

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи



Украинский Дмитрий Владимирович

**Аналитические решения уравнений газовой динамики,
механика пузырька в неньютоновских жидкостях
и кумуляция энергии**

Специальность 1.1.9 — Механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена на кафедре гидромеханики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:

Голубятников Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:

Петров Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории механики систем Института проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН

Смирнов Николай Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры газовой и волновой динамики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Ильичев Андрей Теймуразович, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Математического института имени В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 16 декабря 2022 года в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.5 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119192, Москва, Мичуринский проспект, дом 1, НИИ механики МГУ, кинозал.

E-mail: pelevina.daria@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, дом 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/505170792/>

Автореферат разослан «___» ноября 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.5,
кандидат физико-математических наук



Д.А. Пелевина

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Разработка аналитических подходов к решению задач механики жидкости и газа важна для изучения явлений природы и техники, постановок новых физических задач и конструирования на их основе новых устройств и приборов, а также для создания асимптотических и численных математических методов с использованием различных классов точных решений. Данная область исследований необходима для развития механики сплошной среды в целом.

Решения уравнений газовой динамики, представленные в виде аналитических функций, описывают течения без явного наличия ударных волн. Одним из наиболее важных с практической точки зрения классов движений являются решения о безударном сжатии [Крайко А. Н. Теоретическая газовая динамика: классика и современность, 2010]. Проблема создания концентрации энергии при коллапсе среды в точку тесно связана с вопросами энергетики. Образование ударных волн может приводить к неэффективным режимам, в которых для получения конечной величины энергии в момент коллапса сжимающему поршню требуется совершить бесконечную работу [Голубятников А. Н. // Труды МИАН, 2013].

Особенный интерес имеет построение аналитических периодических по времени движений газа, поскольку в данном случае безударные течения существуют неограниченно долго. Примером периодических решений могут служить колебания гравитирующего шара [Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, 1981]. Сходимость решений уравнений в частных производных в виде степенных рядов можно доказать с использованием теории Коши-Ковалевской, для достижения требуемых результатов имеет смысл учитывать при построении мажорант симметрию постановки механической задачи [Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике, 1983].

Изучение вопросов концентрации энергии требует также учета свойств вязкости и теплопроводности [Забабахин Е. И., Забабахин И. Е. Явления неограниченной кумуляции, 1988]. Представляет интерес рассмотрение внутри среды системы пузырьков и струек, приводящей к несферическому распределению плотности.

Для нелинейных уравнений классическим подходом также служит построение решений в виде асимптотических рядов. Одним из наиболее важных квадратичных эффектов является трехволновой параметрический резонанс поверхностных волн, заключающийся в перекачке энергии между тройкой медленно изменяющихся мод при синхронизации линейных фаз [Bretherton F. P. // Journal of Fluid Mechanics, 1964]. Данный феномен присутствует и в одномерной газовой динамике [Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики, 1975]. Имеет смысл отдельное исследование трехволнового резонанса и в рамках других постановок задач.

Цели и задачи работы. Основными целями и задачами диссертации являются:

1. Построение аналитических периодических по времени решений уравнений одномерной нестационарной газовой динамики с плоскими волнами.
2. Исследование течений газа без образования ударных волн путем построения

решений в виде степенных рядов.

3. Изучение явления трехволнового резонанса в плоских сверхзвуковых соплах.
4. Решение проблемы концентрации энергии при сжатии сферической полости в несжимаемой вязкой степенной жидкости.
5. Учет свойств сжимаемости и теплопроводности при обжатии полости в нелинейно-вязкой среде.

Научная новизна. В работе впервые представлены следующие результаты:

1. Доказано существование аналитических периодических по времени одномерных движений совершенного газа в трубе между двумя подвижными поршнями.
2. Решен ряд задач с периодическими краевыми условиями на поршнях при неоднородных начальных распределениях параметров газа.
3. Развита теория построения точных решений уравнений динамики совершенного газа в виде степенных рядов. Теория обобщена на случай произвольных термодинамических уравнений состояния.
4. Решена задача о трехволновом резонансе в стационарной сверхзвуковой газовой динамике.
5. Полностью изучен вопрос о концентрации энергии при сжатии сферической полости в несжимаемой вязкой степенной жидкости.
6. Исследовано влияние свойств сжимаемости и теплопроводности на концентрацию энергии. Результаты обобщены на случай произвольной системы пузырьков и струек в однородно сжимающейся среде.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты диссертации могут быть использованы:

1. При описании безударных газодинамических явлений, возникающих во время движения газа в трубе, закрытой подвижными поршнями с обоих концов.
2. При решении задач о течениях газов в трубопроводах.
3. При проектировании плоских сверхзвуковых сопел с криволинейными формами стенок.
4. Для получения больших величин концентрации энергии при коллапсе среды.
5. При изучении механизмов концентрации энергии в астрофизических задачах.

Методология и методы исследования. В качестве основной методологии и основных методов исследования в настоящей работе используются:

1. Теория Коши-Ковалевской. Разложение функций в степенные ряды.
2. Символьные преобразования и вычисления в системах компьютерной алгебры.
3. Аналитические и численные методы решения систем дифференциальных уравнений в частных производных. Теория специальных функций.
4. Асимптотические методы и аппарат математического анализа.
5. Обратные методы решения начальных и краевых задач.

Положения, выносимые на защиту.

1. Существуют аналитические периодические по времени одномерные движения газа в трубе при наличии пары подвижных поршней. Классу безударных течений принадлежат построенные с помощью разложения в степенные ряды решения задач о периодических колебаниях поршней без учета и с учетом силы тяжести при заданных краевых условиях на одном из них, а также решение задачи о сильном

сжатии газа. Представленный метод построения решений допускает обобщение на случай произвольных термодинамических уравнений состояния.

2. При течении газа в плоском сверхзвуковом сопле с криволинейной формой стенок возможен трехволновой резонанс.

3. При сжатии скачком давления вакуумной сферической полости в неограниченном объеме несжимаемой вязкой степенной жидкости возможна концентрация энергии во всем диапазоне параметров, соответствующем псевдопластическим жидкостям, и, частично, в мягких дилатантных. Наибольшей концентрацией энергии и наименьшей вязкой диссипацией обладают модели, близкие к предельной чисто пластической среде. Зависимость безразмерного коэффициента консистенции от показателя степени нелинейности модели, определяющая границу области с концентрацией энергии, имеет точку максимума.

4. При однородном сжатии сферическим поршнем из состояния покоя в точку нелинейно-вязкой теплопроводной среды с термодинамическими уравнениями состояния совершенного газа, содержащей произвольную систему пузырьков и струек, можно добиться, за счет работы поршня, неограниченного роста внутренней энергии к моменту коллапса. При этом кинетическая энергия среды будет сохраняться, а положение поршня в случае полной сферической симметрии задачи может быть выбрано так, чтобы поток тепла на нем равнялся нулю.

Степень достоверности результатов. Достоверность результатов, представленных в диссертации, обеспечивается использованием классических моделей механики сплошных сред и строгих математических методов их исследования, сравнением результатов с полученными ранее результатами других авторов, публикацией результатов исследований в рецензируемых научных журналах, соответствующих паспорту специальности, и презентацией докладов по проведенным исследованиям на профильных научных семинарах и конференциях.

Апробация результатов. Основные результаты, полученные в диссертации, были апробированы на конференциях: «Ломоносов» (2016, 2017, 2018 и 2021), «Ломоносовские чтения» (2019, 2020, 2021 и 2022), конференция-конкурс молодых учёных НИИ механики МГУ (2018 и 2020), «Young Scientists in Mechanics 2018» (Буревестник, МГУ), «Волны-2018» (Красновидово, МГУ), «Современные проблемы математики и механики» (МГУ, 2019), «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы» (МГУ, 2021), «Математические проблемы механики сплошных сред» (ИГ СО РАН, 2019), «Современные проблемы механики сплошной среды» (МИАН, 2017), «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (МИАН, 2019 и 2022).

Результаты были также апробированы на следующих научных семинарах: семинар по моделям механики сплошной среды с внутренними степенями свободы под руководством проф. А. В. Аксенова и проф. А. Н. Голубятникова (2017), семинар имени акад. Г. Г. Черного под руководством акад. В. А. Левина и проф. А. Н. Крайко (2021), семинар по механике сплошных сред под руководством акад. А. Г. Куликовского, проф. В. П. Карликова, чл.-кор. О. Э. Мельника и проф. А. Н. Осипцова (2021 и 2022), семинар кафедры газовой и волновой динамики под руководством акад. Р. И. Нигматулина и проф. Н. Н. Смирнова (2021 и 2022).

Кроме того, на основании данных результатов успешно защищена при окончании аспирантуры научно-квалификационная работа на тему: «Периодические и резонансные аналитические решения уравнений газовой динамики».

