

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

---

Физический факультет

*На правах рукописи*

Квашенникова Анастасия Валерьевна

**Численное моделирование генерации волны разностной  
частоты в трёхмерных ультразвуковых пучках в условиях  
сильного проявления нелинейности среды**

Специальность:  
1.3.7. Акустика

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:

кандидат физико-математических  
наук Юлдашев Петр Викторович

доктор физико-математических наук,  
доцент Хохлова Вера Александровна

---

МОСКВА – 2024

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Список сокращений .....	4
Введение .....	5
Глава 1 Теоретические модели, используемые для описания нелинейных взаимодействий в поле параметрического излучателя .....	18
§ 1.1 Теория Вестервельта.....	22
§ 1.2 Уравнения Вестервельта и Хохлова-Заболотской-Кузнецова как модели для описания параметрической генерации низкочастотного излучения.....	24
§ 1.3 Приближение плоских волн при двухчастотном взаимодействии волн накачки.....	25
1.3.1 Квазилинейные решения.....	25
1.3.2 Модели, учитывающие образование разрывов в профиле нелинейной плоской волны	27
§ 1.4 Учет дифракционных эффектов при описании параметрических взаимодействий.....	28
1.4.1 Квазилинейные решения.....	28
1.4.2 Разрывные 2D и 3D решения.....	29
§ 1.5 Эффект самодемодуляции высокочастотной импульсной волны накачки ....	31
§ 1.6 Численные алгоритмы для описания параметрических взаимодействий .....	32
1.6.1 Спектральный подход к решению уравнения ХЗК .....	33
1.6.2 Временной подход к решению уравнения ХЗК .....	37
1.6.3 Комбинированный подход к решению уравнения ХЗК.....	38
1.6.4 Дополнительные замечания к существующим численным алгоритмам, описывающим работу параметрических излучателей .....	39
§ 1.7 Выводы к первой главе .....	40
Глава 2 Нелинейные взаимодействия волн накачки в приближении плоских волн .	42
§ 2.1 Уравнение Бюргерса в безразмерном виде .....	43
§ 2.2 Спектральный подход к численному моделированию двухчастотного взаимодействия волн накачки.....	44
2.2.1 Пороговый метод прореживания спектра в нелинейном алгоритме.....	47
2.2.2 Частотная фильтрация методом учета вклада от пар взаимодействующих гармоник.....	51
2.2.3 Выводы ко второму параграфу.....	54
§ 2.3 Временной подход на основе удароулавливающей схемы типа Годунова.....	55
2.3.1 Сравнение спектрального и временного подходов при двухчастотном взаимодействии волн накачки.....	58
2.3.2 Моделирование генерации низкочастотного излучения в случае мощной импульсной накачки.....	59
2.3.3 Выводы к третьему параграфу.....	68
§ 2.4 Выводы ко второй главе .....	70
Глава 3 Двухчастотное взаимодействие волн накачки в квазилинейном приближении в трехмерной постановке .....	72
§3.1 Генерация волны разностной частоты в дифрагирующем пучке волн накачки .....	73

3.1.1 Система параболических уравнений в квазилинейном приближении и ее решение в спектральном представлении на основе метода переменных направлений 73	
3.1.2 Постановка реалистичных граничных условий на излучателе сложной геометрии.....	75
3.1.3 Сравнение конечно-разностного алгоритма и точного решения в виде интеграла Рэлея для линейной задачи .....	78
<b>§3.2 Результаты квазилинейного моделирования .....</b>	<b>80</b>
<b>§3.3 Сравнение численных результатов с известными аналитическими решениями .....</b>	<b>84</b>
<b>§ 3.4 Выводы к третьей главе.....</b>	<b>85</b>
<b>Глава 4 Трехмерная задача о генерации волны разностной частоты при двухчастотном взаимодействии волн накачки в разрывных режимах в свободном поле.....</b>	<b>87</b>
<b>§ 4.1 Спектральный численный алгоритм решения нелинейного уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова .....</b>	<b>87</b>
<b>§ 4.2 Результаты нелинейной и квазилинейной моделей для полей волн накачки и разностной частоты в присутствии разрывов.....</b>	<b>89</b>
4.2.1 Поведение пучка на оси и дифракционная расходимость в квазилинейном, переходном и ударноволновом режимах распространения.....	89
4.2.2 Профили и спектры нелинейной волны в различных режимах распространения.....	94
<b>§ 4.3 Эффективность генерации волны разностной частоты .....</b>	<b>95</b>
<b>§ 4.4 Выводы к четвертой главе .....</b>	<b>98</b>
<b>Глава 5 Особенности генерации и распространения волны разностной частоты в неоднородной среде на примере мелководного акустического волновода .....</b>	<b>101</b>
<b>§ 5.1 Уравнение Хохлова-Заболотской-Кузнецова в неоднородной среде.....</b>	<b>102</b>
5.1.1 Модели неоднородных сред и границ.....	103
<b>§ 5.2 Квазилинейное моделирование .....</b>	<b>104</b>
<b>§ 5.3 Разрывный режим в однородном волноводе.....</b>	<b>106</b>
<b>§ 5.4 Выводы к пятой главе .....</b>	<b>108</b>
<b>Основные результаты и выводы.....</b>	<b>110</b>
<b>Благодарности .....</b>	<b>112</b>
<b>Публикации автора по теме диссертации.....</b>	<b>113</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>114</b>

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

1. ВРЧ – волна разностной частоты.
2. ВЧ – высокочастотный.
3. НЧ – низкочастотный.
4. Уравнение ХЗК – уравнение Хохлова-Заболотской-Кузнецова.
5. ЛЧМ – линейная частотная модуляция.

## ВВЕДЕНИЕ

### Актуальность работы

При распространении в нелинейной среде двух интенсивных исходно гармонических волн с близкими частотами в первом приближении происходит генерация двух кратных, суммарной и разностной спектральных компонент, которые затем участвуют в каскадных процессах образования множества новых гармоник как вверх, так и вниз по спектру. Поскольку поглощение в среде увеличивается с частотой, например, квадратично в термовязкой среде, то на некотором удалении от источника все высокочастотные компоненты затухают, и происходит формирование низкочастотного излучения преимущественно на разностной частоте, но также включающего в себя и другие комбинационные низкочастотные составляющие спектра, которое затем начинает распространяться независимо от начального возбуждения. В таком случае говорят, что среда выполняет роль бестелесной параметрической антенны бегущей волны, впервые описанной в работах П. Вестервельта (США) 1960-х годов [1–2]. Независимо эта идея также была предложена В.А. Зверевым и А.И. Калачевым в СССР [3], изменив существующие представления о невозможности формирования узконаправленного пучка низкочастотного излучения излучателями небольших размеров. Так как диаграмма направленности сгенерированного параметрическим образом излучения на разностной частоте определяется областью нелинейного взаимодействия волн накачки, а не размерами излучателя, и составляет порядка нескольких градусов без боковых лепестков [4–5], то важным преимуществом параметрической генерации звука является возможность использования малогабаритных (по сравнению с длиной волны низкочастотного излучения) высокочастотных излучателей. Среди недостатков стоит отметить небольшую эффективность преобразования энергии волн накачки в энергию волны разностной частоты, которая, однако, может быть увеличена при использовании более мощных параметрических излучателей и более сильного проявления нелинейных эффектов. Отметим, что генерация волны разностной частоты при двухчастотном нелинейном взаимодействии гармонических волн является частным случаем явления самодемодуляции, когда высокочастотный спектр мощного импульса волны накачки трансформируется в область низких частот, а его форма определяется поведением огибающей исходного импульса [6].

Ряд упомянутых выше преимуществ нелинейной генерации низкочастотного звука делает параметрические антенны одним из важных инструментов большого числа теоретических и экспериментальных исследований в области подводной акустики [6–22],

аэроакустики [23–42] и медицинской акустики [43–48]. Так, в подводной акустике низкочастотный сигнал, формируемый высокочастотным параметрическим излучателем, способен без существенного поглощения распространяться на значительные дистанции и обеспечивать хорошее пространственное разрешение в силу узкой направленности, что используется, например, для профилирования донных структур [13–19]. В задачах изучения океана на протяженных трассах [20–21] и обеспечения подводной связи [22], помимо вышеперечисленных преимуществ, использование низкочастотного параметрического излучения уменьшает эффекты многолучевости при распространении на дальние дистанции. В воздушных приложениях параметрические громкоговорители применяются для создания высоконаправленных пучков слышимого звука, например, в системах активного шумоподавления [31], музыкальной акустике [32] или системах таргетного общения с пользователем в библиотеках и музеях [33]. Среди медицинских приложений можно отметить метод ультразвуковой визуализации на разностной частоте, позволяющий различать такие свойства тканей, которые не видны при гармонической ультразвуковой визуализации [43–44], метод контрастной визуализации упругости материалов [45], а также использование свойств параметрически сгенерированных низких частот в качестве альтернативы МРТ-системам, например, для обнаружения опухолей головного мозга [46]. Кроме того, в современных медицинских исследованиях [47] изучается возможность использования параметрических излучателей для увеличения эффективности HIFU-терапии (“HIFU” от англ. высокоинтенсивный фокусированный ультразвук) [49] не за счет большего поглощения ультразвуковой энергии пучка, а за счет улучшенной динамики пузырьков и связанного с этим усиления нагрева целевой области. Предположительно, параметрическая генерация волны разностной частоты при двухчастотной накачке может быть использована для мониторинга температуры в режиме реального времени, а также оценки степени теплового воздействия ультразвука на ткань во время HIFU-терапии, поскольку сгенерированное в области фокуса низкочастотное излучение на разностной частоте зависит от степени термической абляции ткани в этой зоне [48].

В современных исследованиях при теоретическом описании процесса генерации и распространения волны разностной частоты используются различные модели. Наиболее общий подход при решении трехмерных задач состоит в моделировании конечно-разностными методами нелинейной системы уравнений для сжимаемой сплошной среды с вязкостью [34]. Однако получение решений такой системы даже для радиально-симметричных источников сопряжено с большими вычислительными затратами. Более удобной моделью для практического использования является однонаправленное

уравнение Вестервельта, учитывающее эффекты нелинейности, дифракции и термовязкого поглощения [2], которое изначально использовалось для получения аналитических оценок амплитуды давления на разностной частоте в дальнем поле излучателя в предположении, что нелинейное взаимодействие плоских волн накачки ограничено ближней зоной. В некоторых современных работах уравнение Вестервельта решается численно, например, конечно-разностными методами во временном [35–36] или спектральном [37–42] представлении. Однако все эти модели построены либо с использованием приближения квазилинейности [35–41], либо при умеренном проявлении нелинейных эффектов [42], поэтому не позволяют с хорошей точностью описывать режимы образования разрывов в профиле высокоинтенсивных волн накачки, то есть, когда нелинейное преобразование сигнала наиболее эффективно.

Более простой моделью при расчете полей параметрических излучателей является параболическое уравнение Хохлова-Заболотской-Кузнецова (ХЗК) [50], которое может быть использовано при условии, что дифракционная расходимость как высокочастотных волн накачки, так и генерируемой низкочастотной компоненты составляет менее  $\pm 15^\circ$  [51]. Ранее были разработаны различные алгоритмы для численного моделирования нелинейных акустических пучков, основанные на уравнении ХЗК, в спектральном (Бергенский код) [52–57] и временном (Техасский код) [58–61] представлении, а также при использовании комбинированного подхода [62–67]. При моделировании параметрических взаимодействий используются существующие алгоритмы на основе уравнения ХЗК [51, 68–73], а также широкий класс аналитических и полуаналитических решений [4–7, 11, 74–80], которые включают различные приближения при задании начальных условий на излучателе, описывающих геометрию расхождения пучка, длину взаимодействия, нелинейные и дифракционные эффекты. Большинство исследований параметрических взаимодействий основаны на использовании квазилинейных или слабо нелинейных подходов [4–7, 35–42, 68–69, 71–72, 76–80] и включают предположение об осевой симметрии пучка [4, 6, 51, 68–69, 71–74, 76–79]. Однако параметрические излучатели могут иметь не осесимметричную форму, и в этом случае задача о параметрических взаимодействиях становится принципиально трехмерной. Кроме того, поскольку эффективность параметрических излучателей увеличивается при переходе к сильно нелинейным режимам работы, то в ряде задач может быть недостаточным использование квазилинейного приближения, и необходимо учитывать сильное проявление нелинейных эффектов с образованием ударных фронтов в профиле волны.

Описанные ограничения, накладываемые на численное моделирование параметрических взаимодействий, связаны со сложностями расчета нелинейных

взаимодействий в трехмерном волновом поле в среде из-за необходимости учета большого числа взаимодействующих спектральных компонент. Это накладывает высокие требования на объем оперативной памяти для хранения данных числовых массивов и приводит к длительным временам работы алгоритма, делая такие задачи не реализуемыми на практике. Поэтому нелинейный спектральный алгоритм на основе уравнения ХЗК для описания параметрических взаимодействий в 3D был ранее реализован лишь для относительно малого отношения частот волн накачки к разностной частоте, что уменьшает необходимое число спектральных компонент [70]. Кроме того, моделировались умеренно нелинейные режимы распространения волн в акустическом пучке, генерируемом прямоугольным параметрическим излучателем в воздухе. В этом случае достаточно сильно сказываются эффекты поглощения, например, по сравнению с водной средой, что приводит к образованию менее крутых ударных фронтов и менее широкому спектру. В другой работе [73], наиболее близкой к изложенным в настоящей диссертации исследованиям, для решения задачи о нелинейной трансформации высокочастотного мощного осесимметричного импульсного сигнала в низкочастотное излучение применяется комбинированный подход к решению уравнения ХЗК с использованием временного алгоритма для описания эффектов нелинейности и поглощения и спектрального – для описания дифракции [67].

Таким образом, построение трехмерных моделей, описывающих нелинейные взаимодействия волн для источников с произвольным соотношением частот накачки и разностной частоты и степенью проявления нелинейных эффектов, а также учитывающих дифракционные эффекты как для волн накачки, так и для волны разностной частоты, все еще находится в стадии активных исследований и поэтому является актуальной задачей, которой посвящена настоящая диссертационная работа. Кроме того, развитый в диссертации полный нелинейный трехмерный алгоритм решения уравнения ХЗК впервые обобщается для исследования распространения волны разностной частоты в более сложных средах, таких как мелководные волноводы [12–13, 20–21, 81–85], с учетом неоднородностей скорости звука в толще воды и отражений от дна и поверхности.

### **Цель и задачи работы**

**Целью** диссертационной работы является разработка трехмерной численной модели нелинейных взаимодействий высокочастотных волн накачки, включающей ударноволновые режимы распространения в неоднородной среде, и исследование на ее основе параметрических процессов генерации и распространения волны разностной частоты. В рамках указанной цели решались следующие **задачи**:



1. Реализовать численные одномерные модели для описания нелинейных взаимодействий с помощью уравнения Бюргера: в спектральном представлении для двухчастотного взаимодействия волн накачки и во временном представлении при импульсном начальном возбуждении среды. Разработать оптимальные нелинейные алгоритмы для обеспечения возможности решения трехмерных задач в разрывных режимах, исследовать особенности параметрических взаимодействий плоских волн.

2. Реализовать трехмерный квазилинейный конечно-разностный алгоритм решения нелинейного параболического уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова для описания дифракции волн накачки и волны разностной частоты для реалистичных начальных условий на параметрическом излучателе, имеющем структуру многоэлементной решетки.

3. Разработать трехмерную полную нелинейную численную модель решения уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова в спектральном представлении с фильтрацией частот при двухчастотном взаимодействии волн накачки в режимах распространения с сильным проявлением нелинейных эффектов. Продемонстрировать отличия результатов моделирования с полученными при использовании квазилинейного подхода на основе анализа амплитудных характеристик и характеристик направленности пучков волн накачки и волны разностной частоты, а также эффективности генерации параметрического излучения.

4. Исследовать особенности нелинейной генерации волны разностной частоты в неоднородных средах и при наличии отражений от границ в различных нелинейных режимах работы параметрического излучателя.

### **Объект и предмет исследования**

Объектом исследования в диссертационной работе являются нелинейные взаимодействия одномерных и трехмерных ультразвуковых полей волн накачки, создаваемые высокочастотным параметрическим излучателем, и генерируемое ими поле низкочастотного излучения. Предметом исследования являются пространственно-временные структуры акустических полей и их характеристики (амплитуда давления, интенсивность, мощность, энергия, направленность).

### **Методология исследования**

Проведенные в диссертации исследования основаны на известных результатах классических и современных работ, посвященных вопросам генерации и распространения низкочастотного излучения, формируемого при параметрическом взаимодействии волн накачки. Представленная работа дополняет и обобщает их на случай трехмерной постановки задачи для реалистичных начальных условий на параметрическом излучателе,

способном работать в режимах сильного проявления нелинейных эффектов, а также на случай волноводного распространения в неоднородных средах.

Численное моделирование параметрических взаимодействий в приближении плоской нелинейной задачи в рамках уравнения Бюргерса, а также построение алгоритмов для решения трехмерной дифракционной задачи в квазилинейном приближении на основе уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова в свободном поле и в присутствии границ для однородных и неоднородных сред осуществлялись автором в среде программирования MATLAB R2022a на персональном компьютере. Алгоритм полного нелинейного моделирования решений трехмерного уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова для различных сред был реализован на языке FORTRAN 2003 с применением технологии OpenMP для осуществления параллельных вычислений на высокопроизводительном сервере, что позволило существенно сократить время расчетов. При этом необходимые модификации кода, анализ получаемых решений для акустических полей и представление результатов осуществлялось автором.

### **Научная новизна**

1. Разработаны новые спектральный и временной алгоритмы для описания нелинейных волновых взаимодействий на основе уравнения Бюргерса, оптимизированные для расчета режимов распространения с сильным проявлением нелинейных эффектов. Спектральный алгоритм включает новый метод прореживания спектра для практической реализации трехмерных задач при двухчастотной накачке. Временной удароуправляющий алгоритм в случае импульсной накачки более эффективен по сравнению с существующими.

2. Реализован трехмерный алгоритм решения уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова для описания дифракции волн накачки и волны разностной частоты при ее генерации в квазилинейной модели для реалистичных условий на плоском параметрическом излучателе произвольной формы и без приближений, связанных с описанием геометрии расхождения пучков накачки, их длины взаимодействия и дифракционных эффектов для волны разностной частоты.

3. Разработан трехмерный алгоритм решения уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова в разрывных режимах генерации волны разностной частоты в спектральном представлении с фильтрацией частот. Продемонстрированы отличия результатов моделирования в квазилинейном и ударноволновом режимах, а также наибольшая эффективность работы параметрического излучателя при сильном проявлении нелинейных эффектов.

4. Исследованы особенности генерации волны разностной частоты в квазилинейном и сильно нелинейном режимах работы параметрического излучателя в неоднородных средах и в присутствии границ.

#### **Практическая значимость работы**

1. Разработанные спектральный и временной алгоритмы расчета нелинейного оператора эволюционных уравнений нелинейной акустики обеспечивают возможность решения трехмерных задач о параметрических взаимодействиях при разумных временных затратах и затратах на требуемую память для хранения данных во время работы алгоритма.

