdanović, M. Ćirić, T. Petković // Fundamenta Informaticae. 1999. Vol. 38, no. 1—2. P. 51—60.

[59] *Ježek, B.* Homomorphic images of finite subdirectly irreducible unary algebras / B. Ježek, P. Marković, D. Stanovsky // Czechoslovak Mathematical Journal. 2007. Vol. 57. P. 671—677.

[60] *Imreh, B.* On finite nilpotent automata / B. Imreh // Acta Cybernetica. 1981. Vol. 5, No. 3. P. 281—293.

[61] *Imreh, B.* On finite definite automata / B. Imreh // Acta Cybernetica. 1985. Vol. 7, No. 1. P. 61—65.

[62] *Ésik, Z.* Subdirectly irreducible commutative automata / Z. Ésik, B. Imreh // Acta Cybernetica. 1981. Vol. 5, no. 3. P. 251—260.

[63] *Ćirić, M.* Subdirectly irreducible definite, reverse definite, and generalized definite automata / M. Ćirić, B. Imreh, M. Styeinby // Publ. Elektroteh. Fak., Univ. Beogr., Ser. Mat. 1999. Vol. 10. P. 69—79.

[64] *Кожухов, И. Б.* Полугруппы с финитно аппроксимируемыми полигонами / И. Б. Кожухов, А. Р. Халиуллина // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, №3(83). С. 60—67, теорема 6.

[65] *Кожухов, И. Б.* Характеризация подпрямо неразложимых полигонов / И. Б. Кожухов, А. Р. Халиуллина // ПДМ. 2015. Номер 1(27). С. 5—16.

[66] *Мальцев, А. И.* К общей теории алгебраических систем / А. И. Мальцев // Математический сборник. 1954. Т. 35, №1. С. 3—20.

[67] *Day, A.* A characterization of modularity for congruence lattices of algebras / A. Day // Canad. Math. Bull. 1969. Vol. 12, №1. P. 167—173.

[68] *Jonsson, B.* Algebras whose congruence lattices are distributive / B. Jonsson // Math. Scand. 1969. Vol. 21, №1. P. 110—121.

[69] *Pixley, A. F.* Distributivity and permutability of congruence relations in equational classes of algebras / A. F. Pixley // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 14, N 1. P. 105—109.

В монографии Д. Хобби и Р. Маккензи[70] отмечают, что в теории конгруэнций часто удобнее работать с унарными алгебрами. Поскольку основные операции алгебры A определяют множество $\mathrm{Pol}_1 A$ всех унарных операций клона $\mathrm{Pol}A$, а этот моноид определяет решетку конгруэнции алгебры A.

В работе В. К. Карташова[71] вводится понятие *унара с мальцевской операцией*, как алгебры с одной тернарной операцией p, для которой выполняются тождества Мальцева (1), и одной унарной операцией, перестановочной с p. В указанной работе показано, что на любом унаре $\langle A, f\rangle$ можно задать тернарную операцию p так, что алгебра $\langle A, p, f\rangle$ становится унаром с мальцевской операцией, а унарная операция — ее эндоморфизмом. Эта алгебра определяется следующим образом.

Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Для любого элемента x унара $\langle A, f\rangle$ через $f^n(x)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу x; при этом $f^0(x) = x$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, и $k(x, y) = \min M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$ и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$p(x, y, z) \overset{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) \leqslant k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) > k(y,z). \end{cases} \tag{2}$$

С помощью конструкции предложенной В.К. Карташовым в[72], В. Л. Усольцевым в[73] на произвольном унаре была определена операция меньшинства $s(x,y,z)$, называемая симметрической, и также перестановочная с унарной.

$$s(x,y,z) \overset{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) < k(y, z); \\ y, & \text{если } k(x, y) = k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \tag{3}$$

Им в работе[74] аналогичным образом на произвольном унаре были определены тернарная операция $w(x,y,z)$ и операция большинства $m(x,y,z)$

[70] *Хобби, Д.* Строение конечных алгебр: Пер. с англ. / Д. Хобби, Р. Маккензи ; под ред. В. А. Горбунова, Ю. Л. Ершова. М. : Мир, 1993. 287 с., с. 42.

