

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Бузиков Максим Эмонайевич

**ПОСТРОЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ
НАИСКОРЕЙШЕГО ПЕРЕХВАТА
ДВИЖУЩЕЙСЯ ЦЕЛИ**

Специальность 1.2.2 —
«Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Диссертация подготовлена в лаборатории №38 Института проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук

Научный руководитель: доктор технических наук, чл.-корр. РАН
Галяев Андрей Алексеевич

Официальные оппоненты: **Афанасьев Валерий Николаевич**,
доктор технических наук, профессор (уч. зв.),
ординарный профессор департамента прикладной математики МИЭМ им. А.Н. Тихонова НИУ ВШЭ

Пацко Валерий Семенович,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник (уч. зв.), ведущий научный сотрудник отдела динамических систем ИММ им. Н.Н. Красовского УрО РАН

Семенихин Константин Владимирович,
доктор физико-математических наук, доцент (уч. зв.), профессор кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» Московского авиационного института

Защита состоится 21 февраля 2024 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета МГУ.012.1 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, строение 52, факультет ВМК, ауд. 685.

E-mail: ilgova@cs.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/012.1/2801>

Автореферат разослан «___» _____ 202__ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

МГУ.012.1, д.ф.-м.н, чл.-корр. РАН А.В. Ильин

Общая характеристика работы

Центральную роль в данной работе занимает класс задач оптимального управления, которые могут быть интерпретированы как задачи наискорейшего перехвата цели, движущейся известным образом. Предполагается, что модель движения объекта управления достаточно проста и сохраняется возможность аналитического описания функции расстояния от произвольной точки до некоторой проекции множества достижимости этого объекта управления. Единственное ограничение, которое накладывается на траекторию движущейся цели, состоит в том, что она должна быть липшиц-непрерывной функцией времени. С практической точки зрения это означает, что координаты движущейся цели меняются с ограниченной скоростью. Частные случаи такой постановки задачи широко известны по большому количеству работ. В настоящей работе используется идея построения всегда сходящегося алгоритма вычисления корня вещественного уравнения. Использование этой идеи осуществлено в рамках задачи оптимального управления с учётом специальных свойств функции расстояния до проекции множества достижимости объекта управления. Также в данной работе приведён исчерпывающий анализ поведения поверхности барьера в игре преследования-уклонения двух идентичных автомобилей и получены явные выражения для оптимальных управлений в форме синтеза для обоих игроков на поверхности барьера.

Актуальность данной работы обусловлена стремительно возрастающим мировым интересом в усовершенствовании систем автоматизации движения автономных устройств, а также в усовершенствовании систем предупреждения о столкновении.

Объектом исследования являются оптимальные по быстродействию траектории управляемых объектов, а **предметом исследования** выступают численно-аналитические методы и алгоритмы расчёта таких траекторий.

Целью данной работы является повышение эффективности построения опорных траекторий для динамических объектов управления путём разработки, математического обоснования и тестирования алгоритмов построения наискорейшей траектории перехвата движущейся цели, а также путём аналитического исследования некоторых конкретных моделей объектов

управления (модели простых движений, модели Дубинса) в рамках поставленной задачи наискорейшего перехвата.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать свойства задачи оптимального управления с критерием быстродействия с изменяющимся во времени терминальным условием (движущейся целью) и выделить такие общие требования к уравнениям состояния динамической системы, чтобы сохранялась возможность конструирования всегда сходящихся универсальных алгоритмов нахождения оптимального значения критерия (наименьшего времени перехвата).
2. Разработать алгоритмы и реализовать соответствующий комплекс программ, позволяющий гарантированно и эффективно находить наименьшее время перехвата и строить соответствующую оптимальную траекторию перехвата.
3. Получить и исследовать аналитические решения для нескольких конкретных и практически значимых моделей движения объекта управления в задаче перехвата: модель простых движений, модель Дубинса.

Степень научной разработанности темы является достаточно высокой в связи с большим количеством опубликованных работ по заданной тематике. Большое количество работ посвящено задачам перехвата с конкретной моделью объекта управления: простые движения, модель Дубинса, модель Ридса-Шеппа, изотропная ракета и т. п. Модель движения цели в этих работах также варьируется: покой цели, равномерное движение цели по прямой, предписанное движение цели в классе непрерывных траекторий, непредсказуемое движение цели с ограничениями на динамику движений. Отдельные авторы представляли решения подобных задач перехвата в виде сходящихся алгоритмов вычисления наименьшего времени перехвата (с указанием на способы построения оптимальной траектории с помощью известного наименьшего времени перехвата). Чаще всего решения подобных задач представляются аналитически в неявном виде в качестве систем вещественных уравнений с несколькими неизвестными. В таком виде достаточно проблематично подобрать гарантированно сходящийся метод вычисления нужных

корней таких уравнений. Подобный вид представления решения не лишён смысла, т. к. зачастую он позволяет получить новые представления о качественных свойствах объекта управления и оптимального закона управления в рамках задачи перехвата: понять, при каких значениях параметров перехват возможен, получить представления о различных классах оптимальных траекторий перехвата и т. п.

Научная новизна:

1. Впервые разработан, обоснован и протестирован алгоритм вычисления наименьшего времени перехвата на основе лучшей из универсальных оценок снизу для наименьшего времени перехвата. Также обоснована оптимальность (неулучшаемость по скорости сходимости) этого алгоритма в своём классе (удовл. п. 2, 3 пасп. спец. 1.2.2).
2. Впервые получены общие аналитические результаты для задачи наискорейшего перехвата машиной Дубинса цели, движущейся по произвольной, непрерывной и заранее известной траектории. Впервые получено аналитическое выражение в явном виде с использованием формул Кардано для функции расстояния от произвольной точки до плоского множества достижимости машины Дубинса. Впервые предложен, реализован и протестирован алгоритм нахождения наименьшего времени перехвата на основе функции универсального оценивания снизу в этой задаче. На основе указанных теоретических конструкций разработан комплекс проблемно-ориентированных программ, позволяющий эффективно рассчитывать оптимальную траекторию перехвата, проекцию плоского множества достижимости в заданный момент времени, оптимальное управление для перехвата и прочие параметры оптимального движения объекта управления. С помощью комплекса программ проведены численные эксперименты с конкретными траекториями движения цели (удовл. п. 2, 3, 7–9 пасп. спец. 1.2.2).
3. Впервые получены общие аналитические результаты для задачи наискорейшего *бокового* перехвата машиной Дубинса цели, движущейся по произвольной непрерывной и заранее известной траектории. Впервые для этой задачи произведена полная классификация кандидатов в оптимальные траектории бокового перехвата, получе-

ны аналитические выражения для вычисления наименьшего времени перехвата, представлен алгоритм вычисления параметров оптимальной траектории перехвата по известному наименьшему времени перехвата (удовл. п. 2, 3, 7, 8 пасп. спец. 1.2.2).

