ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук Галстяна Арсена Хачатуровича
на тему: «Проблема Ферма-Штейнера в гиперпространствах»
по специальности 1.1.3 – Геометрия и топология

В диссертационной работе А. Х. Галстяна изучается проблема Ферма – Штейнера в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами и разрабатывается соответствующая теория геометрической оптимизации, направленная на получение новых эффективных и конструктивных решений проблемы Ферма – Штейнера.

В общем виде эта проблема состоит в поиске всех точек метрического пространства, реализующих минимум суммы расстояний до некоторого заданного конечного подмножества этого пространства. Первое историческое упоминание о постановке такой задачи сформулировано Пьером Ферма: для заданных трех точек на плоскости найти такую четвертую точку, что если из неё провести три отрезка в данные три точки, то сумма этих трех отрезков даст наименьшую величину. Решением этой задачи занимались Э. Торричелли, Б. Кавальери, Ж. Бертран и др. В современной литературе эта точка называется точкой Ферма или точкой Торричелли. Значительно позднее, в 30-х годах XX столетия, в работе В. Ярника и О. Кесслера эта задача была обобщена на случай произвольного числа точек. А именно, они рассматривали задачу построения связных плоских графов наименьшей длины, проходящих через данное конечное множество точек плоскости. При этом оказалось, что бывает выгодно добавить еще несколько точек-развилок. Сегодня это обобщение известно как проблема Я. Штейнера, который, вообще говоря, решал другую задачу, являющуюся прямым обобщением задачи Ферма. Он искал в евклидовом пространстве одну такую точку, для которой сумма расстояний до заданных точек будет минимальной. Интерес к проблеме Штейнера вновь пробудился после публикации в 1968 году работы Е. Гилберта и Х. Поллака, в которой была высказана гипотеза об отношении

Штейнера, которое определяется как точная нижняя грань отношения длины минимального дерева Штейнера к длине минимального остовного дерева, взятой по всем конечным подмножествам этого пространства, содержащим хотя бы два элемента.

Для треугольника решение проблемы Ферма – Штейнера даёт сеть минимального веса, которая соединяет вершины этого треугольника. Однако, вообще говоря, оптимальная сеть, соединяющая исходное конечное подмножество, отличается от графа-звезды. И потому поиск таких сетей – это иная и зачастую более сложная задача. Как раз один из способов её упростить – зафиксировать тип соединения множества точек метрического пространства. Так возникла теория экстремальных параметрических сетей, весьма популярная на сегодняшний день. Диссертационная работа Галстяна относится именно к такой ветви развития в области оптимизационных задач. Поэтому задачи, рассматриваемые в диссертации, являются **актуальными**.

Основными результатами, содержащимися в диссертации, являются:

- критерий в терминах соответствий того, что произвольный компакт в нормированном пространстве является минимальным по включению компактом Штейнера в классе решений проблемы Ферма – Штейнера для границы, состоящей из конечных компактов;
- точные оценки сверху на количество точек в минимальных компактах Штейнера в случае границы из конечных компактов;
- достаточные условия для того, чтобы при переходе от границы из конечных компактов к границе из их выпуклых оболочек минимум суммы расстояний уменьшился. Одно из этих условий для случая пространств со строго выпуклой нормой предоставляет оценку снизу на уменьшение веса минимальной сети типа граф-звезда в случае такого перехода.

Коротко опишу **структуру** диссертации и важнейшие **новые результаты**, полученные автором.

Диссертационная работа Галстяна состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

Введение содержит краткий обзор истории задачи, подробную постановку проблемы Ферма – Штейнера в гиперпространствах, главные результаты проведённого исследования с обоснованием их важности и актуальности.

В первой главе приводятся необходимые определения и вспомогательные утверждения. В частности, в разделе 1.6 изучается кривая в гиперпространстве над произвольным конечномерным нормированным пространством, порождённая пересечением замкнутой окрестности переменного радиуса одного компакта с другим. В общем случае такая кривая может быть разрывной. Автор доказал непрерывную зависимость этой кривой от радиуса окрестности для непустых выпуклых компактов.

Вторая глава посвящена решению двух задач. Первая задача относится к вопросам геометрической оптимизации при решении проблемы Ферма – Штейнера в случае границ, состоящих из конечных множеств. Её решению посвящён раздел 2.1. Разработанная там техника оказалась практически полезной, что продемонстрировано в подразделе 2.1.7. Вторая задача посвящена вопросам устойчивости границ в проблеме Ферма – Штейнера. А. Х. Галстян сформулировал три различных достаточных условия неустойчивости, одно из которых содержит оценку снизу разности минимумов сумм расстояний в неустойчивом случае. В разделах 2.2 и 2.3 А. Х. Галстян разработал теорию, которая помогла вывести три перечисленных условия неустойчивости границы.

В **Заключении** подводятся итоги проделанного исследования.

В работе применяются методы метрической геометрии, топологии, теории графов и теории минимальных сетей.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в четырёх печатных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ, а также докладывались на семинарах и Всероссийских и Международных конференциях.

Диссертационная работа Галстяна представляет несомненный интерес для специалистов по метрической геометрии, теории вариационного исчисления и теории экстремальных сетей.

В диссертации получен ряд ярких, разнообразных и глубоких результатов, допускающих дальнейшее развитие.

Все утверждения диссертации, выносимые на защиту, **четко сформулированы и доказаны**. Формулировки теорем и выводы **достоверны** и обоснованы.

Содержание автореферата полностью **соответствует** содержанию диссертации.

Диссертационная работа производит хорошее впечатление. Однако не могу не сделать несколько замечаний, которые носят скорее редакционный характер.

1. Определения 2.1.2, 2.2.1 и 2.2.2 громоздки и в тексте работы нет никакого объяснения, для чего их приводить в столь общем виде. Необходимость общности этих определений становится ясна только при прочтении раздела 2.4.
2. В утверждениях 2.2 и 2.4 не поясняется, для какого вектора решения рассматривается особая точка. При этом в остальных утверждениях данного раздела это указывается, хотя везде рассматривается произвольный вектор решения.

Однако перечисленные недостатки не умаляют ценности диссертационной работы А. Х. Галстяна.

Диссертационная работа Арсена Хачатуровича Галстяна «Проблема Ферма-Штейнера в гиперпространствах» является законченной научноквалификационной работой и отвечает всем требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М. В. Ломоносова к кандидатским диссертациям, а её содержание полностью соответствует специальности 1.1.3 – Геометрия и топология (по физико-математическим наукам).

В диссертации А. Х. Галстяна также соблюдены критерии, перечисленные в пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова. При этом текст диссертационной работы оформлен согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Таким образом, Галстян Арсен Хачатурович несомненно заслуживает присвоения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 – Геометрия и топология.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры физико-математических
методов управления
отделения прикладной математики
физического факультета
ФГБОУ ВО «Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова»

Кушнер Алексей Гурьевич

подпись

18.10.2023

Дата подписания

Подпись Кушнера А.Г. заверяю

Ведущий специалист по кадрам

Королевская К.И.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Отдел кадров
МОСКВА

Контактные данные:

тел.: +7-(926)-154-29-51,

e-mail: kushner@physics.msu.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:
01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление; 01.01.04 – Геометрия и топология.

Адрес места работы:

119991, ГСП-1, Москва, ул. Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 2
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», Физический факультет.
Отделение прикладной математики. Кафедра физико-математических методов управления.

Тел.: +7-(926)-154-29-51;

e-mail: kushnera@mail.ru