МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Лата Александр Николаевич

Производные структуры унарных алгебр

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел)

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических наук, профессор
$\boxed{\text{Артамонов Вячеслав Александрович}}$
доктор физико-математических наук, профессор
Зайцев Михаил Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор
Михалёв Александр Васильевич

Москва — 2022

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Работа посвящена изучению производных структур и объектов унарных алгебр. *Производной структурой* данной алгебры A (см. например, [1]) называется универсальная алгебра $D(A)$, однозначно определяемая по A и несущая в себе информацию о строении алгебры A. При этом элементы производных структур алгебры A называют *производными объектами* на A. К наиболее распространенным производным структурам алгебр относятся их решетки подалгебр $\mathrm{Sub}A$, конгруэнций $\mathrm{Con}A$, топологий $\mathrm{Top}A$, группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}A$, полугруппы эндоморфизмов $\mathrm{End}A$, решетки частичных порядков алгебр $\mathrm{Ord}A$, квазипорядков $\mathrm{Qord}A$ и другие.

Исследованиям производных структур и объектов алгебр посвящен ряд монографий: для линейных алгебр — Р. Бэр [2]; для групп — М. Судзуки [3], Б. И. Плоткин [4], П. А. Крылов, А. В. Михалёв и А. А. Туганбаев [5]; для полугрупп — Л. Н. Шеврин и А. Я. Овчинников [6], Ж. Лаллеман [7], Дж. М. Хауи [8]; для полигонов над моноидами — У. Кнауэр, М. Кильп и А. В. Михалёв [9], И. Б. Кожухов, А. В. Михалёв и А. В. Тищенко [10]; для решеток — Г. Гретцер [11], Г. Биркгоф [12], В. Н. Салий [13]; для универсальных алгебр — А. Г. Пинус [1], Х. Ленгер, И. Хайда и Г. Эйгенталер [14], Е. И. Бунина, А. В. Михалёв и А. Г. Пинус [15]; и другие.

Унарной алгеброй (*уноидом*) называется универсальная алгебра, все операции которой унарны. *Унаром* (*моноунарной алгеброй, 1-уноидом* и т.п.) называют унарную алгебру с одной унарной операцией.

В обзоре Л. А. Скорнякова [16] проанализированы работы, в которых рассматриваются различные аспекты изучения унаров, и ставится задача изучения производных структур и объектов унаров. Более поздний обзор В. К. Карташова [17], посвящен некоторым результатам и нерешенным задачам теории унарных алгебр.

Унарные алгебры имеют глубокие связи с другими разделами универсальной алгебры. В частности, любая унарная алгебра $A = \langle A, \Omega \rangle$ является S-полигоном, где S — полугруппа, порожденная операциями из Ω относительно композиции отображений. И, наоборот, всякий S-полигон A является унарной алгеброй, заданной на множестве A, где унарные операции — это умножение на элементы полугруппы S.

Классификации моноидов по свойствам категории полигонов над ним посвящены работы Л. А. Скорнякова [18—20], А. В. Михалёва [9; 21; 22], У. Кнауэра [9], М. Кильпа [9; 23], И. Б. Кожухова [24—26] и других авторов. Основные понятия и известные к 2000 г. результаты теории полигонов над полугруппами изложены в монографии [9]. И. Б. Кожухов и А. В Михалёв [27] представили обзор результатов, полученных в основном в последние два десятилетия в ряде направлений теории полигонов над полугруппами.

Отметим, что возможна интерпретация унарной алгебры как автомата без выхода [28—31]. Элементы алгебры при этом рассматриваются в качестве внутренних состояний такого автомата, а операции – как входные сигналы.

Унарные алгебры используются при изучении других алгебраических систем. Г. Гретцер и Е. Т. Шмидт [32] доказали, что для любой универсальной алгебры A существует унарная алгебра B такая, что $\mathrm{Con}A \cong \mathrm{Con}B$. В отличие от произвольных универсальных алгебр, где конгруэнции подалгебры могут не продолжаться до конгруэнций алгебры, конгруэнции подалгебры унарной алгебры всегда продолжаются до конгруэнций унарной алгебры, и, вообще, решетка конгруэнций подалгебры унарной алгебры изоморфно вкладывается в решетку конгруэнций унарной алгебры [10, с. 21].

Диссертационная работа посвящена изучению решеток подалгебр (подалгебр) и решеток конгруэнций (конгруэнций) унарных алгебр и алгебр с оператором.

Алгеброй с операторами (см., например, [33]) называется универсальная алгебра с дополнительной системой операторов — унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно основных операций (перестановочных с основными операциями). Если f— унарная операция из сигнатуры Ω, то *унарным редуктом* алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ называется унар $\langle A, f\rangle$.

Остановимся, кратко, на результатах указанных направлений.

Ж. К. Варле [34] нашел условия коммутативности моноида эндоморфизмов унаров с некоторыми ограничениями, а также описаны вполне инвариантные (вполне характеристические, то есть сохраняющиеся при эндоморфизме) конгруэнции. Дж. Берман [35] описал атомы в решетках конгруэнций унаров, а также унары с полумодулярной сверху, либо геометрической (в смысле Биркгофа) решеткой конгруэнций. Д. П. Егорова и Л. А. Скорняков [36] охарактеризовали унары, решетка конгруэнций которых является булевой, либо решеткой с дополнениями. А. П. Бощенко [37; 38] описал унары, решетка конгруэнций которых является решеткой с псевдодополнениями и с копсевдодополнениями соответственно. А. В. Карташова [39] доказала, что конечность решетки конгруэнций (топологий) коммутативной унарной алгебры равносильна конечности самой алгебры. Также приведены примеры бесконечных некоммутативных унарных алгебр с конечными решетками конгруэнций и топологий. Ею в работе [40] охарактеризован класс всех коммутативных унарных алгебр, решетка конгруэнций которых линейно упорядочена. В. К. Карташов [41] показал, что для произвольных коммутативных унарных алгебр, сигнатура которых содержит более одной операции, проблема описания решетки конгруэнций, обладающей заданным свойством, является гораздо более сложной. В этой работе приводится несколько необходимых условий дистрибутивности и модулярности таких решеток. Доказано также, что решетка всех подмножеств любого множества изоморфна решетке конгруэнций подходящей связной коммутативной унарной алгебры. Д. О. Птаховым и А. А. Степановой [42] охарактеризованы несвязные полигоны с модулярной или дистрибутивной решеткой конгруэнций. А. Р. Халиуллина [43; 44] получила полное описание конгруэнций полигонов над группами и полигонов над полугруппами правых нулей. Ею в работе [45] получены необходимые и достаточные условия модулярности и дистрибутивности решётки конгруэнций полигона над полугруппой правых или левых нулей, а также условия, при которых решётка конгруэнций является цепью. Кроме того, описаны конгруэнции произвольного полигона над полугруппой левых нулей. В работах А. А. Степановой и М. С. Казака [46; 47] приводится описание полигонов над линейно упорядоченными моноидами с линейной решеткой конгруэнций и полигонов над вполне упорядоченными моноидами, решетки конгруэнций которых дистрибутивны или модулярны. А. А. Степанова и С. Г. Чеканов [48] описали конгруэнц-перестановочные полигоны над моноидом S в случае, когда S — коммутативный моноид или группа.

Следует отметить, что описание подпрямо неразложимых алгебр равносильно описанию алгебр, решетки конгруэнций которых имеют наименьшую конгруэнцию, отличную от отношения равенства (см. например, [10, с. 29]). Г. Х. Венцель[49] описал подпрямо неразложимые унары. Е. Н. Ройз [50] доказал, что подпрямо неразложимые полигоны имеют не более двух нулей. Получение характеристик для подпрямо неразложимых унарных алгебр, имеющих неодноэлементное множество сигнатурных операций, — намного более сложная задача [51; 52], решаемая для конкретных видов алгебр [28; 29; 53; 54]. И. Б. Кожухов и А. Р. Халиуллина [55, теорема 6] охарактеризовали подпрямо неразложимые полигоны над группами. Также ими [56] были описали подпрямо неразложимые полигоны с двумя нулями и свели характеризацию полигона без нуля или с одним нулём к строению его наименьшего нетривиального подполигона. В этой же работе были описаны подпрямо неразложимые полигоны над прямоугольными связками (т.е. прямыми произведениями полугрупп правых и левых нулей).

Интерес исследователей к тернарной мальцевской операции обусловлен ее ролью в изучении связей решеток конгруэнций алгебр данного многообразия с термальными операциями на этих алгебрах. Начало этих исследований было положено работой А. И. Мальцева [57], в которой доказано, что многообразие является конгруэнц-перестановочным тогда и только тогда, когда существует тернарный терм p от основных операций, такой, что на данном многообразии выполнены тождества

$$p(x,x,y) = p(y,x,x) = y. \tag{1}$$

Эти идеи получили развитие в работах А. Дея [58], Б. Йонссона [59], О. Ф. Пиксли [60], в которых найдены аналогичные условия, характеризующие конгруэнц-модулярные, конгруэнц-дистрибутивные и арифметические многообразия.

В монографии Д. Хобби и Р. Маккензи [61, с. 42] отмечают, что в теории конгруэнций часто удобнее работать с унарными алгебрами. Поскольку основные операции алгебры A определяют множество $\mathrm{Pol}_1 A$ всех унарных операций клона $\mathrm{Pol} A$, а этот моноид определяет решетку конгруэнции алгебры A.

В работе В. К. Карташова [62] вводится понятие *унара с мальцевской операцией*, как алгебры с одной тернарной операцией p, для которой выполняются тождества Мальцева (1), и одной унарной операцией, перестановочной с p. В указанной работе показано, что на любом унаре $\langle A, f\rangle$ можно задать тернарную операцию p так, что алгебра $\langle A, p, f\rangle$ становится унаром с мальцевской операцией, а унарная операция — ее эндоморфизмом. Эта алгебра определяется следующим образом.

Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Для любого элемента x унара $\langle A, f\rangle$ через $f^n(x)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу x; при этом $f^0(x) = x$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, и $k(x, y) = \min M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \varnothing$ и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \varnothing$. Положим далее

$$p(x, y, z) \overset{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) \leqslant k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) > k(y,z). \end{cases} \tag{2}$$

С помощью конструкции предложенной В. К. Карташовым в [62], В. Л. Усольцевым в [63] на произвольном унаре была определена операция меньшинства $s(x,y,z)$, называемая симметрической, и также перестановочная с унарной.

$$s(x,y,z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) < k(y,z); \\ y, & \text{если } k(x,y) = k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) > k(y,z). \end{cases} \tag{3}$$

Им в работе [64] аналогичным образом на произвольном унаре были определены тернарная операция $w(x,y,z)$ и операция большинства $m(x,y,z)$ перестановочные с унарной.

$$w(x,y,z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) > k(y,z); \\ y, & \text{если } k(x,y) = k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) < k(y,z). \end{cases} \tag{4}$$

$$m(x,y,z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) \geqslant k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) < k(y,z). \end{cases} \tag{5}$$

Обозначим алгебру $\langle A, d, f\rangle$ с оператором f, где $d(x_1,x_2,x_3)$ — операция, определенная по одному из правил (2)–(5) через М-алгебру $\langle A, d, f\rangle$.

В. Л. Усольцев [65] описал подпрямо неразложимые алгебры $\langle A, p, f\rangle$, а также такие, решетка конгруэнций которых является цепью. Им в работе [66] было получено описание строения атомов в решетках $\mathrm{Con}\langle A, m, f\rangle$, там же были описаны подпрямо неразложимые алгебры из данного класса и алгебры, имеющие точечную решетку конгруэнций. В. Л. Усольцев [64; 67; 68] описал простые, псевдопростые и строго простые М-алгебры $\langle A, d, f\rangle$.

Объектом исследования являются унарные алгебры и М-алгебры $\langle A, d, f\rangle$.

Предметом исследования являются решетки подалгебр (подалгебры) и решетки конгруэнций (конгруэнции) унарных алгебр и М-алгебр $\langle A, d, f\rangle$.

Целью данной работы является изучение производных структур и объектов унарных алгебр.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Описать коатомы, дополнения и копсевдодополнения в решетках конгруэнций М-алгебр $\langle A, d, f\rangle$.
2. Описать М-алгебры $\langle A, d, f\rangle$, решетки конгруэнций которых являются решетками с дополнениями, с копсевдодополнениями или геометрическими решетками.
3. Исследовать конгруэнц-когерентные, слабо и локально когерентные М-алгебры $\langle A, d, f\rangle$.
4. Описать унарные алгебры без собственных подалгебр.
5. Исследовать изотопию унарных алгебр.

Научная новизна: Полученные результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационное исследование носит теоретический характер. Результаты, изложенные в работе, могут быть использованы для исследований, связанных с изучением производных структур алгебраических систем, в частности производных структур алгебр с операторами, а также при чтении специальных курсов в высших учебных заведениях для студентов математических специальностей.

Методология и методы исследования. В работе использовались методы универсальной алгебры, теории решеток и теории графов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Доказательство факта отсутствия коатомов или единственности коатома в решетке конгруэнций М-алгебр $\langle A, d, f\rangle$ (теорема 2.1.9), а также описание коатомов (следствие 2.1.10).
2. Описание решеток конгруэнций М-алгебр $\langle A, d, f\rangle$ с дополнениями или относительными дополнениями (теорема 2.2.1), а также факта отсутствия дополнений у нетривиальных конгруэнций М-алгебр $\langle A, d, f\rangle$ (следствие 2.2.2).
3. Доказательство того, что любая решетка конгруэнций М-алгебр $\langle A, d, f\rangle$ является решеткой с копсевдодополнениями (предло-

жение 2.2.4), а также описание копсевдодополнений в решетке конгруэнций алгебр из данного класса (следствие 2.2.5).

4. Описание конгруэнц-когерентных унаров (теорема 3.1.14). Описание конгруэнц-когерентных (теорема 3.3.1), слабо и локально когерентных (теорема 3.3.4 и теорема 3.3.5) М-алгебр $\langle A, d, f \rangle$.
5. Найдены эквивалентные условия отсутствия подалгебр для унарной алгебры (теорема 4.1.1).

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью математических доказательств, апробацией на международных конференциях и специальных семинарах кафедр высшей алгебры и МаТИС, а также рецензированием публикаций в журналах.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на:

– XIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова (Тула, 2015);
– Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии, посвященной юбилеям выдающихся профессоров Казанского университета, математиков Петра Алексеевича (1895-1944) и Александра Петровича (1926-1998) Широковых (Казань, 2016);
– XIV Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященной 70-летию со дня рождения Г. И. Архипова и С. М. Воронина (Саратов, 2016);
– научно-исследовательском семинаре по алгебре под руководством профессора В. А. Артамонова, профессора Е. И. Буниной, профессора А. Э. Гутермана, профессора М. В. Зайцева, профессора А. В. Михалева, профессора А. Ю. Ольшанского (механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2017, 2019, 2020);

– всероссийской конференции «Алгебра и теория алгоритмов», посвященной 100-летию факультета математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета (Иваново, 2018);
– международной алгебраической конференции, посвящённой 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша (механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2018);
– на семинаре «Кибернетика и информатика» под руководством профессора В. Б. Кудрявцева, с.н.с. А. В. Галатенко (механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2018);
– международной конференции, посвящённой 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ, 2019;
– международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (2017, 2019, 2020);
– XX Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной 130-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова (Тула, 2021).

Личный вклад. В диссертации изложены результаты, полученные лично автором под руководством профессора В. А. Артамонова.

Публикации. Соискатель имеет 11 опубликованных работ, в том числе по теме диссертации 11 работ, из них 3 статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (01.01.06 — «Математическая логика, алгебра и теория чисел»). Работ, написанных в соавторстве, нет. Список работ приведен в конце диссертации.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 78 страниц. Список литературы содержит 122 наименования.

Утверждения нумеруются тремя цифрами: первая обозначает номер главы, вторая – номер параграфа в главе, а третья – номер утверждения в параграфе. Нумерация выносных формул двойная: первая цифра обозначает номер главы, а вторая – номер формулы в главе.

Краткое содержание диссертации

Во введении дается обзор результатов по исследуемым проблемам и кратко формулируются основные результаты диссертации.

Первая глава диссертации посвящена необходимым определениям и результатам из теории унарных алгебр, вводятся обозначения, используемые далее в работе.

В разделе 1.1 приводятся необходимые сведения из теории унарых алгебр.

В разделе 1.2 приведены основные определения и утверждения, касающиеся конгруэнций универсальных алгебр.

В разделе 1.3 изложены основные определения и обозначения, относящиеся к унарам с мальцевской операцией. Здесь доказывается ряд утверждений, используемых в последующих главах для получения основных результатов.

Вторая глава диссертации посвящена изучению решеток конгруэнций М-алгебр $\langle A, d, f\rangle$.

В разделе 2.1 приведено описание строения коатомов в решетках конгруэнций данных алгебр.

Теорема 2.1.9. *Пусть* $\langle A, d, f\rangle$ *– алгебра с оператором* f*, где* $d(x_1,x_2,x_3)$*— операция, определенная по одному из правил* (2)–(5)*. Решетка* $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ *не имеет коатомов тогда и только тогда, когда унар* $\langle A, f\rangle$ *связен, содержит одноэлементный подунар и имеет бесконечную глубину. В других случаях* $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ *имеет единственный коатом.*

Напомним, через σ_n, где $n \in \mathbb{N}$, обозначается $\mathrm{Ker} f^n$; при этом полагаем $\sigma_0 = \triangle$. Через σ обозначается конгруэнция любой алгебры $\langle A, \Omega \rangle$ с оператором $f \in \Omega$ определенная по правилу [67]: $x \sigma y \Leftrightarrow \exists n > 0 \; (f^n(x) = f^n(y))$.

Следствие 2.1.10. *Пусть решетка* $\mathrm{Con}\langle A, d, f \rangle$ *имеет единственный коатом. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Если* $\langle A, f \rangle$ *— связный унар глубины 1, имеющий одноэлементный подунар, то коатомом решетки* $\mathrm{Con}\langle A, d, f \rangle$ *является конгруэнция* $\triangle$*;*
2. *Если* $\langle A, f \rangle$ *— связный унар конечной глубины* $m > 1$*, имеющий одноэлементный подунар, то коатомом решетки является конгруэнция* σ_{m-1}*;*
3. *В оставшихся случаях коатомом решетки является конгруэнция* σ*.*

В разделе 2.2 приводится описание М-алгебр $\langle A, d, f \rangle$, решетки конгруэнций которых являются решетками с дополнениями, с относительными дополнениями, с копсевдодополнениями или геометрическими. Дается описание дополнений и копсевдодополнений в решетках конгруэнций рассматриваемых алгебр.