2. Реализованный трехмерный алгоритм решения уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова в квазилинейном приближении позволяет описывать дифракционные эффекты как для волны накачки, так и для низкочастотного излучения в случае произвольной формы плоских параметрических излучателей и не требует использования дополнительных приближений.

3. Разработанный трехмерный полный нелинейный спектральный алгоритм позволяет рассчитывать поля параметрических излучателей сложной геометрии и с произвольным соотношением взаимодействующих частот бигармонической волны накачки в режимах сильного проявления нелинейных эффектов, а также определять оптимальные режимы излучения накачки с целью увеличения выходной мощности на разностной частоте при сохранении желаемой направленности пучка.

4. Представленная численная модель может быть модифицирована для описания распространения в неоднородных средах и в присутствии границ, как, например, в случае мелководного акустического волновода, что обеспечивает более точное описание эффектов, происходящих в условиях реальных экспериментов.

#### **Положения, выносимые на защиту**

1. Оптимизация нелинейного спектрального алгоритма для расчета двухчастотных волновых взаимодействий позволяет уменьшить число спектральных компонент, необходимых для корректного описания режимов работы параметрического излучателя в условиях сильного проявления нелинейных эффектов, с нескольких тысяч до десятков при сохранении точности расчета амплитуды давления волны разностной частоты с ошибкой в пределах 2–3%, и делает практически реализуемым решение трехмерных задач.

2. Временное представление на основе удароуправляющей схемы типа Годунова эффективно для описания нелинейной демодуляции высокочастотных импульсов в

ударноволновых режимах, поскольку требует использования 2–3 узлов временной сетки на разрыв против порядка 50 в существующих схемах.

3. Численный алгоритм на основе квазилинейного представления трехмерного уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова описывает дифрагирующие пучки волн накачки и волны разностной частоты с достаточно высокой направленностью без приближений при задании начальных условий на излучателе, длины взаимодействия волн накачки и геометрии задачи. Приближенные аналитические решения количественно верно описывают амплитуду давления низкочастотного излучения лишь в ближнем поле излучателя и только на оси пучка.

4. Параметрические процессы в ударноволновых режимах распространения существенно отличаются от квазилинейных: сильное проявление нелинейных эффектов приводит к дополнительному уменьшению амплитуды на оси и уширению диаграммы направленности пучка волны разностной частоты. При этом ударноволновой режим работы параметрического излучателя является наиболее эффективным для генерации низкочастотного излучения, и эффективность перекачки энергии из высокочастотной части спектра в разностную частоту возрастает с увеличением начальной мощности на излучателе без эффекта насыщения. Разработанная трехмерная нелинейно-дифракционная модель позволяет определять оптимальные режимы работы параметрических излучателей с точки зрения увеличения мощности низкочастотного излучения на разностной частоте, но при этом оставаясь в рамках необходимой для конкретных физических задач направленности пучка.

5. Разработанный нелинейный алгоритм позволяет исследовать параметрические процессы генерации низкочастотного излучения, в том числе, в режимах сильного проявления нелинейных эффектов, в средах с пространственными неоднородностями скорости звука, а также при наличии отражений от границ (например, дна и поверхности), которые приводят к большей локализации и дальности распространения низкочастотного излучения.

#### **Достоверность результатов**

Достоверность и обоснованность представленных в диссертационной работе результатов подтверждается проверочными численными экспериментами, а также соответствием результатов численных экспериментов априорной информации, аналитическим расчетам и результатам, полученным в работах других авторов.

### **Апробация работы**

Результаты представленных в диссертации исследований докладывались и обсуждались на следующих профильных Всероссийских и международных конференциях: на XXXII, XXXIII, XXXIV и XXXV Всероссийских школах-семинарах «Волновые явления: физика и применения» имени А.П. Сухорукова (г. Можайск, 6–11 июня 2021 г., 5–10 июня 2022 г., 28 мая – 2 июня 2023 г. и 26–31 мая 2024 г.); на XXXIV, XXXV и XXXVI сессиях Российского акустического общества (г. Москва, 14–24 февраля 2022 г., 13–17 февраля 2023 г. и 21–25 октября 2024 г.), на XXIX и XXX Международных научных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (г. Москва, 11–22 апреля 2022 г. и 10–21 апреля 2023 г.); на Международном конгрессе по ультразвуку (г. Пекин, 18–21 сентября 2023 г.), а также на научных семинарах кафедры акустики физического факультета МГУ, и опубликованы в 10 публикациях в сборниках трудов и тезисов конференций.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 20-02-00676, стипендий фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» 20-2-2-21-1 и 23-2-1-46-1, стипендии Правительства РФ для студентов и аспирантов, стипендии Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова молодым сотрудникам, аспирантам и студентам, добившимся значительных результатов в педагогической и научно-исследовательской деятельности.

### **Публикации**

Основные результаты диссертационной работы изложены в 4 печатных работах, в том числе 3 статьях в рецензируемых научных журналах, удовлетворяющих Положению о присуждении ученых степеней в МГУ имени М.В. Ломоносова, и 1 публикации в журнале из списка ВАК РФ. Список работ автора приведен в конце диссертации перед списком литературы.

### **Личный вклад автора**

Все представленные в диссертационной работе результаты получены автором лично или при его определяющем участии. Постановка задач и полученные результаты обсуждались совместно с научным руководителем и научным консультантом. Автором были лично проведены все этапы численного моделирования трехмерной полной нелинейной задачи о генерации низкочастотного излучения параметрическим излучателем, которая предварительно разбивалась на плоскую нелинейную и квазилинейную трехмерную подзадачи, а затем обобщалась на случай распространения волн в неоднородных средах в присутствии границ.

Непосредственно автором был написан оригинальный текст большинства публикаций по представленным в диссертационной работе результатам. Окончательная подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, а представление их в редакцию журналов и переписка с редакторами и рецензентами для подавляющего большинства статей осуществлялась автором самостоятельно. Вклад автора в научных трудах [A1–A3] составлял от 1 до 1/2; в научном труде [A4] от 1/2 до 1/3.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, одной главы, посвященной обзору литературы, четырех оригинальных глав, заключения и библиографии. Каждая глава включает в себя краткое введение в рамках поставленной задачи, оригинальную часть и выводы. Работа содержит 123 страницы, включает 44 рисунка, 3 таблицы и 124 библиографические ссылки.

### **Краткое содержание диссертации**

Во Введении к диссертационной работе обосновывается актуальность, новизна и практическая значимость исследуемой проблемы, приводится краткий обзор литературы, сформулированы цели и задачи работы, а также описывается ее краткое содержание по главам.

В первой главе приведен литературный обзор известных аналитических моделей и существующих численных алгоритмов применительно к исследуемой в настоящей диссертационной работе задаче о нелинейных взаимодействиях в поле параметрического излучателя в различных режимах его работы. Отмечается, что полученные ранее теоретические и численные результаты основаны на использовании дополнительных предположений при описании нелинейных и дифракционных эффектов, как для взаимодействующих волн накачки, так и для параметрически сгенерированного низкочастотного излучения. В §1.1 представлена первая, предложенная П. Вестервельтом теоретическая модель, позволяющая получить аналитические оценки для характеристик генерируемого излучения на разностной частоте в дальнем поле параметрического излучателя. В §1.2 приведены основные уравнения, применяемые в теории параметрических взаимодействий для получения аналитических и численных решений: уравнение Вестервельта, учитывающее эффекты нелинейности, дифракции и термовязкого поглощения, а также уравнение ХЗК – параболическое приближение уравнения Вестервельта для узконаправленных пучков. Как первый шаг при исследовании трехмерных нелинейно-дифракционных задач, в §1.3 рассмотрен класс одномерных

решений плоской нелинейной задачи с бигармонической накачкой. Приведены выражения для амплитуды давления волны разностной частоты с использованием приближения квазилинейности, а также те, что позволяют учитывать образование ударных фронтов в профиле нелинейной волны. §1.4 посвящен решению дифракционной задачи о параметрической генерации низкочастотного излучения двухчастотной волной накачки и результатам, полученным при различных упрощениях геометрии задачи (недифрагирующие/дифрагирующие пучки накачки, заданная геометрия излучателя). Описаны модели, полученные в квазилинейном приближении, а также двумерные и трехмерные приближенные решения для сильно нелинейных режимов работы параметрического излучателя. В §1.5 рассматриваются аналитические результаты по исследованию процесса самодемодуляции высокочастотной импульсной волны накачки с амплитудной и/или фазовой модуляцией. Приведены известные результаты для профиля демодулированной низкочастотной волны с учетом нелинейных и дифракционных эффектов. Наконец, §1.6 посвящен обзору существующих численных алгоритмов, используемых в мировой литературе для описания нелинейных взаимодействий в поле параметрического излучателя. Поскольку в настоящей диссертации численное моделирование параметрических процессов для узконаправленных пучков накачки и генерируемой волны разностной частоты осуществляется на основе уравнения ХЗК, то особое внимание уделяется различным алгоритмам решения этого уравнения в спектральном, временном и комбинированном представлениях. Выводы к главе 1 представлены в §1.7.

Вторая глава посвящена численному описанию нелинейных взаимодействий плоских волн накачки. В §2.1 приводится нелинейное уравнение Бюргерса – одномерный аналог уравнений Вестервельта и ХЗК, учитывающее только эффекты нелинейности и термовязкого поглощения при распространении волн. В §2.2 описан спектральный алгоритм решения уравнения Бюргерса для двухчастотного взаимодействия волн накачки. Разработаны и исследованы различные методы оптимизации этого алгоритма путем прореживания спектра для обеспечения возможности решения задачи о генерации волны разностной частоты в трехмерной постановке в разумное время и с минимальными затратами на требуемую память. В этом параграфе также сформулированы выводы и критерии проведения наилучшей оптимизации спектра для сохранения достаточной точности (с ошибкой в пределах нескольких процентов) в вычислении амплитуды давления волны разностной частоты. В §2.3 развит временной подход к решению уравнения Бюргерса как альтернатива спектральному для импульсной накачки с широким спектром, где частотная фильтрация уже не применима. Временной алгоритм разработан

на основе удароуправляющей схемы типа Годунова, оптимальной для описания разрывных режимов, так как требует использования значительно меньшего числа временных узлов численной сетки на разрыв по сравнению с существующими алгоритмами. Проведена верификация временного алгоритма путем сравнения со спектральным методом и показана его выигрышность с точки зрения времени работы алгоритма в сотни раз по сравнению с полным спектральным и в несколько раз относительно спектрального алгоритма с частотной фильтрацией, а также представлены результаты исследований эффекта самодемодуляции высокочастотной импульсной накачки. Выводы к главе 2 сформулированы в §2.4.

В третьей главе исследуется трехмерная дифракционная задача о генерации волны разностной частоты в квазилинейном приближении уравнения ХЗК с учетом дифракции как волн накачки, так и волны разностной частоты для реалистичных начальных условий на излучателе. В §3.1 описан численный спектральный алгоритм на основе метода переменных направлений, апробация которого проводится для волн накачки путем сравнения с точным решением линейной дифракционной задачи методом интеграла Рэлея. В §3.2 приводятся результаты квазилинейного моделирования, а в §3.3 проведено сравнение полученных численных результатов с приближенными аналитическими решениями, представленными в главе 1, и продемонстрирована невозможность получения количественно верных оценок для амплитуды давления волны разностной частоты, формируемой параметрическим излучателем сложной формы, путем упрощения дифракционной задачи. В §3.4 представлены выводы к третьей главе.

Четвертая глава основана на комбинации результатов второй и третьей глав и посвящена трехмерной полной нелинейной задаче о генерации волны разностной частоты при двухчастотной накачке в разрывных режимах в свободном пространстве. Численный спектральный алгоритм решения уравнения ХЗК в полной нелинейной постановке с частотной оптимизацией описан в §4.1. Результаты сравнения амплитудных характеристик и характеристик направленности пучков волн накачки и волны разностной частоты для квазилинейного и нелинейного подходов приводятся в §4.2. В §4.3 исследуется вопрос об эффективности нелинейной генерации низкочастотного излучения на основе двух метрик, таких как максимально достижимая амплитуда давления и полная мощность пучка волны разностной частоты, для различных режимов работы параметрического излучателя. Продемонстрировано, что при больших начальных мощностях на излучателе генерация низкочастотного излучения на разностной частоте происходит гораздо эффективнее, но сопровождается уширением пучка волны разностной частоты, поэтому численное моделирование параметрических процессов служит удобным



инструментом для количественных оценок уровней сгенерированного низкочастотного излучения при сохранении желаемой направленности. Завершают главу 4 выводы, сформулированные в §4.4.

Последняя, пятая глава посвящена изучению особенностей генерации и распространения волны разностной частоты в неоднородных средах в присутствии границ (дно и поверхность) на примере мелководного акустического волновода. В §5.1 численный алгоритм решения уравнения ХЗК обобщается на случай взаимодействия волн накачки в неоднородной среде, а также с учетом наличия отражений от дна и поверхности. В §5.2 приводятся результаты квазилинейного моделирования задачи для различных моделей подводного звукового канала и/или при учете границ. Распространение в волноводе приводит к локализации низкочастотного излучения на разностной частоте в сердцевине канала, а также увеличивает дальность распространения по сравнению со свободным пространством. В §5.3 сравниваются результаты квазилинейного и сильно нелинейного режимов работы параметрического излучателя для изоскоростного волновода с мягкими границами и, аналогично свободному пространству, подчеркивается необходимость перехода к ударноволновым режимам в практических задачах для увеличения уровня давления низкочастотного сигнала. В §5.4 представлены выводы к пятой главе.

В Заключение сформулированы основные результаты и выводы диссертационной работы. В конце рукописи приведены благодарности, публикации автора и список литературы.

## Глава 1

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В ПОЛЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

При распространении в нелинейной среде двух интенсивных волн накачки с частотами  $f_{\text{pump1}}$  и  $f_{\text{pump2}}$  происходит каскадный процесс образования новых спектральных компонент с частотами  $|mf_{\text{pump1}} \pm nf_{\text{pump2}}|$ , где  $m$  и  $n$  пробегают все целые значения, начиная с 0. В случае взаимодействия близких высокочастотных волн накачки ( $f_{\text{pump1}} \approx f_{\text{pump2}}$ ) на некотором расстоянии от излучателя остается только волна разностной частоты с частотой  $f_{\text{dif}} = |f_{\text{pump1}} - f_{\text{pump2}}|$ , поскольку из-за увеличивающегося с ростом частоты поглощения акустических волн в среде (например, квадратично в термовязких средах) высокочастотные составляющие нелинейного волнового поля затухают гораздо быстрее, чем низкочастотные. Таким образом, генерация ВРЧ (принятый термин – параметрическая генерация) происходит в самой среде, выполняющей роль параметрической антенны бегущей волны [1–3], длина которой ограничена областью взаимодействия волн накачки, определяемой их затуханием за счет эффектов линейного поглощения и дифракции, а ширина диаграммы направленности составляет порядка  $(\lambda_{\text{dif}}/L)^{1/2}$ , где  $\lambda_{\text{dif}}$  – длина волны разностной частоты, а  $L$  – длина области взаимодействия волн накачки [2].

Сгенерированное таким образом излучение на разностной частоте имеет диаграмму направленности без боковых лепестков, сосредоточенную в пределах нескольких градусов, с возможностью перестройки разностной частоты в широком диапазоне [4–5]. При этом параметрические излучатели, в отличие от традиционных излучателей, работающих на той же частоте и имеющих диаграмму направленности шириной порядка  $\lambda_{\text{dif}}/a$  ( $a$  – размер излучателя), могут иметь небольшие размеры по сравнению с  $\lambda_{\text{dif}}$ . Так как существенным недостатком параметрической генерации низкочастотного излучения является небольшая эффективность перекачки энергии от волн накачки в энергию ВРЧ, то важной задачей является определение наиболее оптимальных режимов работы параметрических излучателей, повышающих мощность выходного излучения на разностной частоте при сохранении желаемой направленности.

В случае распространения в нелинейной среде высокочастотного импульсного сигнала накачки с широким спектром, модулированного по амплитуде и/или фазе, происходит генерация низкочастотного излучения в некоторой полосе частот (самодемодуляция [6]). Форма исходной ВЧ волны при этом меняется и, например, при наличии амплитудной модуляции становится пропорциональной первой производной от

квадрата огибающей ВЧ импульса при учете нелинейных эффектов и второй производной – при учете дифракции.

Параметрические процессы генерации низкочастотного излучения остаются ключевой областью современных акустических исследований, что связано с важностью их практических приложений для подводной [6–22], воздушной [23–42] и медицинской акустики [43–48].

Подводные исследования обычно осуществляются акустическими методами, поскольку такое излучение в морской среде распространяется на значительные расстояния без существенного затухания. Один из методов исследований основан на принципах нелинейной акустики, когда среда выполняет роль параметрической антенны бегущей волны, концепция которой была разработана Вестервельтом [1–2], а также независимо В.А. Зверевым и А.И. Калачевым [3] в 60-х годах прошлого века, в первую очередь, для гидроакустических приложений. В этом случае в результате нелинейного взаимодействия интенсивных высокочастотных акустических волн накачки в среде происходит формирование узконаправленного широкополосного низкочастотного излучения, которое может распространяться на сотни и даже тысячи километров.

Параметрические излучатели широко применяются в гидроакустике как инструмент для профилирования донных структур [13–19]. Это связано с тем, что узкая диаграмма направленности параметрически сгенерированного низкочастотного излучения (несколько единиц градусов) обеспечивает лучшее пространственное разрешение по сравнению с традиционными средствами эхолокации, например, системами Chirp [86–87], где используются крупногабаритные излучатели низкочастотного звука с существенно большими углами расхождения (несколько десятков градусов). Среди современных параметрических устройств для профилирования дна можно отметить, например, системы PARASOUND компании ATLAS [88], которые обеспечивают проникновение внутрь донных структур на расстояние до 200 м с разрешением менее 15 см в зависимости от характеристик дна и подходят для подводных работ на глубине 10–10000 м, а системы TOPAS компании Kongsberg используются для изучения коралловых структур [89] и донных пород [90].

Другим важным гидрофизическим приложением является изучение океана на длинных трассах [20–21, 84–85]. Однако невысокая эффективность перекачки энергии от волн накачки в генерируемое низкочастотное излучение сдерживает широкое применение параметрических излучателей в этой области, хотя узконаправленность и отсутствие боковых лепестков могут существенно компенсировать низкие уровни параметрического излучения. Тем не менее, эффективность параметрического излучения может быть

увеличена с увеличением исходной мощности на излучателе. Более того, экспериментальные исследования [21] показывают, что параметрический излучатель способен обеспечивать одномодовое возбуждение подводного звукового канала, а при распространении одномодового широкополосного импульса возможно его сжатие в результате действия частотной волноводной дисперсии [85]. Такая компрессия сигнала приводит к росту его интенсивности и соотношения сигнал/шум, что делает параметрические излучатели перспективным инструментом для подводных исследований.