[71] *Карташов, В. К.* Об унарах с мальцевской операцией / В. К. Карташов // Универсальная алгебра и ее приложения: Тез. сообщ. участ. междунар. семинара, посвящ. памяти проф. Моск. гос. ун-та Л.А. Скорнякова. Волгоград: Перемена. 1999. С. 31—32.

[72] *Карташов, В. К.* Об унарах с мальцевской операцией / В. К. Карташов // Универсальная алгебра и ее приложения: Тез. сообщ. участ. междунар. семинара, посвящ. памяти проф. Моск. гос. ун-та Л.А. Скорнякова. Волгоград: Перемена. 1999. С. 31—32.

[73] *Усольцев, В. Л.* Свободные алгебры многообразия унаров с мальцевской операцией p, заданного тождеством $p(x,y,x) = y$ / В. Л. Усольцев // Чебышевский сб. 2011. Т. 12, Вып. 2(38). С. 127—134.

[74] *Усольцев, В. Л.* О строго простых тернарных алгебрах с операторами / В. Л. Усольцев // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, Вып. 4(48). С. 196—204.

перестановочные с унарной.

$$w(x,y,z) \overset{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) > k(y,z); \\ y, & \text{если } k(x,y) = k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) < k(y,z). \end{cases} \tag{4}$$

$$m(x,y,z) \overset{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) \geqslant k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) < k(y,z). \end{cases} \tag{5}$$

Обозначим алгебру $\langle A, d, f\rangle$ с оператором f, где $d(x_1,x_2,x_3)$ — операция, определенная по одному из правил (2)–(5) через М-алгебру $\langle A, d, f\rangle$.

В. Л. Усольцев[75] описал подпрямо неразложимые алгебры $\langle A, p, f\rangle$, а также такие, решетка конгруэнций которых является цепью. Им в работе[76] было получено описание строения атомов в решетках $\mathrm{Con}\langle A, m, f\rangle$, там же были описаны подпрямо неразложимые алгебры из данного класса и алгебры, имеющие точечную решетку конгруэнций. В. Л. Усольцев[77,78,79] описал простые, псевдопростые и строго простые М-алгебры $\langle A, d, f\rangle$.

Объектом исследования являются унарные алгебры и М-алгебры $\langle A, d, f\rangle$.

Предметом исследования являются решетки подалгебр (подалгебры) и решетки конгруэнций (конгруэнции) унарных алгебр и М-алгебр $\langle A, d, f\rangle$.

Целью данной работы является изучение производных структур и объектов унарных алгебр.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Описать коатомы, дополнения и копсевдодополнения в решетках конгруэнций М-алгебр $\langle A, d, f\rangle$.
2. Описать М-алгебры $\langle A, d, f\rangle$, решетки конгруэнций которых являются решетками с дополнениями, с копсевдодополнениями или геометрическими решетками.
3. Исследовать конгруэнц-когерентные, слабо и локально когерентные М-алгебры $\langle A, d, f\rangle$.
4. Описать унарные алгебры без собственных подалгебр.

[75] *Усольцев, В. Л.* О подпрямо неразложимых унарах с мальцевской операцией / В. Л. Усольцев // Известия Волг. гос. пед. ун-та, серия "Естественные и физико-математические науки". 2005. Т. 4, №4(13). С. 17—24.

[76] *Usol'tsev, V. L.* Subdirectly Irreducible Algebras in One Class of Algebras with One Operator and the Main Near-Unanimity Operation / V. L. Usol'tsev // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, Iss. 1. P. 206—216.

[77] *Усольцев, В. Л.* Простые и псевдопростые алгебры с операторами / В. Л. Усольцев // Фунд. и прикл. матем. 2008. Т. 14, Вып. 7. С. 189—207.