Теорема 2.2.1. *Пусть* $\langle A, d, f \rangle$ *– алгебра с оператором* f*, где* $d(x_1,x_2,x_3)$*-операция, определенная по одному из правил* (2) — (5)*. Следующие утверждения равносильны:*

1. $\mathrm{Con}\langle A, d, f \rangle$ *— решетка с дополнениями;*
2. $\mathrm{Con}\langle A, d, f \rangle$ *— решетка с относительными дополнениями;*
3. *алгебра* $\langle A, d, f \rangle$ *конгруэнц-проста;*
4. *либо операция* f *инъективна, либо унар* $\langle A, f \rangle$ *содержит такой элемент* a*, что* $f(x) = a$ *для любого* $x \in A$*.*

Следствие 2.2.2. *Любая нетривиальная конгруэнция алгебры* $\langle A, d, f \rangle$ *не имеет дополнения.*

Предложение 2.2.4. *Пусть* $\langle A, d, f\rangle$ *– алгебра с оператором* f*, где* $d(x_1,x_2,x_3)$ *— операция, определенная по одному из правил* (2)–(5)*. Решетка* $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ *является решеткой с копсевдодополнениями.*

Следствие 2.2.5. *Пусть* $a \in \mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$*. Тогда копсевдодополнение*

$$a^+ = \begin{cases} \triangle, & \text{если } a = \bigtriangledown; \\ \bigtriangledown, & \text{если } a \neq \bigtriangledown. \end{cases}$$

Предложение 2.2.6. *Решетка* $\mathrm{Con}\langle A, p, f\rangle$ *является геометрической тогда и только тогда, когда она точечная.*

Третья глава диссертации посвящена изучению конгруэнц–когерентности алгебр и ее модификациям.

В раздeле 3.1 дается определение конгруэнц–когерентности алгебры, изложен краткий обзор вопроса.

Напомним, что универсальная алгебра A *конгруэнц–когерентна*, если любая подалгебра в A, содержащая класс произвольной конгруэнции в A, является объединением классов этой конгруэнции.

Предложение 3.1.12. *Пусть* $\langle A, \Omega\rangle$ *— произвольная алгебра с оператором* $f \in \Omega$*. Если* $\langle A, f\rangle \cong C_n^0$*, или* $\langle A, f\rangle \cong C_n^0 + C_m^0$*, или* $\langle A, f\rangle \cong C_1^t$*, где* $n, m \in \mathbb{N}$ *и* $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$*, то алгебра* $\langle A, \Omega\rangle$ *является конгруэнц–когерентной*

Для унаров получено следующее утверждение.

Теорема 3.1.14. *Унар* $\langle A, f\rangle$ *является конгруэнц–когерентным тогда и только тогда, когда* $\langle A, f\rangle$ *– один из унаров следующего вида:*

1. C_n^0, $n \in \mathbb{N}$;
2. $C_n^0 + C_m^0$ *для некоторых* $n,m \in \mathbb{N}$;
3. C_1^t, $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

В разделе 3.2 приводятся определения локальной и слабой когерентности алгебры. Доказываются вспомогательные результаты.

Напомним, что универсальная алгебра A, имеющая нульарную операцию 0, называется *слабо когерентной*, если для любой подалгебры B алгебры A и любой конгруэнции θ алгебры A условие $[0]\theta \subseteq B$ влечет $[x]\theta \subseteq B$ для любого $x \in B$.

Универсальная алгебра A, имеющая нульарную операцию 0, называется *локально когерентной*, если для любой подалгебры B алгебры A и любой конгруэнции θ алгебры A из того, что $[x]\theta \subseteq B$ для некоторого $x \in B$ следует $[0]\theta \subseteq B$.

Чтобы алгебра $\langle A, \Omega \rangle$, с нульарной операцией 0 была алгеброй с оператором $f \in \Omega$, необходимо и достаточно, чтобы $f(0) = 0$. Нульарная операция 0, заданная на унаре $\langle A, f \rangle$ условием $f(0) = 0$ часто рассматривается в теории унаров. В этом случае алгебру $\langle A, f, 0 \rangle$ называют *унаром с нулем.*

В разделе 3.3 доказываются основные результаты исследования конгруэнц–когерентности М-алгебр $\langle A, d, f \rangle$.

Теорема 3.3.1. *Пусть $\langle A, d, f \rangle$ – алгебра с оператором f, где $d(x_1,x_2,x_3)$ – операция, определенная по одному из правил* (2)–(5). *Алгебра $\langle A, d, f \rangle$ является конгруэнц–когерентной тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

1. *операция f на A является инъективной;*
2. *унар $\langle A, f \rangle$ содержит такой элемент a, что $f(x) = a$ для любого $x \in A$, где $|A| \geqslant 3$;*
3. *унар $\langle A, f \rangle$ изоморфен C_1^t для некоторого $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

Теорема 3.3.4. *Пусть $\langle A, d, f, 0 \rangle$ — алгебра с оператором f, где $d(x_1,x_2,x_3)$ – операция, определенная по одному из правил* (2)–(5), *и нульарной операцией* 0, *для которой $f(0) = 0$. Алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ является слабо когерентной тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f \rangle$ является одним из следующих:*

1. *произвольный унар с инъективной операцией;*
2. *связный унар, который не содержит узловых элементов, за исключением, может быть, элемента* 0;

3. *сумма унаров из пунктов 1 и 2.*

Теорема 3.3.5. *Пусть* $\langle A, d, f, 0\rangle$ *— алгебра с оператором* f*, где* $d(x_1,x_2,x_3)$ *– операция, определенная по одному из правил* (2)–(5)*, и нульарной операцией* 0*, для которой* $f(0) = 0$*. Алгебра* $\langle A, d, f, 0\rangle$ *является локально когерентной тогда и только тогда, когда унар* $\langle A, f\rangle$ *является одним из следующих:*

1. *произвольный унар, содержащий одноэлементную компоненту связности, порожденную* 0*;*
2. *унар, в котором для всех* $x \in A$ *выполняется* $f(x) = 0$*, где* $|A| \geqslant 3$*;*
3. *унар* $C_1^t, t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$*;*
4. *связный унар конечной глубины* $t(A)$*, в котором существует единственный узловой элемент* $a \neq 0$*, глубина которого равна* $t(A) - 1$*, и других узловых элементов нет.*

Четвертая глава диссертации посвящена алгебрам без собственных подалгебр. Дается краткий обзор результатов.

В разделе 4.1 приводится результат исследований унарных алгебр без собственных подалгебр.

Теорема 4.1.1. *Пусть* $A = \langle A, \Omega\rangle$ *— унарная алгебра,* $\mathrm{Graph}(A)$ *— граф унарной алгебры, а* X *— полугруппа, порожденная операциями из* Ω *относительно композиции отображений. Следующие условия эквивалентны:*

1. *алгебра* A *не имеет собственных подалгебр;*
2. *псевдоорграф* $\mathrm{Graph}(A)$ *сильно связный;*
3. *полугруппа* X *действует транзитивно на множестве* A*;*
4. *алгебра* A *является сильно связной.*

Следствие 4.1.2. *Пусть* $A = \langle A, \Omega\rangle$ *— унарная алгебра,* $\mathrm{Graph}(A)$ *— граф унарной алгебры. Вершины графа* $\mathrm{Graph}(A)$*, из которых нет пути в некоторую другую вершину, являются порождающими собственных подалгебр алгебры* A*.*

В разделе 4.2 описывается алгоритм, который проверяет отсутствие подалгебр или находит собственные подалгебры и порождающие их элементы унарной алгебры, носитель и сигнатура которой конечны.

В разделе 4.3 вводится определение и рассматривается вопрос изотопии унарных алгебр.

Определение 4.3.1. *Унарная алгебра с системой операций S на непустом множестве A изотопна унарой алгебре с системой унарных операций S', если имеются перестановки π,σ на A, такие, что отображение $f \to \sigma f \pi$ задает биекцию между S и S'.*

Предложение 4.3.2. *Пусть $A = \langle A, \Omega \rangle$ — унарная алгебра, носитель и сигнатура которой конечны. Если Ω содержит хотя бы одну инъективную операцию, то A изотопна алгебре без собственных подалгебр.*

Для унаров получено следующее утверждение.

Теорема 4.3.3. *Конечный унар $\langle A, f \rangle$ изотопен унару без собственных подунаров тогда и только тогда, когда операция f – инъективна.*

В **заключении** приведены основные результаты работы:

1. Описаны коатомы, дополнения и копсевдодополнения в решетках конгруэнций М-алгебр $\langle A, d, f \rangle$.
2. Описаны М-алгебры $\langle A, d, f \rangle$, решетки конгруэнций которых являются решетками с дополнениями, с копсевдодополнениями или геометрическими.
3. Описаны конгруэнц-когерентные унары, а также конгруэнц-когерентные, слабо и локально когерентных М-алгебр $\langle A, d, f \rangle$.
4. Найдены эквивалентные условия отсутствия подалгебр для унарной алгебры. Описаны конечные унары изотопные унару без собственных подунаров.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю В. А. Артамонову за постановку задач, их плодотворное обсуждение и постоянное внимание к работе. Автор благодарен своим научным руководителям А. В. Михалёву и М. В. Зайцеву конструктивную критику, плодотворные обсуждения, всестороннюю поддержку и внимание к работе. Автор признателен всему коллективу кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ за доброжелательную атмосферу.

Автор признателен А. В. Галатенко за ценные комментарии и полезные обсуждения, а также всему коллективу кафедры МаТИС механико-математического факультета МГУ за теплую атмосферу.

Хочется особо поблагодарить своего первого научного руководителя В. Л. Усольцева за знакомство с универсальной алгеброй, что впоследствии пробудило в авторе интерес к занятию алгеброй. Искренняя благодарность руководству и всему коллективу факультета математики, информатики и физики Волгоградского государственного социально–педагогического университета за помощь, внимание и создание комфортной обстановки для занятий научной деятельностью.

Глава 1. Основные определения и конструкции

В данной главе приводятся необходимые определения и результаты из теории унарных алгебр, вводятся обозначения, используемые далее в работе. Изложение общей теории алгебраических систем можно найти в [69], [70], [71], теории многообразий алгебр — в [72].

В третьем параграфе данной главы даются основные определения и обозначения, относящиеся к унарам с мальцевской операцией. Здесь доказывается ряд утверждений, используемых в последующих главах для получения основных результатов.

1.1 Унарные алгебры

Унарная алгебра называется *связной*, если пересечение любых двух ее однопорожденных подалгебр непусто.

Унарная алгебра называется *сильно связной*, если она порождается любым своим элементом.

Подалгебра алгебры называется *собственной*, если она отлична от самой алгебры.

Ориентированный псевдограф (или *псевдоорграф*) $G = (V, E)$ (см. [73; 74]), определяется непустым множеством V и набором E упорядоченных пар элементов из V. Элементы множества V называются *вершинами*, а элементы набора E – *дугами* (или *ориентированными ребрами*) ориентированного псевдографа $G = (V, E)$.

В наборе E могут встречаться пары вида (v,v), называемые *петлями*, и одинаковые пары, называемые *кратными* (или *параллельными*) *дугами*. Пары (u,v) и (v,u) считаются одинаковыми лишь в том случае, когда $u = v$.

Таким образом, *псевдоорграф* это ориентированный граф, который содержит кратные ребра и петли.

Путем ориентированного псевдографа будем называть последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей.

Ориентированный псевдограф называется *сильно связным* или *сильным* (strongly connected), если для каждой пары различных вершин v и w существует путь из v в w и из w в v.

Пусть $A = \langle A, \Omega\rangle$ — унарная алгебра. Через $\mathrm{Graph}(A)$ обозначим граф унарной алгебры A. Граф $\mathrm{Graph}(A)$ состоит из множества вершин A и множества помеченных дуг — всевозможных упорядоченных троек $(a,f(a),f)$, где $a \in A$ и $f \in \Omega$. Заметим, что в данном случае граф унарной алгебры является ориентированным псевдографом с реберной раскраской. Вершины графа, как обычно, изображаются точками на плоскости, а дуга $(a,f(a),f)$ — линией, направленной от a к $f(a)$ и помеченной функциональным символом f.

Алгеброй с операторами (см., например, [33]) называется универсальная алгебра с дополнительной системой операторов — унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно основных операций (перестановочных с основными операциями). Если f— унарная операция из сигнатуры Ω, то *унарным редуктом* алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ называется унар $\langle A, f\rangle$.

Через $\mathbb{N}$ обозначается множество натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Для любого элемента x унара $\langle A, f\rangle$ через $f^n(x)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу x; при этом $f^0(x) = x$.

Унар, порожденный одним элементом a, обозначается через $\langle a\rangle$. Через F_1 обозначается свободный однопорожденный унар. *Цепью* C^∞ называется унар, изоморфный унару $\langle \mathbb{Z}, f\rangle$, где $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел и $f(n) = n + 1$ для любого $n \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный унар. Далее для любых целых чисел $h > 0$, $t \geqslant 0$ через $C_h^t = \langle a | f^t(a) = f^{h+t}(a)\rangle$ обозначается унар с образующим a и определяющим соотношением $\langle a | f^t(a) = f^{h+t}(a)\rangle$. Унар C_n^0 называется *циклом длины* n. Элемент a унара называется *циклическим*, если подунар, порожденный этим элементом, является циклом. Через C_n^∞ обозначается объединение возрастающей последовательности унаров $C_n^{t_1} \subseteq C_n^{t_2} \subseteq \ldots (t_i \geqslant 0), t_1 < t_2 < \ldots$.

Элемент a унара называется *периодическим*, если $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторых $t \geqslant 0$ и $n \geqslant 1$. Через $T(A)$ обозначается множество периодических элементов унара A. Если a — периодический элемент, то наименьшее из чисел t, для которых $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ при некоторых $n \geqslant 1$, называется *глубиной элемента* a и обозначается через $t(a)$. *Глубиной* $t(A)$ *унара* A называется наибольшая из глубин его периодических элементов, если $T(A) \neq \varnothing$. Если множество $\{t(a) \mid a \in T(A)\}$ не ограничено, глубина унара считается бесконечной.

Элемент a унара называется *узловым*, если найдутся такие различные элементы b и c, отличные от a, что $f(b) = a = f(c)$. Элемент a унара $\langle A, f\rangle$ называется *неподвижным*, если $f(a) = a$.

Объединение двух непересекающихся унаров B и C называется их *суммой* и обозначается через $B + C$. Унар $\langle A, f\rangle$ называется *связным*, если для любых $x,y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ для некоторых $n,m \geqslant 0$. Максимальный по включению связный подунар унара A называется *компонентой связности* унара A.

Другие обозначения, связанные с унарами, можно найти в [75—77].

1.2 Конгруэнции универсальных алгебр

В данном параграфе приводятся основные определения и утверждения, касающиеся конгруэнций универсальных алгебр.

Напомним, что эквивалентность θ, определенная на некоторой алгебре A, называется *конгруэнцией* на алгебре A (см. [69]), если θ стабильна относительно каждой операции сигнатуры алгебры A.

Отношение $P(x_1, x_2,..., x_n)$ на множестве A называется *стабильным относительно m-арной операции* F (см. [69]), определенной на этом множестве, если для любых элементов $a_{i1}, a_{i2},..., a_{in} (i = 1, 2,..., m)$ множества A из истинности отношений $P(a_{i1}, a_{i2},..., a_{in}) (i = 1, 2,..., m)$ вытекает истинность отношения $P(F(a_{11},..., a_{m1}),..., F(a_{1n},..., a_{mn}))$.

Класс конгруэнции θ, порожденный элементом a, будем обозначать через $[a]\theta$.

Через Con$A$ обозначается решетка конгруэнций алгебры A, через Sub$A$ — решетка ее подалгебр, через End$A$ и Aut$A$ — соответственно, полугруппа ее эндоморфизмов и группа автоморфизмов.

Через $\bigtriangledown_A$ и $\bigtriangleup_A$ обозначаются соответственно единичная и нулевая конгруэнции алгебры A. В тех случаях, когда ясно, о какой алгебре идет речь, будем обозначать эти конгруэнции через $\bigtriangledown$ и $\bigtriangleup$.

Конгруэнция $\overline{\alpha}$ унара $\langle A, f\rangle$ называется расширением конгруэнции α подунара B унара A, если условие $x\overline{\alpha}y$ для $x,y \in A$ выполняется тогда и только тогда, когда $x\alpha y$, либо $x = y$.

Конгруэнц-простой (*простой*) называется неодноэлементная алгебра, решетка конгруэнций которой в точности двухэлементна.

Решетка $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ называется *дистрибутивной*, если в ней выполняется тождество $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Решетка $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ называется *модулярной*, если в ней выполняется квазитождество $x \leqslant z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

Решетка $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ с нулем 0 и единицей 1 называется *решеткой с дополнениями*, если для любого элемента $x \in L$ существует такой элемент $x' \in L$, что выполняются равенства $x \wedge x' = 0$ и $x \vee x' = 1$. Элемент x' называется дополнением элемента x.

Если каждый элемент решетки обладает в точности одним дополнением, то она называется *решеткой с единственными дополнениями.* Такие решетки систематически рассматривались в [13].

Пусть $b,c \in L$, $b \leqslant c$ и $a \in [b,c]$. Элемент x называется *относительным дополнением* элемента a в интервале $[b,c]$, если $a \wedge x = b$ и $a \vee x = c$. *Решеткой с относительными дополнениями* называется решетка, в которой каждый элемент имеет относительное дополнение в любом содержащем его интервале.

Булевой решеткой называется дистрибутивная решетка с дополнениями. Дистрибутивная решетка с нулем и относительными дополнениями называется *обобщенной булевой решеткой.*

Пусть $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ — решетка с нулем 0. Элемент $l^* \in L$ называется *псевдодополнением* элемента $l \in L$, если $l \wedge l^* = 0$ и для любого элемента $x \in L$ равенство $l \wedge x = 0$ влечет $x \leqslant l^*$.

Решетка L с нулем называется *решеткой с псевдодополнениями*, если каждый ее элемент имеет псевдодополнение.

Пусть $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ — решетка с единицей 1. Элемент $l^+ \in L$ называется *копсевдодополнением* элемента $l \in L$, если $l \vee l^+ = 1$, и для любого элемента $x \in L$ из равенства $l \vee x = 1$ следует $l^+ \leqslant x$.

Решетка L с единицей называется *решеткой с копсевдодополнениями*, если каждый ее элемент имеет копсевдодополнение.

Элемент $p \neq 0$ решетки L с нулем 0 называется *атомом*, если для любого $x \in L$ неравенство $0 \leqslant x \leqslant p$ влечет $x = 0$ или $x = p$. Двойственным образом определяется *коатом* решетки.

Решетка с нулем называется *точечной*, если каждый ее ненулевой элемент представляется как решеточная сумма некоторого множества атомов.

Пусть L – полная решетка и $a \in L$. Элемент a называется *компактным*, если для любого подмножества $X \subseteq L$ из $a \leqslant \bigvee X$ следует, что $a \leqslant \bigvee X_1$ для некоторого конечного подмножества $X_1 \subseteq X$.

Полная решетка называется *алгебраической*, если каждый ее элемент представим как точная верхняя грань некоторого множества компактных элементов.

Будем говорить [11], в ч.у. множестве $\langle L; \leqslant \rangle$ *a покрывает b* или *b покрывается* элементом a (и обозначать это так: $a \succ b$ или $b \prec a$), если $a > b$ и не существует x, такого, что $a > x > b$.

Решетка называется *полумодулярной*, если она удовлетворяет условию покрываемости сверху, то есть $a \prec b \Rightarrow a \vee c \prec b \vee c$ или $a \vee c = b \vee c$.