Несмотря на то, что большое число пионерских теоретических и экспериментальных работ по параметрическим антеннам были связаны с подводными приложениями, в 1965 году Берктеем [6] были получены аналитические квазилинейные выражения для описания эффекта самодемодуляции, т.е. генерации низкочастотного излучения высокочастотной импульсной накачки. Это легло в основу многочисленных теоретических и особенно экспериментальных исследований, интерес к которым не угасает и в современной аэроакустике, по параметрическому излучению направленного слышимого звука в воздухе ультразвуковой волной накачки, модулированной по амплитуде и/или фазе. Так, в 1983 году был разработан первый параметрический акустический громкоговоритель [24], основанный на принципах нелинейной акустики, и был введен термин «звуковой прожектор» для обозначения аудиоприложений параметрической антенны. Эксперименты показали [24], что демодулированная звуковая волна имела очень узкую диаграмму направленности, но уровень звукового сигнала был низок, а уровень гармонических искажений, наоборот, достаточно высок, поэтому последующие работы были направлены на увеличение выходной мощности параметрического громкоговорителя и уменьшение уровня гармонических искажений путем предварительной обработки модулирующего сигнала [25–26]. В настоящее время малогабаритные параметрические излучатели звука (Holosonics AudioSpotlight, HyperSound HSS300, Acouspade и др.) широко применяются в качестве бесконтактных аудиогидов в библиотеках и музеях, в киосках и магазинах, обеспечивая таргетное общение с посетителями.

Интересным применением параметрических излучателей в воздухе является их использование в системах активного шумоподавления, которые работают по принципу инвертирования поступающего в них шума, тем самым позволяя гасить помехи в некоторой области пространства [91]. При использовании традиционных всенаправленных громкоговорителей в качестве источников управления для подавления шума в целевой зоне, уровень шума в других областях может увеличиваться, однако результаты экспериментов [92] показали, что системы активного шумоподавления с использованием узконаправленных параметрических громкоговорителей могут снизить

уровень шума в целевой зоне без увеличения уровня шума в других областях, поэтому такие системы стали активно применяться на практике [31].

Среди неочевидных приложений параметрических излучателей в воздухе можно отметить их использование в музыкальных исследованиях, проводимых в Центре цифрового искусства и экспериментальных медиа университета штата Вашингтон [32]. Так, с помощью узконаправленного параметрического излучателя было создано акустическое зеркало, которое позволило направлять ультразвуковой сигнал в определенные точки человеческого тела и, принимая отраженный звуковой сигнал, измерять расстояние до них. Также исследователями была спроектирована так называемая звуковая перчатка с антенной решеткой из 16 излучателей, которые могли работать как один большой параметрический излучатель, либо же часть из них могла выполнять функцию приемников. С помощью звуковой перчатки исполнитель может управлять звуком рукой и взаимодействовать с другими исполнителями, использующими аналогичные устройства, создавать ультразвуковые волноводы по всей сцене, указывая друг на друга руками, тем самым изменяя акустические поля в зависимости от углов распространения пучков и расстояния между исполнителями.

В последние годы в мировой литературе активно обсуждаются вопросы применения параметрических излучателей в области медицинской акустики. Среди таких приложений можно отметить, например, применение параметрических излучателей для ультразвуковой визуализации тканей печени на разностной частоте (Toshiba America Medical Systems) [43] и пораженных тканей почек – на ее второй гармонике [44], что позволяет различать такие свойства биологических тканей, которые не видны как при линейной, так и при гармонической ультразвуковой визуализации, за счет более детального разрешения и улучшенного качества изображения. Были также получены успешные результаты использования параметрически сгенерированных низких частот (при взаимодействии неколлинеарных пучков волн накачки) в качестве альтернативы МРТ-системам в задачах обнаружения глиобластомы (опухоли) головного мозга с ее последующей резекцией [46]; при этом было показано, что обычная линейная ультразвуковая визуализация не дает информации о наличии опухоли.

Кроме того, в современных медицинских исследованиях [47] изучается возможность использования параметрических излучателей для улучшения эффективности HIFU-терапии (“HIFU” от англ. high intensity focused ultrasound – высокоинтенсивный фокусированный ультразвук) [49] не за счет большего поглощения энергии ультразвукового пучка, но за счет улучшенной динамики пузырьков и связанного с этим усиления нагрева целевой области. Предположительно, параметрическая генерация волны

разностной частоты при двухчастотной накачке может быть использована для мониторинга температуры в режиме реального времени, а также оценки эффективности лечения во время HIFU-терапии, поскольку сгенерированное в области фокуса низкочастотное излучение на разностной частоте определяется степенью термической абляции в этой зоне [48].

Безусловно, эти области приложения методов нелинейной акустики различаются как частотами (единицы–десятки кГц в аэроакустике, до сотен кГц в гидроакустике и МГц в медицинской акустике), так и пространственными масштабами. Однако математический подход к разработке алгоритмов, позволяющих рассчитывать поля параметрических излучателей и определять наиболее оптимальные режимы излучения волн накачки, а также моделировать особенности распространения акустических сигналов в неоднородной среде, практически не отличается для различных сред.

### § 1.1 Теория Вестервельта

Первая теоретическая модель для описания параметрических взаимодействий волн накачки была предложена Вестервельтом [2] и экспериментально подтверждена Беллином и Бейером [93]. Она построена для случая взаимодействия двух плоских коллимированных пучков волн накачки сечения  $S$  в приближении квазилинейности, когда в результате нелинейного взаимодействия генерируются только волны на удвоенных, суммарной и разностной частотах. При этом область взаимодействия волн накачки ограничивалась их линейным поглощением, и не учитывалась поперечная структура вторичного излучения. Эта 2D модель основана на решении волнового уравнения для низкочастотного вторичного поля давления  $p_{\text{dif}}^W(\mathbf{r})$  с функцией источников  $f_s$  в правой части уравнения методом функции Грина, когда решение в произвольной точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , проведенным под некоторым углом  $\theta$  к оси пучка, записывается в виде объемного интеграла ( $\rho_0$  – плотность среды)

$$p_{\text{dif}}^W(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega_{\text{dif}}\rho_0}{4\pi} \int \frac{f_s \exp(ik_{\text{dif}}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'. \quad (1.1)$$

С помощью выражения (1.1) можно получить аналитические оценки для интенсивности и полной мощности пучка ВРЧ в дальнем поле излучателя, а также для амплитуды давления ВРЧ

$$p_{\text{dif}}^W = \frac{\beta\omega_{\text{dif}}^2 S l_{\text{abs,pump}}}{8\pi R_0 c_0^4 \rho_0} P_{\text{pump1}}^0 P_{\text{pump2}}^0 \left( 1 + (k_{\text{dif}} l_{\text{abs1,2}})^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \right)^{-1/2}, \quad (1.2)$$

где  $\beta$  – коэффициент нелинейности,  $\omega_{\text{dif}} = 2\pi f_{\text{dif}}$  и  $k_{\text{dif}} = \omega_{\text{dif}}/c_0$  – круговая частота и волновое число ВРЧ,  $c_0$  – скорость звука в среде,  $l_{\text{abs1,2}}$  – длина поглощения волн накачки,

$R_0$  – расстояние от начала координат до точки наблюдения,  $p_{\text{pump}1,2}^0$  – давления волн накачки на излучателе. Отметим важный результат квазилинейной теории параметрических излучателей, что эффективность перекачки энергии волн накачки в ВРЧ (т.е. отношение  $p_{\text{dif}}/p_0$ ) в этом приближении растет пропорционально давлению на излучателе  $p_0$  (если считать, что волны накачки имеют одинаковую амплитуду  $p_{\text{pump}1}^0 = p_{\text{pump}2}^0 = p_0$ ).

Дальнейшие теоретические исследования, подтверждаемые экспериментально, были направлены на уточнение полученных Вестервельтом оценок [2] с учетом диссипативных и дифракционных эффектов для волн накачки и ВРЧ и обобщаются, например, в работах [4, 6, 10]. Так, были получены результаты, учитывающие поперечную структуру поля ВРЧ [8], исследовались цилиндрически и сферически расходящиеся пучки волн накачки [6, 11, 76, 94], а также ближнее поле параметрического излучателя [95].

Широкий класс последующих работ был ориентирован на изучение взаимодействий волн накачки в условиях проявления сильных нелинейных эффектов в случае больших начальных мощностей параметрических излучателей и получение соответствующих аналитических решений для ВРЧ. Было продемонстрировано уширение диаграммы направленности ВРЧ и снижение эффективности перекачки энергии волн накачки в ВРЧ за счет нелинейного поглощения на разрывах [4, 74–75, 96], когда значение величины  $p_{\text{dif}}/p_0$  перестает зависеть от давления на излучателе (при больших  $p_0$ ).

Позже, на основе решения дифракционного уравнения ХЗК [50], была построена новая теория параметрических взаимодействий для дифрагирующих пучков. Сначала учитывалась лишь дифракция ВРЧ [97], а затем были получены результаты для поля ВРЧ в дифрагирующих пучках волн накачки [98]. Это позволило получить представления о процессе формирования параметрического низкочастотного излучения, в том числе и в разрывных режимах [4, 7, 11], и получить ряд аналитических оценок. Однако аналитические результаты в двухмерной и трехмерной постановке были получены только для несложной геометрии источников волн накачки (круглые или прямоугольные излучатели) с использованием квазилинейного подхода или с приближенным описанием ударноволновых режимов распространения. Поэтому большое число более поздних работ были посвящены численному моделированию параметрических взаимодействий и попыткам описать сильно нелинейные режимы работы параметрического излучателя [51, 68–80].

В этой главе ниже изложены известные результаты теоретических и численных исследований по изучению нелинейных взаимодействий волн накачки в поле

параметрического излучателя для различных комбинаций учета нелинейных, диссипативных и дифракционных эффектов взаимодействующих волн.

## § 1.2 Уравнения Вестервельта и Хохлова-Заболотской-Кузнецова как модели для описания параметрической генерации низкочастотного излучения

Достаточно полной моделью для описания параметрической генерации и распространения низкочастотного излучения, позволяющей получить как приближенные аналитические, так и численные решения, является уравнение Вестервельта [2], записанное в сопровождающей системе координат в виде:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau \partial z} = \frac{c_0}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) + \frac{\beta}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2} + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3}. \quad (1.3)$$

Здесь  $p$  – акустическое давление,  $z$  – выделенное направление вдоль оси пучка,  $\tau = t - z/c_0$  – время в сопровождающей системе координат,  $x$  и  $y$  – поперечные координаты,  $c_0$  – скорость звука,  $\rho_0$  – плотность среды,  $\beta$  и  $\delta$  – коэффициенты нелинейности и термовязкого поглощения в среде, соответственно. Слагаемые в правой части уравнения (1.3) описывают дифракцию, нелинейность и термовязкое поглощение, соответственно. При необходимости в уравнении (1.3) могут быть учтены другие механизмы поглощения (например, релаксация), а также пространственные неоднородности среды.

Во многих практических задачах при расчете узконаправленных полей параметрических излучателей с дифракционной расходимостью менее  $\pm 15^\circ$ , как было показано в [51], возможно использование более простого параболического уравнения ХЗК [50]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau \partial z} = \frac{c_0}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + \frac{\beta}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2} + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3}, \quad (1.4)$$

которое отличается от уравнения Вестервельта использованием парааксиального приближения при расчете оператора дифракции в правой части уравнения.

Несмотря на то, что точные решения уравнений (1.3) и (1.4) в общих случаях возможно получить только с использованием численных методов, тем не менее, при введении дополнительных предположений и упрощений, связанных с описанием нелинейных, диссипативных и дифракционных эффектов, удалось получить многие аналитические результаты, важные для понимания физики параметрических процессов.



### § 1.3 Приближение плоских волн при двухчастотном взаимодействии волн накачки

Важным шагом при описании параметрических взаимодействий является решение одномерной нелинейной задачи. Основным фактором, ограничивающим область параметрических взаимодействий в этом случае, являются диссипативные эффекты, приводящие к уменьшению амплитуды волн накачки с расстоянием. В случае сильно нелинейных режимов распространения, когда в профиле волны формируются крутые ударные фронты, происходит дополнительное уменьшение области генерации низкочастотного излучения за счет эффективного поглощения энергии волны на разрывах и соответствующего дополнительного уменьшения амплитуды взаимодействующих волн накачки.

Рассмотрение ударноволновых режимов параметрических взаимодействий представляет несомненный интерес. Несмотря на то, что поглощение энергии волны на разрывах укорачивает область нелинейных взаимодействий, их эффективность растет, что обеспечивает потенциальный механизм получения больших уровней низкочастотных сигналов.

В приближении плоских волн без учета дифракционных эффектов в уравнениях (1.3) и (1.4) задача о генерации и распространении ВРЧ решается с помощью уравнения Бюргерса [99]:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\beta}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial p^2}{\partial \tau} + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} \quad (1.5)$$

с начальным условием для двухчастотной гармонической накачки с круговыми частотами  $\omega_{\text{pump}1,2} = 2\pi f_{\text{pump}1,2}$  и амплитудами  $p_{\text{pump}1}^0 = p_{\text{pump}2}^0 = p_0/2$  в виде:

$$p(\tau, z=0) = p_{\text{pump}1}^0 \sin(\omega_{\text{pump}1}\tau) + p_{\text{pump}2}^0 \sin(\omega_{\text{pump}2}\tau), \quad (1.6)$$

один период которого продемонстрирован на рис. 1.1 для соотношения  $\omega_{\text{pump}1}/\omega_{\text{dif}} = 30$ .

#### 1.3.1 Квазилинейные решения

Большинство существующих аналитических и численных моделей, описывающих параметрические взаимодействия, как в одномерной, так и в трехмерной постановке,

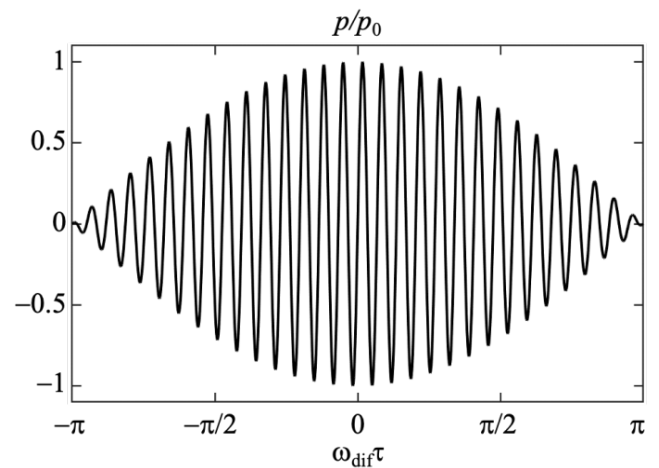


Рис. 1.1. Иллюстрация одного периода безразмерного начального профиля гармонической двухчастотной волны накачки при  $\omega_{\text{pump}1}/\omega_{\text{dif}} = 30$ .

построены в предположении квазилинейности. Это справедливо, если характерное расстояние проявления нелинейных эффектов  $l_{sh} = \rho_0 c_0^3 / (\beta \omega_{\text{pump}1} p_0)$  значительно больше длины поглощения волн накачки  $l_{\text{abs}1,2} = 2c_0^3 / (\delta \omega_{\text{pump}1,2}^2)$ , что реализуемо при небольших давлениях на излучателе.

Используя метод последовательных приближений [4, 99], квазилинейное аналитическое решение уравнения (1.5) будем искать в виде  $p = p_A + p_B$ , где  $p_A$  – линейное поле волн накачки, представляющее собой сумму двух гармонических волн с начальным условием (1.6), а  $p_B$  – малая поправка, включающая в себя поле суммарной и вторых гармоник, а также поле ВРЧ  $p_{\text{dif}}(z, \tau) = p_{\text{dif}}(z) \sin(\omega_{\text{dif}} \tau)$  с амплитудой  $p_{\text{dif}}(z)$  и циклической частотой  $\omega_{\text{dif}} = 2\pi f_{\text{dif}}$ . В этом случае волны накачки  $p_A$  удовлетворяют линейному уравнению, учитывающему только диссипативные эффекты:

$$\frac{\partial p_A}{\partial z} = \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^2 p_A}{\partial \tau^2}, \quad (1.7)$$

а поле вторичных волн  $p_B$  – линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{\partial p_B}{\partial z} = \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^2 p_B}{\partial \tau^2} + \frac{\beta}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial p_A^2}{\partial \tau}. \quad (1.8)$$

Тогда, пренебрегая поглощением волн накачки и ВРЧ, что справедливо для небольших расстояний от излучателя  $z \ll l_{\text{abs}1,2} \ll l_{\text{abs,dif}} = \frac{2c_0^3}{\delta \omega_{\text{dif}}^2}$ , и, в силу линейности уравнения (1.8), оставляя только слагаемые для ВРЧ, решение уравнения (1.8) для амплитуды волны разностной частоты  $p_{\text{dif}}(z)$  может быть записано в следующем виде [4]:

$$p_{\text{dif}}(z) = \frac{\beta \omega_{\text{dif}} z}{2c_0^3 \rho_0} p_{\text{pump}1}^0 p_{\text{pump}2}^0. \quad (1.9)$$

Как следует из (1.8),  $p_{\text{dif}}(z)$  неограниченно возрастает с увеличением пройденного расстояния  $z$ , пока не начинают существенно сказываться эффекты линейного поглощения. При этом параметрическая генерация ВРЧ тем больше, чем больше значение разностной частоты  $\omega_{\text{dif}}$ . При учете эффектов линейного поглощения в среде (положим  $l_{\text{abs}1} \approx l_{\text{abs}2} \approx l_{\text{abs}}$ ) амплитуда волн накачки  $p_{\text{pump}1,2}(z)$  будет убывать с расстоянием по экспоненциальному закону

$$p_{\text{pump}1,2}(z) = p_{\text{pump}1,2}^0 \exp(-z/l_{\text{abs}}), \quad (1.10)$$

а решение для амплитуды ВРЧ на достаточном удалении от источника, где поглощение уже не пренебрежимо мало, будет иметь вид [4]:

$$p_{\text{dif}}(z) = \frac{\beta \omega_{\text{dif}} p_{\text{pump1}}^0 p_{\text{pump2}}^0}{2\delta\rho_0 \omega_{\text{pump1}} \omega_{\text{pump2}}} \left[ \exp(-z/l_{\text{abs,dif}}) - \exp(-2z/l_{\text{abs}}) \right]. \quad (1.11)$$

Таким образом, амплитуда ВРЧ сначала растет линейно с увеличением пройденного расстояния  $z$  согласно (1.9), достигает максимума на некотором удалении от излучателя, а затем убывает в соответствии с (1.11).

Кроме того, отметим, что амплитуда давления ВРЧ растет квадратично с увеличением исходного давления на излучателе  $p_0$ , позволяя добиться бóльших уровней низкочастотного излучения, что демонстрирует необходимость рассмотрения разрывных режимов при параметрических исследованиях.

### 1.3.2 Модели, учитывающие образование разрывов в профиле нелинейной плоской волны

При взаимодействии интенсивных акустических волн, когда нелинейные эффекты проявляются сильно, что приводит к искажению профиля волны и формированию разрывов, а также обогащению спектра большим числом комбинационных компонент, приведенные в п. 1.2.1 рассуждения справедливы лишь до момента образования разрывов, т.е. в области  $z < l_{\text{sh}}$ . В этом случае можно пренебречь диссипативными эффектами и использовать аналитическое решение (1.9) вплоть до  $z < l_{\text{sh}}$ . Получение решений при  $z > l_{\text{sh}}$  сильно усложняется, поскольку для разных квазипериодов профиля волны (рис. 1.1) разрывы наступают на различных расстояниях в зависимости от величины давления.