Личный вклад. Все аналитические построения и численные расчеты в данной работе, а также подготовка графических материалов проведены автором лично. Постановки задач и обсуждение результатов принадлежат научному руководителю. Личный вклад автора в статьях [1–3, 5, 6] составляет 4/5, в статье [4] — 1.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, шести глав и заключения. Список литературы содержит 136 наименований. Полный объем диссертации составляет 142 страницы, включает 66 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В диссертации представлен ряд методов построения аналитических решений задач газовой динамики и механики пузырька в неньютоновских вязких жидкостях, в том числе при наличии явления кумуляции (концентрации) энергии, приведена их вычислительная реализация средствами компьютерной алгебры.

Во **введении** отмечена актуальность темы исследования, приведен обзор литературы, показывающий степень разработанности темы, дано резюме диссертации, отмечены цели и задачи работы, объект и предмет исследований, научная новизна результатов, их теоретическая и практическая значимость. Также описана методология и методы исследования, сформулированы положения, выносимые на защиту, отмечены степень достоверности и апробация результатов, личный вклад автора, приведен список публикаций.

Глава 1 посвящена получению математических оценок параметров движения поршней и распределения энтропийной функции вдоль трубы, при которых решения уравнений газовой динамики в случае произвольного рационального показателя адиабаты γ являются аналитическими периодическими по времени функциями. Задача главы — показать, что периодические по времени течения газа в трубах при наличии пары подвижных поршней без образования ударных волн существуют.

Пусть $\gamma = (l - 1)/(L + 1) > 1$, тогда уравнения одномерной нестационарной газовой динамики с плоскими волнами могут быть записаны в виде

$$x_{tt} + p_m = 0, \quad px_m^\gamma = \sigma(m)$$

или

$$u_m = f(m)q^L q_t, \quad q_m = q^l u_t. \quad (1)$$

Здесь $v = x_t = (l - 1)u$ — скорость, $\rho = x_m^{-1}$ — плотность, $p = q^{-(l-1)}$ — давление, $\sigma(m) = (\gamma f(m))^\gamma$ — энтропийная функция, m — массовая лагранжева координата, t — время. Для системы (1) ставится задача Коши

$$u(0, t) = u_0(t), \quad q(0, t) = q_0(t), \quad (2)$$

определяющая закон движения поршня, находящегося при $m = 0$ (который называется «нижним»), и термодинамические параметры на нем. Предполагается, что условия (2) являются периодическими и обладают общим периодом $T = 1$ (ис-

пользуется приведение к безразмерному виду с помощью параметров $f(0)$, $q_0(0)$ и T).

Если функции $u_0(t)$ и $q_0(t)$ являются аналитическими на рассматриваемом периоде, а функция $f(m)$ — аналитическая на интервале с центром в нуле и радиусом, большим 4, то существует такое положительное число M , что для любого $t \geq 0$ и $m \in [0, M]$ решение задачи (1)–(2) представлено аналитическими периодическими по времени функциями (их период также единичный). В точку $m = M$ устанавливается «верхний» поршень. Аналитическое решение задачи Коши единственно.

Доказательство представленных результатов проводится на основе рассуждений теоремы Ковалевской с учетом выбора подходящей мажоранты. Конкретные значения M определяются вычислительно при рассмотрении примеров. Результаты главы служат аналитическим обоснованием решений последующих задач.

Также в данной главе выведены общие рекуррентные соотношения для произвольного рационального γ , позволяющие вычислить аналитическое решение по задаваемым функциям $u_0(t)$, $q_0(t)$ и $f(m)$. Для подобных целей удобно использовать средства компьютерной алгебры (например, математический пакет Maple).

Рекуррентные соотношения при $\gamma = 7/5$ ($l = 8$ и $L = 4$) имеют вид

$$\begin{aligned}
 n u_n(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^k \sum_{n_3=0}^j \sum_{n_2=0}^{n_3} \sum_{n_1=0}^{n_2} q_{j-n_3}(t) q_{n_3-n_2}(t) q_{n_2-n_1}(t) q_{n_1}(t) f_{k-j} \dot{q}_{n-1-k}(t), \\
 n q_n(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{n_7=0}^k \sum_{n_6=0}^{n_7} \sum_{n_5=0}^{n_6} \sum_{n_4=0}^{n_5} \sum_{n_3=0}^{n_4} \sum_{n_2=0}^{n_3} \sum_{n_1=0}^{n_2} q_{k-n_7}(t) q_{n_7-n_6}(t) q_{n_6-n_5}(t) q_{n_5-n_4}(t) \times \\
 &\quad \times q_{n_4-n_3}(t) q_{n_3-n_2}(t) q_{n_2-n_1}(t) q_{n_1}(t) \dot{u}_{n-1-k}(t), \tag{3}
 \end{aligned}$$

где $u_n(t)$, $q_n(t)$ и f_n — члены разложений функций u , q и f по степеням m .

Ключевая цель **главы 2** — показать разнообразие возможных периодических по времени течений газа в трубах без образования ударных волн и представить методы построения соответствующих решений в виде разложений по степеням различных лагранжевых координат или специальных функций от времени. В данной главе решен ряд задач с заданными периодическими краевыми условиями на одном из поршней без учета и с учетом силы тяжести, движение второго поршня вычисляется. Также в данной главе решена непериодическая задача о сильном безударном сжатии газа.

Предположим, что на «нижний» поршень, находящийся при $m = 0$, с открытой стороны трубы действует атмосферное давление p_a , а с внутренней стороны — давление, изменяющееся по закону $p(0, t) = p_a [1 + \beta \cos(2\pi t/T)]$, где $|\beta| < 1$. Например, поверхность поршня теплоизолирована и подогревается или охлаждается по соответствующей формуле для температуры $\theta(0, t)$. В случае согласованного движения газа и поршня закон движения поршня имеет вид

$$M_p x_{tt}(0, t) = -S_p p(0, t) + S_p p_a, \quad x(0, t) = -\frac{T^2 S_p p_a \beta}{4\pi^2 M_p} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right].$$

Пусть энтропийная функция изменяется вдоль трубы экспоненциально, тогда $f(m) = D \exp(\delta m/M)$. Кроме того,

$$u_0(t) = -\frac{T S_p p_a \beta}{2\pi M_p (l-1)} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \quad q_0(t) = p_a^{-1/(l-1)} \left[1 + \beta \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]^{-1/(l-1)}.$$

В соответствии с результатами предыдущей главы данная задача имеет решение, представленное аналитическими функциями.

Поскольку величины M_p/S_p и M имеют одинаковую размерность, можно ввести безразмерное число $\lambda = M/(M_p/S_p)$. В диссертации отдельно рассмотрены задачи с $\lambda \neq 0$ и $\lambda = 0$ (случай неподвижного «нижнего» поршня).

На рисунке 1 приведено решение (на двух периодах для наглядности) при $\lambda = 1/2$ и параметрах $\gamma = 7/5$, $\delta = -(5/7) \ln(5/4)$, $\beta = 0.02$, $T = 4$ с, $M = 100$ кг/м², $p_a = 101330$ кг/(м·с²), $\rho(0, 0) = 1.225$ кг/м³. Таким образом, область изменения массовой переменной задана и имеет вид

$$\tilde{m} = \frac{m}{T \sqrt{\gamma p(0, 0) \rho(0, 0)}} \in [0, \mu], \quad \mu = \frac{M}{T \sqrt{\gamma p(0, 0) \rho(0, 0)}} \approx 0.059.$$

Кроме того, на графиках используются обозначения

$$\tilde{v} = v \sqrt{\frac{\rho(0, 0)}{\gamma p(0, 0)}}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho(0, 0)}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{p(0, 0)}, \quad \tilde{\theta} = R \theta \frac{\rho(0, 0)}{p(0, 0)}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T}.$$

На рисунке 1 также представлены невязки безразмерных уравнений (именно для них строится решение в рядах по формулам (3), записанным для соответствующих безразмерных величин). Здесь $\tilde{\epsilon}_1 = \tilde{f}(\tilde{m}) \tilde{q}^L \tilde{q}_{\tilde{t}} - \tilde{u}_{\tilde{m}}$ и $\tilde{\epsilon}_2 = \tilde{q}^l \tilde{u}_{\tilde{t}} - \tilde{q}_{\tilde{m}}$. Видно, что уже для первых 8 вычисленных коэффициентов в каждом из рядов невязки крайне малы, порядка 10^{-7} . Данные величины можно сравнить с максимальными по модулю значениями функций $\tilde{u}_{\tilde{m}}$ и $\tilde{q}_{\tilde{m}}$, равными 0.022 и 0.025 соответственно. Следовательно, нормированные невязки имеют порядок 10^{-5} . Важно отметить, что величина невязок убывает при уменьшении массовой переменной, как и следовало ожидать на основе построенного в предыдущей главе доказательства аналитичности решения. В диссертации также приведены графики невязок уравнений в относительном виде $\tilde{\epsilon}_1 = \tilde{f}(\tilde{m}) \tilde{q}^L \tilde{q}_{\tilde{t}} / \tilde{u}_{\tilde{m}}$ и $\tilde{\epsilon}_2 = \tilde{q}^l \tilde{u}_{\tilde{t}} / \tilde{q}_{\tilde{m}}$. Отклонения величин $\tilde{\epsilon}_1$ и $\tilde{\epsilon}_2$ от 1 пренебрежимо малы по сравнению со значением 10^{-2} .