Решетка L называется *геометрической* (см. [11]), если L — полумодулярная алгебраическая решетка, в которой компактными элементами являются конечные объединения атомов и только они.

Другие определения и утверждения теории решеток можно найти в [11; 70].

1.3 Унары с мальцевской операцией

Унаром с мальцевской операцией [62] называется алгебра $\langle A, d, f \rangle$ с унарной операцией f и тернарной операцией d, на которой истинны тождества Мальцева $d(x, y, y) = d(y, y, x) = x$ и тождество перестановочности $f(d(x, y, z)) = d(f(x), f(y), f(z))$.

Унары с мальцевской операцией образуют подкласс в классе алгебр с операторами.

Многообразие называется *арифметическим*, если оно конгруэнц-перестановочно и конгруэнц-дистрибутивно. Арифметичность многообразия эквивалентна существованию терма Пиксли от основных операций, то есть, тернарного терма d, для которого выполнены тождества Пиксли $d(x,x,y) = d(y,x,x) = d(y,x,y) = y$ [60].

Из (2) следует, что класс K унаров с мальцевской операцией $p(x, y, z)$ содержится в многообразии, заданном тождествами Пиксли. Отсюда, K является конгруэнц-перестановочным и конгруэнц-дистрибутивным.

Из (3) следует, что операция s удовлетворяет тождествам $s(x,y,y) = s(y,y,x) = s(y,x,y) = x$, то есть является операцией меньшинства (см., например, [78]) и мальцевской операцией. Таким образом, класс алгебр $\langle A, s, f\rangle$ является конгруэнц-модулярным.

Заметим, что $w(x,y,z) = s(x,s(x,y,z),z)$.

Алгебры $\langle A, w, f\rangle$ и $\langle A, m, f\rangle$ образуют подклассы в классе алгебр с операторами.

Функцией почти единогласия (NU, near-unanimity function) (см. например, [79]) называется n-арная операция φ, где $n > 1$, для которой выполнются тождества $\varphi(x,\ldots,x,y) = \varphi(x,\ldots,x,y,x) = \cdots = \varphi(y,x,\ldots,x) = x$. В тернарном случае φ называют операцией большинства.

В [71, Теорема 12.3] доказано, что если существует тернарный терм g от основных операций многообразия $\mathrm{var}A$, такой, что на $\mathrm{var}A$ истинны тождества $g(x,x,y) = g(x,y,x) = g(y,x,x) = x$, то $\mathrm{var}A$ конгруэнц-дистрибутивно.

Из (5) следует, что операция m удовлетворяет тождествам $m(x,x,y) = m(x,y,x) = m(y,x,x) = x$, то есть является операцией большинства. Таким образом, класс алгебр $\langle A, m, f\rangle$ является конгруэнц-дистрибутивным.

Далее через σ_n, где $n \in \mathbb{N}$, обозначается $\mathrm{Ker} f^n$; при этом полагаем $\sigma_0 = \triangle$. В [67] на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ определяется бинарное отношение σ: $x\sigma y \Leftrightarrow \exists n > 0\ (f^n(x) = f^n(y))$, и показано, что это отношение является конгруэнцией любой алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ с оператором $f \in \Omega$.

В [67] на связном унаре, имеющем одноэлементный подунар, определено бинарное отношение β_n по правилу: $x\beta_n y$ тогда и только тогда, когда $x = y$ или $t(x), t(y) \leqslant n$.

Далее везде в данной главе подразумевается, что операция $d(x_1,x_2,x_3)$ определена по одному из правил (2)–(5).

Лемма 1.3.1 (Лемма 10 [67]). *Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный неодноэлементный связный унар с одноэлементным подунаром и $x,y \in A$. Если $t(x) \neq t(y)$, то $k(x,y) = \max\{t(x),t(y)\}$, а в противном случае $k(x,y) \leqslant t(x)$.*

Лемма 1.3.2. *Пусть* $\langle A, f\rangle$ *— неодноэлементный связный унар с одноэлементным подунаром. Отношение* β_n *при любом* $n > 0$ *является конгруэнцией алгебры* $\langle A, d, f\rangle$.

Доказательство. Для операции $p(x,y,z)$ утверждение доказано в [67, лемма 15]. Воспользуемся рассуждениями данной работы и докажем утверждение для операций $m(x,y,z)$ и $s(x,y,z)$.

Пусть $n > 0$. Очевидно, что β_n — эквивалентность. Из того, что на связном унаре с одноэлементным подунаром для любого $x \in A$, кроме $x = a$, выполняется $t(f(x)) = t(x) - 1$, получаем, что $\beta_n \in \mathrm{Con}\langle A, f\rangle$.

Пусть $x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3 \in A$ и $x_1\beta_n y_1$, $x_2\beta_n y_2$, $x_3\beta_n y_3$. В случаях, когда $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3$ или $t(x_i) \leqslant n$, $t(y_i) \leqslant n$, $i = 1,2,3$, стабильность β_n относительно операции $d(x,y,z)$ вытекает из определения отношения β_n.

Рассмотрим случай, когда $t(x_i) \leqslant n$, $t(y_i) \leqslant n$, $i = 2,3$ и $t(x_1) > n$ или $t(y_1) > n$. Тогда, из определения отношения β_n следует, что $x_1 = y_1$. По лемме 1.3.1, $k(x_1,x_2) = \max\{t(x_1),t(x_2)\} = t(x_1) > n$ и $k(x_2,x_3) \leqslant n$. Отсюда, учитывая (3) и (5), имеем

$$d(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} x_1, & \text{если } d(x,y,z) = s(x,y,z); \\ x_3, & \text{если } d(x,y,z) = m(x,y,z). \end{cases}$$

Аналогично получаем, что

$$d(y_1,y_2,y_3) = \begin{cases} y_1, & \text{если } d(x,y,z) = s(x,y,z); \\ y_3, & \text{если } d(x,y,z) = m(x,y,z). \end{cases}$$

Откуда, $d(x_1,x_2,x_3)\beta_n d(y_1,y_2,y_3)$.

Случай, когда $t(x_i) \leqslant n$, $t(y_i) \leqslant n$, $i = 1,2$ и $t(x_3) > n$ или $t(y_3) > n$ аналогичен предыдущему.

Рассмотрим случай, когда $t(x_i) \leqslant n, t(y_i) \leqslant n$, $i = 1,3$ и $t(x_2) > n$ или $t(y_2) > n$. Из определения отношения β_n следует, что $x_2 = y_2$. По лемме 1.3.1, $k(x_1,x_2) = \max\{t(x_1),t(x_2)\} =$

$= t(x_2) = \max\{t(x_2),t(x_3)\} = k(x_2,x_3)$. Отсюда,

$$d(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} x_2, & \text{если } d(x,y,z) = s(x,y,z); \\ x_3, & \text{если } d(x,y,z) = m(x,y,z). \end{cases}$$

Аналогично,

$$d(y_1,y_2,y_3) = \begin{cases} y_2, & \text{если } d(x,y,z) = s(x,y,z); \\ y_3, & \text{если } d(x,y,z) = m(x,y,z). \end{cases}$$

Откуда, $d(x_1,x_2,x_3)\beta_n d(y_1,y_2,y_3)$.

Пусть теперь $t(x_3) \leqslant n, t(y_3) \leqslant n$ и $t(x_1) > n$ или $t(y_1) > n$, $t(x_2) > n$ или $t(y_2) > n$. Тогда, по определению отношения β_n, имеем $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$. Предположим, что $t(x_1) > t(x_2)$. По лемме 1.3.1, $k(x_1,x_2) = t(x_1)$ и $k(x_2,x_3) = t(x_2)$. Тогда

$$d(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} x_1, & \text{если } d(x,y,z) = s(x,y,z); \\ x_3, & \text{если } d(x,y,z) = m(x,y,z). \end{cases}$$

Аналогично,

$$d(y_1,y_2,y_3) = \begin{cases} y_1, & \text{если } d(x,y,z) = s(x,y,z); \\ y_3, & \text{если } d(x,y,z) = m(x,y,z). \end{cases}$$

Отсюда, $d(x_1,x_2,x_3)\beta_n d(y_1,y_2,y_3)$. Если $t(x_1) < t(x_2)$, то рассуждения аналогичны.

Пусть теперь $t(x_1) = t(x_2)$. По лемме 1.3.1, $k(x_1,x_2) \leqslant t(x_1) = t(x_2) = k(x_2,x_3)$. Если $k(x_1,x_2) < k(x_2,x_3)$, то

$$d(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} x_3, & \text{если } d(x,y,z) = s(x,y,z); \\ x_1, & \text{если } d(x,y,z) = m(x,y,z). \end{cases}$$

и, аналогично,

$$d(y_1,y_2,y_3) = \begin{cases} y_3, & \text{если } d(x,y,z) = s(x,y,z); \\ y_1, & \text{если } d(x,y,z) = m(x,y,z). \end{cases}$$

Откуда, $d(x_1,x_2,x_3)\beta_n d(y_1,y_2,y_3)$. Если же $k(x_1,x_2) = k(x_2,x_3)$, то

$$d(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} x_2, & \text{если } d(x,y,z) = s(x,y,z); \\ x_3, & \text{если } d(x,y,z) = m(x,y,z). \end{cases}$$

и, аналогично,

$$d(y_1,y_2,y_3) = \begin{cases} y_2, & \text{если } d(x,y,z) = s(x,y,z); \\ y_3, & \text{если } d(x,y,z) = m(x,y,z). \end{cases}$$

что вновь приводит к $d(x_1,x_2,x_3)\beta_n d(y_1,y_2,y_3)$.

Случай, когда $t(x_1) \leqslant n, t(y_1) \leqslant n$ и $t(x_2) > n$ или $t(y_2) > n$, $t(x_3) > n$ или $t(y_3) > n$ аналогичен предыдущему.

Рассмотрим последний случай, когда $t(x_2) \leqslant n, t(y_2) \leqslant n$ и $t(x_1) > n$ или $t(y_1) > n$, $t(x_3) > n$ или $t(y_3) > n$. Из определения отношения β_n имеем $x_1 = y_1$, $x_3 = y_3$. По лемме 1.3.1, $k(x_1,x_2) = t(x_1) = t(y_1) = k(y_1,y_2)$ и $k(x_2,x_3) = t(x_3) = t(y_3) = k(y_2,y_3)$. Если $t(x_1) < t(x_3)$, то и $t(y_1) < t(y_3)$. Тогда

$$d(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} x_3, & \text{если } d(x,y,z) = s(x,y,z); \\ x_1, & \text{если } d(x,y,z) = m(x,y,z). \end{cases}$$

и, аналогично,

$$d(y_1,y_2,y_3) = \begin{cases} y_3, & \text{если } d(x,y,z) = s(x,y,z); \\ y_1, & \text{если } d(x,y,z) = m(x,y,z). \end{cases}.$$

Откуда, $d(x_1,x_2,x_3)\beta_n d(y_1,y_2,y_3)$.

Если $t(x_1) = t(x_3)$, то и $t(y_1) = t(y_3)$. Тогда

$$d(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} x_2, & \text{если } d(x,y,z) = s(x,y,z); \\ x_3, & \text{если } d(x,y,z) = m(x,y,z). \end{cases}$$

и, аналогично,

$$d(y_1,y_2,y_3) = \begin{cases} y_2, & \text{если } d(x,y,z) = s(x,y,z); \\ y_3, & \text{если } d(x,y,z) = m(x,y,z). \end{cases}.$$

Отсюда, $d(x_1,x_2,x_3)\beta_n d(y_1,y_2,y_3)$.

Если $t(x_1) > t(x_3)$, то

$$d(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} x_1, & \text{если } d(x,y,z) = s(x,y,z); \\ x_3, & \text{если } d(x,y,z) = m(x,y,z). \end{cases}$$

и, аналогично,

$$d(y_1,y_2,y_3) = \begin{cases} y_1, & \text{если } d(x,y,z) = s(x,y,z); \\ y_3, & \text{если } d(x,y,z) = m(x,y,z). \end{cases}.$$

Откуда, $d(x_1,x_2,x_3)\beta_n d(y_1,y_2,y_3)$. □

Лемма 1.3.3. *Пусть $B \subseteq A$ и операция f на B инъективна. Тогда $k(a,b) = \infty$ для различных элементов $a,b \in B$.*

Доказательство. Следует из определения $k(x,y)$. □

Лемма 1.3.4. *Пусть $\theta \in \mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$, $\theta \neq \bigtriangledown$ и $a,b \in A$. Тогда из $a\theta b$ следует, что $k(a,b) < \infty$.*

Доказательство. Для операций $p(x,y,z)$ и $m(x,y,z)$ утверждение доказано в [80, лемма 2] и [81, лемма 5] соответственно. Воспользуемся рассуждениями этих работ и докажем утверждение для операции $s(x,y,z)$.

Пусть $k(a,b) = \infty$. Предположим, что $a\theta b$. Так как $\theta \neq \bigtriangledown$, то $(b,c) \notin \theta$ для некоторого $c \in A$. Поскольку $k(a,b) = \infty \geqslant k(b,c)$, то из (3) имеем $s(a,b,c) = a$ или $s(a,b,c) = b$. С другой стороны, $s(b,b,c) = c$, что противоречит выбору пары (b,c). □

Следствие 1.3.5 (Следствие 2 [67]). *Пусть $\langle A, f\rangle$ — связный унар с одноэлементным подунаром, который либо не имеет узловых элементов, либо имеет единственный узловой элемент, являющийся неподвижным и $x,y \in A$, $x \neq y$. Тогда $k(x,y) = \max\{t(x),t(y)\}$.*

Следствие 1.3.6 (Следствие 3 [67]). *Пусть* $\langle A, f\rangle$ *— связный унар с одноэлементным подунаром, который либо не имеет узловых элементов, либо имеет единственный узловой элемент, являющийся неподвижным и* $x,y \in A$, $x \neq y$, $n > 0$. *Условие* $x\sigma_n y$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $t(x) \leqslant n,\ t(y) \leqslant n$.

Лемма 1.3.7. *Пусть* $\langle A, f\rangle$ *— неодноэлементный связный унар с одноэлементным подунаром, который либо не имеет узловых элементов, либо имеет единственный узловой элемент, являющийся неподвижным. Пусть также* $\theta \in Con\langle A, d, f\rangle$, $(b,c) \in \theta$, $b \neq c$ *и* $t(b) \leqslant t(c)$. *Тогда для любых* $x,y \in A$ *из* $t(x) \leqslant t(c)$ *и* $t(y) \leqslant t(c)$ *следует, что* $x\theta y$.

Доказательство. Для операций $p(x,y,z)$ и $m(x,y,z)$ утверждение доказано в [67, лемма 11] и [81, лемма 4] соответственно. Воспользуемся рассуждениями этих работ и докажем утверждение для операции $s(x,y,z)$.

Из условия $t(b) \leqslant t(c)$, по следствию 1.3.5, вытекает $k(b,c) = t(c)$. Пусть $x,y \in A$, $x \neq y$ и $t(x),t(y) \leqslant t(c)$. По следствию 1.3.5, $k(x,b) = \max\{t(b),t(x)\}$. Отсюда, по условию, $k(x,b) \leqslant t(c) = k(b,c)$. Тогда, из (3) получаем, что $s(x,b,c) = b$ или $s(x,b,c) = c$. В то же время, $s(x,c,c) = x$, откуда $x\theta b$. Аналогично, $y\theta b$ и, окончательно, $x\theta y$. □

Лемма 1.3.8. *Пусть* $\langle A, f\rangle$ *— неодноэлементный связный унар с одноэлементным подунаром, который либо не имеет узловых элементов, либо имеет единственный узловой элемент, являющийся неподвижным. Тогда любая неединичная конгруэнция алгебры* $\langle A, d, f\rangle$ *имеет вид* σ_n *для некоторого* $n \geqslant 0$.

Доказательство. Для операций $p(x,y,z)$ и $m(x,y,z)$ утверждение доказано в [67, лемма 12] и [81, следствие 1] соответственно. Воспользуемся рассуждениями этих работ и докажем утверждение для операции $s(x,y,z)$.

Пусть θ — неединичная конгруэнция алгебры $\langle A, s, f\rangle$. Поскольку, $\triangle = \sigma_0$, то рассмотрим $\theta \neq \triangle$. Допустим, что глубины всех элементов унара, входящих в нетривиальные пары конгруэнции θ, ограничены глубиной некоторого элемента c. Тогда $(b,c) \in \theta$ для некоторого $b \in A$, где $t(b) \leqslant t(c)$ и $b \neq c$. Поскольку для любых различных $x,y \in A$, таких, что $(x,y) \in \theta$, выполняются условия $t(x) \leqslant t(c)$ и $t(y) \leqslant t(c)$, то по следствию 1.3.6 имеем, что $(x,y) \in \sigma_{t(c)}$. Отсюда, $\theta \subseteq \sigma_{t(c)}$.

Допустим, что $x \neq y$ и $(x,y) \in \sigma_{t(c)}$. Тогда, по следствию 1.3.6, имеем $t(x) \leqslant t(c)$ и $t(y) \leqslant t(c)$. Отсюда, по лемме 1.3.7 имеем $(x,y) \in \theta$. Таким образом, $\sigma_{t(c)} \subseteq \theta$ и $\theta = \sigma_{t(c)}$.

Предположим теперь, что глубины элементов, принадлежащих нетривиальным парам конгруэнции θ не ограничены в совокупности. Так как $\theta \neq \bigtriangledown$, то $(x,y) \notin \theta$ для некоторых $x,y \in A$. По предположению, найдется такой элемент c, входящий в некоторую пару $(b,c) \in \theta$, что $t(x) < t(c)$ и $t(y) < t(c)$. В силу симметричности θ, можно считать, что $t(b) \leqslant t(c)$. Тогда, по лемме 1.3.7 имеем $x\theta y$, что противоречит выбору x,y.

□

Лемма 1.3.9. *Пусть унар $\langle A, f\rangle$ представляется в виде суммы подунаров B и C, где B – произвольная компонента связности, на которой операция f не инъективна, а C – подунар с инъективной операцией. Тогда любая нетривиальная конгруэнция θ алгебры $\langle A, d, f\rangle$ является расширением некоторой конгруэнции ее подалгебры $\langle B, d, f\rangle$.*

Доказательство. Для операций $p(x,y,z)$ и $m(x,y,z)$ утверждение доказано в [65, лемма 15] и [81, лемма 6] соответственно. Воспользуемся рассуждениями этих работ и докажем утверждение для операции $s(x,y,z)$.