[78] *Усольцев, В. Л.* О полиномиально полных и абелевых унарах с мальцевской операцией / В. Л. Усольцев // Уч. зап. Орловского гос. ун-та. 2012. Т. 6(50), Ч. 2. С. 229—236.

[79] *Усольцев, В. Л.* О строго простых тернарных алгебрах с операторами / В. Л. Усольцев // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, Вып. 4(48). С. 196—204.

5. Исследовать изотопию унарных алгебр.

Научная новизна: Полученные результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационное исследование носит теоретический характер. Результаты, изложенные в работе, могут быть использованы для исследований, связанных с изучением производных структур алгебраических систем, в частности производных структур алгебр с операторами, а также при чтении специальных курсов в высших учебных заведениях для студентов математических специальностей.

Методология и методы исследования. В работе использовались методы универсальной алгебры, теории решеток и теории графов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Доказательство факта отсутствия коатомов или единственности коатома в решетке конгруэнций М-алгебр $\langle A, d, f\rangle$ (теорема 2.1.9), а также описание коатомов (следствие 2.1.10).
2. Описание решеток конгруэнций М-алгебр $\langle A, d, f\rangle$ с дополнениями или относительными дополнениями (теорема 2.2.1), а также факта отсутствия дополнений у нетривиальных конгруэнций М-алгебр $\langle A, d, f\rangle$ (следствие 2.2.2).
3. Доказательство того, что любая решетка конгруэнций М-алгебр $\langle A, d, f\rangle$ является решеткой с копсевдодополнениями (предложение 2.2.4), а также описание копсевдодополнений в решетке конгруэнций алгебр из данного класса (следствие 2.2.5).
4. Описание конгруэнц-когерентных унаров (теорема 3.1.14). Описание конгруэнц-когерентных (теорема 3.3.1), слабо и локально когерентных (теорема 3.3.4 и теорема 3.3.5) М-алгебр $\langle A, d, f\rangle$.
5. Найдены эквивалентные условия отсутствия подалгебр для унарной алгебры (теорема 4.1.1).

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью математических доказательств, апробацией на международных конференциях и специальных семинарах кафедр высшей алгебры и МаТИС, а также рецензированием публикаций в журналах.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на:

– XIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова (Тула, 2015);
– Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии, посвященной юбилеям выдающихся профессоров Казанского университета, математиков Петра Алексеевича (1895-1944) и Александра Петровича (1926-1998) Широковых (Казань, 2016);

– XIV Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященной 70-летию со дня рождения Г. И. Архипова и С. М. Воронина (Саратов, 2016);
– научно-исследовательском семинаре по алгебре под руководством профессора В. А. Артамонова, профессора Е. И. Буниной, профессора А. Э. Гутермана, профессора М. В. Зайцева, профессора А. В. Михалева, профессора А. Ю. Ольшанского (механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2017, 2019, 2020);
– всероссийской конференции «Алгебра и теория алгоритмов», посвященной 100-летию факультета математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета (Иваново, 2018);
– международной алгебраической конференции, посвящённой 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша (механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2018);
– на семинаре «Кибернетика и информатика» под руководством профессора В. Б. Кудрявцева, с.н.с. А. В. Галатенко (механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2018);
– международной конференции, посвящённой 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ, 2019;
– международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (2017, 2019, 2020);
– XX Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной 130-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова (Тула, 2021).

Личный вклад. В диссертации изложены результаты, полученные лично автором под руководством профессора В. А. Артамонова.

Публикации. Соискатель имеет 11 опубликованных работ, в том числе по теме диссертации 11 работ, из них 3 статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (01.01.06 — «Математическая логика, алгебра и теория чисел»). Работ, написанных в соавторстве, нет.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 78 страниц. Список литературы содержит 122 наименования.