Таким образом, при наперед заданной области $\tilde{m} \in [0, \mu]$ построенное решение ведет себя регулярно. Это можно считать своего рода вычислительной оценкой рассматриваемого в доказательстве расстояния между поршнями в терминах μ . В принципе, проблематика допускает и другую интерпретацию. На основе графиков невязок можно сделать вывод, что при обрывании рядов на 8 коэффициентах получается высокоточное приближенное решение задачи в виде частичных сумм.

В рамках рассмотренного подхода в диссертации также решена задача о колебаниях «нижнего» поршня при сохранении на нем термодинамических параметров.

Для дальнейших построений выбирается квадратично-нелинейная форма уравнений, наиболее удобная для перемножения решений в виде рядов по правилу Коши (здесь x — закон движения и g — величина ускорения свободного падения)

$$x_{tt} + p_m + g = 0, \quad p_t x_m + \gamma p x_{mt} = 0. \quad (4)$$

В указанной системе делается замена переменной $b = b(m)$, причем $b'(m) = \varphi(b)$ и $b(0) = 0$. Решение системы строится в виде разложений

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) b^n, \quad p = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) b^n,$$

при этом ряд $\varphi(b) = C_0 + C_1 b + C_2 b^2 + \dots$ считается известным.

Функции $A_0(t)$ и $B_0(t)$ задаются и представляют собой закон движения $x(0, t)$ «нижнего» поршня и давление $p(0, t)$ на нем. Все остальные коэффициенты находятся с помощью рекуррентных соотношений, которые выводятся при подстановке рядов в уравнения. Для конкретизации решения требуется также задать числа $A_n(0)$, определяющие начальное положение частиц $x(m, 0)$. В частности, если определить $A_0(0) = 0$, $A_1(0) = 1$, $A_2(0) = A_3(0) = \dots = 0$, то разложение строится по начальным лагранжевым координатам, $b(m) = x(m, 0)$.

В качестве примера в рамках данного подхода решается сформулированная выше задача о колебаниях «нижнего» поршня при сохранении на нем термодинамических параметров, но с дополнительным усложнением в виде учета действия на газ однородного поля тяготения. Пусть $x(0, t) = A \sin(2\pi t/T)$, $p(0, t) = p_0$ и $x_m^{-1}(m, 0) = \rho(m, 0) = \rho_0 \exp(\delta m/M)$. Введем растяжения

$$\tilde{t} = \frac{2\pi t}{T}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \tilde{m} = \frac{m}{(T/(2\pi))\sqrt{p_0\rho_0}}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{(T/(2\pi))\sqrt{p_0/\rho_0}}.$$

Тогда $\tilde{\rho} = \rho/\rho_0$ и $\tilde{v} = v\sqrt{\rho_0/p_0}$. В задаче появляются безразмерные числа

$$\tilde{g} = \sqrt{\frac{\rho_0}{p_0}} \frac{T}{2\pi} g, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\rho_0}{p_0}} \frac{2\pi}{T} A, \quad \mu = \frac{M}{(T/(2\pi))\sqrt{p_0\rho_0}}.$$

Выберем $\alpha = 0.1$ и $\delta = \mu$. Последнее условие позволяет сблизить поршни за счет варьирования μ , не изменяя решения задачи функционально, что можно увидеть, если выписать задачу в безразмерном виде. Пусть также $\gamma = 7/5$, $T = 4$ с, $p_0 = 101330$ кг/(м·с²), $\rho_0 = 1.225$ кг/м³. Поскольку $g = 9.81$ м/с², то $\tilde{g} \approx 0.022$.

Решение безразмерной задачи в виде рядов по степеням $\tilde{b} = \tilde{x}(\tilde{m}, 0) = 1 - \exp(-\tilde{m})$ изображено на рисунке 2 (используются первые 16 коэффициентов в каждом из рядов и значение $\mu = 1$). За счет постоянной g для уравнения движения удастся ввести относительную невязку $\tilde{\epsilon}_1 = -(\tilde{x}_{\tilde{t}\tilde{t}} + \tilde{p}_{\tilde{m}})/\tilde{g}$. Ее отклонение от 1 не превосходит 0.003 по модулю. Невязка уравнения адиабатичности определена в виде $\tilde{\epsilon}_2 = \tilde{p}_{\tilde{t}}\tilde{x}_{\tilde{m}}/(\gamma\tilde{p}) + \tilde{x}_{\tilde{m}\tilde{t}}$ и имеет порядок 10^{-6} , что можно отнести к максимальному по модулю значению 0.025 функции $\tilde{x}_{\tilde{m}\tilde{t}}$. В диссертации также представлен относительный вариант невязки уравнения адиабатичности $\tilde{\epsilon}_2 = -\tilde{p}_{\tilde{t}}\tilde{x}_{\tilde{m}}/(\gamma\tilde{p}\tilde{x}_{\tilde{m}\tilde{t}})$, ее отклонение от 1 не превосходит значения $6 \cdot 10^{-5}$. Важно отметить, что все построенные невязки (либо модуль их отклонения от единицы) убывают к нулю при уменьшении \tilde{m} , чего можно добиться, уменьшая μ .

Уравнения газовой динамики также могут быть сформулированы в форме Вебера, обеспечивающей инвариантность системы относительно преобразования лагранжевых координат

$$x_{tt}x_\xi + h_\xi - (h/c_p) s_\xi = 0, \quad h_t x_\xi + (\gamma - 1) h x_{\xi t} = 0,$$

где h — удельная энтальпия, s — удельная энтропия, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении и ξ — произвольная лагранжева координата, в качестве которой имеет смысл выбрать s .

Аналогичным образом можно построить решения в виде разложений x и h по степеням переменной s . Важной особенностью данного случая является отсутствие в уравнении движения дополнительного произвола, связанного с необходимостью раскладывать в ряд функцию $\varphi(b)$. Для конкретизации решения нужно задать закон движения поршня $x|_{s=0}$, удельную энтальпию на поршне $h|_{s=0}$, а также коэффициенты разложения $x|_{t=0}$ по степеням s , определяющие начальное положение частиц. Все неизвестные члены рядов вычисляются на основе соответствующих рекуррентных формул.

В качестве примера в рамках данного подхода решается задача о росте температуры на неподвижной стенке, приводящем к сильному сжатию газа подвижным поршнем. Для этого рассматриваются величины $x(0, t) = 0$, $h(0, t) = H[1 + 0.1(\sqrt{H}t/A)^2]$, $x(s, 0) = A(s/\kappa)^2$ и $c_p = 2\kappa$. За счет появления «температурной» размерности в данной задаче можно задавать четыре масштаба

$$\tilde{x} = x/A, \quad \tilde{h} = h/H, \quad \tilde{s} = s/\kappa, \quad \tilde{t} = (\sqrt{H}/A)t, \quad \tilde{c}_p = c_p/\kappa = 2, \quad \tilde{\sigma} = \sigma/\sigma_0.$$

Кроме того, имеют место соотношения $\tilde{\sigma} = \exp(\gamma\tilde{s}/\tilde{c}_p)$, $\rho = \rho_0\tilde{\rho}$ и $p = p_0\tilde{p}$, где

$$\rho_0 = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{H}{\sigma_0}\right)^{1/(\gamma-1)}, \quad p_0 = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{H}{\sigma_0^{1/\gamma}}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad H = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0}, \quad \sigma_0 = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}.$$

Пусть $\gamma = 7/5$, $p_0 = 101330 \text{ кг/(м}\cdot\text{с}^2)$, $\rho_0 = 1.225 \text{ кг/м}^3$. Предполагается, что $\tilde{s} \in [0, \psi]$. Таким образом, в задаче присутствует безразмерный параметр, который определяет степень неоднородности удельной энтропии. Зададим $\psi = 0.1$, что для воздуха соответствует изменению s от 0 на стенке до $50.3 \text{ м}^2/(\text{с}^2\cdot\text{К})$ на поршне.

Решение для 10 коэффициентов изображено на рисунке 3. Наблюдается сильное сжатие газа, поршень прижимается к стенке. Частицы с большей удельной энтропией обладают более высокой температурой. Все графики приведены для моментов \tilde{t} от 0 до 10. За это время давление успевает вырасти в 4400 раз, а плотность — в 400 раз. В диссертации также приведены графики параметров \tilde{h} , \tilde{p} и $\tilde{\rho}$ для \tilde{t} от 0 до 0.1 с целью подчеркнуть неоднородность распределения термодинамических параметров вдоль трубы. С течением времени данная неоднородность становится менее заметной. Предположим, что первоначальное расстояние между поршнем и стенкой (длина трубы) равно 1 м, что соответствует значению $A = 10^2 \text{ м}$ (поскольку $\tilde{x}(\psi, 0) = 10^{-2}$). Как видно из графика \tilde{x} , при $\tilde{t} = 10$ поршень успевает подойти к стенке весьма близко, вычисления дают $\tilde{x}(\psi, 10) \approx 2.5 \cdot 10^{-5}$. Данный процесс осуществляется за $t \approx 1.86 \text{ с}$.