В общем виде плоскую нелинейную задачу о параметрических взаимодействиях можно решать с помощью точного аналитического решения уравнения Бюргерса (1.5), получаемого с использованием подстановки Хопфа-Коула [99], с начальным условием (1.6). Решение будет иметь сложный вид и представляется в виде ряда из бесконечного числа генерируемых спектральных компонент с частотами  $|mf_{\text{pump1}} \pm nf_{\text{pump2}}|$ , из которого можно получить приближенные аналитические оценки (1.9), (1.11) в случае слабой нелинейности. На достаточном удалении от излучателя, где гармоники распространяются практически независимо, оставляя несколько членов ряда, в [4] было получено решение для ВРЧ в виде:

$$p_{\text{dif}}(z) = \frac{2\delta\rho_0 \omega_{\text{dif}}}{\beta} \frac{I_1(1/2\Gamma_1)}{I_0(1/2\Gamma_1)} \frac{I_1(1/2\Gamma_2)}{I_0(1/2\Gamma_2)} \exp(-z/l_{\text{abs,dif}}), \quad (1.12)$$

где  $I_{1,2}$  – функции Бесселя, аргументы которых зависят от чисел Гольдберга волн накачки  $\Gamma_{1,2} = \delta\rho_0 \omega_{\text{pump1,2}} / (2\beta p_{\text{pump1,2}}^0)$ , которое при  $\Gamma_{1,2} \ll 1$  уже не зависит от начальных амплитуд волн накачки и определяется свойствами среды:

$$p_{\text{dif}}(z) = \frac{2\delta\rho_0 \omega_{\text{dif}}}{\beta} \exp(-z/l_{\text{abs,dif}}). \quad (1.13)$$

## § 1.4 Учет дифракционных эффектов при описании параметрических взаимодействий

### 1.4.1 Квазилинейные решения

Другим приближением в задаче о нелинейной генерации ВРЧ является целый класс квазилинейных аналитических решений, учитывающих дифракцию волны разностной частоты и/или волн накачки. В этом случае также используется метод последовательных приближений [4, 99], при этом волны накачки  $p_A$ , в силу узкой направленности как высокочастотного, так и низкочастотного излучения, удовлетворяют линейному уравнению ХЗК (1.4):

$$\frac{\partial^2 p_A}{\partial \tau \partial z} = \frac{c_0}{2} \left( \frac{\partial^2 p_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_A}{\partial y^2} \right) + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^3 p_A}{\partial \tau^3}, \quad (1.14)$$

а поле вторичных волн  $p_B$ , включая поле ВРЧ, – линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{\partial p_B}{\partial z} = \frac{c_0}{2} \left( \frac{\partial^2 p_B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_B}{\partial y^2} \right) + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^2 p_B}{\partial \tau^2} + \frac{\beta}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial p_A^2}{\partial \tau}. \quad (1.15)$$

Представляя поле гармонических волн накачки в виде  $p_A = p_{\text{pump}1}(x, y, z)/2 \cdot \exp(i\omega_{\text{pump}1}\tau) + p_{\text{pump}2}(x, y, z)/2 \cdot \exp(i\omega_{\text{pump}2}\tau) + \text{к.с.}$  с комплексными амплитудами давления  $p_{\text{pump}1,2}(x, y, z)$ , можно получить параболические уравнения теории дифракции для величины  $p_{\text{pump}1,2}(x, y, z) \cdot \exp(-z/l_{\text{abs}1,2})$ , решения которых хорошо известны. Тогда, подставляя найденные выражения для волн накачки в (1.15), получим уравнение для описания процессов генерации и распространения волны разностной частоты для различной геометрии расхождения пучков. Однако аналитические решения для ВРЧ в большинстве задач даже несложной геометрии удастся получить только на оси пучка.

Далее приводятся некоторые аналитические результаты для амплитуды давления ВРЧ на оси пучка, которые будут использованы для сравнения с квазилинейным численным моделированием дифракционной задачи в главе 3. Эти решения подробно изложены в работе [4] и получены с учетом различных предположений о начальных распределениях давления на излучателе и/или используют ряд упрощений при описании дифракционных эффектов:

1. Первая модель построена в предположении взаимодействия недифрагирующих гармонических волн накачки с гауссовским начальным распределением на излучателе радиуса  $a$ , область взаимодействия которых ограничена их линейным поглощением. В этом случае осевое распределение амплитуды ВРЧ будет иметь следующий вид:

$$p_{\text{dif}}(z) = \frac{\beta \omega_{\text{dif}}}{2c_0^3 \rho_0} p_{\text{pump1}}^0 p_{\text{pump2}}^0 L_d \exp\left(-\frac{2z}{l_{\text{abs}}}\right) \left| \text{Ei}\left(\frac{2z}{l_{\text{abs}}} + i \frac{2L_d}{l_{\text{abs}}}\right) - \text{Ei}\left(i \frac{2L_d}{l_{\text{abs}}}\right) \right|, \quad (1.16)$$

где  $L_d = a^2 \omega_{\text{dif}} / (2c_0)$  – длина дифракции ВРЧ, а  $\text{Ei}(x)$  – интегральная показательная функция. В этом случае удастся получить и аналитическое выражение для диаграммы направленности поля ВРЧ в дальнем поле излучателя:

$$D(\theta) = \exp\left(-\left(\frac{\omega_{\text{dif}} a \theta}{2c_0}\right)^2\right) \left[ 1 + \left(\frac{\omega_{\text{dif}} l_{\text{abs}}}{c_0}\right)^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)^4 \right]^{-1/2}. \quad (1.17)$$

2. Вторая модель является обобщением первой для излучателей прямоугольной формы с размерами  $a$  и  $b$ :

$$p_{\text{dif}}(z) = \frac{\beta \omega_{\text{dif}}}{2c_0^3 \rho_0} p_{\text{pump1}}^0 p_{\text{pump2}}^0 \sqrt{L_{d,x} L_{d,y}} \exp\left(-\frac{2z}{l_{\text{abs}}}\right) \left| \text{Ei}\left(\frac{2z}{l_{\text{abs}}} + i \frac{L_{d,x} + L_{d,y}}{l_{\text{abs}}}\right) - \text{Ei}\left(i \frac{L_{d,x} + L_{d,y}}{l_{\text{abs}}}\right) \right|, \quad (1.18)$$

где  $L_{d,x} = a^2 \omega_{\text{dif}} / (2c_0)$  и  $L_{d,y} = b^2 \omega_{\text{dif}} / (2c_0)$  – длины дифракции ВРЧ в направлениях  $x$  и  $y$ , соответственно.

3. Наконец, наиболее полная третья модель учитывает дифракцию и линейное поглощение волн накачки с гауссовским начальным распределением на излучателе радиуса  $a$ :

$$p_{\text{dif}}(z) = \frac{\beta \omega_{\text{dif}}^2 a^2}{8c_0^4 \rho_0} p_{\text{pump1}}^0 p_{\text{pump2}}^0 \exp\left(-\frac{z}{l_{\text{abs,dif}}}\right) \frac{i \exp\left(\frac{d - iz / l_{\text{abs}}}{i + Bz / l_{\text{abs}}}\right)}{i + Bz / l_{\text{abs}}} \times \left[ \text{Ei}\left(\frac{Bz / l_{\text{abs}} + d}{i + Bz / l_{\text{abs}}}\right) - \text{Ei}\left(\frac{d - iz / l_{\text{abs}}}{i + Bz / l_{\text{abs}}}\right) \right], \quad (1.19)$$

где введены следующие обозначения:  $d = L_d / l_{\text{abs}}$ ,  $B = L_d l_{\text{abs}} / (l_{d1} l_{d2})$ ,  $l_{d1,2} = a^2 \omega_{\text{pump1,2}} / (2c_0)$  – длины дифракции волн накачки. Анализируя выражение (1.19), можно получить, что амплитуда ВРЧ сначала растет, затем достигает максимума, после чего начинает убывать, что определяется соотношением параметров  $d$  и  $B$ .

Диаграмма направленности для ВРЧ в дальнем поле здесь может быть определена только с использованием численных методов [4], однако приближенно для  $B > 1$  ее ширина по уровню 0.7 от максимальной мощности определяется как  $\approx 0.6B^{1/2}$ .

#### 1.4.2 Разрывные 2D и 3D решения

Приближенные аналитические решения для описания поля ВРЧ в дифрагирующих пучках волн накачки с учетом возможности образования разрывов в профиле нелинейной волны были получены Моффеттом [74–75] для случаев круглого и прямоугольного излучателей двухчастотной накачки путем разбиения области взаимодействия волн

накачки на некоторые зоны. Так, для круглого излучателя [74] область взаимодействия подразделялась на зону плоских волн накачки при  $z < R_0$  и сферически расходящихся волн накачки при  $z > R_0$ , где  $R_0$  – дистанция Рэлея (отношение площади излучателя  $S$  к средней длине волн накачки  $\lambda$ ). В случае излучателя прямоугольной формы [75] при распространении волн накачки до расстояний  $z < D^2/\lambda$  ( $D$  – наименьший размер прямоугольного излучателя) предполагалось, что они являются плоскими, затем при  $D^2/\lambda < z < L^2/\lambda$  – цилиндрически расходящимися ( $L$  – наибольший размер излучателя). Наконец, при  $z > L^2/\lambda$  волны накачки считались расходящимися по сферическому закону.

Было получено решение для амплитуды ВРЧ на оси пучка в дальней зоне излучателя [74–75], включающее в себя вклад от каждой отдельной области, где использовалась интегральная модель Вестервельта [2], которая сводилась к одномерной нелинейной задаче в соответствии с рассматриваемой геометрией. Так, для наиболее общего случая прямоугольного излучателя соответствующее решение принимает вид:

$$p_{\text{dif}}(z) = \frac{\pi\beta p_0^2 R_0 f_{\text{dif}}^2}{c_0^3 \rho_0 f_{\text{pump}} z} (I_1 + I_2 + I_3), \quad (1.20)$$

где  $I_{1,2,3}$  – соответствующие трем зонам (плоские, цилиндрически и сферически расходящиеся пучки волн накачки) интегральные поправки.

В случае прямоугольного излучателя сумма этих интегралов вычислялась следующим образом [75]:

$$I_1 + I_2 + I_3 \approx \int_0^\infty T^2(x) \left[ 1 + i \left( N f_{\text{dif}} x / f_{\text{pump}} R_0 \right) \right]^{-1/2} \left[ 1 + i \left( f_{\text{dif}} x / N f_{\text{pump}} R_0 \right) \right]^{-1/2} dx,$$

$$T^2 = (2/K^2) \left[ (1+K)(1+2K)^{-1/2} - 1 \right] \exp(-2\alpha x), \quad K = 3(\sigma/2\pi)^2, \quad \chi = \frac{2\pi\beta p_0 R_0 f_{\text{pump}}}{c_0^3 \rho_0} \quad (1.21)$$

$$\frac{\sigma}{2\chi} = \ln \left\{ \left[ 1 + (N-1)(x/R_0) + (x/R_0)^2 \right]^{1/2} + (x/R_0) + \frac{1}{2}(N-1) \right\} - \ln \left\{ \frac{1}{2}(N+1) \right\}.$$

В выражении (1.21) используются обозначения:  $N = b/a$  – отношение сторон прямоугольного излучателя,  $\alpha$  – коэффициент поглощения волн накачки в Нп/м,  $p_0$  – амплитуда давления каждой волны накачки.

Из (1.20) следуют аналитические оценки для эффективности работы параметрического излучателя: при небольших давлениях на излучателе его эффективность, т.е. отношение  $p_{\text{dif}}/p_0$ , сначала растет линейно, затем достигает максимума в околоразрывных режимах, а при больших значениях  $p_0$  убывает как  $1/p_0^2$ .

## § 1.5 Эффект самодемодуляции высокочастотной импульсной волны накачки

Рассмотрим эволюцию распространяющейся в нелинейной среде плоской импульсной волны накачки амплитуды  $p_0$  с центральной круговой частотой  $\omega_0 = 2\pi f_0$ . В общем случае такой сигнал может иметь амплитудную модуляцию с медленно меняющейся огибающей функцией  $E(\tau)$ , т.е. ширина начального спектра волны накачки предполагается достаточно узкой, и фазовую модуляцию  $\varphi(\tau)$  (рис. 1.2):

$$p(\tau, z = 0) = p_0 E(\tau) \sin(\omega_0 \tau + \varphi(\tau)). \quad (1.22)$$

При распространении в нелинейной среде импульсная волна накачки, содержащая большое число спектральных компонент, будет взаимодействовать сама с собой, генерируя широкополосное низкочастотное излучение, включающее в себя множество низких частот, что было названо Берктеем как явление самодемодуляции [6].

В квазилинейной теории поле вторичной низкочастотной волны  $p_{LF}$  описывается линейным уравнением (1.8) с функцией источников в правой части, пропорциональной первой производной по времени от квадрата огибающей функции  $E(\tau)$  при отсутствии в исходном сигнале фазовой модуляции  $\varphi(\tau) = 0$  и первой производной по времени от квадрата величины  $E(\tau)/(1 + d\varphi/d\tau)$  при  $\varphi(\tau) \neq 0$ . Поэтому поле низкочастотного излучения, аналогично формуле (1.11) для волны разностной частоты при бигармонической накачке, в области, где можно пренебречь его эффектами поглощения, будет иметь вид (1.23) [4, 6] и (1.24) [69], соответственно:

$$p_{LF}(\tau, z) = \frac{\beta p_0^2}{2\delta\rho_0\omega_0^2} [1 - \exp(-2z/l_{abs})] \frac{\partial}{\partial\tau} E^2(\tau), \quad (1.23)$$

$$p_{LF}(\tau, z) = \frac{\beta p_0^2}{2\delta\rho_0\omega_0^2} [1 - \exp(-2z/l_{abs})] \frac{\partial}{\partial\tau} \left( \frac{E(\tau)}{1 + d\varphi/d\tau} \right)^2. \quad (1.24)$$

Здесь  $l_{abs}$  – длина поглощения ВЧ гармоник, которая считается одинаковой в силу узкого исходного спектра.

При этом в случае интенсивной плоской импульсной волны накачки с амплитудной модуляцией, как отмечается в работе [4], в области образования разрывов форма

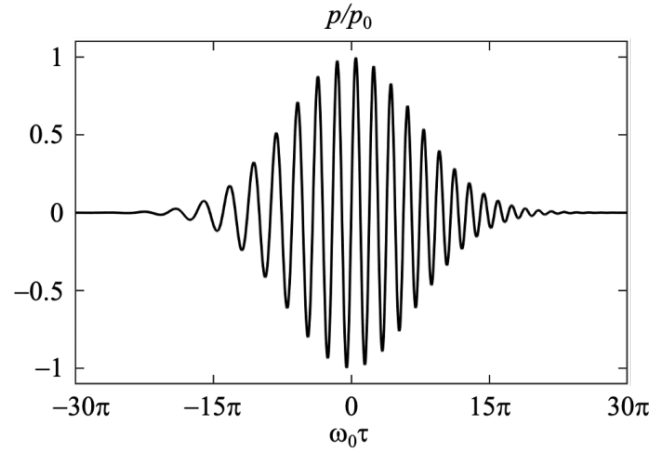


Рис. 1.2. Иллюстрация начального профиля импульсной волны накачки с гауссовской огибающей и  $\varphi(\tau) \neq 0$ .

демодулированного НЧ сигнала определяется уже не квадратом огибающей, а самой огибающей:

$$p_{LF}(\tau) \sim \frac{\partial}{\partial \tau} E(\tau). \quad (1.25)$$

Учет дифракционных эффектов требует введения дополнительных предположений о начальных условиях на излучателе и геометрии задачи, как и в § 1.4, однако в [6, 71] было показано, что временной профиль низкочастотного сигнала на оси излучателя в этом случае в квазилинейной теории определяется второй производной по времени величины  $E(\tau)/(1 + d\varphi/d\tau)$ :

$$p_{LF}(\tau) \sim \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( \frac{E(\tau)}{1 + d\varphi/d\tau} \right)^2. \quad (1.26)$$

Тогда, например, для импульсного сигнала накачки с гауссовским распределением давления на круглом излучателе радиуса  $a$ , форма сигнала на оси излучателя будет определяться выражением:

$$p_{LF}(z) = \frac{\beta p_0^2 a^2}{8c_0^4 \rho_0 J_{abs}} \frac{1}{z} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( \frac{E(\tau)}{1 + d\varphi/d\tau} \right)^2. \quad (1.27)$$

## § 1.6 Численные алгоритмы для описания параметрических взаимодействий

Как было показано выше, все аналитические модели, полученные в теории параметрических взаимодействий, построены с учетом различных приближений при описании нелинейных, диссипативных и дифракционных эффектов, как для высокочастотных волн накачки, так и для генерируемого низкочастотного излучения. Поэтому широкий класс исследований направлен на численное описание нелинейных взаимодействий в поле параметрического излучателя.

В численных расчетах нелинейных взаимодействий волн в трехмерной постановке используются различные модели. Наиболее общий подход при решении трехмерных задач состоит в расчете конечно-разностными методами нелинейной системы уравнений для сжимаемой сплошной вязкой среды [34]. Однако получение решений такой системы даже для радиально-симметричных источников сопряжено с большими вычислительными затратами, поэтому существующий алгоритм разработан для небольшого числа узлов пространственной сетки и для слабого проявления нелинейных эффектов.

Поэтому более удобной моделью для практического использования является однонаправленное уравнение Вестервельта, учитывающее эффекты нелинейности, дифракции и термовязкого поглощения [2]. Оно решается численно, например, конечно-разностными методами в спектральном представлении [35–42], но существующие



алгоритмы построены либо с использованием приближения квазилинейности [35–41], либо с приближенным учетом нелинейных эффектов [42]. Следуя теории Вестервелта, поле ВРЧ в квазилинейной задаче выражается через объемный интеграл от функции источников волн накачки (1.1), который рассчитывается с использованием численных методов для различной геометрии источников. При этом линейные поля накачки в (1.1) могут быть получены либо путем решения точной дифракционной задачи методом интеграла Рэлея [100], либо методом углового спектра [4, 101–103].

Если дифракционная расходимость высокочастотных волн накачки и генерируемого низкочастотного излучения на разностной частоте не превышает  $\pm 15^\circ$  [51], а это справедливо для большинства параметрических излучателей, то можно воспользоваться более простой моделью – параболическим уравнением ХЗК [50]. Поскольку представленная в настоящей диссертации численная модель основана на решении уравнения ХЗК, то остановимся более подробно на существующих численных алгоритмах решения этого уравнения для моделирования нелинейных акустических пучков.

