

## ОТЗЫВ

на кандидатскую диссертацию Харчевой Ирины Сергеевны  
"Биллиардные книжки как способ реализации особенностей  
интегрируемых систем"

Диссертация посвящена актуальной проблеме на стыке топологии, геометрии, алгебры, математической физики и механики. Речь идет о реализации при помощи интегрируемых биллиардов особенностей (бифуркаций) и инвариантов интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, в частности, для конкретных известных систем геометрии, математической физики и механики. Известно, что невырожденные динамические интегрируемые системы общего типа с двумя степенями свободы классифицируются на изоэнергетических 3-многообразиях (с точностью до Лиувиллевой эквивалентности) инвариантами Фоменко-Цишанга, являющимися одномерными графами с некоторыми числовыми метками. В настоящее время усилиями многих специалистов такие инварианты вычислены для многих фундаментальных динамических систем в геометрии, физике, механике. Тем самым, сделаны важные шаги по созданию Атласа Интегрируемых Систем.

Далее, давно известно, что двумерные плоские биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик, являются интегрируемыми гамильтоновыми системами. Выяснилось, что с их помощью моделируются некоторые важные системы, например, геометрии и математической физики. Преимущество плоских биллиардов в том, что здесь поведение биллиардного шара (то есть его траекторий и отражений) на двумерной области позволяет наглядно представить сложные эффекты в динамических системах, "живущих" на трехмерных уровнях постоянной энергии. Эти 3-уровни снабжены т.н. слоением Лиувилля, где слоями общего положения являются двумерные торы Лиувилля. Эти торы являются замыканиями "типичных" интегральных траекторий исследуемой системы.

В то же время запас таких плоских биллиардов невелик. Дальнейшие продвижения стали возможны благодаря следующему обстоятельству. Несколько лет тому назад В.В.Ведюшкиной был обнаружен широкий и важный класс интегрируемых биллиардов, названных биллиардными книжками. Это двумерные локально плоские клеточные комплексы, по которым скользит биллиардный шар, подчиняясь некоторым естественным законам отражения-преломления на "корешках книжек", то есть на ребрах, "сделанных" из софокусных квадрик; вдоль ребер склеено несколько листов биллиарда. Этот класс существенно расширяет и обобщает известные ранее типы "геометрических и топологических биллиардов". С помощью таких биллиардных книжек были реализованы многочисленные новые серии сложных систем геометрии и физики. Все эти обстоятельства привели А.Т.Фоменко к следующей гипотезе.

Гипотеза (А.Т.Фоменко). Интегрируемыми биллиардными книжками можно реализовать (моделировать):

\* (Гипотеза А) любой "атом" или, другими словами, любую бифуркацию двумерных торов Лиувилля;

\* (Гипотеза В) любую грубую молекулу, или, другими словами, базу любого слоения Лиувилля;

\* (Гипотеза С) любую меченую молекулу, или, другими словами, любое слоение Лиувилля на изоэнергетическом 3-многообразии;

\* (Гипотеза D) любое трехмерное замкнутое изоэнергетическое многообразие любой невырожденной интегрируемой гамильтоновой системы.

Гипотеза D является частным случаем гипотезы С.

Перейдем теперь к сути диссертации Харчевой. В качестве первого нетривиального шага Харчева доказала важный результат: фазовое 4-пространство и изоэнергетическое 3-многообразие произвольной интегрируемой бильярдной книжки являются, соответственно, четырехмерными и трехмерными кусочно-гладкими топологическими многообразиями.

Оказалось далее, что первые два пункта гипотезы Фоменко верны. Первый пункт общей гипотезы — гипотеза А — доказан И.С.Харчевой совместно с В.В.Ведюшкиной, и изложен в главе 5 диссертации. То есть, любая невырожденная бифуркация двумерных торов Лиувилля реализуется в изоэнергетическом трехмерном многообразии подходящей бильярдной книжки.

Следующий шаг, а именно, утверждение о справедливости гипотезы В, также доказан И.С.Харчевой совместно с В.В.Ведюшкиной, и изложен в главе 6 диссертации. А именно, алгоритмически построена интегрируемая бильярдная книжка, которая содержит произвольную наперед заданную базу слоения Лиувилля.

Все результаты диссертации являются исключительно оригинальными, получены Харчевой самостоятельно или при равноценном вкладе с соавторами.

Результаты опубликованы в пяти научных статьях в ведущих математических журналах. Ввиду большого интереса математической общественности к результатам Харчевой, ее приглашали с докладами на многочисленные российские и международные математические конференции. В итоге, ею опубликовано 16 тезисов в трудах различных конференций.

По моему мнению, диссертация И.С.Харчевой является фундаментальным исследованием, внесшим весьма яркий вклад в общую теорию интегрируемых гамильтоновых систем; диссертация заведомо удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, и И.С.Харчева безусловно заслуживает звания кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель, академик, профессор, зав.кафедрой  
дифференциальной геометрии и приложений мех-матем-ф-та МГУ  
А.Т.Фоменко

22.03.2023