Вычислим невязку уравнений при переходе от рядов к их частичным суммам. Важно заметить, что невязку уравнения движения в форме Вебера можно определить в относительном виде $\tilde{\varepsilon}_1 = \tilde{c}_p(\tilde{x}_{\tilde{t}\tilde{t}}\tilde{x}_{\tilde{s}} + \tilde{h}_{\tilde{s}})/\tilde{h} - 1$. Исходя из соответствующего графика, видно, что данное уравнение выполняется с относительной

погрешностью порядка 10^{-10} . Невязку оставшегося уравнения определим в виде $\tilde{\varepsilon}_2 = \tilde{h}_t \tilde{x}_{\tilde{s}} / [(\gamma - 1)\tilde{h}] + \tilde{x}_{\tilde{s}\tilde{t}}$, ее порядок пренебрежимо мал по сравнению со значением 10^{-8} . Для сравнения, максимальное (по модулю) значение функции $\tilde{x}_{\tilde{s}\tilde{t}}$ составляет 0.075. В диссертации также построен график относительной невязки $\tilde{\varepsilon}_2 = \tilde{h}_t \tilde{x}_{\tilde{s}} / [(\gamma - 1)\tilde{h}\tilde{x}_{\tilde{s}\tilde{t}}] + 1$, ее порядком можно пренебречь по сравнению со значением 10^{-6} . Как и прежде, максимальная погрешность убывает при уменьшении верхней границы области изменения лагранжевой координаты.

Рассмотрим в системе (4) замену переменных $a = a(t)$, удовлетворяющую уравнению с гамильтонианом $\dot{a}^2/2 = U(a)$ при условии $a(0) = 0$. Тогда преобразованная система будет иметь вид

$$2U(a)x_{aa} + U'(a)x_a + p_m + g = 0, \quad p_a x_m + \gamma p x_{ma} = 0.$$

Построим решение в виде разложений по степеням a

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(m)a^n, \quad p = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(m)a^n.$$

Ряд $U = C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + \dots$ является известным. Часть коэффициентов задается начальными условиями: $x(m, 0) = A_0(m)$, $x_t(m, 0) = \pm \sqrt{2U(0)}A_1(m)$ и $p(m, 0) = B_0(m)$. Остальные члены рядов вычисляются по начальным данным и разложению потенциала $U(a)$ с помощью рекуррентных формул

$$B_1(m) = -\frac{\gamma B_0(m)A'_1(m)}{A'_0(m)}, \quad A_2(m) = -\frac{g + B'_0(m)}{4C_0} - \frac{C_1 A_1(m)}{4C_0},$$

$$B_n(m) = -\frac{\gamma B_0(m)A'_n(m)}{A'_0(m)} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} \cdot \frac{A'_k(m)B_{n-k}(m) + \gamma B_k(m)A'_{n-k}(m)}{A'_0(m)},$$

$$A_{n+1}(m) = -\frac{B'_{n-1}(m)}{2(n+1)nC_0} - \sum_{k=1}^n \frac{k(n+k-1)}{2(n+1)n} \frac{C_{n+1-k}}{C_0} A_k(m),$$

где $n = 2, 3, \dots$

Граничные условия непротекания на поверхностях пары поршней $x(0, t)$ и $x(M, t)$ определяются необходимым для существования решения образом после вычисления коэффициентов ряда для закона движения.

Глава 3 посвящена преобразованию полугодографа — специальному методу, который позволяет обобщить идеи предыдущей главы на решение задач с неоднородной энтропийной функцией при произвольном уравнении состояния газа.

Вводя величины $v = x_t$ и $w = x_m$, уравнение движения газа можно сформулировать в виде $v_t + p_m = 0$ с условием совместности $v_m - w_t = 0$. Пусть уравнение состояния газа имеет вид $p = p(m, w)$. Например, для адиабатического процесса в случае газа Ван-дер-Ваальса $p(m, w) = \sigma(m)(w - b)^{-\gamma} - aw^{-2}$. Таким образом, давление является известной величиной в терминах m и w , что наводит на мысль сделать их новыми независимым переменным, считая v и t искомыми функциями.

В этом случае уравнения газовой динамики принимают вид

$$v_w + p_m(m, w)t_w - p_w(m, w)t_m = 0, \quad v_m t_w - v_w t_m = 1.$$

При любой зависимости $p(m, w)$ такая система остается квадратично-нелинейной, что удобно для перемножения решений в виде рядов. Кроме того, преобразование полугодиграфа обладает определенным преимуществом по сравнению с обычным преобразованием годографа — граничные условия ставятся так же, как и до преобразования: при $m = 0$ и $m = M$ расположены поршни.

В диссертации построено решение в виде разложений v и t по степеням m , которое, в частности, используется для обобщения решения задачи об однородном разлете (сжатии) газа Ван-дер-Ваальса $t = t(w)$.

В **главе 4** решена задача о трехволновом резонансе в плоском сопле с криволинейной формой верхней и нижней стенок. Рассматривается двумерное стационарное изэнтропическое потенциальное течение совершенного газа, слабо возмущающее однородный сверхзвуковой фон (ε — малый параметр)

$$\varphi_{xx} \left[h(\gamma - 1) - \varphi_x^2 \right] + \varphi_{yy} \left[h(\gamma - 1) - \varphi_y^2 \right] - 2\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} = 0,$$

$$(1/2) (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + h = \text{const}, \quad h(x, y) = h_0 + \varepsilon H(x, y, \varepsilon), \quad \varphi(x, y) = V_0 x + \varepsilon \Phi(x, y, \varepsilon).$$

Решение для возмущения Φ потенциала скорости φ ищется в виде трех гармонических волн, для каждой из которых пары волновых чисел связаны дисперсионным уравнением, соответствующим линейному приближению, а амплитуда α_j и сдвиг фазы β_j медленно изменяются по координате x

$$\Phi = \sum_{j=1}^3 \left[\Phi_j(\varepsilon x) \exp(i\theta_j) + \Phi_j^*(\varepsilon x) \exp(-i\theta_j) \right], \quad \Phi_j(\varepsilon x) = \alpha_j(\varepsilon x) \exp(i\beta_j(\varepsilon x)),$$

где $\theta_j = k_j y - l_j x$ и $k_j = l_j [V_0^2 / (h_0(\gamma - 1)) - 1]^{1/2}$. Рассматривается специальное резонансное условие синхронизации фаз: $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \equiv 0$.

Величины первого порядка малости в уравнении на возмущение потенциала Φ уходят в силу выполнения линейных дисперсионных соотношений. Для величин следующего порядка проводится ортогонализация — член, пропорциональный произведению двух разных комплексных экспонент, взаимодействует с третьей комплексно-сопряженной в силу синхронизации фаз. С помощью умножения на $\exp(-i\theta_j)$ и усреднения по y на интервале, равном целому числу длин волн, получаются амплитудно-фазовые уравнения взаимодействия

$$\Phi_1'(\xi) = C_1 \Phi_2^*(\xi) \Phi_3^*(\xi), \quad \Phi_2'(\xi) = C_2 \Phi_3^*(\xi) \Phi_1^*(\xi), \quad \Phi_3'(\xi) = C_3 \Phi_1^*(\xi) \Phi_2^*(\xi),$$

$$C_j = -\frac{\lambda}{l_j} \left[\frac{\gamma + 1}{2} (l_m l_n^2 + l_n l_m^2) + \frac{\gamma - 1}{2} (l_m k_n^2 + l_n k_m^2) + k_m k_n l_n + k_n k_m l_m \right],$$

где j, m, n циклически переставляются и $\lambda = V_0 / (V_0^2 - a_0^2)$. Нужно отметить, что коэффициенты уравнений взаимодействия вещественны, не равны нулю, не одного знака, а их произведение всегда положительно.

В силу неравенства треугольника, резонансного условия и линейности дисперсионного соотношения аналогичные трехмерные задачи газовой динамики всегда вырождаются в коллинеарный случай. Отсутствие дисперсии в среде усложняет физическую реализацию резонансных условий в виде синхронизации фаз.