Утверждения нумеруются тремя цифрами: первая обозначает номер главы, вторая – номер параграфа в главе, а третья – номер утверждения в параграфе. Нумерация выносных формул двойная: первая цифра обозначает номер главы, а вторая – номер формулы в главе.

Содержание работы

Во введении дается обзор результатов по исследуемым проблемам и кратко формулируются основные результаты диссертации.

Первая глава диссертации посвящена необходимым определениям и результатам из теории унарных алгебр, вводятся обозначения, используемые далее в работе.

В разделе 1.1 приводятся необходимые сведения из теории унарых алгебр.

В разделе 1.2 приведены основные определения и утверждения, касающиеся конгруэнций универсальных алгебр.

В разделе 1.3 изложены основные определения и обозначения, относящиеся к унарам с мальцевской операцией. Здесь доказывается ряд утверждений, используемых в последующих главах для получения основных результатов.

Вторая глава диссертации посвящена изучению решеток конгруэнций М-алгебр $\langle A, d, f\rangle$.

В разделе 2.1 приведено описание строения коатомов в решетках конгруэнций данных алгебр.

Теорема 2.1.9. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ – алгебра с оператором f, где $d(x_1,x_2,x_3)$— операция, определенная по одному из правил (2)–(5). Решетка $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ не имеет коатомов тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f\rangle$ связен, содержит одноэлементный подунар и имеет бесконечную глубину. В других случаях $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ имеет единственный коатом.*

Напомним, через σ_n, где $n \in \mathbb{N}$, обозначается $\mathrm{Ker} f^n$; при этом полагаем $\sigma_0 = \triangle$. Через σ обозначается конгруэнция любой алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ с оператором $f \in \Omega$ определенная по правилу[80]: $x\sigma y \Leftrightarrow \exists n > 0\ (f^n(x) = f^n(y))$.

Следствие 2.1.10. *Пусть решетка $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ имеет единственный коатом. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Если $\langle A, f\rangle$ — связный унар глубины 1, имеющий одноэлементный подунар, то коатомом решетки $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ является конгруэнция $\triangle$;*
2. *Если $\langle A, f\rangle$ — связный унар конечной глубины $m > 1$, имеющий одноэлементный подунар, то коатомом решетки является конгруэнция σ_{m-1};*
3. *В оставшихся случаях коатомом решетки является конгруэнция σ.*

В разделе 2.2 приводится описание М-алгебр $\langle A, d, f\rangle$, решетки конгруэнций которых являются решетками с дополнениями, с относительными дополнениями, с копсевдодополнениями или геометрическими. Дается описание дополнений и копсевдодополнений в решетках конгруэнций рассматриваемых алгебр.

[80] *Усольцев, В. Л.* Простые и псевдопростые алгебры с операторами / В. Л. Усольцев // Фунд. и прикл. матем. 2008. Т. 14, Вып. 7. С. 189—207.

Теорема 2.2.1. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ – алгебра с оператором f, где $d(x_1{,}x_2{,}x_3)$-операция, определенная по одному из правил (2) — (5). Следующие утверждения равносильны:*

1. $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ *— решетка с дополнениями;*
2. $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ *— решетка с относительными дополнениями;*
3. *алгебра $\langle A, d, f\rangle$ конгруэнц-проста;*
4. *либо операция f инъективна, либо унар $\langle A, f\rangle$ содержит такой элемент a, что $f(x) = a$ для любого $x \in A$.*

Следствие 2.2.2. *Любая нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, d, f\rangle$ не имеет дополнения.*

Предложение 2.2.4. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ – алгебра с оператором f, где $d(x_1{,}x_2{,}x_3)$ — операция, определенная по одному из правил (2)–(5). Решетка $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ является решеткой с копсевдодополнениями.*

Следствие 2.2.5. *Пусть $a \in \mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$. Тогда копсевдодополнение*

$$a^+ = \begin{cases} \triangle, & \text{если } a = \bigtriangledown; \\ \bigtriangledown, & \text{если } a \neq \bigtriangledown. \end{cases}$$

Предложение 2.2.6. *Решетка $\mathrm{Con}\langle A, p, f\rangle$ является геометрической тогда и только тогда, когда она точечная.*

Третья глава диссертации посвящена изучению конгруэнц–когерентности алгебр и ее модификациям.