4. Впервые с помощью математического моделирования и вычислительного эксперимента найдено рубежное значение радиуса захвата для игры двух идентичных автомобилей, при котором геометрия барьера игры имеет качественно разный вид. Указанный эффект обоснован математически. Впервые получен явный вид аналитических формул вычисления оптимальных управлений игроков на барьере, а также разработана устойчивая к ошибке округления процедура для использования описанных аналитических формул (удовл. п. 2, 3, 7, 8 пасп. спец. 1.2.2).

Теоретическая и практическая значимость заключается в том, что полученные результаты могут быть использованы для класса задач оптимального управления, для которых модель движения объекта управления достаточно проста (сохраняется возможность эффективного вычисления функции расстояния от произвольной точки до соответствующей проекции множества достижимости объекта управления). Класс таких задач содержит широкий спектр практически важных моделей (модель простых движений, модель Дубинса, модель изотропных ракет и др.), широко используемых для построения опорных траекторий в различных задачах техники.

Методология исследования заключается в использовании методов оптимального управления, анализа многозначных отображений, методов компьютерного моделирования и систем визуализации.

Достоверность полученных результатов обеспечивается внутренней непротиворечивостью и соответствием теоретических выводов результатам численного моделирования в конкретных примерах. Также результаты находятся в преемственном соответствии с общеизвестными результатами.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Метод и алгоритмы, вычисляющие наименьшее время перехвата для класса задач оптимального управления с критерием быстродействия и изменяющимся во времени терминальным условием (движущейся целью). Доказательство сходимости этих алгоритмов, а так-

же оптимальности в своём классе по скорости сходимости алгоритма, основанного на лучшей из функций универсального оценивания снизу.

2. Численные методы и алгоритмы, реализованные в виде комплекса проблемно-ориентированных программ для построения траектории в задаче наискорейшего перехвата движущейся цели машиной Дубинса.
3. Математическая модель учёта желаемого значения угла вектора скорости в финальный момент времени для задачи наискорейшего бокового перехвата движущейся цели машиной Дубинса. Алгоритм и его реализация для построения траектории бокового перехвата.
4. Метод вычисления оптимальных синтезирующих управлений на барьере, определяющих оптимальные траектории преследования-уклонения игроков, для игры двух идентичных автомобилей. Доказательство наличия геометрических различий в построении барьера для различных значений радиуса захвата.

Апробация работы. Основные результаты работы неоднократно докладывались на научных семинарах ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН (семинары «Управление по неполным данным»), а также на отечественных конференциях: Ломоносовские чтения (2022), Мультиконференция по проблемам управления (2021, 2022, 2023), Ломоносов (2020), Управление большими системами (2023), Современные проблемы математики и её приложений (2020), Всероссийская научная конференция МФТИ (2020).

Личный вклад. Все результаты работы получены автором лично под научным руководством д.т.н., чл.-корр. РАН А.А. Галяева. В работах, написанных в соавторстве, вклад автора диссертации в полученные результаты в части аналитического исследования, математического моделирования, численных методов, разработки комплекса программ и проведении расчетов является определяющим.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 3 печатных изданиях, входящих в WoS/Scopus.

Содержание работы

Во **введении** приводится обзор научной литературы по задачам перехвата движущейся цели и по модели Дубинса, формулируются цели и задачи работы, указывается научная новизна и практическая значимость.

Первая глава посвящена общей задаче наискорейшего перехвата цели, движущейся известным образом. Пусть $\mathbf{x} = \text{stack}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ обозначает вектор-функцию состояния. Здесь $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X} = \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$, а \mathcal{Y} является конечномерным нормированным пространством. Предполагается, что $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{Y}$ отвечает *важным при перехвате* компонентам вектора состояния. Уравнения состояния имеют вид: $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. Здесь $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}$ — управление, а \mathcal{U} — компакт. Множество всех измеримых допустимых функций управления будем обозначать через \mathcal{A} . Также потребуем $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\| \leq 1$, для $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$. Пусть $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$ ¹ описывает траекторию движения цели ($v \in \mathbb{R}_0^+$). Начальные условия заданы так: $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{0} \in \mathcal{Y}$. Оптимизируемый функционал:

$$J[\mathbf{u}; \mathbf{y}_T] \stackrel{\text{def}}{=} \min \{t \in \mathbb{R}_0^+ : \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_T(t)\| \leq \ell\} \rightarrow \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{A}}. \quad (1)$$

Здесь $\ell \in \mathbb{R}_0^+$ является *радиусом захвата* движущейся цели. Обозначим проекцию множества достижимости на пространство важных при перехвате координат так:

$$\mathcal{R}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \int_{[0,t]} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\theta), \mathbf{u}(\theta)) d\theta : \mathbf{u} \in \mathcal{A} \right\}. \quad (2)$$

Согласно общим результатам теории оптимального управления, множество $\mathcal{R}(t)$ является компактным. Пусть

$$\rho(t, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{R}(t)} \|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}\|. \quad (3)$$

Предполагается, что эта функция предоставлена аналитически в явном виде для рассматриваемого объекта управления, либо она может быть эффективно вычислена. Эта функция позволяет представить *наименьшее время перехва-*

¹Обозначение $\text{Lip}_v(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ используется для множества v -липшицевых функций. Если функция $\mathbf{y} \in \text{Lip}_v(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, то $\mathbf{y} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ и $\|\mathbf{y}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{y}(\mathbf{x}_1)\|_{\mathcal{G}} \leq v \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|_{\mathcal{F}}$ для всех точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{F}$.

та цели, движущейся по траектории \mathbf{y}_T , следующим образом:

$$T^*[\mathbf{y}_T] \stackrel{\text{def}}{=} \min \{t \in \mathbb{R}_0^+ : \rho(t, \mathbf{y}_T(t)) \leq \ell\} = \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{A}} J[\mathbf{u}; \mathbf{y}_T]. \quad (4)$$

Теорема 1.1. Для всякой $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$, если $\rho(0, \mathbf{y}_T(0)) \geq \ell$, то

$$T^*[\mathbf{y}_T] = \min \{t \in \mathbb{R}_0^+ : \rho(t, \mathbf{y}_T(t)) = \ell\}. \quad (5)$$

Если движущаяся цель не может быть перехвачена до момента времени $t \in \mathbb{R}_0^+$ и при этом она находится в положении $\mathbf{y}_T(t) \in \mathcal{Y}$, то, имея некоторое правило $\theta : \mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, которое ставит в соответствие паре $(t, \mathbf{y}_T(t))$ некоторый следующий момент времени $\theta(t, \mathbf{y}_T(t)) \geq t$, до которого движущаяся цель не может быть перехвачена при любой возможной траектории $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$, можно получить последовательность *универсальных оценок снизу* для наименьшего времени перехвата, каждый элемент которой не дальше от наименьшего времени перехвата чем предыдущий элемент.