Достаточно показать, что любой элемент из C порождает одноэлементный класс конгруэнции θ. Из лемм 1.3.3 и 1.3.4 следует, что $(x,y) \notin \theta$ для любых несовпадающих $x,y \in C$. Пусть $b \in B$, $c \in C$. Так как элементы b и c лежат в разных компонентах связности, то $k(a,b) = \infty$. Тогда, по лемме 1.3.3 имеем, $(b,c) \notin \theta$. □

Лемма 1.3.10 (Лемма 1 [67]). *Пусть $n > 0$. Условие $\sigma_n = \bigtriangledown$ выполняется на унаре $\langle A, f\rangle$ тогда и только тогда, когда он связен, содержит одноэлементный подунар и имеет глубину не превосходящую n.*

Лемма 1.3.11 (Лемма 2 [67]). *Условие $\sigma = \bigtriangledown$ выполняется на унаре $\langle A,f\rangle$ тогда и только тогда, когда он является связным унаром с одноэлементным подунаром.*

Предложение 1.3.12 (Предложение 2 [67]). *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ — произвольная неодноэлементная алгебра с оператором f, то есть, унарная операция $f \in \Omega$ перестановочна со всеми операциями из Ω. Тогда, если алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ является конгруэнц-простой, то либо унар $\langle A, f\rangle$ связен, содержит одноэлементный подунар и имеет глубину 1, либо операция f инъективна.*

Лемма 1.3.13 (Лемма 3 [67]). *Пусть унар $\langle A, f\rangle$ изоморфен унару C_1^m, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда любая его конгруэнция имеет вид σ_n для некоторого $0 \leqslant n \leqslant m$.*

Лемма 1.3.14 (Лемма 4 [67]). *Пусть $\langle A, f\rangle \cong C_1^\infty$. Тогда $\bigtriangledown_A = \sigma$, а любая неединичная конгруэнция унара $\langle A, f\rangle$ имеет вид σ_n для некоторого $0 \leqslant n < \infty$.*

Предложение 1.3.15 (Предложение 3 [67]). *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ - произвольная алгебра с оператором f, то есть, унарная операция $f \in \Omega$ перестановочна со всеми операциями из Ω . Если унар $\langle A, f\rangle$ изоморфен унару $C \cong C_1^t$, $t \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$, то любая его конгруэнция является конгруэнцией алгебры $\langle A, \Omega\rangle$.*

Теорема 1.3.16. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ – алгебра с оператором f, где $d(x_1,x_2,x_3)$-операция, определенная по одному из правил (2)–(5). Алгебра $\langle A, d, f\rangle$ является конгруэнц-простой тогда и только тогда, когда либо операция f инъективна, либо унар $\langle A, f\rangle$ содержит такой элемент a, что $f(x) = a$ для любого $x \in A$.*

Доказательство. Алгебра $\langle A, d, f\rangle$ является конгруэнц–простой, поскольку по теореме 2 [67], теореме 9 [68] и теореме 2 [64] соответствующие алгебры конгруэнц-просты.

$\square$

Теорема 1.3.17 (Теорема 2 [82])**.** *Пусть* $\langle A, p, f\rangle$ *– неодноэлементный унар с мальцевской операцией* $p(x, y, z)$*, определенной по правилу* (2)*. Решетка* $\mathrm{Con}\langle A, p, f\rangle$ *является точечной тогда и только тогда, когда либо операция* f *инъективна, либо унар* $\langle A, f\rangle$ *содержит такой элемент* a*, что* $f(x) = a$ *для любого* $x \in A$*.*

Глава 2. Характеризация решеток конгруэнций алгебр с оператором

2.1 Коатомы в решетке конгруэнций унаров с мальцевской операцией

В данном параграфе дается описание строения коатомов в решетках конгруэнций М-алгебр $\langle A, d, f\rangle$.

Лемма 2.1.1. *Пусть* $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ *— решетка с нулем* 0 *и единицей* 1, *в которой существует такой элемент* $a \in L$, *что* $0 < a < 1$ *и для каждого* $x \in L$ *выполняется условие* $x \leqslant a$, *либо* $a \leqslant x$. *Тогда следующие условия равносильны:*

1. $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ *не является решеткой с дополнениями;*

2. $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ *не является решеткой с единственными дополнениями;*

3. $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ *не является решеткой с относительными дополнениями.*

Доказательство. Пусть $a \in L$ и $0 < a < 1$. Очевидно, что $(1) \Rightarrow (2)$, $(1) \Rightarrow (3)$, $(3) \Rightarrow (1)$, $(3) \Rightarrow (2)$. Чтобы обосновать, что $(2) \Rightarrow (1)$, $(2) \Rightarrow (3)$, достаточно показать, что хотя бы один элемент не имеет дополнений в L.

Предположим, что существует a' – дополнение элемента a в L. Поскольку $a' \in L$, то по условию, либо $a' \leqslant a$, либо $a \leqslant a'$.

В случае, если $a' \leqslant a$, то $a' \wedge a = a'$ и, следовательно, $a' = 0$. Но $a' \vee a = 1$. Тогда $0 \vee a = 1$, откуда $a = 1$, что противоречит условию. Аналогично, из $a \leqslant a'$ следует $a' = 1$. Отсюда $a = 0$, что снова противоречит условию. $\square$

Далее везде в данной главе подразумевается, что операция $d(x_1,x_2,x_3)$ определена по правилу по одному из правил (2)–(5).

Напомним, через σ_n, где $n \in \mathbb{N}$, обозначается $\mathrm{Ker} f^n$; при этом полагаем $\sigma_0 = \triangle$. Через σ обозначается конгруэнция любой алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ с оператором $f \in \Omega$ определенная по правилу [67]: $x\sigma y \Leftrightarrow \exists n > 0\ (f^n(x) = f^n(y))$.

На связном унаре, имеющем одноэлементный подунар, через β_n обозначается конгруэнция алгебры $\langle A, d, f\rangle$ определенная по правилу: $x\beta_n y$ тогда и только тогда, когда $x = y$ или $t(x), t(y) \leqslant n$.

Лемма 2.1.2. *Пусть алгебра $\langle A, d, f\rangle$ не является конгруэнц-простой. Тогда любая ее неединичная конгруэнция содержится в конгруэнции σ_n для некоторого $n > 0$, а следовательно, и в конгруэнции σ.*

Доказательство. Пусть $\theta \in \mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$, $\theta \neq \bigtriangledown$ и $a,b \in A$. По лемме 1.3.4, из $a\theta b$ следует, что $k(a,b) = n < \infty$ для некоторого $n \geqslant 0$. Тогда $a\sigma_n b$, откуда $a\sigma b$. Таким образом, $\theta \subseteq \sigma_n \subseteq \sigma$. $\square$

Лемма 2.1.3. *Пусть унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, d, f\rangle$ не является связным унаром с одноэлементным подунаром. Тогда конгруэнция σ является единственным коатомом решетки $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$.*

Доказательство. Если операция f инъективна, то $\sigma = \bigtriangleup$, а по теореме 1.3.16, алгебра $\langle A, d, f\rangle$ проста, откуда вытекает доказываемое утверждение.

Пусть теперь операция f неинъективна и унар $\langle A, f\rangle$ не является связным унаром с одноэлементным подунаром. Отсюда, по лемме 1.3.11 имеем $\sigma \neq \bigtriangledown$, то есть, $\sigma \subsetneq \bigtriangledown$.

Предположим, что найдется такая конгруэнция θ алгебры $\langle A, d, f\rangle$, что $\sigma \subsetneq \theta \subsetneq \bigtriangledown$. Тогда существует такая пара $(x, y) \in \theta$, что $(x, y) \notin \sigma$, где $x,y \in A$ и $x \neq y$. По определению конгруэнции σ, имеем $f^n(x) \neq f^n(y)$ для любого $n > 0$. Следовательно, $k(x,y) = \infty$. По лемме 1.3.4, $(x,y) \notin \theta$, что противоречит выбору пары (x,y).

Таким образом, конгруэнция σ является коатомом решетки $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$. Его единственность следует из леммы 2.1.2. $\square$

Лемма 2.1.4. *Пусть унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, d, f\rangle$ — неодноэлементный связный унар, имеющий одноэлементный подунар. Пусть также $\theta \in \mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$, $(b,c) \in \theta$, $b \neq c$ и $t(b) < t(c)$ для некоторых $b,c \in A$. Тогда для любых $x,y \in A$ из $t(x) < t(c)$ и $t(y) < t(c)$ следует, что $x\theta y$ и $x, y \in [c]\theta$.*

Доказательство. Пусть $\theta \in \mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$, $(b,c) \in \theta$, $b \neq c$ и $t(b) < t(c)$ для некоторых $b,c \in A$. Из последнего, в силу леммы 1.3.1, вытекает $k(b,c) = t(c)$.

Пусть $x,y \in A$, $x \neq y$ и $t(x) < t(c)$, и $t(y) < t(c)$. По лемме 1.3.1, $k(x,c) = t(c)$.

Тогда, из (2) и (3), имеем

$$d(x,c,b) = \begin{cases} b, & \text{если } d(x,y,z) = p(x,y,z); \\ c, & \text{если } d(x,y,z) = s(x,y,z). \end{cases}$$

и

$$d(x,c,c) = \begin{cases} x, & \text{если } d(x,y,z) = p(x,y,z); \\ x, & \text{если } d(x,y,z) = s(x,y,z). \end{cases}$$

Откуда имеем $x\theta c$. Из (5) получаем, что $m(b,c,x) = x$. В то же время, $m(c,c,x) = c$, откуда получаем $x\theta c$. Аналогично, $y\theta c$ и, окончательно, $x\theta y$. □

Следствие 2.1.5. *Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный неодноэлементный связный унар с одноэлементным подунаром и $c \in A$. Если элемент c и все элементы из A, имеющие глубину, меньшую $t(c)$, лежат в некотором классе конгруэнции $\theta \in \mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$, то все элементы глубины $t(c)$ лежат в этом классе.*

Доказательство. Пусть a – неподвижный элемент унара $\langle A, f\rangle$. По условию, $a\theta c$. Предположим, что для некоторого элемента $x \in A$, где $t(x)=t(c)$, утверждение леммы не выполняется, то есть $x \notin [c]\theta$. Поскольку $t(x)=t(c)$, то $k(x,a) = k(a,c)$. Тогда из (2),(3) и (5) получаем, что $p(x,a,c) = c$, $s(x,c,a) = c$ и $m(c,a,x) = x$. В то же время, $p(x,a,a) = x$, $s(x,a,a) = x$ и $m(c,c,x) = c$, откуда $x\theta c$, что противоречит предположению. □

Следствие 2.1.6. *Если конгруэнция θ удовлетворяет условию леммы 2.1.4, то $\theta = \beta_{t(c)}$.*

Лемма 2.1.7. *Пусть унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, d, f\rangle$ связен, содержит одноэлементный подунар и имеет конечную глубину $m > 1$. Тогда конгруэнция σ_{m-1} является единственным коатомом решетки $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$.*

Доказательство. Пусть $t(A) = m > 1$. По лемме 1.3.10 имеем $\sigma_{m-1} \subsetneq \sigma_m = \bigtriangledown$. Предположим, что найдется такая конгруэнция θ алгебры $\langle A, p, f\rangle$, что $\sigma_{m-1} \subsetneq \theta < \bigtriangledown$. Тогда для некоторой пары $(x, y) \in \theta$ имеем $(x, y) \notin \sigma_{m-1}$, где $x, y \in A$, $x \neq y$. Из определения отношения σ_{m-1} следует, что $f^{m-1}(x) \neq f^{m-1}(y)$. Тогда либо $t(x) = t(y) = m$, либо, без ограничения общности, $t(x) \leqslant m - 1$ и $t(y) = m$.

В случае, если $t(x) \leqslant m - 1$ и $t(y) = m$, по следствию 2.1.6 имеем $\theta = \beta_m$. Однако $\beta_m = \bigtriangledown$, что противоречит выбору конгруэнции θ. Таким образом, σ_{m-1} — коатом решетки $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$.

Пусть теперь $t(x) = t(y) = m$. Поскольку $\theta \subsetneq \bigtriangledown$, то найдется такой элемент $c \in A$, что $(y, c) \notin \theta$.

Так как $x\theta y$, то $p(c, x, y)\theta p(c, y, y)$, $s(c, y, y)\theta s(c, x, y)$ и $m(y, x, c)\theta m(y, y, c)$. Поскольку $(x, y) \notin \sigma_{m-1}$ и $x \neq y$, то $f^{m-1}(x) \neq f^{m-1}(y)$, и следовательно, $k(x, y) = m$. Так как $t(c) \leqslant m$, то $k(c, x) \leqslant m = k(x, y)$. Тогда из (2),(3) и (5) получаем, что $y = p(c, x, y)\theta p(c, y, y) = c$,

$$c = s(c, y, y)\theta s(c, x, y) = \begin{cases} y, & \text{если } k(c, x) < m; \\ x, & \text{если } k(c, x) = m. \end{cases}$$

и $c = m(y, x, c)\theta m(y, y, c) = y$, что противоречит условию $(y, c) \notin \theta$. Таким образом, σ_{m-1} — коатом решетки $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$.

Предположим теперь, что в $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ существует коатом φ, не совпадающий с σ_{m-1}. Тогда найдется такая пара $(b, c) \in \varphi$, что $(b, c) \notin \sigma_{m-1}$, где $b, c \in A$, $b \neq c$. Из определения отношения σ_{m-1} следует, что $f^{m-1}(b) \neq$ $\neq f^{m-1}(c)$. Отсюда, как и выше, выполняется либо $t(b) \leqslant m - 1$ и $t(c) = m$, либо $t(b) = t(c) = m$.

В случае, если $t(b) \leqslant m - 1$ и $t(c) = m$, по следствию 2.1.6 получаем, что $\varphi = \beta_m$. Однако $\beta_m = \bigtriangledown$, что противоречит выбору φ как коатома решетки $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$.

Пусть теперь $t(b) = t(c) = m$. Поскольку $\varphi \subsetneq \bigtriangledown$, то найдется такой элемент $z \in A$, что $(z, c) \notin \varphi$. Так как $b\varphi c$, то $p(z, b, c)\varphi p(z, c, c)$,

$s(z,c,c)\theta s(z,b,c)$ и $m(c,b,z)\theta m(cc,z)$. Учитывая, что $t(z) \leqslant m$, получаем $c = p(z,b,c)\varphi p(z,c,c) = z$,

$$z = s(z,c,c)\theta s(z,b,c) = \begin{cases} c, & \text{если } k(z,b) < m; \\ b, & \text{если } k(z,b) = m. \end{cases},$$

и $z = m(c,b,z)\theta m(cc,z) = c$, что противоречит условию $(z,c) \notin \varphi$.

Окончательно, получаем, что σ_{m-1} — единственный коатом решетки $\mathrm{Con}\langle A,d,f\rangle$. □

Лемма 2.1.8. *Для любых неединичных конгруэнций* θ *и* φ *алгебры* $\langle A,d,f\rangle$ *выполняется строгое включение* $\theta \vee \varphi \subsetneq \bigtriangledown$.

Доказательство. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $\langle A,f\rangle$ не является связным унаром с одноэлементным подунаром.

Тогда, по лемме 2.1.3, конгруэнция σ является единственным коатомом решетки $\mathrm{Con}\langle A,d,f\rangle$. Следовательно, для любых неединичных конгруэнций θ и φ алгебры $\langle A,d,f\rangle$ выполняются условия $\theta \subseteq \sigma$, $\varphi \subseteq \sigma$. Отсюда, $\theta \vee \varphi \subseteq \sigma$. По лемме 1.3.11 имеем $\sigma \neq \bigtriangledown$, то есть, $\sigma \subsetneq \bigtriangledown$. Таким образом, $\theta \vee \varphi \subsetneq \bigtriangledown$.

Случай 2. $\langle A,f\rangle$ – неодноэлементный связный унар, имеющий одноэлементный подунар.

Пусть унар $\langle A,f\rangle$ имеет конечную глубину m. Если $m = 1$, то по теореме 1.3.16, алгебра $\langle A,d,f\rangle$ проста, и утверждение леммы очевидно.

Если же $m > 1$, то для любых неединичных конгруэнций θ и φ алгебры $\langle A,d,f\rangle$ в силу леммы 2.1.7 выполняются условия $\theta \subseteq \sigma_{m-1}$, $\varphi \subseteq \sigma_{m-1}$. Следовательно, $\theta \vee \varphi \subseteq \sigma_{m-1}$. По лемме 1.3.10, $\sigma_{m-1} \neq \bigtriangledown$, откуда $\theta \vee \varphi \subsetneq \bigtriangledown$.

Пусть теперь глубина унара $\langle A,f\rangle$ бесконечна. По лемме 2.1.2, имеем $\theta \subseteq \sigma_k$ и $\varphi \subseteq \sigma_n$ для некоторых $k,n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\theta \vee \varphi \subseteq \sigma_k \vee \sigma_n$. Без ограничения общности положим $k \leqslant n$. Тогда $\sigma_k \vee \sigma_n = \sigma_n$. Из леммы 1.3.10 следует, что $\sigma_n \subsetneq \bigtriangledown$. Таким образом, $\theta \vee \varphi \subsetneq \bigtriangledown$. □

Теорема 2.1.9. *Пусть* $\langle A, d, f\rangle$ *– алгебра с оператором* f*, где* $d(x_1,x_2,x_3)$*-операция, определенная по одному из правил* (2)–(5)*. Решетка* $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ *не имеет коатомов тогда и только тогда, когда унар* $\langle A, f\rangle$ *связен, содержит одноэлементный подунар и имеет бесконечную глубину. В других случаях* $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ *имеет единственный коатом.*

Доказательство. Пусть унар $\langle A, f\rangle$ связен, содержит одноэлементный подунар и имеет бесконечную глубину. Обозначим через a неподвижный элемент унара $\langle A, f\rangle$.

Предположим, что решетка $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ имеет коатом φ. Тогда, по лемме 2.1.2, конгруэнция φ содержится в σ_n для некоторого n. По лемме 1.3.10, имеем $\sigma_n \subsetneq \triangledown$. Однако, по предположению, φ — коатом $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$, а значит, $\varphi = \sigma_n$.

Так как унар $\langle A, f\rangle$ имеет бесконечную глубину, то и $\sigma_{n+1} \subsetneq \triangledown$. В то же время, $\sigma_n \subseteq \sigma_{n+1}$. Докажем, что $\sigma_n \neq \sigma_{n+1}$. Поскольку $t(A) = \infty$, то найдутся такие элементы $b, c \in A$, что $b \neq c$, $t(b) = n$ и $t(c) = n + 1$. Из условия $t(b) = n$ следует, что $f^{n+1}(b) = f(a) = a$. Аналогично, из $t(c) = n+1$ вытекает $f^{n+1}(c) = a$. Отсюда, $(b, c) \in \sigma_{n+1}$. Однако, предполагая, что $(b, c) \in \sigma_n$, получаем $f^n(c) = f^n(b) = a$, что противоречит условию $t(c) = n + 1$, а значит, $\sigma_n \neq \sigma_{n+1}$. Таким образом, $\varphi = \sigma_n \subsetneq \sigma_{n+1} \subsetneq \triangledown$, что противоречит выбору φ. Следовательно, решетка $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ в данном случае не имеет коатомов.