В разделе 3.1 дается определение конгруэнц–когерентности алгебры, изложен краткий обзор вопроса.

Напомним, что универсальная алгебра A *конгруэнц–когерентна*, если любая подалгебра в A, содержащая класс произвольной конгруэнции в A, является объединением классов этой конгруэнции.

Предложение 3.1.12. *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ — произвольная алгебра с оператором $f \in \Omega$. Если $\langle A, f\rangle \cong C_n^0$, или $\langle A, f\rangle \cong C_n^0 + C_m^0$, или $\langle A, f\rangle \cong C_1^t$, где $n, m \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, то алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ является конгруэнц–когерентной*

Для унаров получено следующее утверждение.

Теорема 3.1.14. *Унар $\langle A, f\rangle$ является конгруэнц–когерентным тогда и только тогда, когда $\langle A, f\rangle$ – один из унаров следующего вида:*

1. C_n^0, $n \in \mathbb{N}$;
2. $C_n^0 + C_m^0$ *для некоторых* $n{,}m \in \mathbb{N}$;
3. C_1^t, $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

В разделе 3.2 приводятся определения локальной и слабой когерентности алгебры. Доказываются вспомогательные результаты.

Напомним, что универсальная алгебра A, имеющая нульарную операцию 0, называется *слабо когерентной*, если для любой подалгебры B алгебры A и любой конгруэнции θ алгебры A условие $[0]\theta \subseteq B$ влечет $[x]\theta \subseteq B$ для любого $x \in B$.

Универсальная алгебра A, имеющая нульарную операцию 0, называется *локально когерентной*, если для любой подалгебры B алгебры A и любой конгруэнции θ алгебры A из того, что $[x]\theta \subseteq B$ для некоторого $x \in B$ следует $[0]\theta \subseteq B$.

Чтобы алгебра $\langle A, \Omega \rangle$, с нульарной операцией 0 была алгеброй с оператором $f \in \Omega$, необходимо и достаточно, чтобы $f(0) = 0$. Нульарная операция 0, заданная на унаре $\langle A, f \rangle$ условием $f(0) = 0$ часто рассматривается в теории унаров. В этом случае алгебру $\langle A, f, 0 \rangle$ называют *унаром с нулем.*

В разделе 3.3 доказываются основные результаты исследования конгруэнц–когерентности M-алгебр $\langle A, d, f \rangle$.

Теорема 3.3.1. *Пусть $\langle A, d, f \rangle$ – алгебра с оператором f, где $d(x_1,x_2,x_3)$ – операция, определенная по одному из правил (2)–(5). Алгебра $\langle A, d, f \rangle$ является конгруэнц–когерентной тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

1. *операция f на A является инъективной;*
2. *унар $\langle A, f \rangle$ содержит такой элемент a, что $f(x) = a$ для любого $x \in A$, где $|A| \geqslant 3$;*
3. *унар $\langle A, f \rangle$ изоморфен C_1^t для некоторого $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

Теорема 3.3.4. *Пусть $\langle A, d, f, 0 \rangle$ — алгебра с оператором f, где $d(x_1,x_2,x_3)$ – операция, определенная по одному из правил (2)–(5), и нульарной операцией 0, для которой $f(0) = 0$. Алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ является слабо когерентной тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f \rangle$ является одним из следующих:*

1. *произвольный унар с инъективной операцией;*
2. *связный унар, который не содержит узловых элементов, за исключением, может быть, элемента 0;*
3. *сумма унаров из пунктов 1 и 2.*