Определение 1.1. Функцию $\theta : \mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ будем называть функцией универсального оценивания снизу для наименьшего времени перехвата, если для всякого $t \in \mathbb{R}_0^+$ и всякой точки $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$:

1. $\rho(t, \mathbf{y}) \leq \ell \rightarrow \theta(t, \mathbf{y}) = t$;
2. $\rho(t, \mathbf{y}) > \ell \rightarrow \theta(t, \mathbf{y}) > t$;
3. для всех $\tau \in [t, \theta(t, \mathbf{y}))$ и всех $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$, $\mathbf{y}_T(t) = \mathbf{y}$, из $\rho(t, \mathbf{y}) > \ell$ следует $\rho(\tau, \mathbf{y}_T(\tau)) > \ell$.

Такое определение функции универсального оценивания снизу не связано с конкретным видом траектории движущейся цели $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$.

Определение 1.2. Лучшей из функций универсального оценивания снизу для наименьшего времени перехвата будем называть функцию

$$T(t, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\substack{\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y}) \\ \mathbf{y}_T(t) = \mathbf{y}}} \min \{\tau \in \mathbb{R}_0^+ : \tau \geq t, \rho(\tau, \mathbf{y}_T(\tau)) \leq \ell\}. \quad (6)$$

Теорема 1.2. Если $t \in \mathbb{R}_0^+$, $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ и $\rho(t, \mathbf{y}) \geq \ell$, то

$$T(t, \mathbf{y}) = \min \{\tau \in \mathbb{R}_0^+ : \tau \geq t, \rho(\tau, \mathbf{y}) = v(\tau - t) + \ell\}. \quad (7)$$

Определение 1.3. *Простой функцией универсального оценивания снизу для наименьшего времени перехвата будем называть функцию*

$$\tau(t, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} t + \frac{\rho(t, \mathbf{y}) - \ell}{1+v}, & \rho(t, \mathbf{y}) > \ell; \\ t, & \rho(t, \mathbf{y}) \leq \ell. \end{cases} \quad (8)$$

Лемма 1.1. *Функция из определения 1.3 является функцией универсального оценивания снизу для наименьшего времени перехвата.*

Мы будем говорить, что метод простой итерации *основан* на функции универсального оценивания снизу θ , если начальное приближение $t_0 = 0$, а следующее приближение на основе предыдущего вычисляется по правилу $t_n = \theta(t_{n-1}, \mathbf{y}_T(t_{n-1}))$ для всякой траектории цели $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$.

Определение 1.4. *Метод простой итерации, основанный на функции универсального оценивания снизу $\theta : \mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, называется правильно сходящимся методом, если числовая последовательность $\{t_n\}_{n=0}^\infty$, где $t_0 = 0$ и $t_n = \theta(t_{n-1}, \mathbf{y}_T(t_{n-1}))$, сходится к $T^*[\mathbf{y}_T]$ для любой $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$.*

Теорема 1.3. *Методы простой итерации, основанные на лучшей и простой функциях универсального оценивания снизу, являются правильно сходящимися методами.*

Скорость сходимости метода простой итерации, основанного даже на лучшей из функций универсального оценивания снизу, может быть сколько угодно медленной или быстрой. Если цель движется напрямую к оптимальной точке перехвата со скоростью v , а объект управления может двигаться к этой точке с единичной постоянной скоростью (в пространстве важных для перехвата координат), то метод простой итерации сойдётся за один шаг.

Алгоритм 1 ε — допустимая относительная ошибка финального значения расстояния до множества захвата, θ — некоторая функция универсального оценивания снизу для наименьшего времени перехвата (например, τ или T)

Require: $\ell \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $v \in \mathbb{R}_0^+$, $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}, \mathcal{Y})$

$t \leftarrow 0$

while $\rho(t, \mathbf{y}_T(t)) > \ell(1 + \varepsilon)$ **do**

$t \leftarrow \theta(t, \mathbf{y}_T(t))$

end while

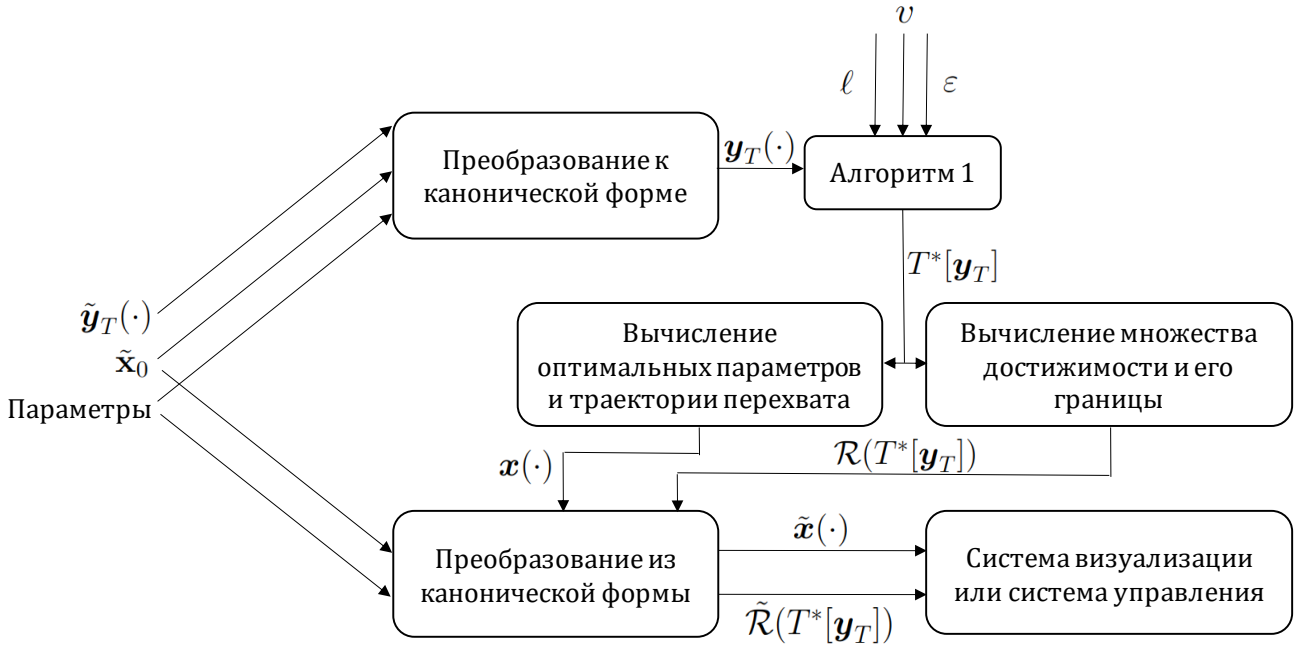


Рис. 1 — Блок-схема использования алгоритма 1 в рамках комплекса программ для построения наискорейшей траектории перехвата. Тильдой отмечены символы, которые соответствуют представлению в исходной системе отсчёта.