### 1.6.1 Спектральный подход к решению уравнения ХЗК

Согласно спектральному представлению (так называемый Бергенский код) [52–57], решение уравнения ХЗК (1.4) ищется в виде разложения в бесконечный ряд Фурье по временным гармоникам с угловыми частотами  $\omega_n$ :

$$p(\tau, x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(x, y, z) \exp(i\omega_n \tau). \quad (1.28)$$

Подставляя (1.28) в уравнение ХЗК (1.4), получим бесконечную систему связанных уравнений для амплитуд спектральных компонент  $p_n$ :

$$\frac{\partial p_n}{\partial z} = \frac{c_0}{2i\omega_n} \left( \frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_n}{\partial y^2} \right) - \frac{\delta\omega_n^2}{2c_0^3} p_n + \frac{i\beta\omega_n}{2c_0^3\rho_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} p_m p_{n-m}, \quad (1.29)$$

которая с учетом  $p_{-n} = p_n^*$  и  $p_{n=0} = 0$  может быть переписана как

$$\frac{\partial p_n}{\partial z} = \frac{c_0}{2i\omega_n} \left( \frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_n}{\partial y^2} \right) - \frac{\delta\omega_n^2}{2c_0^3} p_n + \frac{i\beta\omega_n}{c_0^3\rho_0} \left( \sum_{m=1}^{\infty} p_m^* p_{n+m} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} p_m p_{n-m} \right). \quad (1.30)$$

Для решения системы (1.30) необходимо некоторым образом ограничить число рассматриваемых спектральных компонент, поэтому от (1.30) переходят к системе с конечным числом гармоник  $N_{\max}$ , полагая амплитуды всех спектральных компонент с номерами  $n > N_{\max}$  равными 0:

$$\frac{\partial p_n}{\partial z} = \frac{c_0}{2i\omega_n} \left( \frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_n}{\partial y^2} \right) - \frac{\delta\omega_n^2}{2c_0^3} p_n + \frac{i\beta\omega_n}{c_0^3\rho_0} \left( \sum_{m=1}^{N_{\max}-n} p_m^* p_{n+m} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} p_m p_{n-m} \right). \quad (1.31)$$

На практике для корректного описания профиля нелинейной волны необходимо учитывать порядка  $N_{\max} = 1000$  спектральных компонент [56], однако использование большого числа гармоник делает решение системы (1.31) затруднительным в силу квадратичной зависимости количества операций от  $N_{\max}$  [69]. Поэтому число высокочастотных компонент, которое определяет ширину ударного фронта в численном решении, стараются как можно сильнее ограничивать при расчете конкретной физической задачи.

Для решения системы (1.31) могут применяться различные конечно-разностные алгоритмы: комбинация явной (нелинейность) и неявной (дифракция и поглощение) численных схем [52–53, 55], схема Кранка-Николсона [62].

При использовании метода расщепления по физическим факторам [56, 59–60, 102], когда на каждом шаге вдоль координаты распространения  $z$  действие эффектов дифракции, поглощения и нелинейности (и других физических эффектов при необходимости) в уравнении ХЗК (1.4) рассматривается независимо

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 p}{\partial \tau \partial z} &= \frac{c_0}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\beta}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial p^2}{\partial \tau},\end{aligned}\tag{1.32}$$

и решение, например, дифракционной задачи используется в качестве начальных условий для диссипативной, а решение диссипативной – для нелинейной задачи. При таком подходе становится возможным использование оптимальных численных схем для каждого конкретного оператора.

Так, в спектральном представлении (1.28) линейная **дифракционная задача** для каждой гармоники с амплитудой давления  $p_n$

$$\frac{\partial p_n}{\partial z} = \frac{c_0}{2i\omega_n} \left( \frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_n}{\partial y^2} \right)\tag{1.33}$$

решается различными методами [103], среди которых можно отметить следующие:

1. Использование **явной** конечно-разностной аппроксимации первой и вторых производных в узлах трехмерной численной сетки  $(x, y, z) = (i, j, k)$ :

$$\frac{p_n^{i,j,k+1} - p_n^{i,j,k}}{\Delta z} = \frac{c_0}{2i\omega_n} \left( \frac{p_n^{i+1,j,k} - 2p_n^{i,j,k} + p_n^{i-1,j,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{p_n^{i,j+1,k} - 2p_n^{i,j,k} + p_n^{i,j-1,k}}{(\Delta y)^2} \right)\tag{1.34}$$

приводит к абсолютно неустойчивой схеме, которая не может быть использована на практике. Вместо нее можно составить полностью неявный алгоритм:

$$\frac{p_n^{i,j,k+1} - p_n^{i,j,k}}{\Delta z} = \frac{c_0}{2i\omega_n} \left( \frac{p_n^{i+1,j,k+1} - 2p_n^{i,j,k+1} + p_n^{i-1,j,k+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{p_n^{i,j-1,k+1} - 2p_n^{i,j,k+1} + p_n^{i,j+1,k+1}}{(\Delta y)^2} \right), \quad (1.35)$$

который имеет 2 порядок точности по поперечным координатам  $(x, y)$  и 1 порядок точности по координате распространения  $z$ . Точность по  $z$  можно улучшить до 2 порядка за счет применения схемы Кранка-Николсон, являющейся комбинацией явного и неявного представлений вторых производных в правой части уравнения (1.33)

$$\begin{aligned} \frac{p_n^{i,j,k+1} - p_n^{i,j,k}}{\Delta z} = & \frac{c_0}{2i\omega_n} \frac{(p_n^{i+1,j,k+1} - 2p_n^{i,j,k+1} + p_n^{i-1,j,k+1}) + (p_n^{i+1,j,k} - 2p_n^{i,j,k} + p_n^{i-1,j,k})}{2(\Delta x)^2} + \\ & + \frac{c_0}{2i\omega_n} \frac{(p_n^{i,j-1,k+1} - 2p_n^{i,j,k+1} + p_n^{i,j+1,k+1}) + (p_n^{i,j-1,k} - 2p_n^{i,j,k} + p_n^{i,j+1,k})}{2(\Delta y)^2}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Однако в обеих схемах (неявной и Кранк-Николсон) необходимо решить систему линейных уравнений с блочно-трехдиагональной матрицей, что представляет собой сложную вычислительную проблему при достаточно большом числе узлов сетки вдоль осей  $x$  и  $y$ . Поэтому к данному методу прибегают редко.

Предпочтительнее использовать метод переменных направлений, когда на первом полушаге  $\Delta z/2$  вторая производная по одной координате (например,  $x$ ) раскрывается явно, а по другой (например,  $y$ ) неявно, а на втором полушаге  $\Delta z/2$  – наоборот. При этом на каждом полушаге  $\Delta z/2$  система уравнений с трехдиагональной матрицей для всех значений индексов  $(i)$  или  $(j)$  решается методом прогонки, а численный алгоритм имеет 2 порядок точности по всем координатам.

Метод прогонки для системы уравнений типа  $(i = 1, \dots, n)$

$$Ax_{i-1} + Bx_i + Cx_{i+1} = F_i \quad (1.37)$$

состоит в том, что неизвестные связаны друг с другом рекуррентным соотношением с прогоночными коэффициентами  $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ :

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = n-1, \dots, 1 \\ x_n &= \frac{F_n - A_n\beta_n}{B_n + A_n\alpha_n}, \\ \alpha_{i+1} &= -\frac{C_n}{A_i\alpha_i + B_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{F_i - A_i\beta_i}{A_i\alpha_i + B_i}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Этот метод эффективен, так как число вычислительных операций пропорционально числу узлов сетки. Подробнее метод переменных направлений будет описан в главе 3.

2. Метод углового спектра [4, 101–103]. Согласно этому методу, спектральные компоненты амплитуды давления  $p_n(x, y, z)$  раскладываются в двумерный пространственный спектр в  $k$ -пространстве  $S_n(k_x, k_y, z)$  с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ), после чего компоненты углового спектра в параболическом приближении на каждом последующем шаге рассчитываются так:

$$S_n(k_x, k_y, z + \Delta z) = S_n(k_x, k_y, z) \exp \left[ i \Delta z (k_x^2 + k_y^2) / (2k_n) \right], \quad (1.39)$$

где  $k_n = \omega_n / c_0$  – волновое число  $n$ -ой гармоники, а решение для гармоник  $p_n(x, y, z + \Delta z)$  ищется с помощью обратного БПФ.

3. метод интеграла Рэлея [100] (точное решение линейной дифракционной задачи для плоского источника):

$$p_n(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega_n \rho_0}{2\pi} \int \frac{v_n^{normal}(\mathbf{r}') e^{ik_n|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} dS'. \quad (1.40)$$

где  $v_n^{normal}(\mathbf{r}')$  – комплексные амплитуды нормальной компоненты колебательной скорости на поверхности излучателя,  $\mathbf{r}'$  – радиус-вектор на поверхности излучателя,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор в точке наблюдения,  $S'$  – область интегрирования.

Решать **диссипативную задачу**

$$\frac{\partial p_n}{\partial z} = -\frac{\delta\omega_n^2}{2c_0^3} p_n \quad (1.41)$$

особенно удобно в спектральном представлении, поскольку можно использовать точное аналитическое решение для каждой гармоники в виде затухающей экспоненты:

$$p_n(x, y, z + \Delta z) = p_n(x, y, z) \exp \left( -\frac{\delta\omega_n^2}{2c_0^3} \Delta z \right). \quad (1.42)$$

Среди методов решения **системы нелинейных уравнений**

$$\frac{\partial p_n}{\partial z} = \frac{i\beta\omega_n}{c_0^3 \rho_0} \left( \sum_{m=1}^{N_{\max}-n} p_m^* p_{n+m} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} p_m p_{n-m} \right) \equiv g_n \quad (1.43)$$

стоит отметить метод Рунге-Кутты, например, 4 порядка точности (частный случай – простейшая конечно-разностная аппроксимация производной  $\partial/\partial z$  или метод Эйлера):

$$\begin{aligned} p_n(z + \Delta z) &= p_n(z) + \Delta z / 6 (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= g_n(z, p_n(z)), \\ k_2 &= g_n \left( z + \frac{\Delta z}{2}, p_n(z) + \frac{\Delta z}{2} k_1 \right), \\ k_3 &= g_n \left( z + \frac{\Delta z}{2}, p_n(z) + \frac{\Delta z}{2} k_2 \right), \\ k_4 &= g_n(z + \Delta z, p_n(z) + \Delta z k_3). \end{aligned} \quad (1.44)$$

### 1.6.2 Временной подход к решению уравнения ХЗК

В теории параметрических взаимодействий необходимость решения уравнения ХЗК во временном представлении возникает, например, при рассмотрении эволюции импульсных сигналов накачки с широким исходным спектром. В этом случае решение в спектральном представлении системы нелинейных уравнений (1.43) становится затруднительным, поскольку резко увеличивается число гармоник и вместе с ним квадратично растет число операций в нелинейном алгоритме [69]. В таком случае уместнее использовать временной подход [58–61] (Техасский код) и упомянутый выше метод расщепления по физическим факторам [56, 59–60, 102].

Рассмотрим сначала решение **дифракционной задачи**:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{c_0}{2} \int \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \partial \tau. \quad (1.45)$$

В выражении (1.45) сначала рассчитываются пространственные производные по координатам с помощью конечно-разностных аппроксимаций различной точности, а затем временной интеграл может быть вычислен, например, методом трапеций [59].

Действие оператора **поглощения** (1.32) во временном представлении вычисляется, например, с помощью центральной конечно-разностной аппроксимации второй производной во времени, что обеспечивает 2 порядок точности:

$$\left( \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} \right)_i = \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{(\Delta \tau)^2}, \quad (1.46)$$

а для решения **нелинейной задачи**

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\beta}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial p^2}{\partial \tau} \equiv \frac{N}{2} \frac{\partial p^2}{\partial \tau}. \quad (1.47)$$

используются различные численные алгоритмы:

1. широко применяется неявный метод на основе точного решения уравнения простых волн [99], являющийся методом 2 порядка точности по времени:

$$p(z + \Delta z, \tau) = p(z, \tau + Np\Delta z). \quad (1.48)$$

2. явный конечно-разностный консервативный алгоритм [104], который имеет 2 порядка точности по времени и 1 по координате распространения  $z$ :

$$p(z_{i+1}, \tau_j) = p(z_i, \tau_j) + \frac{N\Delta z}{4\Delta \tau} \left( V^2(z_i, \tau_{j+1}) - V^2(z_i, \tau_{j-1}) \right). \quad (1.49)$$

3. явная консервативная удароуправляющая схема типа Годунова [105] 2 порядка точности по времени и 1 порядка по координате  $z$ . Численный алгоритм схемы Годунова будет представлен в главе 2, однако стоит отметить, что эта схема является наиболее оптимальной, поскольку требует учета небольшого числа точек временной сетки на разрыв (2–3 в плоских и 7–8 в дифракционных задачах) против порядка 50 и 20 в алгоритмах 1 и 2, соответственно [104].

### 1.6.3 Комбинированный подход к решению уравнения ХЗК

Комбинированный подход [62–67] заключается в том, что часть операторов рассчитывается в частотной, а часть во временной области, используя преимущества того или иного подхода.

**Операторы поглощения и дифракции** обычно удобнее рассчитывать спектральным методом. Так, в частотном представлении эффекты поглощения учитываются точным образом с помощью аналитического решения (1.42), а при больших объемах данных вычисления можно осуществлять параллельно по пространству. В дифракционных задачах возникает проблема отражений поля от границ численной сетки (если она недостаточно большая), для борьбы с которыми обычно используются поглощающие слои [106–107]. В спектральном представлении уравнение (1.33) несложным образом модифицируется путем преобразования координат, что приводит к модификации коэффициентов, стоящих перед вторыми производными в уравнении (см. подробнее в главе 3), при этом сами методы решения не меняются. Кроме того, спектральный подход позволяет распараллеливать вычисления по гармоникам в силу независимости уравнений для каждой спектральной составляющей.

Что касается **нелинейной задачи**, то здесь могут быть использованы оба подхода в зависимости от конкретной физической задачи. Кроме того, часто для нелинейного оператора сочетают использование частотного и временного алгоритмов (развито в Лаборатории медицинского и промышленного ультразвука МГУ). Например, для исходно гармонической волны накачки, на расстояниях до момента образования разрывов в профиле волны, что сопровождается генерацией множества высших частот, может быть использован спектральный алгоритм, а после – временной [101]. Это связано с тем, что с обогащением спектра волны новыми частотами резко увеличивается количество операций в спектральном алгоритме, пропорциональное квадрату числа гармоник [69], и вычисления становятся критичными с точки зрения затрат на процессорное время. При этом во временном представлении количество учитываемых спектральных компонент определяется числом временных узлов и временным окном и не меняется по мере

распространения волны (меняются только амплитуды гармоник), а число операций зависит линейно от числа временных точек.

В параметрических задачах с двухчастотной волной накачки обычно используется спектральный подход с учетом только определенного числа гармоник для облегчения вычислений, а для описания эволюции импульсной накачки – различные временные алгоритмы.

#### *1.6.4 Дополнительные замечания к существующим численным алгоритмам, описывающим работу параметрических излучателей*

При моделировании параметрических взаимодействий различными научными группами используются алгоритмы на основе уравнения ХЗК в разных представлениях [51, 68–73]. Однако все они используют ряд приближений при учете дифракционных и нелинейных эффектов при распространении волн, т.е. ни одну численную модель нельзя назвать достаточно полной.

Так, ряд исследований параметрической генерации низкочастотного излучения основан на расчете полей от осесимметричных круглых излучателей [51, 68–69, 71–73], поскольку это облегчает расчет дифракционного оператора, который в этом случае содержит производные по радиальной координате. Такая постановка задачи фактически является двумерной и, в том числе, уменьшает затраты на требуемую память для хранения данных. Однако параметрические излучатели могут иметь более сложную геометрию, что приводит к количественным различиям в дифракционных эффектах по двум поперечным координатам, что делает дифракционную задачу принципиально трехмерной.

Другой класс приближенных решений уравнения ХЗК связан с использованием квазилинейных или слабо нелинейных подходов [51, 68–72], не требующих рассмотрения большого числа спектральных компонент, учет которых приводил бы к огромным затратам на время работы алгоритмов и объем требуемой для хранения данных оперативной памяти. Однако известно, что эффективность параметрических процессов увеличивается при переходе к сильно нелинейным режимам работы параметрического излучателя, поэтому в численном моделировании необходимо учитывать сильное проявление нелинейных эффектов и образование ударных волн.

Наиболее полный трехмерный нелинейный алгоритм в спектральном представлении был разработан ранее авторами работы [70] для прямоугольного параметрического излучателя, работающего в воздухе. Однако и он не лишен ограничений. Во-первых, как и другие численные модели [51, 68–69, 71–72], алгоритм [70] развит для так называемого

трансформированного уравнения ХЗК, получаемого из классического уравнения (1.4) путем преобразования координат вида

$$x' \sim \frac{x}{1 + z/z_{\text{norm}}}, y' \sim \frac{y}{1 + z/z_{\text{norm}}}, \quad (1.50)$$

где  $z_{\text{norm}}$  – нормирующее расстояние. Такие преобразования описывают растяжение поперечной сетки  $(x, y)$  с увеличением пройденного волной расстояния  $z$ , что приводит к менее точному решению дифракционной задачи.

Во-вторых, данный алгоритм построен для относительно малого отношения частот волн накачки к генерируемой разностной частоте (6 против 30 в настоящей диссертации), что не требует учета большого числа спектральных компонент (в работе [70] авторы используют до 42 компонент в различных режимах работы излучателя).

В-третьих, при распространении в воздушной среде из-за достаточно сильного поглощения, которое обусловлено релаксационными процессами в воздухе, реализуются лишь умеренные нелинейные условия распространения взаимодействующих волн накачки, что приводит к образованию менее резких ударных фронтов в профиле нелинейной волны и менее широкому спектру. Так, в [70] число Гольдберга составило  $\Gamma = 0.18$ , в то время как в настоящей диссертации рассматриваются режимы вплоть до  $\Gamma = 0.01$ . Такая разница примерно эквивалентна двадцатикратному увеличению учета числа гармоник в задаче о параметрических взаимодействиях в сильно нелинейных полях и требует разработки соответствующих численных алгоритмов.

Наконец, ряд технических моментов, таких как, выбор метода переменных направлений с поглощающими слоями в качестве дифракционного алгоритма, использование комплексных переменных, отличающийся метод уменьшения удерживаемых в нелинейном алгоритме спектральных компонент, реализован в настоящей диссертации иначе.

## § 1.7 Выводы к первой главе

Таким образом, в главе 1 рассмотрены существующие аналитические и численные модели, позволяющие рассчитывать поле волны разностной частоты, генерируемой при взаимодействии двух гармонических высокочастотных волн накачки с близкими частотами, а также самодемодуляцию высокочастотной импульсной волны накачки. Однако все эти модели используют различные приближения, связанные с описанием дифракционных и нелинейных эффектов при распространении волн.

Большинство аналитических решений построены с использованием квазилинейного подхода и не учитывают свойств сильно нелинейных взаимодействий волн накачки,



которые сопровождаются образованием разрывов в профиле волны. Хотя дополнительное нелинейное поглощение энергии волн накачки на разрывах уменьшает область параметрической генерации ВРЧ, эффективность этой генерации, напротив, растет с увеличением начального давления на излучателе.

Следовательно, необходимы алгоритмы, позволяющие с высокой точностью рассчитывать поля мощных параметрических излучателей. Кроме того, получить аналитические решения удастся только в предположении определенной геометрии источника волн накачки (например, круглый или прямоугольный излучатель). Однако реалистичные излучатели могут иметь более сложную геометрию (например, иметь структуру многоэлементных решеток), что будет влиять на точное описание дифракционных эффектов волн накачки и ВРЧ.