Теорема 3.3.5. *Пусть $\langle A, d, f, 0 \rangle$ — алгебра с оператором f, где $d(x_1,x_2,x_3)$ – операция, определенная по одному из правил (2)–(5), и нульарной операцией 0, для которой $f(0) = 0$. Алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ является локально когерентной тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f \rangle$ является одним из следующих:*

1. *произвольный унар, содержащий одноэлементную компоненту связности, порожденную 0;*
2. *унар, в котором для всех $x \in A$ выполняется $f(x) = 0$, где $|A| \geqslant 3$;*
3. *унар $C_1^t, t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;*
4. *связный унар конечной глубины $t(A)$, в котором существует единственный узловой элемент $a \neq 0$, глубина которого равна $t(A) - 1$, и других узловых элементов нет.*

Четвертая глава диссертации посвящена алгебрам без собственных подалгебр. Дается краткий обзор результатов.

В разделе 4.1 приводится результат исследований унарных алгебр без собственных подалгебр.

Теорема 4.1.1. *Пусть* $A = \langle A, \Omega \rangle$ *— унарная алгебра,* $\mathrm{Graph}(A)$ *— граф унарной алгебры, а* X *— полугруппа, порожденная операциями из* Ω *относительно композиции отображений. Следующие условия эквивалентны:*

1. *алгебра* A *не имеет собственных подалгебр;*
2. *псевдоорграф* $\mathrm{Graph}(A)$ *сильно связный;*
3. *полугруппа* X *действует транзитивно на множестве* A*;*
4. *алгебра* A *является сильно связной.*

Следствие 4.1.2. *Пусть* $A = \langle A, \Omega \rangle$ *— унарная алгебра,* $\mathrm{Graph}(A)$ *— граф унарной алгебры. Вершины графа* $\mathrm{Graph}(A)$*, из которых нет пути в некоторую другую вершину, являются порождающими собственных подалгебр алгебры* A*.*

В разделе 4.2 описывается алгоритм, который проверяет отсутствие подалгебр или находит собственные подалгебры и порождающие их элементы унарной алгебры, носитель и сигнатура которой конечны.

В разделе 4.3 вводится определение и рассматривается вопрос изотопии унарных алгебр.

Определение 4.3.1. *Унарная алгебра с системой операций* S *на непустом множестве* A *изотопна унарой алгебре с системой унарных операций* S'*, если имеются перестановки* π,σ *на* A*, такие, что отображение* $f \to \sigma f \pi$ *задает биекцию между* S *и* S'*.*

Предложение 4.3.2. *Пусть* $A = \langle A, \Omega \rangle$ *— унарная алгебра, носитель и сигнатура которой конечны. Если* Ω *содержит хотя бы одну инъективную операцию, то* A *изотопна алгебре без собственных подалгебр.*

Для унаров получено следующее утверждение.

Теорема 4.3.3. *Конечный унар* $\langle A, f \rangle$ *изотопен унару без собственных подунаров тогда и только тогда, когда операция* f *– инъективна.*

В **заключении** приведены основные результаты работы:

1. Описаны коатомы, дополнения и копсевдодополнения в решетках конгруэнций М-алгебр $\langle A, d, f \rangle$.
2. Описаны М-алгебры $\langle A, d, f \rangle$, решетки конгруэнций которых являются решетками с дополнениями, с копсевдодополнениями или геометрическими.
3. Описаны конгруэнц-когерентные унары, а также конгруэнц-когерентные, слабо и локально когерентных М-алгебр $\langle A, d, f \rangle$.

4. Найдены эквивалентные условия отсутствия подалгебр для унарной алгебры. Описаны конечные унары изотопные унару без собственных подунаров.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю В. А. Артамонову за постановку задач, их плодотворное обсуждение и постоянное внимание к работе. Автор благодарен своим научным руководителям А. В. Михалёву и М. В. Зайцеву за конструктивную критику, плодотворные обсуждения, всестороннюю поддержку и внимание к работе. Автор признателен всему коллективу кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ за доброжелательную атмосферу.