Основываясь на изложенных выше результатах, приведём простой алгоритм вычисления оценки наименьшего времени перехвата (алгоритм 1) и блок-схему использования этого алгоритма в рамках комплекса-программ (рис. 1).

В заключении первой главы приведён пример использования введённых понятий для построения всегда сходящегося алгоритма перехвата в рамках модели простых движений.

Вторая глава посвящена использованию представленного метода для решения задачи перехвата машиной Дубинса. В рамках задачи перехвата цели, движущейся известным образом, динамика описывается так:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = u. \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) \end{bmatrix}^\top \in \mathcal{Y} = \mathbb{R}^2$ отвечает за положение машины Дубинса на плоскости; $\mathbf{z}(t) = \varphi(t) \in \mathcal{Z} = \mathbb{S}$ соответствует углу скорости машины (угол откладывается от оси абсцисс и отсчитывается против часовой

стрелки); $\mathbf{u}(t) = u(t) \in [-1, +1]$ является значением функции управления. Начальные условия: $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pi/2 \end{bmatrix}^\top \in \mathcal{X}$.

Во второй и третьей главах используются общераспространённые обозначения, относящиеся к модели Дубинса. Букве C соответствует движение по дуге окружности единичного радиуса; букве S — движение по отрезку. На месте буквы C может стоять буква L или R для указания направления разворота (левый и правый развороты). При движении по прямой $u(t) = 0$; при L -развороте $u(t) = +1$; при R -развороте $u(t) = -1$. Круги единичного радиуса на плоскости \mathcal{Y} , касающиеся вектора скорости машины Дубинса в начальный момент времени, обозначаются через $\mathcal{D}_L, \mathcal{D}_R$. Граница плоского множества достижимости $\mathcal{B}(t) = \partial\mathcal{R}(t)$.

Лемма 2.1. *Каждая точка из $\mathcal{B}(t)$ может быть достигнута с помощью*

$$u(\theta) = \begin{cases} s, & \theta \in [0, \tau]; \\ -\sigma s, & \theta \in (\tau, t], \end{cases} \quad (10)$$

где $s \in \mathbb{B} = \{-1, +1\}$, $\sigma \in \{0, 1\}$, $\tau \in [0, t]$, $\tau \leq 2\pi$.

Через $\mathcal{B}_\Lambda(t)$ обозначаются подмножества множества $\mathcal{B}(t)$, на которые в момент времени $t \in \mathbb{R}_0^+$ можно попасть, используя траекторию типа $\Lambda \in \{LS, RS, LR, RL\}$. Также обозначим $\mathcal{B}_{CS}(t) = \mathcal{B}_{LS}(t) \cup \mathcal{B}_{RS}(t)$ и $\mathcal{B}_{CC}(t) = \mathcal{B}_{LR}(t) \cup \mathcal{B}_{RL}(t)$. Используя лемму 2.1 и отсекая части траекторий, удовлетворяющих принципу максимума, но ведущих внутрь плоского множества достижимости, можно аналитически в явном виде описать границу плоского множества достижимости (рис. 2).

С помощью этого описания в работе детально указан способ построения оптимального управления и оптимальной траектории перехвата по наименьшему времени перехвата. Для вычисления этого времени вводятся сле-

дующие конструкции:

$$\alpha_{CS}(\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} (1 - |x|)^2 + y^2 - 1; \quad \alpha_{CC}(\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{5 - (1 + |x|)^2 - y^2}{4}; \quad (11)$$

$$\mathcal{D}_I \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{y} \in \mathcal{Y} : \alpha_{CS}(\mathbf{y}) < 0 \vee \mathbf{y} = \mathbf{0}\}; \quad (12)$$

$$\mathcal{D}_{II} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{y} \in \mathcal{Y} : \mathbf{y} \notin \mathcal{D}_I, \mathbf{y} \notin \mathcal{D}_{III}\}; \quad (13)$$

$$\mathcal{D}_{III} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{y} \in \mathcal{Y} : \alpha_{CC}(\mathbf{y}) > -1, y > 0, \mathbf{y} \notin \mathcal{D}_I\}; \quad (14)$$

$$\theta_{CS}(\mathbf{y}) = \begin{cases} \arccos \frac{1 - |x| + y\sqrt{\alpha_{CS}(\mathbf{y})}}{1 + \alpha_{CS}(\mathbf{y})}, & y \geq (1 - |x|)\sqrt{\alpha_{CS}(\mathbf{y})}; \\ 2\pi - \arccos \frac{1 - |x| + y\sqrt{\alpha_{CS}(\mathbf{y})}}{1 + \alpha_{CS}(\mathbf{y})}, & y < (1 - |x|)\sqrt{\alpha_{CS}(\mathbf{y})}; \end{cases} \quad (15)$$

$$\theta_{CC}^\pm(\mathbf{y}) = \arccos \frac{(1 + |x|)(2 - \alpha_{CC}(\mathbf{y})) \pm y\sqrt{1 - \alpha_{CC}^2(\mathbf{y})}}{(1 + |x|)^2 + y^2}; \quad (16)$$

$$V_{CS}(\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{CS}(\mathbf{y}) + \sqrt{\alpha_{CS}(\mathbf{y})}, \quad \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{II} \cup \mathcal{D}_{III} \text{ или } (\mathbf{y} = \mathbf{0}); \quad (17)$$

$$V_{CC}^+(\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{CC}^+(\mathbf{y}) + \arccos \alpha_{CC}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{III}; \quad (18)$$

$$V_{CC}^-(\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{CC}^-(\mathbf{y}) + 2\pi - \arccos \alpha_{CC}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \mathcal{D}_I \cup \mathcal{D}_{III}. \quad (19)$$