Можно считать, что течение задается граничными условиями непротекания через две поверхности, в области между которыми происходит рассматриваемое движение газа. Физически речь идет о волнистых верхней и нижней стенках в плоском сверхзвуковом сопле. Их форма определяется асимптотически и имеет вид ($r = 1, 2$ и $x \ll 1/\varepsilon$)

$$y_r(x) = y_r(0) + \frac{2\varepsilon}{V_0} \sum_{j=1}^3 \frac{k_j}{l_j} \alpha_j(0) \left[\cos(k_j y_r(0) + \beta_j(0)) - \cos(k_j y_r(0) - l_j x + \beta_j(0)) \right] + O(\varepsilon^2).$$

Амплитудно-фазовые уравнения обладают первыми интегралами

$$\frac{\alpha_1^2(\xi) - \alpha_1^2(0)}{C_1} = \frac{\alpha_2^2(\xi) - \alpha_2^2(0)}{C_2} = \frac{\alpha_3^2(\xi) - \alpha_3^2(0)}{C_3} \equiv Z(\xi),$$

которые описывают нелинейное взаимодействие волн — амплитуды мод могут усиливаться и ослабевать друг за счет друга. Данный феномен составляет суть трехволнового резонанса. Важно отметить, что рост волн ограничен: $|Z(\xi)| \leq \max\{\alpha_j^2(0) / |C_j|\}$. В результате преобразований для $Z(\xi)$ получается уравнение

$$Z'^2(\xi) = 4 \prod_{r=1}^3 (C_r Z + \alpha_r^2(0)) - 4\alpha_1^2(0)\alpha_2^2(0)\alpha_3^2(0) \sin^2(\beta_1(0) + \beta_2(0) + \beta_3(0)),$$

решение которого выражается в терминах эллиптических функций и, как правило, периодически.

На рисунке 4 изображен график плотности для построенного в диссертации примера течения с трехволновым резонансом в плоском сверхзвуковом сопле.

В **главе 5** рассматривается сферически-симметричная задача о динамике однородного (в частности, вакуумного) пузырька в неограниченном объеме несжимаемой вязкой степенной жидкости. Уравнение живых сил, проинтегрированное по всему объему неньютоновской среды, в данном случае имеет вид

$$\dot{E}(t) + (p_\infty(t) - p_{\text{cav}}(R)) \dot{V}(t) + 4\sqrt{2/3} (6^\beta / \beta) \pi \mu |\dot{R}(t)|^{2\beta+1} R^{2-2\beta}(t) = 0, \quad (5)$$

$$E(t) = 2\pi\rho R^3(t) \dot{R}^2(t), \quad V(t) = (4/3)\pi R^3(t), \quad p_{\text{cav}}(R) = p_0(R_0/R(t))^{3\gamma}.$$

Уравнение состояния степенной жидкости имеет форму $\tau_i^j = 2\mu|e|^{2\beta-1}e_i^j$, где $\beta > 0$ — показатель нелинейности, μ — коэффициент консистенции и $e^2 = e_{ij}e^{ij}$.

С помощью задания динамики радиуса полости $R(t)$ в уравнении (5) можно определить необходимый вид внешнего давления $p_\infty(t)$, обеспечивающий реализацию требуемого режима. В диссертации решены задачи о сохранении при сжатии полости кинетической энергии жидкости и скорости вязкой диссипации.

Пусть давление на бесконечности меняется скачком, оставаясь далее постоянным, пузырек сжимается из состояния покоя. В безразмерных переменных $x = V_0/V$ и $y = E/(p_\infty V_0)$ уравнение (5) принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \theta x^\gamma - \sigma y^\beta x^{5\beta/3}}{x^2}, \quad y(1) = 0, \quad \sigma = \frac{(2/3)^{1/2} 4^\beta (\mu/\rho)}{\beta (p_\infty/\rho)^{1-\beta} R_0^{2\beta}}, \quad \theta = \frac{p_0}{p_\infty}. \quad (6)$$

При $\beta = 1/2$ (ньютоновская жидкость) параметр σ связан с числом Рейнольдса $Re = (R_0/(\mu/\rho))\sqrt{p_\infty/\rho}$ соотношением $\sigma = (4/Re)\sqrt{2/3}$.

В диссертации проведен подробный анализ уравнения (6) и типичных для него ситуаций, детально рассмотрен вопрос о минимизации величины полной диссипации энергии. Ниже представлено решение проблемы о концентрации энергии — вычисление значения $y(\infty)$ при сжатии вакуумной полости ($\theta = 0$) в точку.

На основе формулы Тейлора, записанной до линейного члена с остатком в форме Лагранжа, удается аналитически доказать, что $y(\infty) = 0$ при любых $\beta \geq 3/5$, то есть для большинства дилатантных жидкостей концентрации энергии нет.

Для остальных β величина концентрации энергии находится численно. При $\sigma = 1$ график данной зависимости показан на рисунке 5. Поверхность значений концентрации энергии как функция β и σ приведена на рисунке 6. Также в диссертации отдельно построена поверхность для диапазона $0.001 \leq \sigma \leq 0.15$ при $0 < \beta < 3/5$. Наилучшие результаты дают жидкости, близкие к предельной чисто пластической модели. Интерес представляет немонотонная по β зависимость кривой раздела областей с концентрацией энергии и без нее, для $\beta = 1/2$ получается результат Е. И. Забабахина: $Re_{crit} = 8.4$, что соответствует $\sigma_{crit} = 0.39$.

В главе 6 дается точное частично сферически-симметричное решение вида $\mathbf{v} = \mathbf{r}/t$ и $p = p(t)$ уравнений динамики нелинейно-вязкой теплопроводной сжимаемой среды, закон термодинамического состояния которой соответствует совершенному газу. Предполагается, что тензор вязких напряжений зависит только от тензора скоростей деформаций произвольным изотропным образом, в результате чего уравнения движения полностью удовлетворяются. Для описания поведения среды используются лагранжевы координаты — декартовы компоненты v_i вектора скорости. Рассматривается сжатие среды в точку за счет действия сферического поршня, движущегося с постоянной скоростью $v_p < 0$. При сжатии $t < 0$, в момент $t = 0$ происходит коллапс. Состояние покоя $\mathbf{v} = 0$ в начальных условиях соответствует начальному моменту $t = -\infty$.

Уравнение неразрывности приводит к разделению переменных для плотности $\rho = \rho_1(t)\rho_2(v_i)$, где $\rho_1(t) = |t|^{-3}$, что вместе с однородностью давления дает разделение переменных и для энтропийной функции $\sigma = \sigma_1(t)\sigma_2(v_i)$, где $\sigma_1(t) = p(t)|t|^{3\gamma}$ и $\sigma_2(v_i) = \rho_2^{-\gamma}(v_i)$. Переменные t и v_i в уравнении притока тепла также разделяются (здесь T — температура и Δ_v — оператор Лапласа в переменных v_i)

$$\begin{aligned} \rho T \frac{\partial s}{\partial t} &= \tau^{ij} e_{ij} + \nabla_i (c_V \rho k \nabla^i T), \\ -\Delta_v (\ln \rho_2(v_i)) &\equiv \lambda \equiv \frac{t^2}{k \sigma_1(t)} \left(\frac{d\sigma_1(t)}{dt} - (\gamma - 1) \tau^{ij} e_{ij} |t|^{3\gamma} \right). \end{aligned}$$

Уравнение Пуассона для $\ln \rho_2(v_i)$ приводит к общему решению

$$\rho_2(v_i) = \rho_0 \exp \left(-\frac{\lambda |\mathbf{v}|^2}{6} + \varphi(v_i) \right), \quad (7)$$

где $\varphi(v_i)$ — произвольная гармоническая функция: $\Delta_v \varphi(v_i) = 0$.

Решение линейного неоднородного уравнения для функции $\sigma_1(t)$ имеет вид

$$\sigma_1(t) = \left(\sigma_1(-\infty) + (\gamma - 1) \int_{-\infty}^t \tau^{ij} e_{ij} |\theta|^{3\gamma} \exp \left(-\frac{\lambda k}{|\theta|} \right) d\theta \right) \exp \left(\frac{\lambda k}{|t|} \right). \quad (8)$$

Поскольку подинтегральная функция положительна, $\sigma_1(t) \rightarrow \infty$ при $|t| \rightarrow 0$ в случае $\lambda > 0$.

Вычисление полной энергии между центром и поршнем дает

$$E = K + U = \int_{V_0} \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \right) \rho_2 dV = \int_{V_0} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \rho_2 dV + \frac{4\pi\sigma_1(t)|v_p|^3}{3(\gamma - 1)|t|^{3(\gamma-1)}},$$

где V_0 — объем шара радиуса $|v_p|$. Как видно, в данной постановке задачи кинетическая энергия среды сохраняется и конечна, в то время как для ее внутренней энергии возможно добиться неограниченного роста за счет работы поршня. Для повышения U выгодны неотрицательные значения λ .

В случае степенного закона $\tau_j^i = 2\mu|e|^{2\beta-1}e_j^i$, рассмотренного в предыдущей главе, сходимость интеграла в формуле (8) для фиксированного момента $t < 0$ будет достигаться при условии $\beta > (3/2)\gamma$, то есть для твердеющих дилатантных жидкостей. Расходимости интеграла также можно избежать, если начальный момент времени взять равным $t = t_0 > -\infty$, однако тогда необходимо обеспечить задание начальной скорости газа, что усложняет физическую реализацию решения.