Автор признателен А. В. Галатенко за ценные комментарии и полезные обсуждения, а также всему коллективу кафедры МаТИС механико-математического факультета МГУ за теплую атмосферу.

Хочется особо поблагодарить своего первого научного руководителя В. Л. Усольцева за знакомство с универсальной алгеброй, что впоследствии пробудило в авторе интерес к занятию алгеброй. Искренняя благодарность руководству и всему коллективу факультета математики, информатики и физики Волгоградского государственного социально–педагогического университета за помощь, внимание и создание комфортной обстановки для занятий научной деятельностью.

Публикации автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI

1. *Лата, А. Н.* О коатомах и дополнениях в решетках конгруэнций унаров с мальцевской операцией / А. Н. Лата // Чебышевский сб. — 2015. — Т. 16, Вып. 4. — С. 212—226. — (RSCI. IF — 0,396).
2. *Лата, А. Н.* О конгруэнц–когерентных алгебрах Риса и алгебрах с оператором / А. Н. Лата // Чебышевский сб. — 2017. — Т. 18, Вып. 2. — С. 154—172. — (RSCI, Scopus, WoS. SJR 2018: 0,187; IF — 0,396).
3. *Лата, А. Н.* Унарные алгебры без собственных подалгебр / А. Н. Лата // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 2020. — №6. — С. 60—63. — English transl.: A.N. Lata, “Unary algebras without proper subalgebras”, Moscow University Mathematics Bulletin, **75**:6 (2020), 268–271. (RSCI, Scopus, WoS. SJR 2020: 0,314; IF: 0,160).

Другие публикации

4. *Лата, А. Н.* О конгруэнц-когерентных унарах и унарах с мальцевской операцией / А. Н. Лата // Материалы международной конференции по алгебре, анализу и геометрии, посвященной юбилеям выдающихся профессоров Казанского университета, математиков Петра Алексеевича (1895-1944) и Александра Петровича (1926-1998) Широковых, и молодежной школы-конференции по алгебре, анализу, геометрии. — Казань : Казанский университет, изд-во Академии наук РТ, 2016. — С. 230—231.

5. *Лата, А. Н.* О конгруэнц-когерентных и близких к ним унарах с мальцевской операцией / А. Н. Лата // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: межвуз. сб. науч. тр. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, — 2016. — С. 55—57.

6. *Лата, А. Н.* О свойствах конгруэнций алгебр в некоторых классах алгебр с оператором / А. Н. Лата // Алгебра и теория алгоритмов: Всероссийская конференция, посвященная 100-летию факультета математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета : сборник материалов. — Иваново : Иван. гос. ун-т, 2018. — С. 122—124.

7. *Лата, А. Н.* Unary Algebras without proper Subalgebras / А. Н. Лата // Международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения профессора А.Г.Куроша. Тезисы докладов. — М. : Издательство МГУ, 2018. — С. 248—249.

8. *Лата, А. Н.* О конгруэнц–когерентных алгебрах Риса и алгебрах с оператором / А. Н. Лата // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2017» / Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. — М. : МАКС Пресс, 2017. — С. 122—124. — URL: https://conf.msu.ru/archive/Lomonosov_2017/data/10841/uid141237_report.pdf.

9. *Лата, А. Н.* Унарные алгебры без собственных подалгебр / А. Н. Лата // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2019» / Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. — М. : МАКС Пресс, 2019. — URL: https://conf.msu.ru/archive/Lomonosov_2019/data/16175/94274_uid141237_report.pdf.

10. *Лата, А. Н.* Производные структуры унарных алгебр / А. Н. Лата // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020» / Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. — М. : МАКС Пресс, 2020. — URL: https://conf.msu.ru/archive/Lomonosov_2020/data/19357/106761_uid141237_report.pdf.

11. *Лата, А. Н.* О изотопии унарных алгебр / А. Н. Лата // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: Современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы

XX Международной конференции, посвященной 130-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова. — Тула : Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2022. — С. 47—48.