Обойти все описанные выше ограничения при описании параметрических взаимодействий можно, решая задачу численно. При этом построение численных алгоритмов, особенно в трехмерной постановке, также имеет ряд трудностей. Это связано с длительностью расчетов и необходимостью использования больших объемов памяти для хранения данных во время работы алгоритма, особенно в режимах развитых разрывов, когда при нелинейном взаимодействии двух первичных волн генерируется огромное число спектральных компонент. Поэтому существующие численные модели также используют ряд допущений, связанных с осевой симметрией задачи, и построены для умеренного проявления нелинейности среды.

Таким образом, численное моделирование нелинейно-дифракционной задачи в трехмерной постановке с реалистичными начальными условиями на излучателе, чему посвящены последующие главы настоящей диссертации, представляет несомненный практический и научный интерес.

## Глава 2

### НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН НАКАЧКИ В ПРИБЛИЖЕНИИ ПЛОСКИХ ВОЛН

*В данной главе используются материалы, опубликованные в статьях [A3–A4] и материалах конференций «Волны–2024», «Ломоносов–2023», «Ломоносов–2022», «XXXIV сессия РАО», «Волны–2021».*

Одномерная задача о параметрической генерации низкочастотного излучения высокочастотной накачкой описывается уравнением Бюргерса [99], учитывающим эффекты нелинейности и поглощения. Наибольшую сложность при численном решении уравнения Бюргерса, а также более сложных трехмерных уравнений ХЗК и Вестервельта, представляет оператор нелинейности, который может рассчитываться в спектральном [51–57, 62–63, 68–70] и временном [58–61, 64–67, 71–73] представлениях. Также во многих задачах удобно применять комбинированный подход [101], когда до момента образования разрывов в профиле волны, пока число спектральных компонент невелико, используется спектральный алгоритм, а после – временной.

В спектральном подходе при образовании ударного фронта в профиле нелинейной исходно гармонической волны, для корректного описания ее распространения необходимо учитывать порядка тысячи гармоник основной частоты [56, 101]. В случае двухчастотного взаимодействия волн накачки число спектральных компонент увеличивается пропорционально отношению частоты волн накачки к разностной частоте и составляет уже несколько тысяч или даже десятков тысяч [108]. Это сильно затрудняет вычисления с точки зрения процессорного времени и требуемой памяти, особенно в трехмерной постановке задачи, поскольку количество операций в спектральном алгоритме пропорционально квадрату числа гармоник [51]. Использование временного подхода в задачах о нелинейных двухчастотных взаимодействиях затруднительно, так как, с одной стороны, временное окно должно быть достаточно длинным, чтобы вмещать низкочастотную компоненту, а с другой стороны, шаг дискретизации по времени должен быть достаточно малым, чтобы хорошо прописывались высокочастотные компоненты и их гармоники. Поэтому очевидным решением может стать использование спектрального представления с оптимизацией алгоритма путем частотной фильтрации, что сократит число удерживаемых в нелинейном алгоритме гармоник (при сохранении достаточной точности расчета поля волны разностной частоты) и сделает практически реализуемым решение трехмерных задач.

Для импульсных сигналов с широким спектром количество спектральных компонент возрастает в десятки раз по сравнению с двухчастотным начальным возбуждением, поэтому спектральный подход и его оптимизация становятся неприменимы. В этом случае уместнее использовать временной алгоритм для расчета генерации низкочастотного излучения, поскольку, начиная с некоторого числа гармоник (порядка сотни), временной подход становится выигрышнее спектрального по времени работы алгоритма [101]. Большинство существующих временных нелинейных алгоритмов [58–61, 64–65, 71–72] построены на основе точного решения уравнения простых волн в неявном виде [99]. Однако для описания профиля волны в режимах образования ударных фронтов такой алгоритм требует использования порядка 50 узлов временной сетки на разрыв [104] и, следовательно, нескольких тысяч узлов только на один высокочастотный период импульсного сигнала, что делает решение трехмерных задач практически нереализуемым. Поэтому в этой главе развит временной алгоритм решения уравнения Бюргерса на основе удароулавливающей схемы типа Годунова [105], для которой требуется всего лишь 2–3 узла временной сетки на ударный фронт волны при решении одномерных нелинейных задач [104, 109] и несколько больше, 7–8 узлов, при решении дифракционных задач для сглаживания больших градиентов поля давления в поперечном направлении [110].

## § 2.1 Уравнение Бюргерса в безразмерном виде

Нелинейное уравнение Бюргерса [99], являющееся одномерным приближением уравнений Вестервельта (1.3) [2] и ХЗК (1.4) [50], записывается следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\beta}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial p^2}{\partial \tau} + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}. \quad (2.1)$$

Для удобства численного моделирования уравнения (2.1) можно перейти к безразмерным переменным:  $P = p/\rho_0$ ,  $\theta = \omega_0 \tau$ ,  $Z = z/l_{sh}$ , где  $\omega_0$  – циклическая частота, соответствующая либо максимальной частоте при двухчастотном взаимодействии ( $\omega_0 = \omega_{pump1}$  при условии  $\omega_{pump1} > \omega_{pump2}$ ), либо центральной частоте импульсной высокочастотной волны накачки;  $l_{sh} = \rho_0 c_0^3 / \beta \omega_0 p_0$  – длина образования разрыва для периода волны с максимальной амплитудой  $p_0$  и частотой  $\omega_0$ . Тогда в уравнении (2.1) появится безразмерный коэффициент  $\Gamma = \delta \rho_0 \omega_0 / (2\beta p_0) = l_{sh} / l_{abs}$  – число Гольдберга, равное отношению длины нелинейности  $l_{sh}$  к длине поглощения высокочастотной волны  $l_{abs} = 2c_0^3 / \delta \omega_0^2$ . В результате получаем уравнение Бюргерса в безразмерном виде:

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = P \frac{\partial P}{\partial \theta} + \Gamma \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}. \quad (2.2)$$

Таким образом, все физические эффекты, описываемые уравнением Бюргерса, определяются единственным параметром  $\Gamma$ : режим  $\Gamma \ll 1$  соответствует сильному, а  $\Gamma \geq 1$  – слабому проявлению нелинейных эффектов.

## § 2.2 Спектральный подход к численному моделированию двухчастотного взаимодействия волн накачки

Рассмотрим двухчастотное взаимодействие волн накачки с циклическими частотами  $\omega_{\text{pump1}}$  и  $\omega_{\text{pump2}}$  (для определенности, как и в главе 1, положим  $\omega_{\text{pump1}} > \omega_{\text{pump2}}$ ), тогда начальное условие на излучателе при  $z = 0$  записывается так:

$$p(\tau, z = 0) = \frac{P_0}{2} \sin(\omega_{\text{pump1}} \tau) + \frac{P_0}{2} \sin(\omega_{\text{pump2}} \tau). \quad (2.3)$$

В процессе нелинейного взаимодействия в среде двух плоских первичных волн, помимо множества различных спектральных компонент, будет генерироваться волна на разностной частоте  $\omega_{\text{dif}} = \omega_{\text{pump1}} - \omega_{\text{pump2}}$ . Для удобства дальнейших вычислений без потери общности будем считать, что обе частоты накачки кратны разностной частоте, то есть выполняется условие  $\omega_{\text{pump1}} = m\omega_{\text{dif}}$  и  $\omega_{\text{pump2}} = (m-1)\omega_{\text{dif}}$ . В этом случае уравнение (2.1) удобнее нормировать на величину разностной частоты, т.е. положить  $\theta = \omega_{\text{dif}} \tau$ . Тогда безразмерное уравнение (2.2) перейдет в уравнение (2.4) с начальным условием на излучателе (2.5):

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = \frac{1}{m} \left( P \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\Gamma}{m} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \right), \quad (2.4)$$

$$P(\theta, Z = 0) = 0.5 \sin(m\theta) + 0.5 \sin([m-1]\theta). \quad (2.5)$$

Спектральный подход основан на представлении решения уравнений (2.2) и (2.4) в виде конечного ряда Фурье с  $N_{\text{max}}$  временных гармоник разностной частоты:

$$P(\theta, Z) = \sum_{n=-N_{\text{max}}}^{N_{\text{max}}} P_n(Z) e^{in\theta}. \quad (2.6)$$

Тогда уравнение (2.4) в частотном представлении записывается в виде конечной системы связанных нелинейных уравнений для безразмерных спектральных компонент  $P_n$  с положительными номерами конечного ряда Фурье с числом гармоник  $2N_{\text{max}}$  [56, 111–112]:

$$\frac{\partial P_n}{\partial Z} = \frac{in}{m} \left( \sum_{l=1}^{N_{\text{max}}-n} P_l^* P_{n+l} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-1} P_l P_{n-l} \right) - \frac{\Gamma}{m^2} n^2 P_n. \quad (2.7)$$

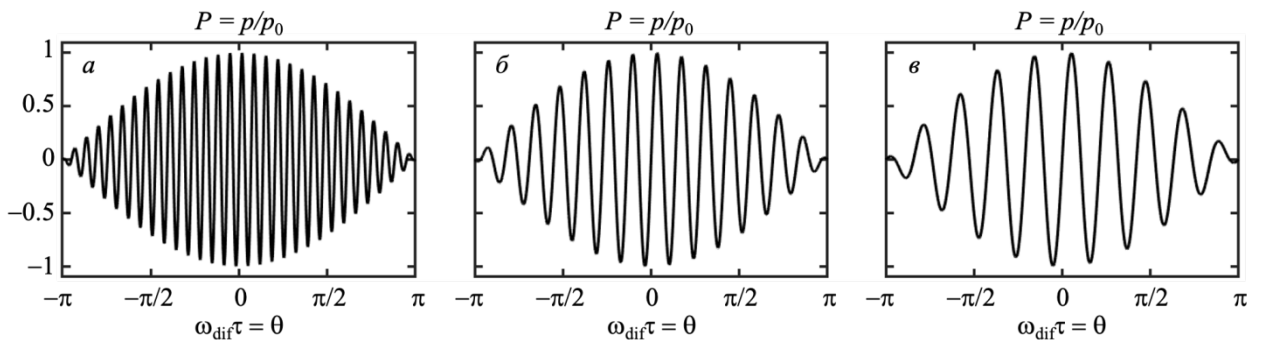
где  $1 \leq n \leq N_{\text{max}}$ ,  $P_l^*$  – комплексно-сопряженная амплитуда гармоники с номером  $l$ , а  $i$  – мнимая единица. При этом начальное условие (2.5) приобретает вид:  $P_{m-1,0} = P_{m,0} = -0.25i$ .

Система уравнений (2.7) решалась методом расщепления по физическим факторам [56, 59–60, 102], при этом каждый шаг по координате  $Z$  начинался и заканчивался оператором поглощения, рассчитываемом на половинном шаге сетки  $\Delta Z/2$ , что обеспечивает второй порядок точности алгоритма. Таким образом, схема применения метода расщепления по физическим факторам выглядит так:

$$P_n(\theta, Z + \Delta Z) = L_{A, \Delta Z/2} L_{N, \Delta Z} L_{A, \Delta Z/2} P_n(\theta, Z), \quad (2.8)$$

где действие оператора поглощения на шаге  $\Delta Z/2$  и оператора нелинейности на шаге  $\Delta Z$  обозначено как  $L_{A, \Delta Z/2}$  и  $L_{N, \Delta Z}$ , соответственно. Система нелинейных уравнений (2.7) без учета поглощения решалась методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности [103], а для расчёта поглощения для каждой из гармоник использовалось точное аналитическое решение в виде затухающей экспоненты [56].

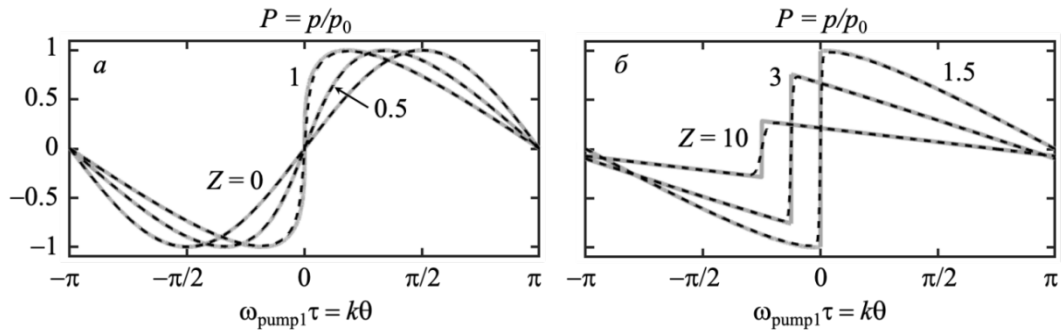
Численное моделирование генерации и распространения волны разностной частоты проводилось на примере частот, амплитуд и параметров среды, характерных для экспериментов с недавно разработанной подводной параметрической антенной [21]. Для численного анализа были взяты три волны накачки с частотами  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц и  $f_{\text{pump2}} = 145, 140$  и  $135$  кГц. Таким образом, генерировались волны разностной частоты с  $f_{\text{dif}} = 5, 10$  и  $15$  кГц, соответственно. На рис. 2.1 представлен один период безразмерного начального профиля волны (2.5) для трех выбранных пар взаимодействующих частот накачки и соотношений  $f_{\text{pump1}}/f_{\text{dif}} = 30, 15$  и  $10$ .



**Рис. 2.1.** Один период безразмерного начального профиля исходно гармонической волны накачки при  $Z = 0$  для трех случаев взаимодействующих пар частот:  $a - f_{\text{pump1}} = 150$  кГц и  $f_{\text{pump2}} = 145$  кГц;  $b - f_{\text{pump1}} = 150$  кГц и  $f_{\text{pump2}} = 140$  кГц;  $v - f_{\text{pump1}} = 150$  кГц и  $f_{\text{pump2}} = 135$  кГц.

Для того чтобы выявить оптимальные параметры численного алгоритма для получения референсных решений, сначала рассчитывалось распространение плоской волны накачки с частотой  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц и амплитудой  $p_0$ , соответствующей максимальной амплитуде в профиле волны при двухчастотном взаимодействии (рис. 2.1):  $p(\tau, z = 0) = p_0 \sin(\omega_{\text{pump1}} \tau)$ . Было получено, что моделирование при учете  $N_{\text{max}} = 250$

гармоник с безразмерным шагом пространственной сетки  $\Delta Z = 0.01$  хорошо совпадает с аналитическим решением для римановой плоской волны [99], результаты чего представлены на рис. 2.2. При этом для обеспечения устойчивости численной схемы [113] при моделировании с числом гармоник  $N_{\max} = 250$  физическое число Гольдберга  $\Gamma = 10^{-3}$  [114] было увеличено в 10 раз и составило  $\Gamma_{\text{model}} = 0.01$ .



**Рис. 2.2.** Искажение одного периода безразмерного профиля волны накачки с частотой  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц, амплитудой  $p_0$  и поглощением  $\Gamma_{\text{model}} = 0.01$  на расстояниях: *a* – до образования разрыва по мере укрупнения фронта,  $Z = 0, 0.5$  и  $1$ ; *б* – после образования разрыва по мере уменьшения амплитуды,  $Z = 1.5, 3$  и  $10$ . Профили на расстояниях  $Z = 3$  и  $Z = 10$  искусственно смещены вдоль временной шкалы на  $\pi/8$  и  $\pi/4$ , соответственно. Сплошная линия – аналитическое решение, штриховая линия – численное решение в случае учета  $N_{\max} = 250$  гармоник в спектре.

Как видно из рис. 2.2, численное решение хорошо соответствует аналитическому как на расстояниях до образования разрыва ( $Z < 1$ ), так и после ( $Z > 1$ ). Различия проявляются только в тонкой структуре ударного фронта и обусловлены конечным значением числа Гольдберга, которое и позволяет использовать число гармоник, ограниченное сверху. Таким образом, использование 250 гармоник для описания нелинейных процессов в высокочастотной волне представляется приемлемым.

Далее, при моделировании двухчастотных взаимодействий, также использовалось 250 гармоник частоты накачки  $f_{\text{pump1}}$  и число Гольдберга  $\Gamma_{\text{model}} = 0.01$ . Тогда в прямой постановке задачи для описания взаимодействия волн с выбранными частотами  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц и  $f_{\text{pump2}} = 145, 140$  или  $135$  кГц, необходимо учитывать  $N_{\max} = 7500$  ( $250 \cdot 30$ ),  $3750$  ( $250 \cdot 15$ ) или  $2500$  ( $250 \cdot 10$ ) гармоник разностной частоты  $f_{\text{dif}} = 5, 10$  или  $15$  кГц, что представляется трудно реализуемым при моделировании нелинейно-дифракционных задач на основе уравнений (1.3) и (1.4) ввиду квадратичного роста числа операций при расчете нелинейного оператора в зависимости от  $N_{\max}$ . Поэтому для обеспечения возможности решения трехмерных задач в разумное время и с минимальными затратами на требуемую память были рассмотрены различные способы оптимизации расчета нелинейного алгоритма путем фильтрации частот, описанные далее.

### 2.2.1 Пороговый метод прореживания спектра в нелинейном алгоритме

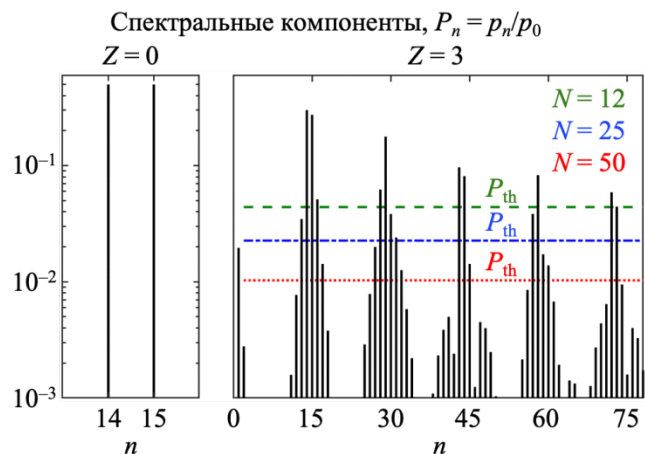
Идея метода уменьшения числа спектральных компонент в системе связанных уравнений (2.7), или прореживания спектра, состоит в следующем. Известно, что при распространении квазигармонической волны большой интенсивности каскадные процессы генерации новых частот направлены в основном в сторону

перехода энергии волны вверх по спектру [99]. Эффективность обратных процессов в сторону генерации разностных частот гораздо меньше. Ясно, что основной вклад в генерацию низкочастотных компонент спектра будут вносить высокочастотные компоненты с наибольшей амплитудой,

сосредоточенные вблизи кратных частот волн накачки. При этом в полном спектре нелинейной волны присутствуют частоты с достаточно малой амплитудой, которые можно отбросить без существенной потери точности решения для волны разностной частоты.