С их помощью плоское множество достижимости может быть описано так:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t) = \{ & \mathbf{y} \in \mathcal{Y} : (\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{III}, t \geq V_{CS}(\mathbf{y}), (t \geq V_{CC}^-(\mathbf{y}) \vee V_{CC}^+(\mathbf{y}) \geq t)) \\ & \vee (\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{II}, t \geq V_{CS}(\mathbf{y})) \vee (\mathbf{y} \in \mathcal{D}_I, t \geq V_{CC}^-(\mathbf{y})) \vee (t = 0, \mathbf{y} = \mathbf{0}) \}. \end{aligned} \quad (20)$$

Лемма 2.2. Для всякого $t \in \mathbb{R}_0^+$, если точка $\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{R}(t)$, то

$$\rho(t, \mathbf{y}) = \begin{cases} V_{CS}(\mathbf{y}) - t, & (\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{II} \vee (\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{III}, V_{CS}(\mathbf{y}) \geq t)), \theta_{CS}(\mathbf{y}) \leq t; \\ \rho_{CC}(t, \mathbf{y}), & \text{в иных случаях.} \end{cases} \quad (21)$$

$$\rho_{CC}(t, \mathbf{y}) = \min_{\substack{\tau \in \{0, \tau_1(t, \mathbf{y}), \tau_2(t, \mathbf{y}), \tau_3(t, \mathbf{y})\} \\ 0 \leq \tau \leq \min(t, \frac{\pi}{2})}} \sqrt{(|x| - x_{LR}(\tau, t))^2 + (y - y_{LR}(\tau, t))^2}, \quad (22)$$

$$x_{LR}(\tau, t) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \cos \tau - \cos(t - 2\tau) - 1, \quad y_{LR}(\tau, t) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \sin \tau + \sin(t - 2\tau), \quad (23)$$

$$\tau_i(t, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{t}{3} - 2 \arctan \xi_i(t, \mathbf{y}) \right) \bmod 2\pi, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (24)$$

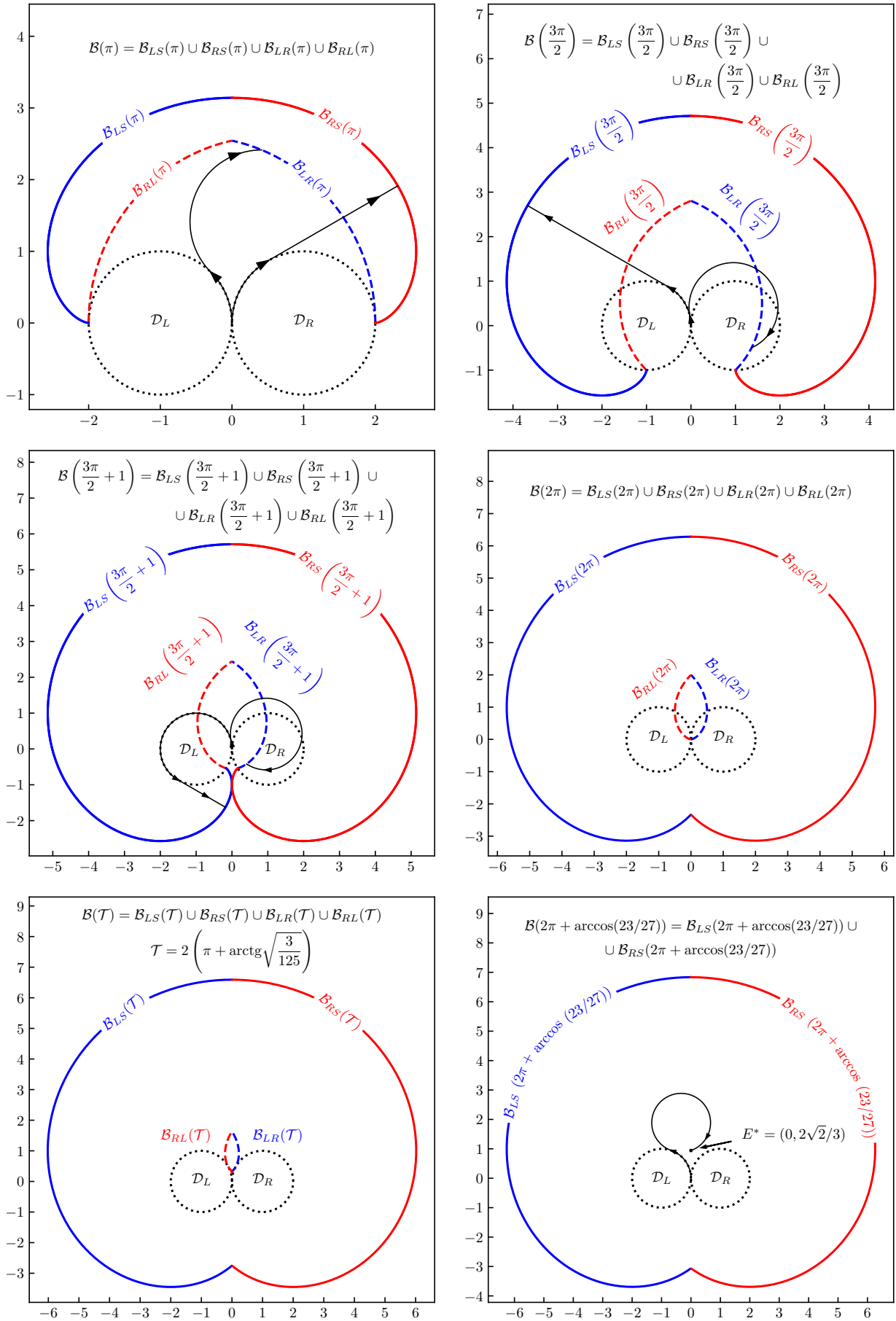


Рис. 2 — Изменение границы плоского множества достижимости.

и $\xi_i(t, \mathbf{y})$, $i \in \{1, 2, 3\}$, являются корнями² кубического уравнения:

$$- \left(y + \sin \frac{t}{3} \right) \xi^3 + \left(3 + 3|x| + \cos \frac{t}{3} \right) \xi^2 + \left(3y - \sin \frac{t}{3} \right) \xi + \cos \frac{t}{3} - (1 + |x|) = 0. \quad (25)$$

В работе доказывається, что в значительной области пространства простая и лучшая из функций универсального оценивания снизу совпадают.