Для невязкого и нетеплопроводного газа $U \rightarrow \infty$ при $|t| \rightarrow 0$ всегда, поскольку

$$U = \frac{4\pi\lambda_0|v_p|^3}{3(\gamma - 1)|t|^{3(\gamma-1)}}.$$

В рамках полной сферической симметрии $\rho_2(v) = \rho_0 \exp(-\lambda v^2/6 + \alpha/v)$, где $v < 0$. При $\alpha > 0$ и $\lambda \geq 0$ вблизи центра имеется полость, характерные графики решения приведены на рисунке 7. Допускается следующая физическая интерпретация: в первом случае вблизи центра имеется пузырек, во втором — капля с пузырьком. При $\alpha = 0$ и $\lambda > 0$ имеется капля без пузырька.

При $\lambda > 0$ у плотности существует максимум в точке $v_* = -(3\alpha/\lambda)^{1/3}$. Таким образом, поршень лучше всего расположить именно в ней, то есть принять $v_p = v_*$, в этом случае поток тепла на поршне будет равен нулю.

Решение имеет достаточно «глубокую» и «широкую» полость вблизи центра, границу которой можно отсчитывать от точки перегиба. Например, при $\lambda = 0$ она расположена в $v_{**} = -\alpha/2$ со значением $\rho_2(v_{**})/\rho_0 = \exp(-2)$.

В несферической ситуации существует большое число вариантов неоднородности плотности, обеспечивающееся богатством гармонических функций. Анализ решения (7) при различных $\varphi(v_i)$ может быть проведен, например, в случае осевой симметрии и возмущении аргумента экспоненты решениями уравнения Лапласа первой и второй степени по $|\mathbf{v}|$, не изменяющими поведения плотности в центре и на бесконечности. Подобная картина приведена на верхней паре графиков рисунка 8, здесь более светлые области соответствуют меньшим величинам плотности. В результате сжатия при $|t| \rightarrow 0$ значение функции $\rho = |t|^{-3}\rho_2(v_i)$ будет расти, что можно интерпретировать как движение неоднородности плотности к центру, своего вида осесимметричные струйки.

В принципе, можно рассмотреть любые гармонические функции $\varphi(v_i)$, например, представляющие произвольное количество пузырьков с центрами в особых точках типа источника $\sum_k(-\alpha_k)/|\mathbf{v} - \mathbf{v}_k|$. На нижней паре графиков рисунка 8

изображены случаи системы двух пузырьков, равноудаленных от центра, и системы трех пузырьков, один из которых расположен в центре, а два остальных равноудалены от центра.

Данные исследования могут быть обобщены на действие однородных сил, зависящих от времени, типа сил инерции, а также на зависимость коэффициентов вязкости и температуропроводности от давления. Приведенный подход к построению точных решений применим и в релятивистской газовой динамике [Голубятников А. Н., Украинский Д. В. // Тезисы докладов конференции «СКТеММ-22»].

В **заклучении** подведены итоги проведенных исследований, сформулированы рекомендации по использованию результатов и их дальнейшей разработке.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Развита теория построения точных решений начальных и краевых задач одномерной нестационарной динамики совершенного газа с плоскими волнами при переменной удельной энтропии в виде разложений по степеням лагранжевых координат и специальных функций от времени. Представленный подход фактически подразумевает отсутствие образования ударных волн в процессе движения газа в трубе с двумя поршнями. Особое внимание уделено получению периодических по времени решений. Приводятся доказательства существования и глобальной аналитичности данных решений на основе метода С. В. Ковалевской и принципа мажорант.

2. В рамках каждой задачи выведены рекуррентные соотношения, которые позволяют определить неизвестные члены рядов по начальным или краевым условиям. С функциональной точки зрения коэффициенты разложений устроены достаточно сложно, однако для их точного вычисления можно воспользоваться средствами компьютерной алгебры. Таким образом решен ряд задач о периодических колебаниях пары поршней без учета и с учетом силы тяжести при заданных краевых условиях на одном из них и задача о сильном безударном сжатии газа.

3. Исследована теория преобразования полуугодографа — специального метода, позволяющего применить указанные выше идеи к решению задач с неоднородным распределением удельной энтропии при произвольном уравнении состояния газа. Метод апробирован на примере обобщения решения задачи об однородном разлете (сжатии) газа Ван-дер-Ваальса.

4. Изучен трехволновой резонанс в стационарной сверхзвуковой задаче газовой динамики. Выведены и решены в эллиптических функциях амплитудно-фазовые уравнения, определены необходимые для взаимодействия мод граничные условия. Приведена картина течения в плоском сверхзвуковом сопле с криволинейной формой верхней и нижней стенок.

5. Рассмотрена сферически-симметричная задача о динамике однородного газового пузырька в несжимаемой степенной неньютоновской жидкости. Решены задачи о сохранении при сжатии кинетической энергии жидкости и скорости вязкой диссипации. Исследована классическая задача о схлопывании вакуумной полости скачком внешнего давления, полностью изучен вопрос о концентрации энергии. Доказано, что для большей части дилатантных жидкостей концентрация

энергии невозможна. Для остальных моделей построена поверхность зависимости значений концентрации энергии от показателя реологического закона и безразмерного коэффициента консистенции, указана критическая кривая, разделяющая области с концентрацией энергии и без нее. Наибольшей концентрацией энергии и наименьшей вязкой диссипацией обладают модели, близкие к чисто пластической среде.

6. Представлено точное решение с однородной деформацией задачи о сжатии поршнем в точку нелинейно-вязкой теплопроводной среды с уравнениями состояния совершенного газа. Разделение переменных в уравнении притока тепла приводит к трехмерному уравнению Пуассона с постоянной правой частью для натурального логарифма плотности, что дает возможность рассмотрения произвольной системы пузырьков и струек внутри среды. При этом кинетическая энергия среды при сжатии сохраняется, а для внутренней энергии удается добиться неограниченного роста за счет работы поршня. Подробно исследованы случаи полной сферической симметрии и реологическая модель степенной жидкости. Указанный подход к построению точных решений применим и в релятивистской газовой динамике.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI

- 1.** *Ukrainskii D. V., Golubiatnikov A. N.* On the periodical solutions for single-dimensional gas dynamics // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – 1129 012035. – SJR (2021): 0.210. – DOI: 10.1088/1742-6596/1129/1/012035.
- 2.** *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* Трехволновой резонанс в двумерной стационарной задаче газовой динамики // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2019. – N 2. – С. 63–67. – SJR (2021): 0.223. – DOI: 10.3103/S0027133019020055.
- 3.** *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* О точных аналитических решениях уравнений газовой динамики // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2020. – N 3. – С. 141–150. – JCR (2021): 0.673, SJR (2021): 0.308. – DOI: 10.1134/S0015462820030040.
- 4.** *Украинский Д. В.* О точных решениях уравнений газовой динамики в рядах по лагранжевой координате и их вычислительная реализация // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2020. – N 6. – С. 139–150. – JCR (2021): 0.673, SJR (2021): 0.308. – DOI: 10.1134/S0015462820060129.
- 5.** *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* О динамике сферического пузырька в неньютоновских жидкостях // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2021. – N 4. – С. 52–62. – JCR (2021): 0.673, SJR (2021): 0.308. – DOI: 10.1134/S0015462821040078.
- 6.** *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* Одно точное решение об обжатии полости в вязкой теплопроводной сжимаемой среде // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2022. – N 4. – С. 77–85. – JCR (2021): 0.673, SJR (2021): 0.308. – DOI: 10.1134/S0015462822040024.