Пусть теперь унар $\langle A, f\rangle$ связен, содержит одноэлементный подунар и имеет глубину 1. Тогда, по теореме 1.3.16, алгебра $\langle A, d, f\rangle$ конгруэнц-проста. Отсюда, $\triangle$ является единственным коатомом решетки $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$. В других случаях единственность коатома решетки $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ следует из лемм 2.1.3 и 2.1.7. □

Следствие 2.1.10. *Пусть решетка* $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ *имеет единственный коатом. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Если $\langle A, f\rangle$ — связный унар глубины 1, имеющий одноэлементный подунар, то коатомом решетки* $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ *является конгруэнция* $\triangle$*;*
2. *Если $\langle A, f\rangle$ — связный унар конечной глубины $m > 1$, имеющий одноэлементный подунар, то коатомом решетки является конгруэнция* σ_{m-1}*;*
3. *В оставшихся случаях коатомом решетки является конгруэнция* σ*.*

2.2 Решетки с дополнениями и близкие к ним виды решеток

В данном параграфе дается описание дополнений и копсевдодополнений в решетках конгруэнций алгебр $\langle A, d, f\rangle$ с оператором f, где $d(x_1,x_2,x_3)$ – операция, определенная по одному из правил (2)–(5). Приводится описание алгебр $\langle A, d, f\rangle$, решетки конгруэнций которых являются решетками с дополнениями, с единственными дополнениями, с относительными дополнениями, с копсевдодополнениями, булевыми, обобщенными булевыми или геометрическими.

Теорема 2.2.1. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ – алгебра с оператором f, где $d(x_1,x_2,x_3)$-операция, определенная по одному из правил* (2) — (5)*. Следующие утверждения равносильны:*

1. $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ *— решетка с дополнениями;*
2. $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ *— решетка с относительными дополнениями;*
3. *алгебра $\langle A, d, f\rangle$ конгруэнц-проста;*
4. *либо операция f инъективна, либо унар $\langle A, f\rangle$ содержит такой элемент a, что $f(x) = a$ для любого $x \in A$.*

Доказательство. По теореме 1.3.16, (3) $\Leftrightarrow$ (4). Очевидно, что (3) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (1). Чтобы обосновать, что (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (4), достаточно показать, в силу теоремы 2.1.9 и леммы 2.1.1, что в случае когда унар $\langle A, f\rangle$ связен, содержит одноэлементный подунар и имеет бесконечную глубину, то $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ не является решеткой с дополнениями.

Допустим, что унар $\langle A, f\rangle$ удовлетворяет перечисленным выше условиям. Тогда, по теореме 1.3.16, алгебра $\langle A, d, f\rangle$ не является простой, то есть, $|\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle| > 2$. Следовательно, решетка $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ содержит хотя бы одну нетривиальную конгруэнцию ρ. Предположим, что ρ имеет дополнение ρ' в $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$. Тогда $\rho \vee \rho' = \bigtriangledown$, и из леммы 2.1.8 следует, что $\rho' = \bigtriangledown$. Отсюда, $\rho \wedge \rho' = \rho$, что, с учетом условия $\rho \wedge \rho' = \bigtriangleup$, противоречит выбору конгруэнции ρ. Следовательно, решетка $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ не является решеткой с дополнениями. □

Следствие 2.2.2. *Любая нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, d, f\rangle$ не имеет дополнения.*

Следствие 2.2.3. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ – алгебра с оператором f, где $d(x_1,x_2,x_3)$-операция, определенная по одному из правил* (2) *или* (5). *Следующие утверждения равносильны:*

1. $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ — *решетка с дополнениями;*
2. $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ — *решетка с единственными дополнениями (булева решетка);*
3. $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ — *решетка с относительными дополнениями;*
4. $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ — *обобщенная булева решетка;*

Доказательство. Классы решеток, перечисленные в пунках 1 и 2, совпадают, так как рассматриваемый класс алгебр $\langle A, d, f\rangle$ является конгруэнц-дистрибутивным. То же замечание верно для пунктов 3 и 4. □

Известно (см., напр., следствия 2 [11, стр. 151] и 7.2 [72, стр. 16]), что если решетка конгруэнций универсальной алгебры дистрибутивна, то она является решеткой с псевдодополнениями.

Отсюда, в силу того, что классы алгебр $\langle A, p, f\rangle$ и $\langle A, m, f\rangle$ являются конгруэнц-дистрибутивными, вытекает, что любая решетка конгруэнций алгебры из рассматриваемых классов является решеткой с псевдодополнениями. Следующее предложение показывает, что верно и двойственное утверждение.

Предложение 2.2.4. *Пусть* $\langle A, d, f\rangle$ *– алгебра с оператором* f*, где* $d(x_1,x_2,x_3)$*-операция, определенная по одному из правил* (2)–(5). *Решетка* $\mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ *является решеткой с копсевдодополнениями.*

Доказательство. Пусть $\theta \in \mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$, $\theta \neq \bigtriangledown$. Очевидно, $\theta \vee \bigtriangledown = \bigtriangledown$. Пусть $\alpha \in \mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ и $\theta \vee \alpha = \bigtriangledown$. Из последнего равенства, с учетом леммы 2.1.8, следует $\alpha = \bigtriangledown$. Тогда $\bigtriangledown$ — копсевдодополнение элемента θ.

Пусть теперь $\theta = \bigtriangledown$. Тогда $\theta \vee \bigtriangledown = \bigtriangledown \vee \bigtriangleup = \bigtriangledown$. Поскольку для любой конгруэнции $\alpha \in \mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$ из условия $\theta \vee \alpha = \bigtriangledown \vee \alpha = \bigtriangledown$ следует $\bigtriangleup \subseteq \alpha$, то $\bigtriangleup$ — копсевдодополнение элемента θ. □

Следствие 2.2.5. *Пусть* $a \in \mathrm{Con}\langle A, d, f\rangle$. *Тогда копсевдодополнение*

$$a^+ = \begin{cases} \bigtriangleup, & \text{если } a = \bigtriangledown; \\ \bigtriangledown, & \text{если } a \neq \bigtriangledown. \end{cases}$$

Очевидно, решетка является геометрической тогда и только тогда, когда она полная, точечная, полумодулярная и все атомы в ней компактны (см. [11, стр. 233]).

Предложение 2.2.6. *Решетка* $\mathrm{Con}\langle A, p, f\rangle$ *является геометрической тогда и только тогда, когда она точечная.*

Доказательство. Необходимость утверждения очевидна.

Докажем его достаточность. Пусть $\mathrm{Con}\langle A, p, f\rangle$ — точечная решетка. Тогда, по теореме 1.3.17, либо операция f инъективна на A, либо унар $\langle A, f\rangle$ содержит такой элемент a, что $f(x) = a$ для любого $x \in A$. Отсюда, по теореме 1.3.16, алгебра $\langle A, p, f\rangle$ является простой, то есть имеет единственный атом $\bigtriangledown$. Следовательно, по определению компактного элемента имеем, что $\bigtriangledown$ — компактный элемент решетки $\mathrm{Con}\langle A, p, f\rangle$. Поскольку класс алгебр $\langle A, p, f\rangle$ модулярен, то решетка $\mathrm{Con}\langle A, p, f\rangle$ полумодулярна. Кроме того, как решетка конгруэнций она является полной. Отсюда, $\mathrm{Con}\langle A, p, f\rangle$ является геометрической решеткой. $\square$

Из предложения 2.2.6 и теоремы 1.3.17 вытекает

Следствие 2.2.7. *Решетка* $\mathrm{Con}\langle A, p, f\rangle$ *является геометрической тогда и только тогда, когда либо операция* f *инъективна, либо унар* $\langle A, f\rangle$ *содержит такой элемент* a*, что* $f(x) = a$ *для любого* $x \in A$.

Глава 3. Алгебры с операторами

Напомним, *алгеброй с операторами* (см., например, [33]) называется универсальная алгебра с дополнительной системой операторов — унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно основных операций (перестановочных с основными операциями).

3.1 Конгруэнц-когерентные алгебры с оператором

Универсальная алгебра A *конгруэнц–когерентна*, если любая подалгебра в A, содержащая класс произвольной конгруэнции в A, является объединением классов этой конгруэнции. Таковыми являются конгруэнц–простые алгебры и алгебры без собственных подалгебр. Кроме того, свойством конгруэнц–когерентности обладают группы, кольца.

Д. Гейгер [83] показал, что конгруэнц–когерентное многообразие, задается мальцевскими условиям и является конгруэнц–регулярным. Однако, обратное неверно. В. Тейлор [84] доказал, что многообразие, порождаемое квазипримальной алгеброй, является конгруэнц–когерентным. Р. Бизер [85] получил полное описание конгруэнц–когерентных алгебр де Моргана и p–алгебр. М. Э. Адамс [86] описал конгруэнц–когерентные дистрибутивные двойные p–алгебры. В работе Дж. Дуда [87] доказано, что если декартов квадрат алгебры конгруэнц–когерентен, то сама алгебра конгруэнц–регулярна и потому конгруэнц–перестановочна. Т. С. Блит и Дж. Фанг [88] описали конгруэнц–когерентные двойные де Морган–Стоуновы алгебры. В работе [89] они получили полное описание конгруэнц–когерентных алгебр в классе симметричных расширенных алгебр де Моргана.

Подалгебра B алгебры A называется *подалгеброй Риса*, если объединение диагонали и квадрата $B \times B$ является конгруэнцией в A. Указанная конгруэнция называется *конгруэнцией Риса.* Алгебра A является *алгеброй Риса*, если любая ее подалгебра является подалгеброй Риса. *Класс Риса* состоит из алгебр Риса. Алгебры Риса охарактеризованы в работах [90—92], см. также [93; 94].

Пусть B – собственная подалгебра алгебры A. Обозначим через $\theta_{A\setminus B}$ конгруэнцию удовлетворяющую условию: существуют $x,z \in B$ и $y \in A \setminus B$ такие, что $(x,y) \in \theta_{A\setminus B}$ и $[z]\theta_{A\setminus B} \subseteq B$.

Из определения следует, что если алгебра A имеет конгруэнцию $\theta_{A\setminus B}$ для некоторой подалгебры B, то она не является конгруэнц–когерентной. Кроме того, если алгебра A не имеет конгруэнцию $\theta_{A\setminus B}$ для любой подалгебры B, то она является конгруэнц–когерентной. Таким образом, алгебра A конгруэнц–когерентна тогда и только тогда, когда она не имеет конгруэнций $\theta_{A\setminus B}$ для любой подалгебры B.

Необходимо отметить, что конгруэнция $\theta_{A\setminus B}$ определена неоднозначно.

Пример 3.1.1. *Пусть $\langle A, f\rangle$ — унар с узловым элементом v и $f(v) = v$. Тогда существуют различные элементы $x,y \in A$ такие, что $f(x) = v = f(y)$. Рассмотрим $\langle B, f\rangle$, где $B = \{z \in A | f^k(z) \neq y, \forall k \geqslant 0\}$ и конгруэнцию:*

1. $\sigma_1 = \mathrm{Ker} f$. *Имеем $x, y \in [x]\sigma_1$ и $[v]\sigma_1 \subset B$, где $x \in B$ и $y \in A \setminus B$.*
2. θ_v. *Имеем $x, y \in [x]\theta_v$ и $[v]\theta_v \subset B$, где $x \in B$ и $y \in A \setminus B$.*

Таким образом, если подунар $\langle B, f\rangle$ унара $\langle A, f\rangle$ расширяется до подалгебры $\langle B, \Omega\rangle$ алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ и $\theta_v \in \mathrm{Con}\langle A, \Omega\rangle$, то имеем дополнительные примеры существования конгруэнции $\theta_{A\setminus B}$.

Пример 3.1.2. *Пусть унар $\langle A, f\rangle$ содержит такой элемент a, что $f(x) = a$ для любого $x \in A$ и $|A| \geqslant 3$. Рассмотрим различные двуэлементные подунары $\langle B, f\rangle$ и $\langle C, f\rangle$, где $B \cap C = \{a\}$. При этом в качестве конгруэнции $\theta_{A\setminus B}$ может быть конгруэнция Риса $\theta_C = C^2 \cup \triangle_A$.*

Приведем условия отсутствия свойства конгруэнц–когерентности.

Лемма 3.1.3. *Пусть B_1,B_2 – собственные подалгебры A. При этом B_1, B_2 пересекаются и не совпадают. Если существует конгруэнция Риса по подалгебре B_1 или B_2, то алгебра A не является конгруэнц–когерентной.*

Доказательство. Пусть существует конгруэнция Риса $\theta_{B_1} = {B_1}^2 \cup \triangle_A$. По определению конгруэнции θ_{B_1}, подалгебра B_2 содержит хотя бы один одноэлементный класс, но не является объединением классов конгруэнции θ_{B_1}. Таким образом, алгебра A не является конгруэнц–когерентной. □

Лемма 3.1.4. *Если алгебра имеет более двух непересекающихся подалгебр и существует конгруэнция Риса по прямой сумме двух подалгебр отличная от единичной конгруэнции, то она не является конгруэнц–когерентной.*

Доказательство. Возможны два случая.

Случай 1: B, C и D попарно непересекающиеся подалгебры алгебры A.

Пусть $\theta_{C\oplus D}$ – конгруэнция Риса алгебры A. Прямая сумма $B \oplus C$ – подалгебра алгебры A. Подалгебра $B \oplus C$ содержит класс $[b]\theta_{C\oplus D} = \{b\}$ для любого $b \in B$, но не содержит класс $[c]\theta_{C\oplus D} = C \oplus D$ для любого $c \in C$. Откуда, подалгебра $B \oplus C$ не является объединением классов конгруэнции $\theta_{C\oplus D}$. Таким образом, алгебра A не является конгруэнц–когерентной.

Случай 2: B и D, а также C и D непересекающиеся подалгебры алгебры A, причем $B \subset C$.

По условию $\theta_{B\oplus D}$ – конгруэнция Риса алгебры A. Подалгебра C содержит класс $[b]\theta_{C\oplus D} = \{b\}$ для любого $b \in C \setminus B$, но не содержит класс $[d]\theta_{B\oplus D} = B \oplus D$ для любого $d \in D$. Откуда, подалгебра C не является объединением классов конгруэнции $\theta_{B\oplus D}$. Таким образом, алгебра A не является конгруэнц–когерентной. □

Из лемм 3.1.3 и 3.1.4 вытекает

Предложение 3.1.5. *Если алгебра Риса A является конгруэнц–когерентной, то она удовлетворяет одному из условий:*

1. *Алгебра A не имеет собственных подалгебр;*

2. $A = B \oplus C$, *где* B *и* C *без собственных подалгебр;*

3. $\langle \mathrm{Sub} A, \subseteq \rangle$ *– цепь.*

Следующее утверждение дает ответ на вопрос, при каких условиях многообразие является многообразием Риса.

Теорема 3.1.6 ([90]). *Многообразие* V *является многообразием Риса тогда и только тогда, когда каждая фундаментальная операция зависит не более, чем от одной переменной.*

Лемма 3.1.7. *Если унар* $\langle A, f\rangle \cong C_n^0$ *или* $\langle A, f\rangle \cong C_n^0 + C_m^0$, *где* $n,m \in \mathbb{N}$, *то* $\langle A, f\rangle$ *является конгруэнц–когерентным.*

Доказательство. Случай когда $\langle A, f\rangle \cong C_n^0$ очевиден.

Пусть $\langle A, f\rangle \cong C_n^0 + C_m^0$, где $n,m \in \mathbb{N}$, и $\langle B, f\rangle$ – поунар унара $\langle A, f\rangle$. Если $\langle B, f\rangle$ собственный, то очевидно, либо $\langle B, f\rangle \cong C_n^0$, либо $\langle B, f\rangle \cong C_m^0$. Пусть θ — нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, f\rangle$. Тогда возможны два случая:

Случай 1: θ является расширением некоторой конгруэнции подунара $\langle B, f\rangle$. Тогда утверждение очевидно.

Случай 2: θ не является расширением некоторой конгруэнции подунара $\langle B, f\rangle$. Тогда $\langle A, f\rangle$ разбивается на классы, причем, ни один класс полностью не принадлежит $\langle B, f\rangle$. Таким образом, $\langle A, f\rangle$ является конгруэнц–когерентным.

В случае если $\langle B, f\rangle$ несобственный, то утверждение очевидно. $\square$

Лемма 3.1.8. *Если унар* $\langle A, f\rangle \cong F_1$ *или* $\langle A, f\rangle$ *содержит подунар изоморфный* F_1, *то* $\langle A, f\rangle$ *не является конгруэнц–когерентным.*

Доказательство. *Случай 1:* $\langle A, f\rangle \cong F_1$.

Тогда по предложению 1 [95], любая конгруэнция $\theta \in Con\langle A, f\rangle$ задается парой $(f^k(a), f^{k+d}(a))$, где $k,d \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим нетривиальную конгруэнцию θ_1 порожденную парой $(a, f^3(a))$ и подунар B порожденный элементом $f(a)$. Очевидно, подунар B содержит класс $[f(a)]\theta_1$, но $a \notin B$. Таким образом, подунар B не является объединением классов конгруэнции θ_1. Следовательно, унар $\langle A, f\rangle$ не является конгруэнц–когерентным.

Случай 2: $\langle A, f\rangle$ содержит подунар $\langle B, f\rangle \cong F_1$.

Рассмотрим расширение нетривиальной конгруэнцию θ_1 порожденной парой $(a,f^3(a))$ на унаре $\langle B, f\rangle$. Дальнейшие рассуждения аналогичны случаю 1. $\square$

Замечание 3.1.9. *Пусть $\langle A, f\rangle$ – неодноэлементный связный унар с одноэлементным подунаром, либо не имеющий узловых элементов, либо имеющий единственный узловой элемент, являющийся неподвижным. Пусть также a — неподвижный элемент унара $\langle A, f\rangle$. Тогда $\beta_n = \sigma_n$ и*

$$[a]\sigma_m = [a]\sigma_{m-1} \cup \left(\bigcup_{t(y)=m} [y]\sigma_{m-1} \right), \text{ причем } |[y]\sigma_{m-1}| = 1.$$

Доказательство. Из определения конгруэнций β_n, σ_n, следствия 1.3.6 и леммы 1.3.8 вытекает $\beta_n = \sigma_n$, где $n > 0$ (По определению $\beta_0 = \triangle = \sigma_0$).

Пусть $0 \leqslant n \leqslant t(A)$, $0 \leqslant m \leqslant t(A)$ и $n < m$. Тогда σ_n и σ_m — несовпадающие конгруэнции унара $\langle A, f\rangle$. Так как $0 \leqslant n \leqslant t(A)$, $0 \leqslant m \leqslant t(A)$, то найдутся такие элементы $b,c \in A$, для которых $t(b) = n$ и $t(c) = m$, причем, $b \neq c$, поскольку $n < m$. Предположим, что $[a]\sigma_n \supset [a]\sigma_m$. Так как $t(c) = m$, то $f^m(c) = a$. Учитывая, что $f^m(a) = a$, имеем $f^m(c) = f^m(a)$, откуда $c \in [a]\sigma_m$. Тогда $c \in [a]\sigma_n$. Следовательно, $f^n(c) = a$, и значит, $t(c) \leqslant n$, что противоречит условию $n < m$. Окончательно, $[a]\sigma_n \neq [a]\sigma_m$ (то есть $[a]\sigma_n \subset [a]\sigma_m$) для любых $n < m$. Так как $\beta_{m-1} = \sigma_{m-1}$, то для элемента $y \in A$ глубины $t(y) = m$ имеем $[y]\sigma_{m-1} = \{y\}$. $\square$

Пусть унарная операция f на A неинъективна, $\langle A_1, f\rangle$ подунар унара $\langle A, f\rangle$ и $f(x) = f(y) = v$ для некоторых различных элементов $x,y \in A_1$. Обозначим через $M = \{a \in A_1 | f(a) = v\}$. Для непустого собственного подмножества C множества M обозначим через

$$B_1 = \{b \in A_1 | f^k(b) = a, \text{ для некоторого } k > 0, \forall a \in C\} \text{ и}$$

$$B_2 = \{b \in A_1 | f^k(b) = a, \text{ для некоторого } k > 0, \forall a \in M \setminus C\}.$$

Обозначим через $D = A_1 \setminus (C \cup B_1 \cup B_3)$, где $B_3 \subseteq B_2$ (возможно $B_3 = \varnothing$). Таким образом, получили подунар $D_v = \langle D, f \rangle$ унара $\langle A, f \rangle$. Причем, если унар $\langle A, f \rangle$ связен, то $|\{x,y,v\}| = 3$ и глубина унара D_v больше 1.