Лемма 2.3. Пусть время $t \in \mathbb{R}_0^+$, точка $\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{R}(t)$, $\rho(t, \mathbf{y}) > \ell$ и $\theta_{CS}(\mathbf{y}) \leq t$. Если также точка $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{II}$ или $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{III}$ и $V_{CS}(\mathbf{y}) \geq t$, то

$$T(t, \mathbf{y}) = \tau(t, \mathbf{y}) = t + \frac{V_{CS}(\mathbf{y}) - t - \ell}{1 + v}. \quad (26)$$

В заключении второй главы приводятся результаты численных экспериментов и сравнение количества требуемых итераций для решения задачи с заданной точностью. Соответствующий комплекс программ описан в приложении диссертации.

Третья глава посвящена исследованию задачи бокового перехвата машиной Дубинса. Пространство значимых для перехвата координат совпадает с пространством состояний $\mathcal{Y} = \mathcal{X} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}$, но теперь оно не является нормированным, а представляет собой пространство с метрикой

$$d(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}) = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + |\varphi - \chi|^2}, \quad (27)$$

где $\mathbf{y} = [x \ y \ \varphi]^\top \in \mathcal{Y}$, $\boldsymbol{\eta} = [\xi \ \eta \ \chi]^\top \in \mathcal{Y}$, а абсолютное значение угла $\varphi \in \mathbb{S}$ вычисляется так: $|\varphi| = \min(\text{mod}(\varphi, 2\pi), 2\pi - \text{mod}(\varphi, 2\pi))$.

Траекторию цели будем описывать с помощью непрерывной функции $\mathbf{y}_T = [x_T \ y_T \ \varphi_T]^\top$. Первые две координаты отвечают за положение цели на, а значение $\varphi_T(t) \in \mathbb{S}$ определяет желаемое значение вектора скорости машины Дубинса при перехвате в момент $t \in \mathbb{R}_0^+$. Задача наискорейшего бокового перехвата движущейся цели машиной Дубинса ставится так:

$$J[\mathbf{u}; \mathbf{y}_T] \stackrel{\text{def}}{=} \min \{ t \in \mathbb{R}_0^+ : d(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}_T(t)) = 0 \} \rightarrow \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{A}}. \quad (28)$$

²Если соответствующий корень комплексный, то он отбрасывается и не участвует в рассмотрении.

Через $\mathcal{R}(t)$ будем обозначать множество достижимости машины Дубинса в момент времени $t \in \mathbb{R}_0^+$, а через $\mathcal{B}(t)$ его границу. Согласно результатам, полученным в работах В.С. Пацко и др., траекторий типа CSC и CCC достаточно, чтобы попасть в любую точку множества $\mathcal{B}(t)$ в момент времени $t \in \mathbb{R}_0^+$. Но не все траектории типа CSC , CCC ведут на границу множества достижимости. Некоторые из них ведут внутрь множества достижимости. Через $\mathcal{E}(t)$ будем обозначать множество всех возможных окончаний траекторий типа CSC и CCC в момент времени $t \in \mathbb{R}_0^+$. Из сказанного выше следует, что $\mathcal{B}(t) \subset \mathcal{E}(t) \subset \mathcal{R}(t)$ в каждый момент времени $t \in \mathbb{R}_0^+$. Далее мы будем использовать разбиение $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_{CSC}(t) \cup \mathcal{E}_{CCC}(t)$, где множество $\mathcal{E}_{CSC}(t)$ соответствует окончаниям траекторий типа CSC , а множество $\mathcal{E}_{CCC}(t)$ состоит из окончаний CCC -траекторий.

Лемма 3.1. Пусть $s, \sigma \in \mathbb{B}$, $\tau_1 \in [0, 2\pi)$, $\tau_2 \in [\tau_1, +\infty)$. Тогда каждая точка из $\mathcal{E}_{CSC}(t)$ может быть достигнута при $t \in \mathbb{R}_0^+$ с помощью

$$u_{CSC}^{s,\sigma}(t; \tau_1, \tau_2) = \begin{cases} s, & t \in [0, \tau_1), \\ 0, & t \in [\tau_1, \tau_2), \\ \sigma, & t \in [\tau_2, +\infty), \end{cases} \quad (29)$$

а каждая точка из множества $\mathcal{E}_{CCC}(t)$ — с помощью управления

$$u_{CCC}^s(t; \tau_1, \tau_2) = \begin{cases} s, & t \in [0, \tau_1), \\ -s, & t \in [\tau_1, \tau_2), \\ s, & t \in [\tau_2, +\infty), \end{cases} \quad (30)$$

где значение $\tau_2 - \tau_1 \in [0, 2\pi)$ в случае движения по CCC -траектории.

Интегрирование уравнений движения с управлениями (29), (30) позволяет явно получить $\mathcal{E}(t)$. Также можно сформулировать и доказать следующее утверждение о положении оптимальной точки перехвата.

Утверждение 3.1. Если перехват возможен, то оптимальная точка перехвата $\mathbf{y}_T(T^*[\mathbf{y}_T])$ принадлежит множеству

$$\tilde{\mathcal{B}}(T^*[\mathbf{y}_T]) \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{E}(T^*[\mathbf{y}_T]) : \lim_{\theta \rightarrow T^*[\mathbf{y}_T] - 0} \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{B}(\theta)} d(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}) = 0\}. \quad (31)$$

Теперь можно выписать систему вещественных уравнений, решение которой определяет параметры оптимального управления. Однако, есть возможность сократить количество кандидатов в оптимальные управления.

Утверждение 3.2. Для точек $\tilde{\mathcal{B}}(t_0)$ при $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ достаточно использовать (29) и (30) с $t_0 - \tau_2 \in [0, 2\pi)$ или (29) и (30) с $\tau_1 = 0, t_0 - \tau_2 = 2\pi$.

Утверждение 3.3. Пусть наискорейший боковой перехват цели возможен, тогда: $T^*[\mathbf{y}_T] = \min(T_{CSC}[\mathbf{y}_T], T_{SC}[\mathbf{y}_T], T_{CCC}[\mathbf{y}_T], T_{CC}[\mathbf{y}_T])$.

Способ вычисления $T_{CSC}[\mathbf{y}_T], T_{SC}[\mathbf{y}_T], T_{CCC}[\mathbf{y}_T], T_{CC}[\mathbf{y}_T]$ и выбора параметров оптимального управления по этим значениям приведён в тексте диссертации. В заключении третьей главы производится построение нескольких конкретных примеров движения цели. Каждый из приведённых примеров доказывает необходимость рассмотрения каждого из выражений, выписанных для вычисления значений $T_{CSC}[\mathbf{y}_T], T_{SC}[\mathbf{y}_T], T_{CCC}[\mathbf{y}_T], T_{CC}[\mathbf{y}_T]$.