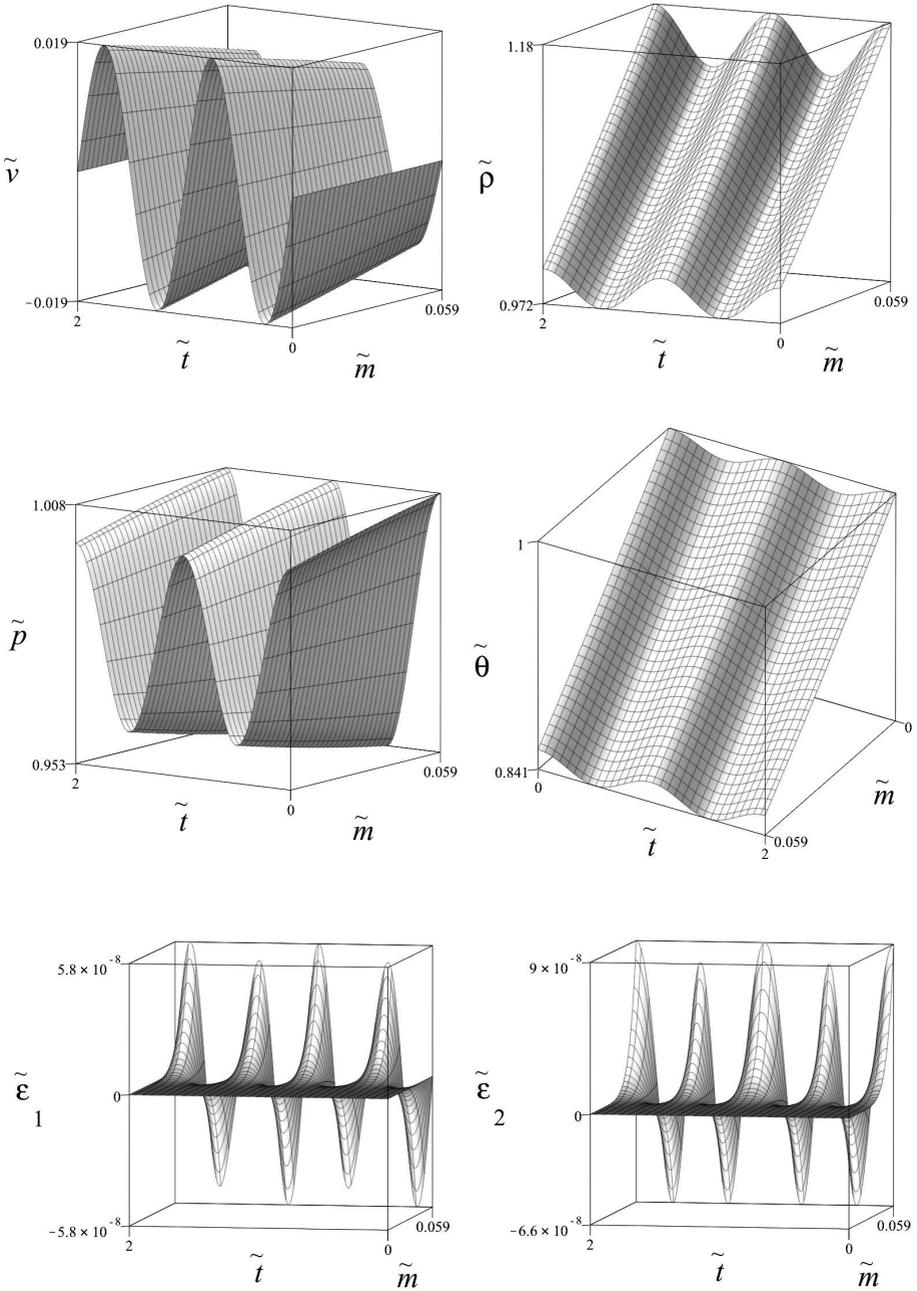


Рисунок 1 — Решение задачи о согласованном движении газа и одного из поршней.

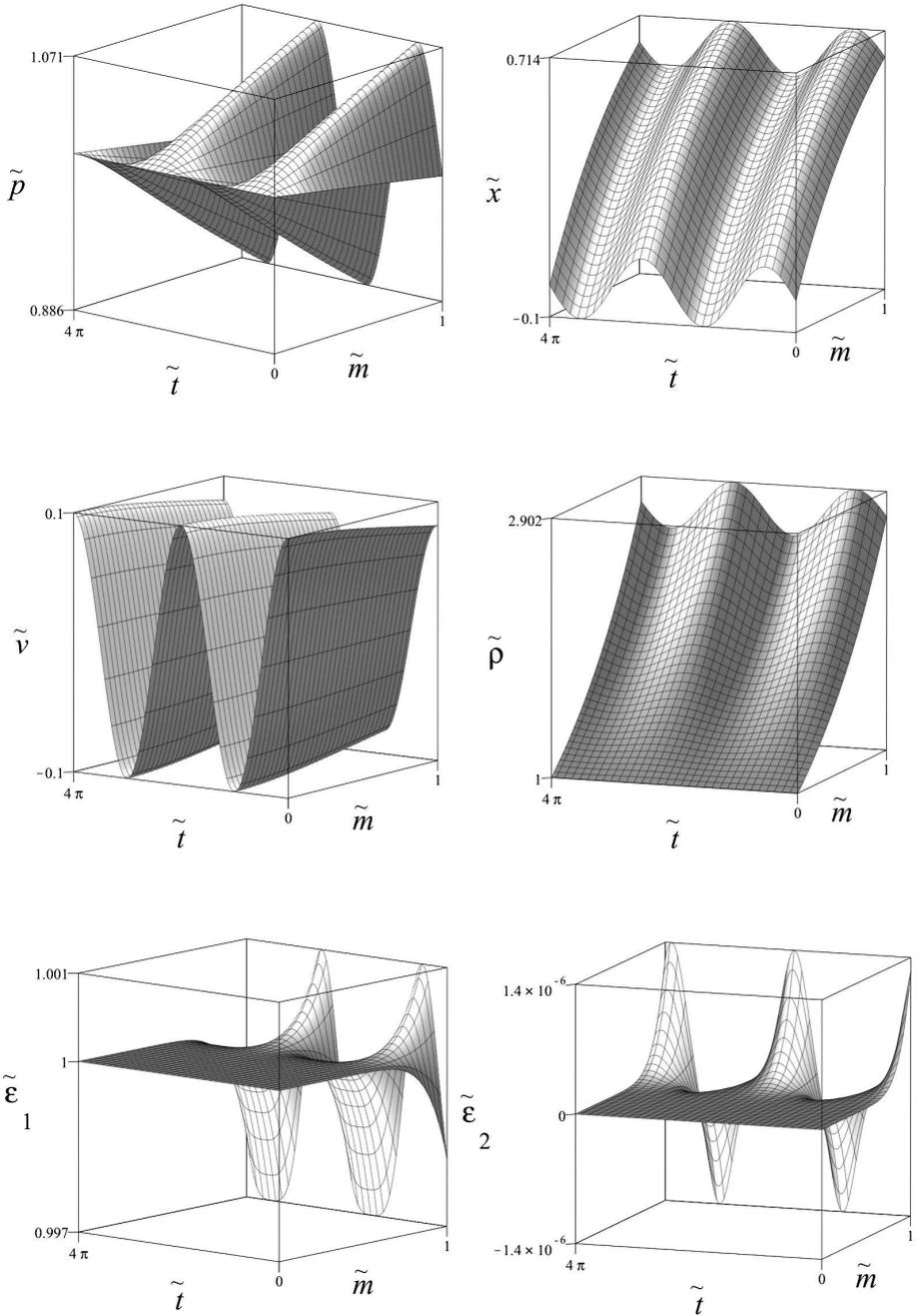


Рисунок 2 — Решение задачи о колебаниях поршней с учетом силы тяжести.