Иллюстрация к методу прореживания спектра представлена на рис. 2.3 для ВРЧ с частотой  $f_{\text{dif}} = 10$  кГц, где слева изображен исходный спектр на расстоянии  $Z = 0$  (два пика на частотах накачки), а справа – спектр нелинейной волны на расстоянии  $Z = 3$ , рассчитанный при учете полного числа гармоник  $N_{\text{max}} = 3750$ . Отметим, что расстояние  $Z = 3$  соответствует трем длинам образования разрыва для высокочастотного периода с максимальной амплитудой давления  $p_0$ , при этом нелинейные эффекты для остальных периодов с меньшей амплитудой выражены слабее (рис. 2.1). Как видно из рис. 2.3, амплитуда компонент спектра максимальна вблизи кратных гармоник частот накачки, а между ними ее величина гораздо меньше.

Чтобы определить номера гармоник с наибольшими амплитудами, вводилось безразмерное пороговое давление  $P_{\text{th}}$ , отсекающее гармоники с меньшей амплитудой (кроме первой) таким образом, чтобы в оптимизированном алгоритме присутствовало заранее заданное число гармоник  $N$ , намного меньшее, чем в точном решении. Здесь



**Рис. 2.3.** Иллюстрация к методу прореживания спектра на примере случая  $f_{\text{dif}} = 10$  кГц. Слева изображен спектр  $P_n$  исходной волны, где  $n = f_n/f_{\text{dif}}$  – номер гармоники разностной частоты, на расстоянии  $Z = 0$ , а справа – спектр на расстоянии  $Z = 3$  и пороговые давления для удержания в нелинейном спектральном алгоритме  $N = 12, 25, 50$  компонент (штриховая, штрихпунктирная и пунктирная линия, соответственно).

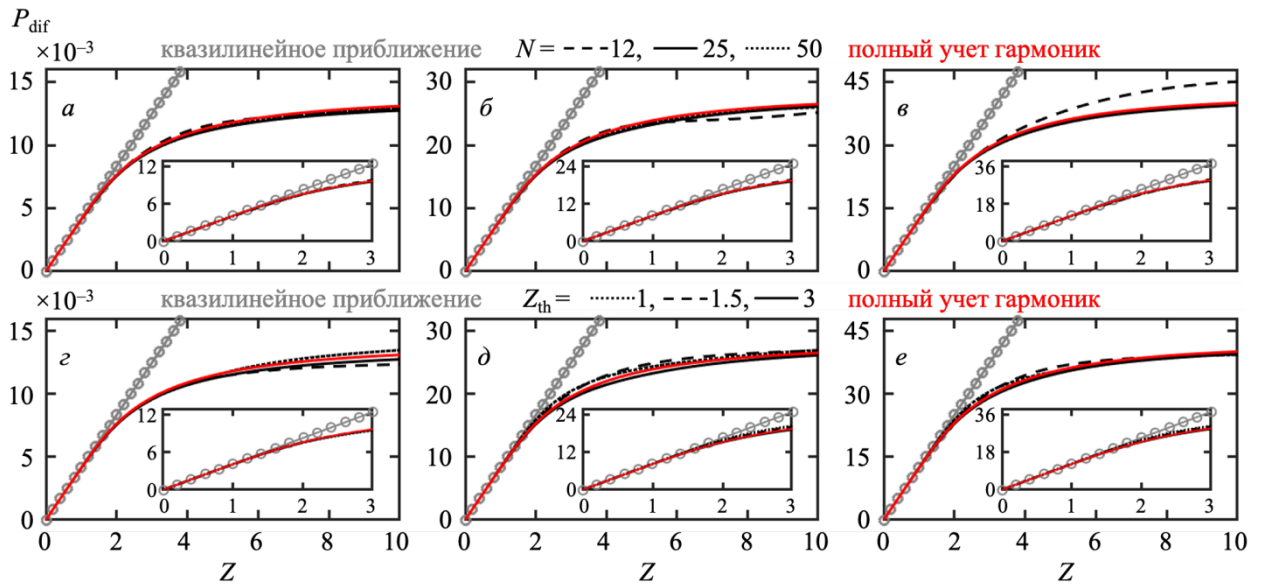
«точным» решением будем называть численное решение, полученное в моделировании с полным учетом всех гармоник  $N_{\max} = 7500, 3750$  или  $2500$  в зависимости от рассматриваемого значения  $f_{\text{dif}}$ . Пороговые значения  $P_{\text{th}}$  варьировались так, чтобы количество компонент спектра с амплитудой выше пороговой составляло  $N = 12, 25, 50$  (штриховая, штрихпунктирная и пунктирная линия, соответственно). Также варьировалось безразмерное расстояние  $Z_{\text{th}}$ , на котором проводилась процедура частотной фильтрации для рассматриваемых в работе трех значений  $f_{\text{dif}}$ . В полученном прореженном спектре с амплитудами выше порогового уровня, во-первых, ограничивалась высокочастотная часть спектра, а во-вторых, сокращалось количество комбинационных компонент, расположенных между амплитудными пиками кратных  $f_{\text{pump1}}$  и  $f_{\text{pump2}}$  частот. Далее алгоритм решения системы уравнений (2.7) модифицировался таким образом, чтобы вычисления проходили только по индексам гармоник, оставленных после прореживания. Критерием выбора наилучшей дистанции для прореживания и числа оставляемых в алгоритме спектральных компонент была ошибка менее 5% в определении амплитуды ВРЧ в расчетах с частотной фильтрацией относительно точного решения и удержание как можно меньшего числа гармоник  $N$ .

Кроме того, был рассмотрен случай удержания заданного числа спектральных компонент слева и справа от каждого кратного частотам накачки пика (например, 2 или 3 гармоник) и ограничения ВЧ части спектра, однако ошибка в вычислении амплитуды давления ВРЧ в этом способе при небольшом числе  $N$  была выше, чем в пороговом методе, и составляла  $> 5\%$ . Поэтому такой метод частотной фильтрации в дальнейшем не использовался.

На рис. 2.4 представлены зависимости безразмерной амплитуды давления  $P_{\text{dif}}$  волны разностной частоты от расстояния  $Z$  для трех значений  $f_{\text{dif}}$ : 5 кГц (рис. 2.4, а, з), 10 кГц (рис. 2.4, б, д) и 15 кГц (рис. 2.4, в, е). Точное решение при  $N = N_{\max}$  показано на всех графиках сплошной красной кривой, а квазилинейное аналитическое решение (1.9), используемое в качестве проверки корректности работы численного алгоритма, серой маркерной линией. Верхний ряд графиков (рис. 2.4, а–в) получен при прореживании спектра точного решения на расстоянии  $Z_{\text{th}} = 3$  с различным количеством включенных в нелинейный алгоритм гармоник  $N = 12$  (штриховая кривая), 25 (сплошная кривая) и 50 (пунктирная кривая). Нижний ряд (рис. 2.4, з–е) получен при прореживании спектра с фиксированным количеством включенных в нелинейный алгоритм гармоник  $N = 25$  на различных расстояниях  $Z = 1$  (пунктирная кривая), 1.5 (штриховая кривая) и 3 (сплошная кривая). Зависимости  $P_{\text{dif}}(Z)$  на начальной стадии распространения показаны на вкладках соответствующих рисунков. Отметим, что также были рассмотрены и другие дистанции



$Z_{th}$  для фильтрации частот (от 1 до 5 с шагом 0.5), которые не приводятся в работе как менее удачные для прореживания.



**Рис. 2.4.** Зависимости безразмерной амплитуды  $P_{dif}$  волны разностной частоты от расстояния  $Z$  для трех значений  $f_{dif}$ : 5 кГц (*a*, *z*), 10 кГц (*б*, *д*) и 15 кГц (*в*, *е*). Графики *a–в* – прореживание спектра проводилось на расстоянии  $Z_{th} = 3$  при различном количестве включенных в алгоритм гармоник  $N = 12$  (штриховая кривая), 25 (сплошная кривая) и 50 (пунктирная кривая); *z–е* – прореживание проводилось при  $N = 25$  на разных расстояниях  $Z_{th} = 1$  (пунктирная кривая), 1.5 (штриховая кривая) и 3 (сплошная кривая). На графиках также представлено решение в квазилинейном приближении (сплошная маркерная кривая) и точное решение (сплошная красная кривая) при полном учете гармоник  $N = N_{max}$  (7500, 3750 и 2500). Зависимости  $P_{dif}(Z)$  на начальной стадии распространения показаны на вкладках соответствующих рисунков.

Видно, что на начальном этапе, вплоть до расстояния  $Z = 2$ , амплитуда ВРЧ в численном решении, как при учете всех гармоник, так и в расчетах с прореженным спектром, растет линейно и практически не отличается от аналитического решения (1.9), полученного в квазилинейном приближении. Затем линейный рост замедляется и сменяется насыщением на расстояниях порядка нескольких длин образования разрыва для периода бигармонической волны с максимальной амплитудой  $p_0$ . При этом, чем больше величина разностной частоты  $f_{dif}$ , тем больше энергии переходит в нее от частот накачки в процессе генерации. Так, в соответствии с квазилинейным приближением, на расстоянии  $Z = 1$  амплитуда волны разностной частоты пропорциональна ее величине и для  $f_{dif} = 5$  кГц составляет 0.4%, для  $f_{dif} = 10$  кГц – 0.8% и для  $f_{dif} = 15$  кГц – 1.2% от максимальной амплитуды исходной волны накачки  $p_0$  или 0.04%, 0.16% и 0.36% от средней по периоду низкочастотной волны начальной интенсивности  $p_0^2/(4c_0\rho_0)$ . При достижении расстояний в несколько длин образования разрыва, на которых наступает насыщение амплитуды ВРЧ,

её амплитуда дополнительно увеличивается более, чем в 2 раза, что соответствует увеличению интенсивности более, чем в 4 раза.

Влияние прореживания спектра точного решения на расстоянии  $Z_{th} = 3$  на точность получаемого численного решения для  $P_{dif}$  при различном количестве включенных в нелинейный алгоритм гармоник  $N = 12, 25$  и  $50$  в сравнении с точным решением при  $N = N_{max}$  иллюстрируется на рис. 2.4, *a–в*. Видно, что при  $N = 12$  численное решение для разностной частоты сильно отличается от точного, начиная с расстояний порядка  $Z = 3$ . При использовании  $N = 25$  гармоник в нелинейном алгоритме ошибка в вычислении амплитуды волны разностной частоты составляет менее 0.4% на расстоянии  $Z = 1$ , менее 1.8% на расстоянии  $Z = 3$  и менее 2.8% на расстоянии  $Z = 10$ , при этом максимальная ошибка во всем диапазоне расстояний составляет менее 2.8%. При учете  $N = 50$  гармоник ошибка не превышает 2% на всех расстояниях. С учетом того, что параметрические излучатели используются в основном в режимах вблизи образования ударных фронтов, выбор  $N = 25$  или  $50$  гармоник представляется достаточным для дальнейшего анализа.

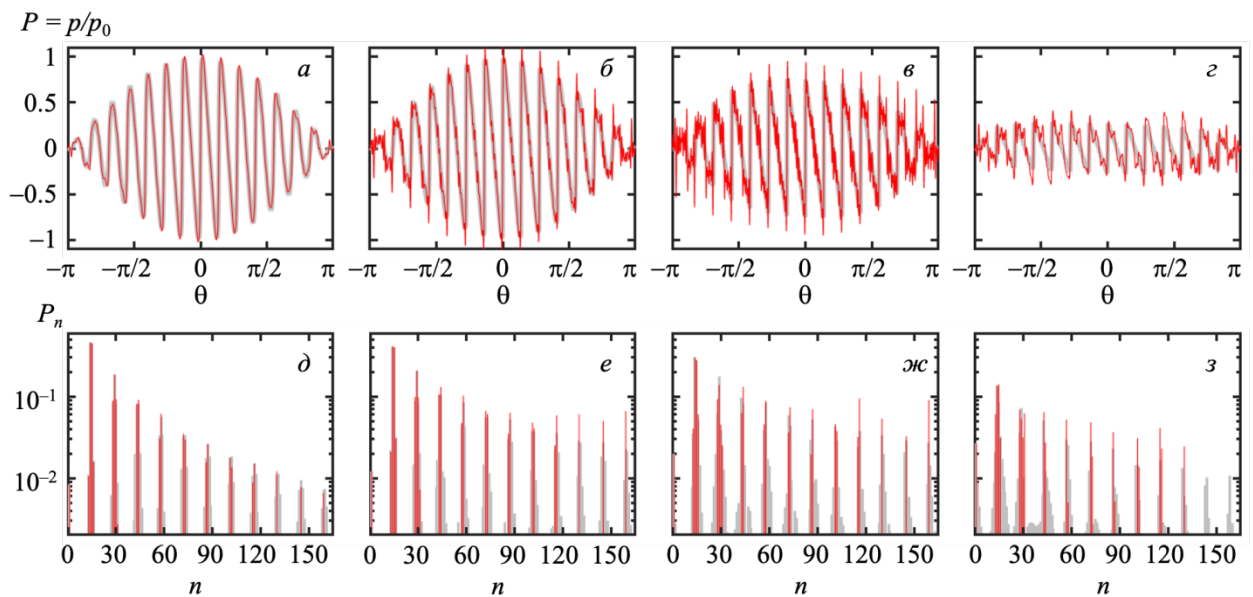
Влияние проведения прореживания спектра с фиксированным количеством включенных в нелинейный алгоритм гармоник  $N = 25$  на различных расстояниях  $Z_{th} = 1, 1.5$  и  $3$  в сравнении с точным решением при  $N = N_{max}$  иллюстрируется на рис. 2.4, *г–е*. Видно, что все полученные решения достаточно близки, однако прореживание на расстоянии  $Z_{th} = 3$  оказывается предпочтительным. При таком выборе отличие от точного решения на всех расстояниях для всех трех разностных частот, составляет менее 2.8%.

Таким образом, для трех пар взаимодействующих волн накачки с разностными частотами  $f_{dif} = 5, 10$  и  $15$  кГц число участвующих в нелинейном алгоритме спектральных компонент возможно сократить с  $N_{max} = 7500, 3750$  и  $2500$  до  $N = 25$  или  $50$  с ошибкой в расчете амплитуды ВРЧ менее 3% или 2%, соответственно, при наиболее удачном выборе расстояния, на котором выполняется прореживание спектра. Результаты ниже будут представлены для  $N = 25$  спектральных компонент, полученных при прореживании точного численного решения на расстоянии  $Z_{th} = 3$ .

Отметим, что на расстояниях  $Z < 2$  аналитическое решение (1.9), полученное в квазилинейном приближении при условии постоянства амплитуд волн накачки (сплошная маркерная линия на рис. 2.4, *a–е*), хорошо соответствует эталонному решению и может быть использовано вместо численного расчета нелинейного оператора. На расстояниях  $Z > 2$  ошибка при использовании квазилинейного приближения быстро возрастает.

На рис. 2.5 представлены характерные профили давления (рис. 2.5, *a–г*) и спектры (рис. 2.5, *д–з*) для случая  $f_{dif} = 10$  кГц при распространении волны на расстояния  $Z = 1, 1.5, 3$  и  $10$  (красная кривая) в сравнении с точным решением при  $N = N_{max}$  (серая кривая) в

случае прореживания спектра на расстоянии  $Z_{th} = 3$  и выборе порога, при котором  $N = 25$ . Видно, что вследствие ограничения числа удерживаемых гармоник на высоких частотах, в профиле появляются осцилляции за счет эффекта отражения частот (рис. 2.5, *a–z*). Однако, как показано выше, эти артефакты в описании полного спектра волны слабо влияют на амплитуду волны разностной частоты (рис. 2.4). В итоговом прореженном спектре (рис. 2.5, *д–з*) остается разностная частота и группы от 1 до 5 спектральных компонент вокруг 11 пиков, кратных начальным частотам накачки. Каждая из этих групп представляет собой последовательное чередование двух и одной компонент спектра с максимальной амплитудой, по бокам которых присутствуют комбинационные частоты, число которых изменяется от 0 до 3 для первых шести групп и равно 0, начиная с седьмой.



**Рис. 2.5.** *a–z* – один период безразмерного профиля давления для  $f_{\text{pump}1} = 150$  кГц и  $f_{\text{pump}2} = 140$  кГц на расстояниях  $Z = 1, 1.5, 3$  и  $10$ , соответственно; *д–з* – спектр волны на тех же расстояниях  $Z = 1, 1.5, 3$  и  $10$ , соответственно. Серой линией представлено точное решение, красной линией – результат прореживания спектра на расстоянии  $Z_{th} = 3$  в случае включения в нелинейный алгоритм  $N = 25$  гармоник.

### 2.2.2 Частотная фильтрация методом учета вклада от пар взаимодействующих гармоник

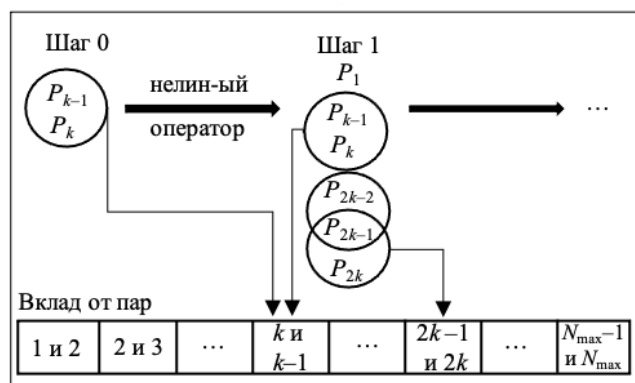
Другая идея метода прореживания спектра состоит в том, что, согласно системе (2.7), вклад в генерацию волны разностной частоты вносят только пары гармоник, номера которых отличаются на 1. Чтобы оценить, какие пары вносят наибольший вклад в амплитуду ВРЧ, в предварительных расчетах с полным числом спектральных компонент ( $N_{\text{max}} = 7500, 3750$  и  $2500$  для различных соотношений взаимодействующих частот накачки) на каждом шаге численного алгоритма отдельно рассчитывался вклад от каждой пары и прибавлялся к вкладам, уже внесенным той же парой на предыдущих шагах

(рис. 2.6). В дальнейшем вклады от всех пар гармоник сортировались в порядке уменьшения, и из полученного списка выбиралось определенное количество спектральных компонент, по которым в нелинейном алгоритме (2.7) и проводились вычисления.

Так как описанный ранее пороговый метод позволил оставить в системе (2.7) для выбранных частот волн накачки всего лишь  $N = 25$  гармоник вместо  $N_{\max} = 7500$  (3750 и 2500) при проведении процедуры прореживания на расстоянии трех длин образования разрыва с ошибкой в вычислении амплитуды волны разностной частоты относительно полного расчета при  $N = N_{\max}$  менее 3% вплоть до десяти длин образования разрыва, то, в первую очередь, было важно понять, насколько второй метод превосходит или уступает предыдущему при том же количестве оставляемых в системе (2.7) гармоник  $N = 25$ .