В четвёртой главе решается задача перехвата с заранее неизвестной траекторией цели (игра двух идентичных автомобилей). Динамика игры в редуцированном пространстве состояний описывается так:

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -uy + \sin \theta \\ -1 + ux + \cos \theta \\ v - u \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Здесь $\mathbf{z} = [x \ y \ \theta]^\top$ описывает состояние, а управления преследователя и убегающего соответствуют $u(\mathbf{z}) \in \mathcal{U} = [-1, +1]$ и $v(\mathbf{z}) \in \mathcal{V} = [-1, +1]$, где \mathcal{U} и \mathcal{V} являются ограничивающими множествами для управлений игроков (двух машин Дубинса). Игровое пространство задаётся с помощью $\mathcal{S} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S} : x^2 + y^2 \geq \ell^2\}$, где $\ell \in \mathbb{R}^+$ является радиусом захвата. Будем полагать, что начальное состояние игры $\mathbf{z}_0 \in \mathcal{S}$ в начальный момент времени $t = 0$. Преследователь выбором управления добивается выхода состояния из игрового пространства, а убегающий наоборот старается не допустить такого исхода. Очевидно, что существует множество состояний \mathcal{F} , из которых убегающий сможет избежать перехват при любом поведении преследователя. Обозначим через $\mathcal{W} \subset \mathcal{S}$ множество состояний, в которых нельзя избежать захвата при оптимальной игре преследователя. Поверхность, разделяющая

множества \mathcal{F} и \mathcal{W} , является барьером $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$. В диссертации поверхность \mathcal{B} описывается аналитически в явном виде, а также выводятся явные выражения для синтезирующих оптимальных управлений $\mathbf{u}^*(\mathbf{z})$ и $\mathbf{v}^*(\mathbf{z})$ для $\mathbf{z} \in \mathcal{B}$.

С помощью попятной процедуры решения уравнения Айзекса с начальными условиями, заданными на границе допустимой области (\mathcal{BUP}_v ³), в работе получены все гладкие поверхности, составляющие барьер, а также все условия на отсечение лишних частей, которые являются полупроницаемыми, но не входят в состав барьера. Описание первичного проистекания характеристик для попятной процедуры решения уравнения Айзекса задаёт поверхности \mathcal{B}_P^v , линии $\mathcal{B}_{P\mathcal{L}}^v$ и универсальные линии $\mathcal{B}_{U\mathcal{L}}^v$ (здесь $v \in \mathbb{B}$). Последующее решение уравнение Айзекса с начальными условиями на универсальной линии приводит к описанию притоков к $\mathcal{B}_{U\mathcal{L}}^v$, составляющих поверхности \mathcal{B}_{TS}^v и \mathcal{B}_{TD}^v . Анализ пересечений указанных линий и поверхностей позволяет утверждать, что на барьерной поверхности существует рассеивающая линия ($\mathcal{B}_{D\mathcal{L}}$), причём для разных значений радиуса захвата ℓ эта линия строится по разному. Существует три качественно разных случая возможных значений радиуса захвата: случай *малых* значений радиуса $\ell \in (0, \ell_J)$; *среднего* значения $\ell = \ell_J$; случай *больших* значений $\ell \in (\ell_J, +\infty)$. Численные оценки приводят к значению $\ell_J \approx 0.671$. Визуализация перечисленных частей барьера для различных значений радиуса захвата представлена на рис. 3.

В конце четвёртой главы получена параметризация перечисленных поверхностей в специальном виде $\mathcal{P} = \{\mathbf{z} \in \mathcal{F}_P^\ell : \ell = \ell_P(\mathbf{z})\}$, позволяющем эффективно использовать полученные выражения для синтезирующих управлений игроков.

Утверждение 4.1. *Синтезирующие оптимальные управления на барьере:*

$$u^*(\mathbf{z}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{z} \in \mathcal{B}_{U\mathcal{L}}^{-1} \cup \mathcal{B}_{U\mathcal{L}}^{+1}; \\ +1, & \mathbf{z} \in \mathcal{B}_P^{-1} \cup \mathcal{B}_{P\mathcal{L}}^{-1} \cup \mathcal{B}_{TS}^{+1} \cup \mathcal{B}_{TD}^{-1} \cup \mathcal{BUP}_{-1} \cup \mathcal{B}_{D\mathcal{L}}; \\ -1, & \mathbf{z} \in \mathcal{B}_P^{+1} \cup \mathcal{B}_{P\mathcal{L}}^{+1} \cup \mathcal{B}_{TS}^{-1} \cup \mathcal{B}_{TD}^{+1} \cup \mathcal{BUP}_{+1} \cup \mathcal{B}_{D\mathcal{L}}; \\ \operatorname{sgn} x, & \mathbf{z} \in \mathcal{BUP}_0, \end{cases} \quad (33)$$

³Параметру v отвечают значения $-1, 0, +1$. Этот параметр равен значению управления убегающего.

$$v^*(\mathbf{z}) = \begin{cases} +1, & \mathbf{z} \in \mathcal{B}_P^{+1} \cup \mathcal{B}_{PL}^{+1} \cup \mathcal{B}_{TS}^{+1} \cup \mathcal{B}_{TD}^{+1} \cup \mathcal{B}_{UL}^{+1} \cup \mathcal{BUP}_{+1} \cup \mathcal{B}_{DL}; \\ -1, & \mathbf{z} \in \mathcal{B}_P^{-1} \cup \mathcal{B}_{PL}^{-1} \cup \mathcal{B}_{TS}^{-1} \cup \mathcal{B}_{TD}^{-1} \cup \mathcal{B}_{UL}^{-1} \cup \mathcal{BUP}_{-1} \cup \mathcal{B}_{DL}; \\ \operatorname{sgn} x, & \mathbf{z} \in \mathcal{BUP}_0. \end{cases} \quad (34)$$

В **заклЮчении** приведено обсуждение основных результатов работы, которые заключаются в следующем. На основе анализа свойств множеств достижимости изучена задача наискорейшего перехвата цели, движущейся известным образом. В работе показано, что если функция расстояния от произвольной точки до соответствующей проекции множества достижимости может быть эффективно вычислена, то наименьшее время перехвата может быть вычислено как наименьший неотрицательный корень уравнения, в котором расстояние от проекции множества достижимости объекта управления до положение движущейся цели приравнивается к радиусу захвата. В работе предложено две функции (простая и лучшая из функций универсального оценивания снизу), которые могут быть использованы в методе простой итерации, который всегда сходится к оптимальному решению. Простая функция универсального оценивания снизу имеет явный аналитический вид, если функция расстояния до проекции множества достижимости задана аналитически в явном виде. В свою очередь, лучшая из функций универсального оценивания снизу может быть вычислена как корень определённого вещественного уравнения. На практике может получиться так, что это вещественное уравнение решить даже сложнее, чем исходную задачу перехвата. Однако, если есть способ эффективного подсчёта корня этого уравнения, то шаг метода простой итерации на основе лучшей из функций универсального оценивания снизу является наибольшим из тех, что можно сделать для произвольной траектории цели из класса липшицевых функций с гарантией не переоценки оптимального решения. Применение разработанного алгоритма выглядит перспективным для решения задач построения опорных траекторий на основе динамических моделей объектов управления с описываемым аналитически множеством достижимости (например, для перехвата изотропной ракетой).