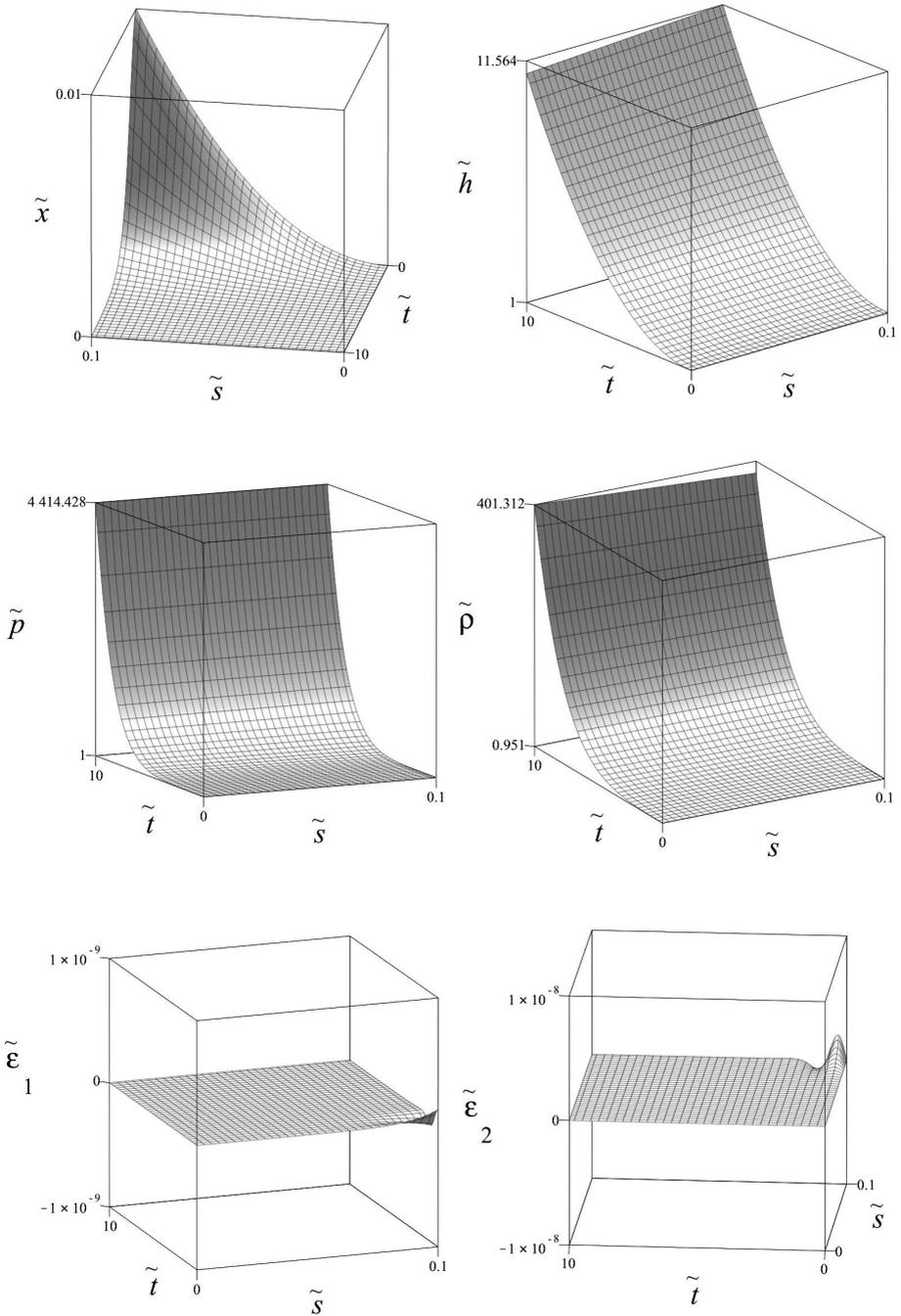


Рисунок 3 — Решение задачи о сильном сжатии газа.

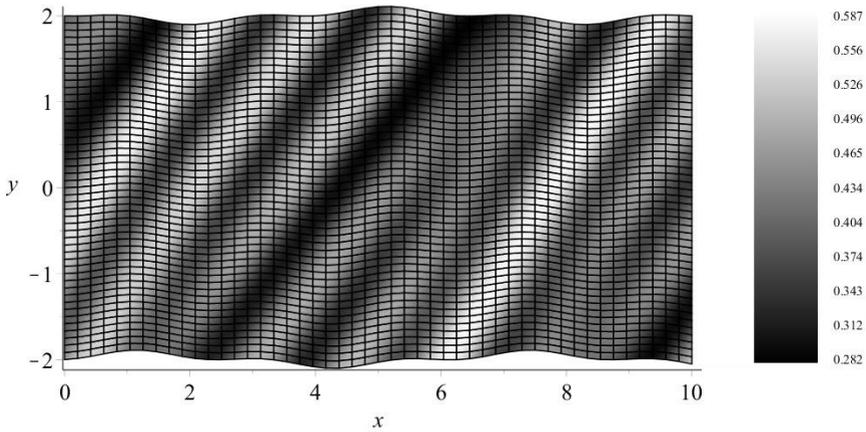


Рисунок 4 — Распределение плотности в плоском сверхзвуковом сопле с волнистыми стенками при трехволновом резонансе.

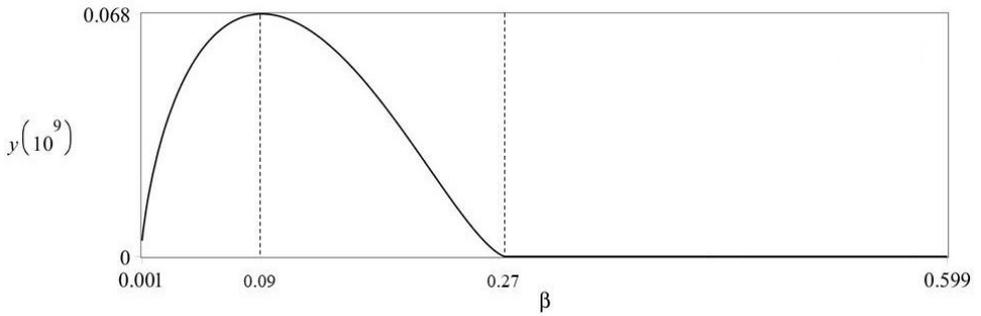


Рисунок 5 — Величина концентрации энергии при параметре $\sigma = 1$.

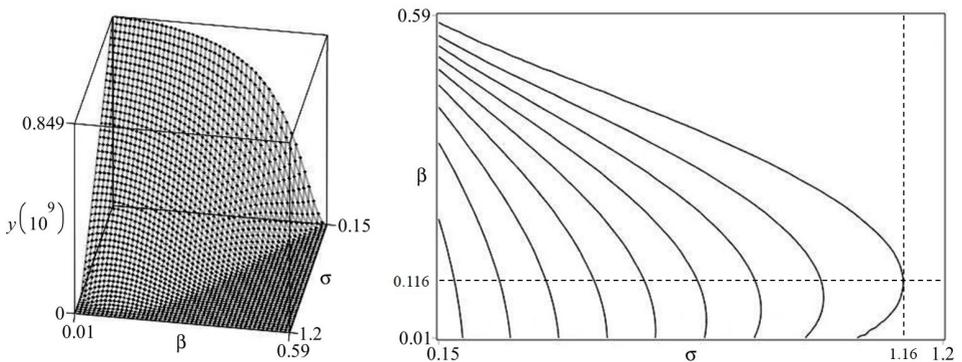


Рисунок 6 — Поверхность значений концентрации энергии как функция β и σ .

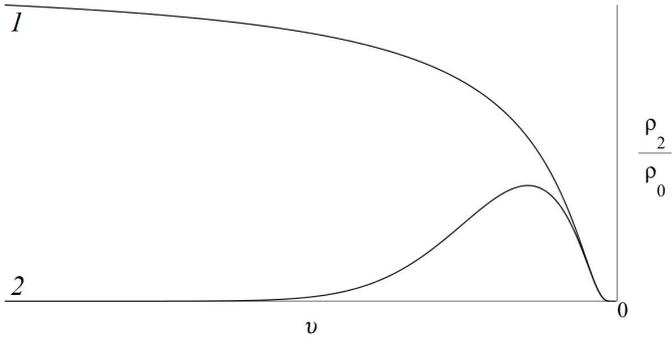


Рисунок 7 — Качественный график плотности при $\lambda = 0$, $\alpha = 1$ — кривая 1 и $\lambda = 1$, $\alpha = 1$ — кривая 2.

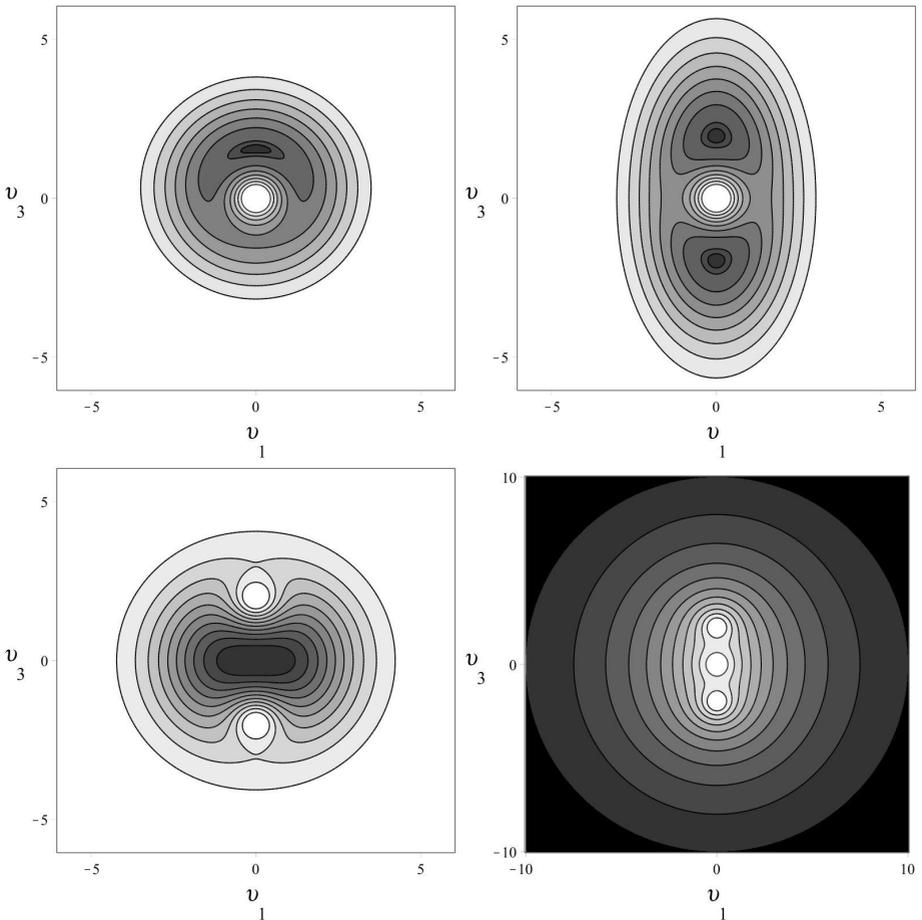


Рисунок 8 — Контурные графики плотности $\rho_2(v_i)$ на плоскости $v_2 = 0$, сжатие со струйками (верхняя пара) и системой пузырьков (нижняя пара) внутри среды.