Лемма 3.1.10. *Пусть $\langle A, \Omega \rangle$ — алгебра с оператором $f \in \Omega$. Пусть также*

1. операция f на A неинъективна;

2. $\langle A, f \rangle \ncong C_1^t$, $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;

3. подунар D_v унара $\langle A, f \rangle$ расширяется до подалгебры алгебры $\langle A, \Omega \rangle$;

Тогда алгебра $\langle A, \Omega \rangle$ не является конгруэнц–когерентной.

Доказательство. Пусть унар $\langle A, f \rangle$ удовлетворяет условиям леммы. Рассмотрим подунар D_v и конгруэнцию σ_1, где D_v и σ_1 как и выше. Если подунар D_v связен, то существуют различные элементы $a,b \in A$ отличные от v такие, что $f^2(a) = v$ или (и) $f^n(v) = b$, где $n > 0$. По построению подунар D_v содержит класс $[a]\sigma_1$ (или/ и класс $[b]\sigma_1$), но не является объединением классов конгруэнции σ_1. Таким образом, $\langle A, \Omega \rangle$ не является конгруэнц–когерентной.

Очевидно, что если подунар D_v несвязен, то D_v содержит некоторый класс конгруэнции σ_1. С другой стороны, D_v по построению не является объединением классов конгруэнции σ_1. Следовательно, $\langle A, \Omega \rangle$ не является конгруэнц–когерентной. □

Следствие 3.1.11. *Пусть унарная операция f на A неинъективна. Если унар $\langle A, f \rangle \ncong C_1^t$, $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, то $\langle A, f \rangle$ не является конгруэнц–когерентным.*

Предложение 3.1.12. *Пусть $\langle A, \Omega \rangle$ — произвольная алгебра с оператором $f \in \Omega$. Если $\langle A, f \rangle \cong C_n^0$, или $\langle A, f \rangle \cong C_n^0 + C_m^0$, или $\langle A, f \rangle \cong C_1^t$, где $n, m \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, то алгебра $\langle A, \Omega \rangle$ является конгруэнц–когерентной*

Доказательство. Случай когда $\langle A, f \rangle \cong C_n^0$ очевиден.

Пусть $\langle A, f \rangle \cong C_n^0 + C_m^0$ и B – подалгебра алгебры $\langle A, \Omega \rangle$. Так как B замкнута относительно операции f, то $\langle B, f \rangle$ – подунар унара $\langle A, f \rangle$. Поскольку f – оператор (эндоморфизм), то $Con\langle A, \Omega \rangle \subseteq Con\langle A, f \rangle$. По лемме 3.1.7, подунар

$\langle B, f\rangle$ является объединением классов любой неединичной конгруэнции алгебры $\langle A, \Omega\rangle$. Таким образом, подалгебра B алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ является объединением классов любой неединичной конгруэнции алгебры $\langle A, \Omega\rangle$. Следовательно, алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ является конгруэнц–когерентной.

Пусть теперь $\langle A, f\rangle \cong C_1^t$, $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Обозначим через a неподвижный элемент унара $\langle A, f\rangle$. Из предложения 1 [96] вытекает, что любая подалгебра B алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ является классом $[a]\sigma_s$, $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и глубина подунара $\langle B, f\rangle$ равна s. По замечанию 3.1.9, для $n < s$ имеем, B – объединение классов конгруэнции σ_n. Для ∇_A и σ_m, где $m > s$, утверждение очевидно. Так как в этом случае B не содержит класса рассматриваемых конгруэнций. □

Из предложения 3.1.12 и предложения 1.3.15 вытекает

Следствие 3.1.13. *Если унар $\langle A, f\rangle \cong C_1^t$, $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, то $\langle A, f\rangle$ является конгруэнц–когерентным.*

Теорема 3.1.14. *Унар $\langle A, f\rangle$ является конгруэнц–когерентным тогда и только тогда, когда $\langle A, f\rangle$ – один из унаров следующего вида:*

1. *C_n^0, $n \in \mathbb{N}$;*
2. *$C_n^0 + C_m^0$ для некоторых $n, m \in \mathbb{N}$;*
3. *C_1^t, $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

Доказательство. *Необходимость.* Если операция f на A неинъективна и унар $\langle A, f\rangle \ncong C_1^t$, $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, то по следствию 3.1.11, унар $\langle A, f\rangle$ не является конгруэнц–когерентным. Откуда, имеем случай 3.

Если операция f на A инъективна, то по предложению 3.1.5 и лемме 3.1.8 имеем случаи 1 и 2.

Достаточность. Пусть унар $\langle A, f\rangle$ удовлетворяет условию 1 или условию 2, то по лемме 3.1.7 он конгруэнц–когерентен.

Пусть теперь унар $\langle A, f\rangle$ удовлетворяет условию 3, то по следствию 3.1.13, он конгруэнц–когерентен. □

3.2 Модификации когруэнц–когерентности

Универсальная алгебра A, имеющая нульарную операцию 0, называется *слабо когерентной* [97], если для любой подалгебры B алгебры A и любой конгруэнции θ алгебры A условие $[0]\theta \subseteq B$ влечет $[x]\theta \subseteq B$ для любого $x \in B$.

Универсальная алгебра A, имеющая нульарную операцию 0, называется *локально когерентной* [98], если для любой подалгебры B алгебры A и любой конгруэнции θ алгебры A из того, что $[x]\theta \subseteq B$ для некоторого $x \in B$ следует $[0]\theta \subseteq B$.

Как показано в [97] алгебра конгруэнц–когерентна тогда и только тогда, когда она локально и слабо когерентна.

Чтобы алгебра $\langle A, \Omega \rangle$, с нульарной операцией 0 была алгеброй с оператором $f \in \Omega$, необходимо и достаточно, чтобы $f(0) = 0$. Нульарная операция 0, заданная на унаре $\langle A, f \rangle$ условием $f(0) = 0$ часто рассматривается в теории унаров. В этом случае алгебру $\langle A, f, 0 \rangle$ называют *унаром с нулем.*

Пусть унарная операция f на A неинъективна, $\langle A_1, f \rangle$ подунар унара $\langle A, f \rangle$ и $f(x) = f(y) = v$ для некоторых различных элементов x,$y \in A_1$. Обозначим через $M = \{a \in A_1 | f(a) = v\}$. Для непустого собственного подмножества C множества M обозначим через $B_1 = \{b \in A_1 | f^k(b) = a,$ для некоторого $k > 0, \forall a \in C\}$ и $B_2 =$ $= \{b \in A_1 | f^k(b) = a,$ для некоторого $k > 0, \forall a \in M \setminus C\}$. Обозначим через $D = A_1 \setminus (C \cup B_1 \cup B_3)$, где $B_3 \subseteq B_2$ (возможно $B_3 = \varnothing$). Подалгебру $\langle D, f, 0 \rangle$ унара с нулем $\langle A, f, 0 \rangle$ обозначим через D_0, если $v = 0$ и D_v^0 в противном случае. Причем, если $\langle A, f, 0 \rangle$ связен, то $|\{x,y,0\}| = 3$ и глубина унара D_0 больше 1.

Как и лемма 3.1.10 доказываются следующие две леммы.

Лемма 3.2.1. *Пусть $\langle A, \Omega \rangle$ — алгебра с оператором $f \in \Omega$ и нульарной операцией $0 \in \Omega$. Пусть также*

1. *операция f на A неинъективна;*

2. $\langle A, f, 0\rangle \ncong C_1^t$, *$t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;*

3. подунар D_v^0 *унара* $\langle A, f\rangle$ *расширяется до подалгебры алгебры* $\langle A, \Omega\rangle$*;*

Тогда алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ *не является слабо когерентной.*

Лемма 3.2.2. *Пусть* $\langle A, \Omega\rangle$ *— алгебра с оператором* $f \in \Omega$ *и нульарной операцией* $0 \in \Omega$*. Пусть также*

1. операция f *на* A *неинъективна;*

2. $\langle A, f, 0\rangle \ncong C_1^t$, *$t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;*

3. подунар D_0 *унара* $\langle A, f\rangle$ *расширяется до подалгебры алгебры* $\langle A, \Omega\rangle$*;*

Тогда алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ *не является локально когерентной.*

Лемма 3.2.3. *Пусть* $\langle A, \Omega\rangle$ *— алгебра с оператором* $f \in \Omega$ *и нульарной операцией* $0 \in \Omega$*. Пусть также*

1. $\langle A, f, 0\rangle$ *— связный унар с нулем* 0*;*

2. существует узловой элемент $v \in A$ *отличный от* 0*;*

3. существует единственный элемент $a \in A$ *глубины* $k > t(v) + 1$*;*

4. Если глубина унара $t(A) < \infty$*, то* $t(v) \neq t(A) - 1$*;*

5. подунар D_v^0 *унара* $\langle A, f\rangle$ *расширяется до подалгебры алгебры* $\langle A, \Omega\rangle$*;*

Тогда алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ *не является локально когерентной.*

Доказательство. Пусть унар $\langle A, f\rangle$ удовлетворяет условиям леммы. По условию существуют различные элементы x,y,$a \in A$ такие, что $f(x) = f(y) = v$ и $t(a) \geqslant t(v) + 2$. Рассмотрим подунар D_v^0 такой, что $a \in D_v^0$, и конгруэнцию $\sigma_{t(x)}$. Без ограничения общности, пусть $f^m(a) = x$, где $m > 0$. По построению подунар D_v^0 не содержит класс $[0]\sigma_{t(x)}$. По определению конгруэнции $\sigma_{t(x)}$, подунар D_v^0 содержит класс $[a]\sigma_{t(x)}$. Таким образом, алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ не является локально когерентной. □

3.3 Конгруэнц-когерентные унары с мальцевской операцией

Теорема 3.3.1. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ – алгебра с оператором f, где $d(x_1,x_2,x_3)$ – операция, определенная по одному из правил* (2)–(5)*. Алгебра $\langle A, d, f\rangle$ является конгруэнц–когерентной тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

1. *операция f на A является инъективной;*
2. *унар $\langle A, f\rangle$ содержит такой элемент a, что $f(x) = a$ для любого $x \in A$, где $|A| \geqslant 3$;*
3. *унар $\langle A, f\rangle$ изоморфен C_1^t для некоторого $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть алгебра $\langle A, d, f\rangle$ не удовлетворяет условиям 1–3. Тогда по лемме 3.1.10, алгебра $\langle A, d, f\rangle$ не является конгруэнц–когерентной.

Достаточность. Пусть алгебра $\langle A, d, f\rangle$ удовлетворяет условию 1 или условию 2, то по теореме 1.3.16 алгебра конгруэнц-проста. Следовательно, алгебра $\langle A, d, f\rangle$ конгруэнц–когерентна.

Пусть теперь алгебра $\langle A, d, f\rangle$ удовлетворяет условию 3, то по предложению 3.1.12 она конгруэнц–когерентна. □

Лемма 3.3.2. *Пусть $\langle A, d, f, 0\rangle$ — алгебра с оператором f, где $d(x_1,x_2,x_3)$ – операция, определенная по одному из правил* (2)–(5)*, и нульарной операцией* 0*, для которой* $f(0) = 0$*. Пусть также $\langle A, f\rangle$ — связный унар с узловым элементом $v \in A$, где $v \neq 0$. Если глубина унара $t(A) < \infty$, то $t(v) \neq t(A) - 1$. Тогда алгебра $\langle A, d, f, 0\rangle$ не является локально когерентной.*

Доказательство. Пусть унар $\langle A, f\rangle$ удовлетворяет условиям леммы. По условию существуют различные элементы x,y,$a \in A$ такие, что $f(x) = f(y) = v$ и $t(a) \geqslant t(v) + 2$. Без ограничения общности, пусть $f^m(a) = x$, где $m > 0$. Рассмотрим подунар $C_1^{t(a)}$ с образующим a и конгруэнцию $\beta_{t(x)}$. По построению подунар $C_1^{t(a)}$ не содержит класс $[0]\beta_{t(x)}$. По определению конгруэнции $\beta_{t(x)}$, подунар $C_1^{t(a)}$ содержит класс $[a]\beta_{t(x)}$. Таким образом, алгебра $\langle A, d, f, 0\rangle$ не является локально когерентной. $\square$

Лемма 3.3.3. *Пусть $\langle A, d, f, 0\rangle$ — алгебра с оператором f, где $d(x_1,x_2,x_3)$ – операция, определенная по одному из правил* (2)–(5), *и нульарной операцией* 0, *для которой $f(0) = 0$. Пусть также связный унар $\langle A, f\rangle$ содержит единственный узловой элемент* 0. *Тогда алгебра $\langle A, d, f, 0\rangle$ является слабо когерентной.*

Доказательство. Возможны два случая.

Случай 1: $t(A) = 1$.

По теореме 1.3.16 алгебра $\langle A, d, f, 0\rangle$ является конгруэнц–простой. Следовательно, алгебра $\langle A, p, f, 0\rangle$ слабо когерентна.

Случай 2: $t(A) > 1$.

По лемме 1.3.8 имеем, что любая неединичная конгруэнция алгебры $\langle A, d, f\rangle$ имеет вид σ_n для некоторого $n \geqslant 0$. При этом любая подалгебра $\langle B, d, f, 0\rangle$ алгебры $\langle A, d, f, 0\rangle$ либо не содержит класс $[0]\sigma_n$, либо содержит класс $[0]\sigma_n$ для некоторого $n > 0$.

Случаи когда подалгебра $\langle B, d, f, 0\rangle$ не содержит класс $[0]\sigma_n$, либо является классом $[0]\sigma_n$ для некоторого $n > 0$, очевидны.

Рассмотрим случай когда подалгебра $\langle B, d, f, 0\rangle$ строго содержит класс $[0]\sigma_n$. Тогда существует элемент $b \in B$ такой, что $b \notin [0]\sigma_n$. Следовательно, $t(b) > n$. Тогда по определению конгруэнции σ_n имеем, что $[b]\sigma_n = \{b\}$. Откуда,

$$B = [0]\sigma_n \cup \left(\bigcup_{b \in B, t(b) > n} [b]\sigma_n \right).$$

Для любого $m < n$ подалгебра $\langle B, d, f, 0\rangle$ содержит класс $[0]\sigma_m$. По замечанию 3.1.9 и рассмотренному выше получаем, что подалгебра $\langle B, d, f, 0\rangle$ содержит класс $[0]\sigma_m$ и является объединение классов конгруэнции σ_m. Таким образом, алгебра $\langle A, d, f, 0\rangle$ слабо когерентна. $\square$

Теорема 3.3.4. *Пусть* $\langle A, d, f, 0\rangle$ *— алгебра с оператором* f*, где* $d(x_1,x_2,x_3)$ *– операция, определенная по одному из правил* (2)–(5)*, и нульарной операцией* 0*, для которой* $f(0) = 0$*. Алгебра* $\langle A, d, f, 0\rangle$ *является слабо когерентной тогда и только тогда, когда унар* $\langle A, f\rangle$ *является одним из следующих:*

1. *произвольный унар с инъективной операцией;*
2. *связный унар, который не содержит узловых элементов, за исключением, может быть, элемента* 0*;*
3. *сумма унаров из пунктов 1 и 2.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть алгебра $\langle A, d, f, 0\rangle$ не удовлетворяет условиям 1–3. Тогда по лемме 3.2.1, алгебра $\langle A, d, f, 0\rangle$ не является слабо когерентной.

Достаточность. Пусть алгебра $\langle A, d, f, 0\rangle$ удовлетворяет условию 1, то по теореме 1.3.16 она конгруэнц-проста. Следовательно, алгебра $\langle A, d, f, 0\rangle$ слабо когерентна.

Пусть теперь алгебра $\langle A, d, f, 0\rangle$ удовлетворяет условию 2, тогда по лемме 3.3.3 алгебра слабо когерентна. Пусть алгебра $\langle A, d, f, 0\rangle$ удовлетворяет условию 3, то по лемме 3.3.3 и лемме 1.3.9 алгебра является слабо когерентной. □

Теорема 3.3.5. *Пусть* $\langle A, d, f, 0\rangle$ *— алгебра с оператором* f*, где* $d(x_1,x_2,x_3)$ *– операция, определенная по одному из правил* (2)–(5)*, и нульарной операцией* 0*, для которой* $f(0) = 0$*. Алгебра* $\langle A, d, f, 0\rangle$ *является локально когерентной тогда и только тогда, когда унар* $\langle A, f\rangle$ *является одним из следующих:*

1. *произвольный унар, содержащий одноэлементную компоненту связности, порожденную* 0*;*
2. *унар, в котором для всех* $x \in A$ *выполняется* $f(x) = 0$*, где* $|A| \geqslant 3$*;*
3. *унар* $C_1^t, t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$*;*
4. *связный унар конечной глубины* $t(A)$*, в котором существует единственный узловой элемент* $a \neq 0$*, глубина которого равна* $t(A) - 1$*, и других узловых элементов нет.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть алгебра $\langle A, d, f, 0\rangle$ не удовлетворяет условиям 1–4. Тогда по леммам 3.2.2 и 3.3.2, алгебра $\langle A, d, f, 0\rangle$ не является локально когерентной.

Достаточность. Пусть алгебра $\langle A, d, f, 0\rangle$ удовлетворяет условию 1. Пусть θ — нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, d, f, 0\rangle$ и $a \in A\backslash\{0\}$. Так как элементы a и 0 лежат в разных компонентах связности, то $k(a,b) = \infty$. Тогда, по лемме 1.3.4, $(b,c) \notin \theta$. Таким образом, $[0]\theta$ – одноэлементный класс конгруэнции θ. Поскольку, любая подалгебра алгебры $\langle A, d, f, 0\rangle$ содержит элемент 0, то алгебра $\langle A, d, f, 0\rangle$ локально когерентна.

Пусть теперь алгебра $\langle A, d, f, 0\rangle$ удовлетворяет условию 2 или условию 3, то по теореме 1.3.16 она конгруэнц-проста. Следовательно, алгебра $\langle A, d, f, 0\rangle$ локально когерентна.