В качестве содержательного примера использования представленного метода получено решение задачи наискорейшего перехвата движущейся цели машиной Дубинса. В частности, получены неявные аналитические выражения, позволяющие определить наименьшее время перехвата, оптимальную траекторию перехвата и оптимальное управление; в явном виде получена

функция расстояния до плоского множества достижимости, позволяющая конструктивно использовать всегда сходящийся алгоритм на основе универсальной оценки снизу. Этот алгоритм и процедуры получения оптимальных траекторий, управлений и положений перехвата реализованы в виде комплекса проблемно-ориентированных программ, которые позволили провести вычислительные эксперименты с конкретными траекториями движения цели. В сравнении с известными результатами по данной задаче предложенный алгоритм работает с более широким классом траекторий движения цели и с гарантией получения верного приближения к правильному ответу.

Также аналитически исследована и задача наискорейшего бокового перехвата движущейся цели машиной Дубинса. Впервые получена и обоснована полная классификация оптимальных траекторий перехвата и представлен алгоритм вычисления оптимальных параметров траектории по наименьшему времени перехвата. Представленный всегда сходящийся алгоритм решения задач перехвата не может быть применён непосредственно к данной задаче, т. к. пространство важных при перехвате координат не является нормированным. Однако это пространство является метризуемым и это обстоятельство можно использовать для получения соответствующих аналитических результатов. Обобщение представленного метода на метрические пространства относится к дальнейшим перспективам исследования.

В завершении работы был рассмотрен случай неизвестного заранее движения цели (дифференциальной игры двух идентичных автомобилей). Для этой игры были получены явные аналитические решения для управлений игроков в форме синтеза для состояний, принадлежащих барьеру. Анализ изменения геометрии поверхности барьера показал, что существуют качественные различия формы барьера в зависимости от размера радиуса захвата. Произведённая классификация возможных форм барьера в зависимости от радиуса захвата позволяет не использовать метод проб и ошибок для построения барьера, как это делалось другими авторами при анализе барьера игры. Также получено аналитическое описание барьера через состояние системы. Это описание открывает возможность синтезировать оптимальные управления игроков так, что для этого не требуется исключать дополнительные параметры численными методами. Для задачи избежания столкновений полученные для убегающего формулы синтезирующего оптимального управления на

барьеру могут быть сделаны устойчивыми к ошибкам округления компонент состояния системы. Для достижения этого эффекта, вместо подсчёта управления на поверхности барьера, нужно производить подсчёт управления для состояния, принадлежащего трёхмерному слою, граница которого примыкает к поверхности барьера. Это обстоятельство делает описанные процедуры вычисления готовыми к практическому использованию.

Публикации автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в журналах WoS, Scopus, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ им. М.В. Ломоносова по специальности 1.2.2:

1. *Buzikov M., Galyaev A. A.* The game of two identical cars: An analytical description of the barrier // *Journal of Optimization Theory and Applications.* — 2023. — Vol. 198. — P. 988–1018. (WoS Q2: IF — 1.9, Scopus Q1).
2. *Buzikov M. E., Galyaev A. A.* Minimum-time lateral interception of a moving target by a Dubins car // *Automatica.* — 2022. — Jan. — Vol. 135. — 109968. (WoS Q1: IF — 6.4, Scopus Q1).
3. *Buzikov M. E., Galyaev A. A.* Time-optimal interception of a moving target by a Dubins car // *Automation and Remote Control* — 2021. — Vol. 82, no. 5. — P. 745–758. (WoS Q3: IF — 0.538, Scopus Q2, RSCI Q1).

Иные публикации

4. *Buzikov M.* Computing the minimum-time interception of a moving target. — 2022. — Oct. — arXiv: [210.03439 \[math.OC\]](https://arxiv.org/abs/210.03439).
5. *Buzikov M. E., Galyaev A. A.* Estimating the target survival probability in the attackers–target–defenders problem // *Automation and Remote Control.* — 2021. — Vol. 82, no. 9. — P. 1597–1606.
6. Optimization of interception plan for rectlineary moving targets / Galyaev A. A. [et al.] // *Automation and Remote Control.* — 2023. — Vol. 84, no. 10. — P. 18–36.
7. Intelligent control of autonomous and anthropocentric on-board systems / M. E. Buzikov [et al.] // *Procedia Computer Science* — 2019. — Vol. 150. — P. 10–18.

8. Модель группового противодействия системе самонаведения / М. Э. Бузиков [и др.] // Материалы 15-й МКПУ. — Санкт-Петербург: Концерн ЦНИИ Электроприбор, 2022. — с. 95–97.
9. Бузиков М. Э., Галяев А. А. Алгоритмы вычисления оптимальной траектории перехвата подвижной цели машиной Дубинса // Материалы 14-й МКПУ. — Дивноморское, Геленджик : ЮФУ, 2021. — с. 73–76.
10. Нейросетевой подход к задаче оптимального перехвата машиной Дубинса / М. Э. Бузиков [и др.] // Материалы 15-й МКПУ. — Санкт-Петербург: Концерн ЦНИИ Электроприбор, 2022. — с. 66–68.
11. Бузиков М. Э. Скорейший перехват предписано движущейся цели изотропной ракетой // Материалы 16-й МКПУ. — Волгоград: ВолгГТУ, 2023. — с. 121–124.
12. Бузиков М. Э., Галяев А. А. Задача сближения машины Дубинса с подвижной целью под заданным углом // Труды 63-й Всероссийской научной конференции МФТИ. — Москва: МФТИ, 2020. — с. 28–30.
13. Бузиков М. Э. Перехват криволинейно движущейся цели машиной Дубинса // Труды 63-й Всероссийской научной конференции МФТИ. — Москва: МФТИ, 2020. — с. 37–39.