Пусть алгебра $\langle A, d, f, 0\rangle$ удовлетворяет условию 4. Пусть θ — нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, d, f, 0\rangle$ и $\langle B, d, f, 0\rangle$ — собственная подалгебра алгебры $\langle A, d, f, 0\rangle$. Предположим, что алгебра $\langle A, d, f, 0\rangle$ не локально когерентна. Тогда существует элемент $x \in A$ такой, что $[x]\theta \subseteq B$, но $[0]\theta \nsubseteq B$. Значит существуют элементы $a \in A \setminus B$ и $b \in B$ такие, что $a,b \in [0]\theta$. Без ограничения общности, пусть $t(b) \leqslant t(a)$. Тогда по лемме 2.1.4 и следствию 2.1.6, $\theta = \beta_{t(a)}$. По определению конгруэнции $\beta_{t(a)}$, $[0]\theta = [0]\beta_{t(a)}$. Откуда, не существует элемента $x \in A$ такого, что $[x]\beta_{t(a)} \subseteq B$, что противоречит предположению. Таким образом, алгебра $\langle A, d, f, 0\rangle$ локально когерентна. $\square$

Глава 4. Алгебры без собственных подалгебр

Приведем результаты исследований алгебр без собственных подалгебр.

И. В. Львов в работе [99] показал, что

1. Если A — алгебра над полем k с ассоциативными степенями, то либо $A \simeq k$, либо $A = kx$, $x^2 = 0$.
2. Если A — конечная алгебра без подалгебр, то многообразие var$A$, порожденное A, конечнобазируемо.

В работе В. А. Артамонова [100] доказано, что если A — алгебра без подалгебр над конечным полем $\mathbb{F}_q$ и $d = \dim_{\mathbb{F}_q} A$ – простое число, причем в A нет нильпотентов (элементов, в некоторой степени $n > 1$ равны нулю при любой расстановке скобок), то Aut$A$ — конечная циклическая группа. Более того, в клоне производных операций на $A = \mathbb{F}_{q^d}$ лежит операция

$$x \cdot y = \lambda x^{q^i} y^{q^j}, \lambda \in \mathbb{F}_{q^d} \setminus \mathbb{F}_{q^d}^{q^i+q^j-1}, i,j \in \mathbb{Z}/d;$$

причем $\mathbb{F}_{q^d}$ с таким умножением $x \cdot y$ является алгеброй без подалгебр.

В. А. Артамоновым [101] показано, что изучение k-алгебр без подалгебр над произвольным коммутативно-ассоциативным кольцом k с единицей сводится к случаю, когда k — поле. Кроме того, строится пример 6-мерной алгебры без подалгебр с бесконечной неабелевой группой автоморфизмов и при некоторых предположениях описываются алгебры простой размерности без подалгебр, но с неединичной группой автоморфизмов.

А. Сендрей [102] описала конечные простые сюръективные алгебры без собственных подалгебр.

Заметим, что алгебрами без собственных подалгебр в классе унаров являются только циклы.

В. Н. Салий [103] описал конечные автоматы без выхода, не имеющие собственных подавтоматов.

К. Каарли и О. Пиксли [104] показали, что арифметическое многообразие конечного типа является аффинно полным тогда и только тогда, когда оно порождается конечной алгеброй без собственных подалгебр. В работах К. Каарли и О. Пиксли [105; 106] алгебру без собственных подалгебр называют минимальной алгеброй. Данные работы посвящены изучению многообразий, порожденных минимальными алгебрами.

К. Каарли и Л. Марки [107] дается абстрактная характеристика обратных моноидов, которые появляются как моноиды би-конгруэнций конечных минимальных алгебр, порождающих арифметические многообразия.

Поскольку криптографические преобразования используют квазигрупповые операции, то важную роль играют конечные квазигруппы, в которых нет подквазигрупп.

В работе В А. Артамонова [108] рассматриваются конечные квазигруппы без подквазигрупп. Им показано, что полиномиально полные квазигруппы с этим свойством квазипримальны. Это означает, что операция в квазигруппе термовая (является главной производной операцией в смысле А. Г. Куроша) тогда и только тогда, когда она перестановочна со всеми автоморфизмами квазигруппы.

4.1 Унарные алгебры без собственных подалгебр

Теорема 4.1.1. *Пусть $A = \langle A, \Omega \rangle$ — унарная алгебра,* $\mathrm{Graph}(A)$ *— граф унарной алгебры, а X — полугруппа, порожденная операциями из Ω относительно композиции отображений. Следующие условия эквивалентны:*

1. *алгебра A не имеет собственных подалгебр;*
2. *псевдоорграф* $\mathrm{Graph}(A)$ *сильно связный;*
3. *полугруппа X действует транзитивно на множестве A;*
4. *алгебра A является сильно связной.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$ Пусть ориентированный псевдограф $\mathrm{Graph}(A)$ не является сильно связным. Покажем, что алгебра A имеет собственную подалгебру. Поскольку ориентированный псевдограф $\mathrm{Graph}(A)$ не является сильно связным, то существуют такие различные $s,t \in A$, что не существует пути из s в t. Рассмотрим подалгебру $S = \langle S, \Omega \rangle$ алгебры A, порожденную множеством $\{s\}$. Очевидно, $S \neq \varnothing$. Покажем, что $A \neq S$. Предположим противное, то есть $A = S$. Поскольку алгебра S порожденна множеством $\{s\}$, то существует путь из s в t — противоречие с предположением. Таким образом, S — собственная подалгебра алгебры A.

$2 \Rightarrow 3$ Поскольку ориентированный псевдограф $\mathrm{Graph}(A)$ является сильно связным, то для любых $a,b \in A$ существует такое слово $x \in X$, что $x(a) = b$.

$3 \Rightarrow 4$ и $4 \Rightarrow 1$ Следуют из определений.

$\square$

Следствие 4.1.2. *Пусть $A = \langle A, \Omega \rangle$ — унарная алгебра,* $\mathrm{Graph}(A)$ *— граф унарной алгебры. Вершины графа* $\mathrm{Graph}(A)$*, из которых нет пути в некоторую другую вершину, являются порождающими собственных подалгебр алгебры A.*

Заметим, что при интерпретации унарной алгебры как псевдоорграфа для отсутствия собственных подалгебр достаточно некоторых операций из сигнатуры.

Рассмотрим пример такой алгебры.

Пример 4.1.3. *Пусть $A = \langle A, f, g, h \rangle$, где $A = \{1, 2, 3\}$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$, $g(1) = 2$, $g(2) = 1$, $g(3) = 3$, $h(1) = 3$, $h(2) = 2$ и $h(3) = 2$.*

При интерперетации операции f на множестве A как орграф получаем сильно связный орграф (рис. 4.1а). Аналогично, если в начале интерпретировать операции g и h на A как орграф, имеем сильно связный орграф (рис. 4.1б).

Рисунок 4.1 — Графы унарных алгебр

Следствие 4.1.4. *Автомат без выхода (возможно, бесконечный) не имеет собственных подавтоматов тогда и только тогда, когда его диаграмма Мура — сильно связный ориентированный псевдограф.*

Следствие 4.1.5. *Атомами решетки подалгебр унарной алгебры являются ее сильно связные подалгебры и только они.*

Следствия 4.1.4 и 4.1.5 — обобщения результата В. Н. Салия [103] на случай бесконечного автомата без выхода.

Модификации и обобщения понятия конечного автомата можно найти в [109, с. 31].

4.2 Алгоритм проверки отсутствия подалгебр и построения собственных подалгебр унарной алгебры

Опишем алгоритм, который проверяет отсутствие подалгебр или находит собственные подалгебры и порождающие их элементы унарной алгебры, носитель и сигнатура которой конечны.

По теореме 4.1.1, условие отсутствия собственных подалгебр унарной алгебры $A = \langle A, \Omega \rangle$ эквивалентно тому, что псевдоорграф $\mathrm{Graph}(A)$ унарной алгебры сильно связный. Более того, по следствию 4.1.2, вершины графа

Graph(A), из которых нет пути в некоторую другую вершину, являются порождающими подалгебр алгебры A.

Рассмотрим унарную алгебру $A = \langle A, \Omega \rangle$, носитель и сигнатура которой конечны. Пусть $|A| = n$. В качестве элементов алгебры возьмем целые неотрицательные числа. Представим каждую операцию $f_i \in \Omega$ данной унарной алгебры в виде списка f_i. Элементу списка соответствует результат сигнатурной операции на данном элементе. Тогда сигнатуру унарной алгебры можно представить в виде списка Ω списков унарных операций. Кроме того, унарную алгебру в данном случае можно отождествить с представлением ее сигнатуры в виде списка списков унарных операций. Длина каждого вложенного списка равна n, поэтому мы всегда знаем носитель рассматриваемой алгебры.

Этапы работы данного алгоритма можно описать следующим образом.

Вход: унарная алгебра $A = \langle A, \Omega \rangle$ в виде списка Ω.

Выход: матрица достижимости графа Graph(A) и список однопорожденных подалгебр с порождающими элементами.

1. Преобразовать унарную алгебру A в псевдоорграф Graph$(A) = (A, E)$.
2. Определить является ли псевдограф Graph(A) из пункта 1 сильно связным или нет. В случае если он сильно связный, то унарная алгебра A не имеет собственных подалгебр. В противном случае, вершины псевдографа Graph(A) из которых нет пути в некоторую другую вершину являются порождающими подалгебр алгебры A.

Для реализации пункта 1 необходимо прочитать список Ω и в виде множества E записать все упорядоченные пары $(a, f_i(a))$.

Пункт 2 может быть сведен к поиску кратчайших путей в графе с единичными весами и найден, например, алгоритмом Уоршалла [110] или многократным применением поиска в глубину.

При этом будем заполнять матрицу достижимости, в которой хранится информация о существовании путей между вершинами псевдоорграфа Graph(A).

Далее необходимо проверить матрицу достижимости на наличие путей из любой вершины псевдоорграфа $\mathrm{Graph}(A)$ в любую другую. Затем согласно теореме 4.1.1 и следствию 4.1.2 сделать вывод.

Автору известно, что существуют алгоритмы проверки графа на сильную связность за линейное время (см. например, [111]). При использовании приведенного выше алгоритма, в случае если алгебра имеет собственные подалгебры, то за один проход алгоритма мы получаем информацию о порождающих подалгебры заданной унарной алгебры и носителях этих подалгбр.

Поскольку любая конечная алгебра конечно порождена, то используя найденые однопорожденные подалгебры, можно, построить решетку $\mathrm{Sub}A$ подалгебр исходной унарной алгебры A.

4.3 Изотопия унарных алгебр

Определение 4.3.1. *Унарная алгебра с системой операций S на непустом множестве A изотопна унарой алгебре с системой унарных операций S', если имеются перестановки π,σ на A, такие, что отображение $f \to \sigma f \pi$ задает биекцию между S и S'.*

Полагаем, что $f \circ g(x) = f(g(x))$.

Предложение 4.3.2. *Пусть $A = \langle A, \Omega \rangle$ – унарная алгебра, носитель и сигнатура которой конечны. Если Ω содержит хотя бы одну инъективную операцию, то A изотопна алгебре без собственных подалгебр.*

Доказательство. Пусть $|A| = n$ и $f \in \Omega$ – инъективна. Возможны два случая.

Случай 1: Унар $\langle A, f \rangle$ является циклом длины n. Тогда алгебра A не имеет собственных подалгебр. Значит в качестве π и σ можно взять тождественную подстановку.

Случай 2: Унар $\langle A, f\rangle$ является суммой k независимых циклов длин $l_1, \ldots, l_k$ соответственно.

Тогда операции f соответствует подстановка $\tau_1\tau_2\ldots\tau_k$ являющаяся произведением независимых циклов длин $l_1, \ldots, l_k$ соответственно. Возьмем в качестве $\sigma = \tau_k^{l_k-1}\ldots\tau_2^{l_2-1}\tau_1^{l_1-1}$ и $\pi = (a_1a_2\ldots a_n)$, где $a_i \in A$. Тогда $\sigma f\pi = = \tau_k^{l_k-1}\ldots\tau_2^{l_2-1}\tau_1^{l_1-1} \circ \tau_1\tau_2\ldots\tau_k \circ (a_1a_2\ldots a_n) = (a_1a_2\ldots a_n)$. Значит, алгебра $A' = \langle A, \Omega'\rangle$, где $\sigma f\pi \in \Omega'$, не имеет собственных подалгебр. $\square$

Теорема 4.3.3. *Конечный унар $\langle A, f\rangle$ изотопен унару без собственных подунаров тогда и только тогда, когда операция f – инъективна.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть операция f – неинъективна и унар A изотопен унару без собственных подунаров, то есть циклу длины n. Тогда $\sigma f\pi$ – инъективно. Но композиция инъективного и неиъективного отображений неинъективна, то отображение $\sigma f\pi$ – неинъективно. Получили противоречие.

Известно, что любой унар A с неинъективной операцией имеет собственный подунар. В данном случае, цикл длины $m < |A|$.

Достаточность следует из предложения 4.3.2. $\square$

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Описаны коатомы, дополнения и копсевдодополнения в решетках конгруэнций М-алгебр $\langle A, d, f \rangle$.
2. Описаны М-алгебры $\langle A, d, f \rangle$, решетки конгруэнций которых являются решетками с дополнениями, с копсевдодополнениями или геометрическими.
3. Описаны конгруэнц-когерентные унары, а также конгруэнц-когерентные, слабо и локально когерентных М-алгебр $\langle A, d, f \rangle$.
4. Найдены эквивалентные условия отсутствия подалгебр для унарной алгебры. Описаны конечные унары изотопные унару без собственных подунаров.

Дальнейшее изучение производных структур и объектов универсальных алгебр, в частности алгебр с операторами, является перспективным направлением исследовательской деятельности.

Список литературы

1. *Пинус, А. Г.* Производные структуры универсальных алгебр / А. Г. Пинус. — Новосибирск : Издательство НГТУ, 2007. — 204 с.
2. *Бэр, Р.* Линейная алгебра и проективная геометрия / Р. Бэр. — М. : ИЛ, 1955. — 399 с.
3. *Судзуки, М.* Строение группы и строение структуры ее подгрупп / М. Судзуки. — М. : ИЛ, 1960. — 158 с.
4. *Плоткин, Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем / Б. И. Плоткин. — М. : Наука, 1966. — 603 с.
5. *Крылов, П. А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов / П. А. Крылов, А. В. Михалёв, А. А. Туганбаев. — М. : Факториал Пресс, 2006. — 512 с.
6. *Шеврин, Л. Н.* Полугруппы и их полугрупповые решетки. Ч.1. Полугруппы с некоторыми типами решеток подполугрупп и решеточные характеристики классов полугрупп / Л. Н. Шеврин, А. Я. Овсянников. — Свердловск : Уральский гос. университет, 1990. — 238 с.
7. *Лаллеман, Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения: Пер. с англ. / Ж. Лаллеман ; под ред. Л. Н. Шеврина. — М. : Мир, 1985. — 440 с.
8. *Howie, J. M.* Fundamentals of Semigroup Theory. London Mathematical Society Monographs. New Series, 12 / J. M. Howie. — Oxford : The Clarendon Press, 1995. — x+351 p.
9. *Kilp, M.* Monoids, acts and categories. With applications to wreath products and graphs. A handbook for students and researchers / M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev. — Berlin : Walter de Gruyter, 2000. — xvii + 529 p.

10. *Кожухов, И. Б.* Избранные вопросы теории полугрупп: представления и многообразия полугрупп / И. Б. Кожухов, А. В. Михалёв, А. В. Тищенко. — М. : Национальный Открытый Университет "ИНТУИТ", 2021. — 160 с.

11. *Гретцер, Г.* Общая теория решеток: Пер. с англ. / Г. Гретцер ; под ред. В. М. Смирнова. — М. : Мир, 1982. — 456 с.

12. *Биркгоф, Г.* Теория решеток: Пер. с англ. / Г. Биркгоф. — М. : Наука, 1984. — 568 с.

13. *Салий, В. Н.* Решетки с единственными дополнениями / В. Н. Салий. — М. : Наука, 1984. — 128 с.

14. *Chajda, I.* Congruence classes in universal algebra / I. Chajda, G. Eigenthaler, H. Länger. — Lemgo : Heldermann Verlag, 2003. — 218 p.

15. *Бунина, Е. И.* Элементарная и близкие к ней логические эквивалентности классических и универсальных алгебр / Е. И. Бунина, А. В. Михалёв, А. Г. Пинус. — М. : МЦНМО, 2015. — 360 с.

16. *Skornjakov, L. A.* Unars / L. A. Skornjakov // Colloq. Math. Soc. János Bolyai. — 1982. — Vol. V 29. Universal Algebra (Esztergom 1977). — P. 735—743.

17. *Карташов, В. К.* О некоторых результатах и нерешенных задачах теории унарных алгебр / В. К. Карташов // Чебышевский сб. — 2011. — Т. 12, выпуск 2. — С. 18—26.

18. *Скорняков, Л. А.* О гомологической классификации моноидов / Л. А. Скорняков // Сиб. матем. журн. — 1969. — Т. 10, №5. — С. 1139—1143.

19. *Скорняков, Л. А.* Об инъективности всех упорядоченных левых полигонов над моноидом / Л. А. Скорняков // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 1986. — №3. — С. 17—19.

20. *Скорняков, Л. А.* Обобщения модулей / Л. А. Скорняков // Модули III. Препринт. Новосибирск. — 1973. — С. 22—27.

21. Теоретико-модельные свойства регулярных полигонов / А. В. Михалёв [и др.] // Фунд. и прикл. матем. — 2004. — Т. 10, выпуск 4. — С. 107—157.

22. Теоретико-модельные свойства свободных, проективных и плоских S-полигонов / В. Гоулд [и др.] // Фунд. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, выпуск 7. — С. 63—110.

23. *Кильп, М.* К гомологической классификации моноидов / М. Кильп // Сиб. матем. журн. — 1972. — Т. 13, №3. — С. 578—586.

24. *Кожухов, И. Б.* Полугруппы, над которыми все полигоны резидуально конечны / И. Б. Кожухов // Фундаментальная и прикладная математика. — 1998. — Т. 4, №4. — С. 1335—1344.

25. *Кожухов, И. Б.* Проективные и инъективные полигоны над вполне простыми полугруппами / И. Б. Кожухов, А. О. Петриков // Фундаментальная и прикладная математика. — 2016. — Т. 21, №1. — С. 123—133.

26. *Кожухов, И. Б.* Инъективные и проективные полигоны над вполне 0-простой полугруппой / И. Б. Кожухов, А. О. Петриков // Чебышевский сб. — 2016. — Т. 17, выпуск 4. — С. 65—78.

27. *Кожухов, И. Б.* Полигоны над полугруппами: избранные вопросы структурной теории / И. Б. Кожухов, А. В. Михалёв // Фундамент. и прикл. матем. — 2020. — Т. 23, вып. 3. — С. 141—199.

28. *Imreh, B.* On finite nilpotent automata / B. Imreh // Acta Cybernetica. — 1981. — Vol. 5, No. 3. — P. 281—293.

29. *Imreh, B.* On finite definite automata / B. Imreh // Acta Cybernetica. — 1985. — Vol. 7, No. 1. — P. 61—65.

30. *Bogdanović, S.* The lattice of subautomata of an automaton: A survey / S. Bogdanović, M. Ćirić, T. Petković // Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. — 1998. — Vol. 64, No. 78. — P. 165—182.

31. *Bogdanović, S.* Lattices of subautomata and direct sum decompositions of automata / S. Bogdanović, M. Ćirić // Algebra Colloq. — 1999. — Vol. 6, No. 1. — P. 71—88.

32. *Grätzer, G.* Characterizations of congruence lattices of abstract algebras / G. Grätzer, E. T. Schmidt // Acta Sci. Math. — 1963. — Vol. 24. — P. 34—59.

33. *Курош, А. Г.* Общая алгебра. Лекции 1969-1970 учебного года / А. Г. Курош. — М. : Наука, 1974. — 160 с.

34. *Varlet, J. C.* Endomorphisms and fully invariant congruences in unary algebras $<A; f>$ / J. C. Varlet // Bulletin de la Soc. Royale des Sciences de Liege. — 1970. — Vol. 39, №11—12. — P. 575—589.

35. *Berman, J.* On the congruence lattices of unary algebras / J. Berman // Proc. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 36, No. 1. — P. 34—38.

36. *Егорова, Д. П.* О структуре конгруэнций унарной алгебры / Д. П. Егорова, Л. А. Скорняков // Упорядоченные множества и решетки: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. — 1977. — Вып. 4. — С. 28—40.

37. *Бощенко, А. П.* Псевдодополнения в решетке конгруэнций унаров / А. П. Бощенко // Алгебраические системы: : Межвуз. сб. научн. р. Волгоград: ВГПИ. — 1989. — С. 23—26.

38. *Бощенко, А. П.* О копсевдодополнениях в решетках конгруэнций унаров / А. П. Бощенко // Универсальная алгебра и ее приложения: Тез. сообщ. участ. междунар. семинара, посвящ. памяти проф. Моск. гос. ун-та Л. А. Скорнякова. Волгоград: Перемена. — 1999. — С. 39—44.

39. *Карташова, А. В.* О конечных решетках топологий коммутативных унарных алгебр / А. В. Карташова // Дискретная математика. — 2009. — Т. 21, №3. — С. 119—131.

40. *Карташова, А. В.* Коммутативные унарные алгебры с линейно упорядоченной решеткой конгруэнций / А. В. Карташова // Математические заметки. — 2014. — Т. 95, №1. — С. 80—92.

41. *Карташов, В. К.* Об условиях дистрибутивности и модулярности решеток конгруэнций коммутативных унарных алгебр / В. К. Карташов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, выпуск 4. — С. 52—57.

42. *Птахов, Д. О.* Решетки конгруэнций полигонов / Д. О. Птахов, А. А. Степанова // Дальневост. матем. журн. — 2013. — Т. 13, номер 1. — С. 107—115.

43. *Халиуллина, А. Р.* Конгруэнции полигонов над группами / А. Р. Халиуллина // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, номер 4(2). — С. 133—137.

44. *Халиуллина, А. Р.* Конгруэнции полигонов над полугруппами правых нулей / А. Р. Халиуллина // Чебышевский сб. — 2013. — Т. 14, номер 3. — С. 142—146.

45. *Халиуллина, А. Р.* Условия модулярности решётки конгруэнций полигона над полугруппой правых или левых нулей / А. Р. Халиуллина // Дальневост. матем. журн. — 2015. — Т. 15, номер 1. — С. 102—120.

46. *Казак, М. С.* Решетки конгруэнций полигонов над вполне упорядоченным моноидом / М. С. Казак, А. А. Степанова // Сиб. электрон. матем. изв. — 2019. — Т. 16. — С. 1147—1157.

47. *Степанова, А. А.* S-полигоны над вполне упорядоченным моноидом с модулярной решеткой конгруэнций / А. А. Степанова // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. — 2021. — Т. 35. — С. 87—102.

48. *Степанова, А. А.* Конгруэнц-перестановочные полигоны / А. А. Степанова, С. Г. Чеканов // Сиб. матем. журн. — 2022. — Т. 63, №1. — С. 202—208.

49. *Wenzel, G. H.* Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $<A; f>$ / G. H. Wenzel // Archiv der Mathematik. — 1970. — Vol. 21. — P. 256—264.

50. *Ройз, Е. Н.* О подпрямо неразложимых монарах / Е. Н. Ройз // Упорядоченные множества и решетки: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. — 1974. — Т. 21, Выпуск 2. — С. 80—84.

51. *Bogdanović, S.* Traps, cores, extensions and subdirect decompositions of unary algebras / S. Bogdanović, M. Ćirić, T. Petković // Fundamenta Informaticae. — 1999. — Vol. 38, no. 1—2. — P. 51—60.

52. *Ježek, B.* Homomorphic images of finite subdirectly irreducible unary algebras / B. Ježek, P. Marković, D. Stanovsky // Czechoslovak Mathematical Journal. — 2007. — Vol. 57. — P. 671—677.

53. *Ésik, Z.* Subdirectly irreducible commutative automata / Z. Ésik, B. Imreh // Acta Cybernetica. — 1981. — Vol. 5, no. 3. — P. 251—260.

54. *Ćirić, M.* Subdirectly irreducible definite, reverse definite, and generalized definite automata / M. Ćirić, B. Imreh, M. Styeinby // Publ. Elektroteh. Fak., Univ. Beogr., Ser. Mat. — 1999. — Vol. 10. — P. 69—79.

55. *Кожухов, И. Б.* Полугруппы с финитно аппроксимируемыми полигонами / И. Б. Кожухов, А. Р. Халиуллина // Мат. заметки СВФУ. — 2014. — Т. 21, №3(83). — С. 60—67.

56. *Кожухов, И. Б.* Характеризация подпрямо неразложимых полигонов / И. Б. Кожухов, А. Р. Халиуллина // ПДМ. — 2015. — Номер 1(27). — С. 5—16.

57. *Мальцев, А. И.* К общей теории алгебраических систем / А. И. Мальцев // Математический сборник. — 1954. — Т. 35, №1. — С. 3—20.

58. *Day, A.* A characterization of modularity for congruence lattices of algebras / A. Day // Canad. Math. Bull. — 1969. — Vol. 12, №1. — P. 167—173.

59. *Jonsson, B.* Algebras whose congruence lattices are distributive / B. Jonsson // Math. Scand. — 1969. — Vol. 21, №1. — P. 110—121.

60. *Pixley, A. F.* Distributivity and permutability of congruence relations in equational classes of algebras / A. F. Pixley // Proc. Amer. Math. Soc. — 1963. — Vol. 14, N 1. — P. 105—109.

61. *Хобби, Д.* Строение конечных алгебр: Пер. с англ. / Д. Хобби, Р. Маккензи ; под ред. В. А. Горбунова, Ю. Л. Ершова. — М. : Мир, 1993. — 287 с.

62. *Карташов, В. К.* Об унарах с мальцевской операцией / В. К. Карташов // Универсальная алгебра и ее приложения: Тез. сообщ. участ. междунар. семинара, посвящ. памяти проф. Моск. гос. ун-та Л.А. Скорнякова. Волгоград: Перемена. — 1999. — С. 31—32.

63. *Усольцев, В. Л.* Свободные алгебры многообразия унаров с мальцевской операцией p, заданного тождеством $p(x,y,x) = y$ / В. Л. Усольцев // Чебышевский сб. — 2011. — Т. 12, Вып. 2(38). — С. 127—134.

64. *Усольцев, В. Л.* О строго простых тернарных алгебрах с операторами / В. Л. Усольцев // Чебышевский сб. — 2013. — Т. 14, Вып. 4(48). — С. 196—204.

65. *Усольцев, В. Л.* О подпрямо неразложимых унарах с мальцевской операцией / В. Л. Усольцев // Известия Волг. гос. пед. ун-та, серия "Естественные и физико-математические науки". — 2005. — Т. 4, №4(13). — С. 17—24.

66. *Usol'tsev, V. L.* Subdirectly Irreducible Algebras in One Class of Algebras with One Operator and the Main Near-Unanimity Operation / V. L. Usol'tsev // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2021. — Vol. 42, Iss. 1. — P. 206—216.

67. *Усольцев, В. Л.* Простые и псевдопростые алгебры с операторами / В. Л. Усольцев // Фунд. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, Вып. 7. — С. 189—207.

68. *Усольцев, В. Л.* О полиномиально полных и абелевых унарах с мальцевской операцией / В. Л. Усольцев // Уч. зап. Орловского гос. ун-та. — 2012. — Т. 6(50), Ч. 2. — С. 229—236.

69. *Мальцев, А. И.* Алгебраические системы / А. И. Мальцев. — М. : Наука, 1970. — 392 с.

70. Общая алгебра. Т.2 / В. А. Артамонов [и др.] ; под ред. Л. А. Скорнякова. — М. : Наука, 1991. — 480 с.

71. *Burris, S.* A course in universal algebra / S. Burris, H. P. Sankappanavar. — Graduate Texts in Math. : Springer-Verlag, 1981. — xvi + 315 p.

72. *Смирнов, Д. М.* Многообразия алгебр / Д. М. Смирнов. — Новосибирск : ВО "Наука". Сибирская издательская фирма, 1992. — 205 с.

73. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев [и др.]. — М. : Наука, 1990. — 384 с.

74. *Гаврилов, Г. П.* Задачи и упражнения по дискретной математике: учебное пособие / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. — М. : Физматлит, 2009. — 416 с.

75. *Карташов, В. К.* Квазимногообразия унаров / В. К. Карташов // Мат. заметки. — 1980. — Т. XXVII, N1. — С. 7—20.

76. *Карташов, В. К.* Квазимногообразия унаров с конечным числом циклов / В. К. Карташов // Алгебра и логика. — 1980. — Т. 19, N 2. — С. 173—193.

77. *Карташов, В. К.* О решетках квазимногообразий унаров / В. К. Карташов // Сиб. Мат. журнал. — 1985. — Т. XXVI, N3. — С. 49—62.

78. *Szendrei, Á.* Clones in universal algebra / Á. Szendrei. — Montréal : Les presses de l'Université de Montréal, 1986. — 166 p.

79. *Maróti, M.* Existence theorems for weakly symmetric operations / M. Maróti, R. McKenzie // Algebra Universalis. — 2008. — Vol. 59. — P. 463—489.

80. *Усольцев, В. Л.* О гамильтоновом замыкании на классе алгебр с одним оператором / В. Л. Усольцев // Чебышевский сб. — 2015. — Т. 16, Вып. 4(56). — С. 284—302.

81. *Усольцев, В. Л.* Алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в одном классе алгебр с оператором и основной операцией почти единогласия / В. Л. Усольцев // Чебышевский сб. — 2016. — Т. 17, Вып. 4. — С. 157—166.

82. *Усольцев, В. Л.* Строение атомов в решетках конгруэнций алгебр одного класса унаров с мальцевской операцией / В. Л. Усольцев // Современные проблемы гуманит. и ест. наук: Мат. XVIII Межд. науч.-практ. конф. М.: Спецкнига. — 2014. — С. 39—44.

83. *Geiger, D.* Coherent algebras / D. Geiger // Notices Amer. Math. Soc. — 1974. — Vol. 21, A—436.

84. *Taylor, W.* Uniformity of congruences / W. Taylor // Algebra Universalis. — 1974. — Vol. 4. — P. 342—360.

85. *Beazer, R.* Coherent De Morgan algebras / R. Beazer // Algebra Universalis. — 1987. — Vol. 24, Issue 1. — P. 128—136.

86. *Adams, M. E.* Congruence distributive double p–algebras / M. E. Adams, M. Atallah, R. Beazer // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1996. — Vol. 39, issue 2. — P. 71—80.

87. *Duda, J.* $A \times A$ congruence coherent implies A congruence regular / J. Duda // Algebra Universalis. — 1991. — Vol. 28, Issue 2. — P. 301—302.

88. *Blyth, T. S.* Congruence coherent double MS-algebras / T. S. Blyth, J. Fang // Glasgow Math. J. — 1999. — Vol. 41, Issue 2. — P. 289—295.

89. *Blyth, T. S.* Congruence Coherent Symmetric Extended de Morgan Algebras / T. S. Blyth, J. Fang // Studia Logica. — 2007. — Vol. 87. — P. 51—63.

90. *Chajda, I.* Rees algebras and their varieties / I. Chajda, J. Duda // Publ. Math. (Debrecen). — 1985. — Vol. 32. — P. 17—22.

91. *Chajda, I.* Rees ideal algebras / I. Chajda // Math. Bohem. — 1997. — Vol. 122, No. 2. — P. 125—130.

92. *Šešelja, B.* On a characterization of Rees varieties / B. Šešelja, A. Tepavčević // Tatra Mountains Mathematical Publications. — 1995. — Vol. 5. — P. 61—69.

93. *Duda, J.* Rees sublattices of a lattice / J. Duda // Publ. Math. — 1988. — Vol. 35, Issue 2. — P. 77—82.

94. *Varlet, J. C.* Nodal filters in semilattices / J. C. Varlet // Comm. Math. Univ. Carolinae. — 1973. — Vol. 14. — P. 263—277.

95. *Егорова, Д. П.* Структура конгруэнций унарной алгебры / Д. П. Егорова // Упорядоченные множества и решетки: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. — 1978. — Вып. 5. — С. 11—44.

96. *Усольцев, В. Л.* О гамильтоновых тернарных алгебрах с операторами / В. Л. Усольцев // Чебышевский сб. — 2014. — Т. 15, Вып. 3. — С. 100—113.

97. *Chajda, I.* Weak coherence of congruences / I. Chajda // Czechoslovak Math. J. — 1991. — Vol. 41, No. 1. — P. 149—154.

98. *Chajda, I.* Locally coherent algebras / I. Chajda // Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Math. — 1999. — Vol. 38, No. 1. — P. 43—48.

99. *Львов, И. В.* О конечности базиса тождеств некоторых неассоциативных колец / И. В. Львов // Алгебра и логика. — 1974. — Т. 14, Вып. 1. — С. 15—27.

100. *Artamonov, V. A.* On finite algebras of prime dimension without proper subalgebras / V. A. Artamonov // J. Algebra. — 1976. — Vol. 42, No. 1. — P. 247—260.

101. *Артамонов, В. А.* Об алгебрах без собственных подалгебр / В. А. Артамонов // Матем. сб. — 1977. — Т. 104, Вып. 3. — С. 428—459.

102. *Szendrei, A.* Simple Surjective Algebras Having no Proper Subalgebras / A. Szendrei // Journal of the Australian Mathematical Society. — 1990. — Vol. 48. — P. 434—454.

103. *Салий, В. Н.* Универсальная алгебра и автоматы : Учеб. пособие для студентов мех.-мат. фак. / В. Н. Салий. — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1988. — 72 с.

104. *Kaarli, K.* Affine complete varieties / K. Kaarli, A. F. Pixley // Algebra Universalis. — 1987. — Vol. 24, issue 1—2. — P. 74—90.

105. *Kaarli, K.* Weakly diagonal algebras and definable principal congruences / K. Kaarli, A. F. Pixley // Algebra Universalis. — 2006. — Vol. 55, issue 2. — P. 203—212.

106. *Kaarli, K.* Congruence computations in principal arithmetical varieties / K. Kaarli, A. F. Pixley // Algebra Universalis. — 2018. — Vol. 79, Article number: 88. — P. 1—15.

107. *Kaarli, K.* A characterization of the inverse monoid of bi-congruences of certain algebras / K. Kaarli, L. Márki // International Journal of Algebra and Computation. — 2009. — Vol. 19, No. 6. — P. 791—808.

108. *Артамонов, В. А.* Автоморфизмы конечных квазигрупп без подквазигрупп / В. А. Артамонов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. — 2020. — Т. 7 (65), Вып. 2. — С. 197—209.

109. *Кудрявцев, В. Б.* Введение в теорию автоматов / В. Б. Кудрявцев, С. В. Алёшин, А. С. Подкользин. — М. : Наука, 1985. — 320 с.

110. *Warshall, S.* A Theorem on Boolean Matrices / S. Warshall // Journal of the ACM. — 1962. — Vol. 9. — P. 11—12.

111. *Tarjan, R.* Depth-first search and linear graph algorithms / R. Tarjan // SIAM Journal on Computing. — 1972. — Vol. 1, Issue 2. — P. 146—160.

Публикации автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI

112. *Лата, А. Н.* О коатомах и дополнениях в решетках конгруэнций унаров с мальцевской операцией / А. Н. Лата // Чебышевский сб. — 2015. — Т. 16, Вып. 4. — С. 212—226.

113. *Лата, А. Н.* О конгруэнц–когерентных алгебрах Риса и алгебрах с оператором / А. Н. Лата // Чебышевский сб. — 2017. — Т. 18, Вып. 2. — С. 154—172.

114. *Лата, А. Н.* Унарные алгебры без собственных подалгебр / А. Н. Лата // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 2020. — №6. — С. 60—63.

Другие публикации

115. *Лата, А. Н.* О конгруэнц-когерентных унарах и унарах с мальцевской операцией / А. Н. Лата // Материалы международной конференции по алгебре, анализу и геометрии, посвященной юбилеям выдающихся профессоров Казанского университета, математиков Петра Алексеевича (1895-1944) и Александра Петровича (1926-1998) Широковых, и молодежной школы-конференции по алгебре, анализу, геометрии. — Казань : Казанский университет, изд-во Академии наук РТ, 2016. — С. 230—231.

116. *Лата, А. Н.* О конгруэнц-когерентных и близких к ним унарах с мальцевской операцией / А. Н. Лата // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: межвуз. сб. науч. тр. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, — 2016. — С. 55—57.

117. *Лата, А. Н.* О свойствах конгруэнций алгебр в некоторых классах алгебр с оператором / А. Н. Лата // Алгебра и теория алгоритмов: Всероссийская конференция, посвященная 100-летию факультета математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета : сборник материалов. — Иваново : Иван. гос. ун-т, 2018. — С. 122—124.

118. *Лата, А. Н.* Unary Algebras without proper Subalgebras / А. Н. Лата // Международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения профессора А.Г.Куроша. Тезисы докладов. — М. : Издательство МГУ, 2018. — С. 248—249.

119. *Лата, А. Н.* О конгруэнц–когерентных алгебрах Риса и алгебрах с оператором / А. Н. Лата // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2017» / Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. — М. : МАКС Пресс, 2017. — С. 122—124. — URL: https://conf.msu.ru/archive/Lomonosov_2017/data/10841/uid141237_report.pdf.

120. *Лата, А. Н.* Унарные алгебры без собственных подалгебр / А. Н. Лата // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2019» / Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. — М. : МАКС Пресс, 2019. — URL: https://conf.msu.ru/archive/Lomonosov_2019/data/16175/94274_uid141237_report.pdf.

121. *Лата, А. Н.* Производные структуры унарных алгебр / А. Н. Лата // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020» / Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. — М. : МАКС Пресс, 2020. — URL: https://conf.msu.ru/archive/Lomonosov_2020/data/19357/106761_uid141237_report.pdf.

122. *Лата, А. Н.* О изотопии унарных алгебр / А. Н. Лата // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: Современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XX Международной конференции, посвященной 130-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова. — Тула : Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2022. — С. 47—48.