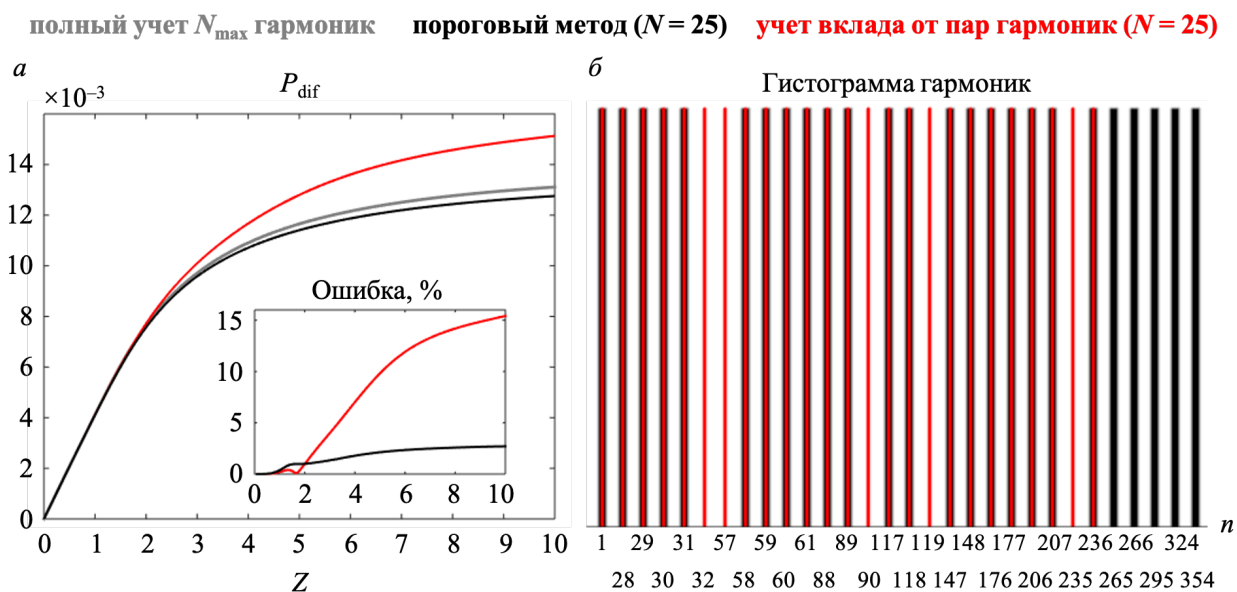
На рис. 2.7, а представлены графики зависимости безразмерной амплитуды давления волны разностной частоты  $P_{\text{dif}}$  с частотой  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц от расстояния, рассчитанные с учетом полного числа гармоник  $N_{\max} = 7500$  (серая кривая) и в результате прореживания спектра двумя различными методами (черная кривая – пороговый метод, красная – учет вклада от пар гармоник), а на вкладке приведены графики зависимостей ошибок обоих методов относительно полного решения. Видно, что на расстояниях меньше двух длин образования разрыва второй метод немного точнее первого, однако на больших дистанциях он существенно уступает ему в точности, при этом максимальная ошибка превышает 15%.

Такое поведение можно объяснить с помощью рис. 2.7, б, где приведена гистограмма оставляемых в нелинейном алгоритме гармоник, отобранных двумя методами. Черным цветом обозначены удерживаемые в алгоритме спектральные компоненты согласно пороговому методу, а красным – согласно учету вклада от взаимодействующих пар частот. Как видно из рисунка, во втором методе остается больше комбинационных частот и заметно меньше высоких частот. На малых расстояниях отсутствие высокочастотной части спектра не так критично влияет на точность вычисления амплитуды ВРЧ, и наличие большего числа комбинационных частот делает второй метод более точным, однако при увеличении пройденного волной расстояния  $Z$  и



**Рис. 2.6.** Иллюстрация к методу прореживания спектра путем подсчета суммарного вклада от взаимодействующих пар частот.

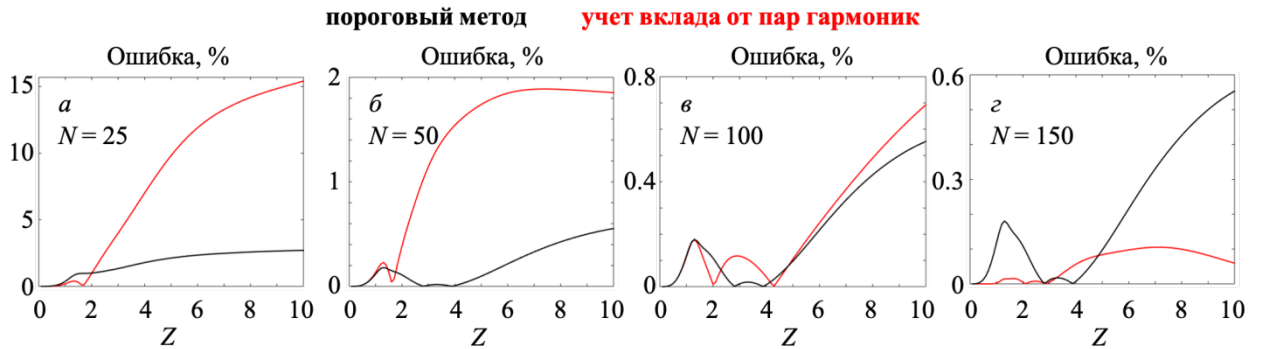
формировании ударных фронтов в профиле волны отсутствие высокочастотных компонент сильно сказывается на его точности.



**Рис. 2.7.** Результаты прореживания спектра для  $N = 25$  гармоник, оставляемых в нелинейном алгоритме (2.7) двумя методами прореживания: *a* – зависимость безразмерной амплитуды волны разностной частоты  $P_{\text{dif}} = p_{\text{dif}}/p_0$  от безразмерного расстояния  $Z = z/l_{\text{sh}}$  с представленным на вкладке графиком ошибок обоих методов относительно полного учета  $N_{\max}$  спектральных компонент, *б* – гистограммы оставляемых в системе (2.7) гармоник в двух методах прореживания.

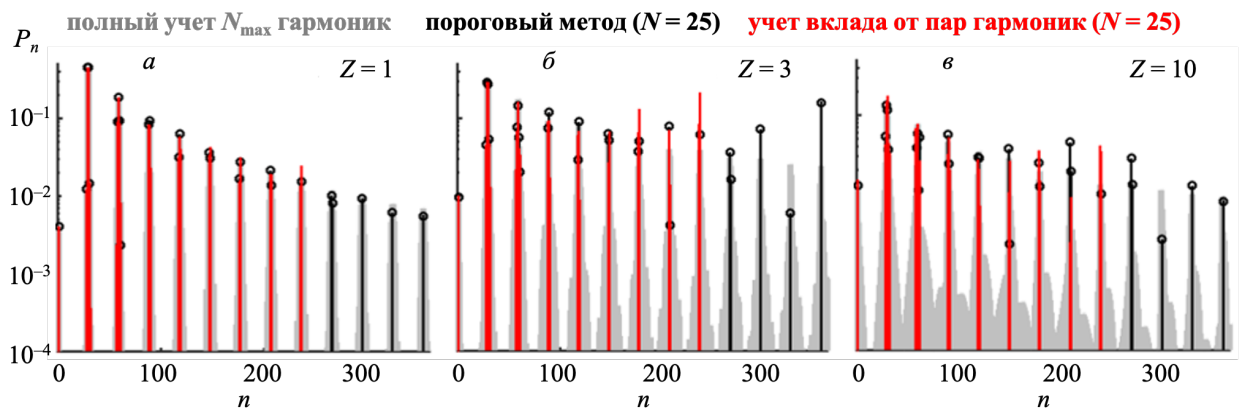
Далее число оставляемых в нелинейном алгоритме спектральных компонент последовательно увеличивалось с  $N = 25$  до 150. На рис. 2.8 приведены графики зависимостей ошибок обоих методов относительно полного расчета для различного числа оставляемых в алгоритме гармоник  $N = 25$  (рис. 2.8, *a*), 50 (рис. 2.8, *б*), 100 (рис. 2.8, *в*) и 150 (рис. 2.8, *г*), при этом черной линией изображен пороговый метод, а красной – метод учета суммарного вклада от пар взаимодействующих гармоник. Из рис. 2.8 видно, что, оставаясь более точным на малых расстояниях, рассматриваемый в этом пункте метод существенно проигрывает по точности пороговому методу на больших расстояниях вплоть до количества оставляемых гармоник  $N = 100$  (рис. 2.8, *г*). При дальнейшем увеличении числа гармоник до  $N = 150$ , второй метод становится более точным, и максимальная ошибка при рассмотрении на расстояниях до десяти длин образования разрыва для него составляет порядка 0.1% против 0.6% в частотной фильтрации по порогу. Такая немонотонная зависимость точности методов объясняется тем, что с увеличением числа оставляемых в численном алгоритме гармоник увеличивается высокочастотная часть спектра, при этом в методе учета вклада от пар гармоник по-прежнему остается меньше ВЧ компонент и больше комбинационных. Однако на

рассматриваемом диапазоне расстояний этого числа высокочастотных компонент уже достаточно, чтобы за счет комбинационных частот превзойти по точности пороговый метод.



**Рис. 2.8.** Графики зависимостей ошибок двух методов от безразмерного расстояния  $Z$  для различного количества оставляемых в алгоритме гармоник  $N$ .

На рисунке 2.9, а–в представлен спектр нелинейной волны на расстояниях  $Z = 1$  (рис. 2.9, а), 3 (рис. 2.9, б) и 10 (рис. 2.9, в), полученный при полном расчете (серая кривая), а также с использованием прореживания спектра пороговым (черная кривая) и вторым (красная кривая) методами. Как видно из рис. 2.9, высокочастотный спектр нелинейной волны рассчитывается неточно обоими методами, особенно на больших расстояниях. Однако, как показано ранее, такое поведение полного спектра волны несильно искажает величину амплитуды давления ВРЧ.



**Рис. 2.9.** Спектр нелинейной волны, рассчитанный на различных безразмерных расстояниях  $Z$ , равных 1 (а), 3 (б) и 10 (в) для полного расчета и двумя методами прореживания.

### 2.2.3 Выводы ко второму параграфу

Исследована задача о параметрических взаимодействиях двух гармонических волн накачки на основе одномерного уравнения Бюргера в спектральном представлении и предложен новый метод прореживания спектра, позволяющий сократить число включенных в нелинейный алгоритм гармоник более чем на два порядка, что снижает

количество операций на четыре порядка. Разработанный подход включает в себя ограничение числа высокочастотных компонент и сокращение комбинационных частот малой амплитуды, расположенных в промежутках между кратными исходным частотам накачки гармониками. Показано, что прореживание частот в численном решении с большим числом спектральных компонент предпочтительно проводить на трех длинах образования разрыва для высокочастотного периода волны накачки с максимальной амплитудой. При таком выборе амплитуда давления ВРЧ с ошибкой менее двух или трех процентов соответствует амплитуде давления, полученной в расчетах с учетом полного числа гармоник, вплоть до расстояний в десять длин образования разрыва.

Кроме того, был рассмотрен еще один метод уменьшения количества спектральных компонент при расчете нелинейного оператора в системе уравнений (2.7) на основе отбора пар гармоник, вносящих наибольший вклад в амплитуду ВРЧ и удержания только их в численной схеме. Показано, что этот метод уступает по точности пороговому методу при малом количестве оставляемых в расчете гармоник ( $N < 150$ ) на расстояниях до десяти длин образования разрыва. Однако при  $N > 150$  оставляемых в схеме гармоник он является более точным, и может быть использован при дальнейшем решении полной трехмерной нелинейно-дифракционной задачи о генерации волны разностной частоты при необходимости более точных расчетов и при наличии достаточно мощной вычислительной техники для работы с таким объемом данных.

Результаты для порогового метода, полученные в этом параграфе, используются в последующих главах при решении полной трехмерной нелинейно-дифракционной задачи о генерации волны разностной частоты.

### **§ 2.3 Временной подход на основе удароуправляющей схемы типа Годунова**

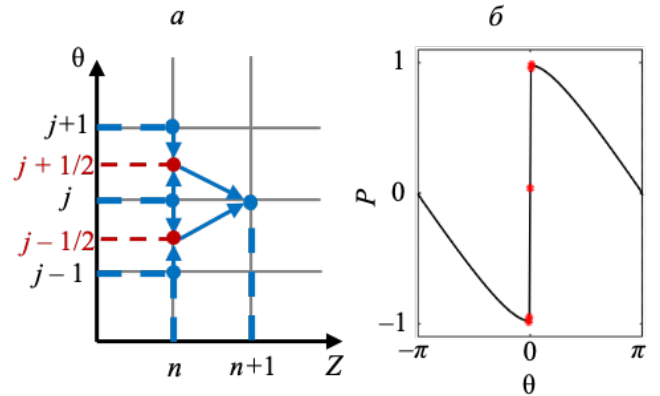
Как уже отмечалось во введении ко второй главе, в случае импульсных сигналов накачки, имеющих широкий спектр, количество спектральных компонент, участвующих в системе уравнений (2.7), возрастает в десятки раз по сравнению с двухчастотным возбуждением, особенно при описании разрывных режимов. Поэтому спектральный подход становится неприменим из-за квадратичной пропорциональности числа операций в нелинейном алгоритме (2.7) числу гармоник. В этом случае уравнение Бюргерса (2.1) удобнее решать во временном представлении с помощью явной шеститочечной консервативной схемы типа Годунова [105] (шаблон представлен на рис. 2.10, а), для корректной работы которой требуется использовать 2–3 узла временной сетки на ударный фронт волны (рис. 2.10, б) при решении одномерных нелинейных задач [104, 109] и 7–8

узлов – при решении дифракционных задач [110] против 50 временных узлов, используемых в разработанных ранее временных алгоритмах [58–61, 64–65, 71–72].

Решение уравнения Бюргера (2.1) на каждом последующем шаге ( $n+1$ ) по координате распространения волны  $Z$  для всех временных узлов  $j$  строилось следующим образом [105]:

$$P_j^{n+1} = P_j^n + \frac{1}{\Gamma} \frac{\Delta Z}{\Delta \theta} \left( H_{j+\frac{1}{2}}^n(Z) - H_{j-\frac{1}{2}}^n(Z) \right) + \frac{\Delta Z}{\Delta \theta^2} (P_{j+1}^n - 2P_j^n + P_{j-1}^n). \quad (2.9)$$

Здесь используются следующие безразмерные переменные:  $P = p/p_0$  – акустическое давление, нормированное на максимальную величину давления в начальном импульсном сигнале,  $Z = z/l_{\text{abs}}$  – координата распространения волны в единицах длин поглощения  $l_{\text{abs}} = 2c_0^3/\delta\omega_0^2$  на характерной частоте исходного сигнала  $f_0 = \omega_0/2\pi$ ,  $\theta = 2\pi f_0(t - z/c_0)$  – время в бегущей системе координат,  $\Gamma = \delta\rho_0\omega_0/(2\beta p_0) = l_{\text{sh}}/l_{\text{abs}}$  – число Гольдберга, равное отношению длины нелинейности  $l_{\text{sh}} = \rho_0 c_0^3/\beta\omega_0 p_0$  к длине поглощения  $l_{\text{abs}}$ .



**Рис. 2.10.** Шаблон удароулавливающей шеститочечной схемы типа Годунова (а) и пример одного периода профиля нелинейной волны с ударным фронтом, полученного с использованием 3 узлов временной сетки на разрыв (б).

В численной схеме (2.9)  $\Delta Z$  и  $\Delta \theta$  – шаги сетки по координате и времени, соответственно;  $H_{j\pm\frac{1}{2}}^n$  – потоки через центры ячеек, которые вычисляются по формуле:

$$H_{j\pm\frac{1}{2}}^n(Z) = \frac{1}{4} \left( \left( P_{j\pm\frac{1}{2}}^+ \right)^2 + \left( P_{j\pm\frac{1}{2}}^- \right)^2 \right) + \frac{a_{j\pm\frac{1}{2}}^n(Z)}{2} \left( P_{j\pm\frac{1}{2}}^+ - P_{j\pm\frac{1}{2}}^- \right), \quad (2.10)$$

где  $a_{j\pm\frac{1}{2}}^n(Z) = \max \left| P_{j\pm\frac{1}{2}}^+, P_{j\pm\frac{1}{2}}^- \right|$  – локальная скорость распространения волны в центре ячейки,

а давления справа и слева от узла сетки ( $n, j$ ) равны, соответственно:

$$\begin{aligned} P_{j+\frac{1}{2}}^+ &= P_{j+1}^n(Z) - \frac{\Delta\theta}{2} \left( \frac{\partial P}{\partial\theta} \right)_{j+1}^n, & P_{j+\frac{1}{2}}^- &= P_j^n(Z) + \frac{\Delta\theta}{2} \left( \frac{\partial P}{\partial\theta} \right)_j^n, \\ P_{j-\frac{1}{2}}^+ &= P_j^n(Z) - \frac{\Delta\theta}{2} \left( \frac{\partial P}{\partial\theta} \right)_j^n, & P_{j-\frac{1}{2}}^- &= P_{j-1}^n(Z) + \frac{\Delta\theta}{2} \left( \frac{\partial P}{\partial\theta} \right)_{j-1}^n. \end{aligned} \quad (2.11)$$

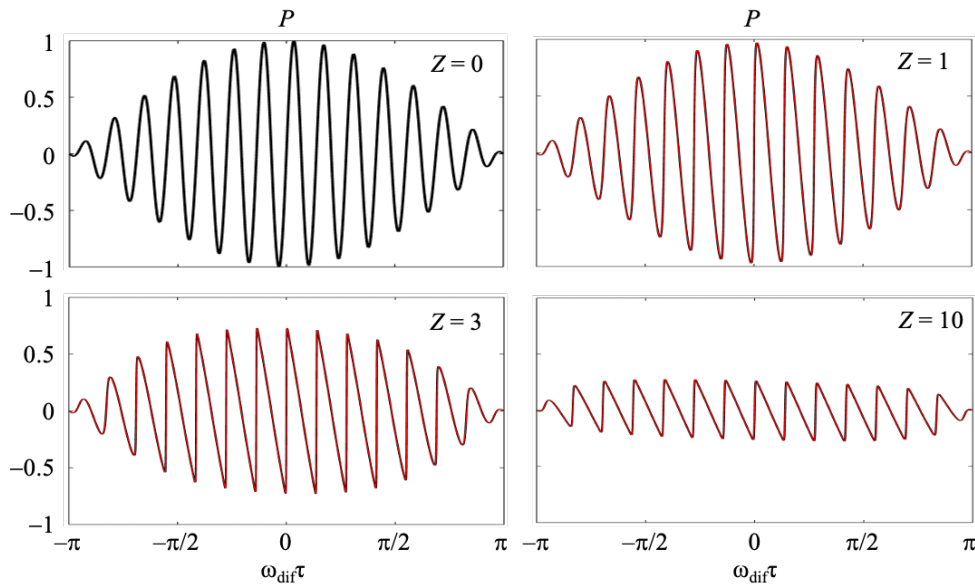


Производные  $\left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right)_{j,j\pm 1}^n$  в выражении (2.10) для повышения устойчивости алгоритма рассчитывались следующим образом:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right)_j^n = \min \text{mod} \left( \frac{\eta(P_j^n - P_{j-1}^n)}{\Delta \theta}, \frac{P_{j+1}^n - P_{j-1}^n}{2\Delta \theta}, \frac{\eta(P_{j+1}^n - P_j^n)}{\Delta \theta} \right), \quad (2.12)$$

при этом значение весового коэффициента  $\eta$  выбирается из промежутка  $1 \leq \eta \leq 2$ . В данной работе было выбрано  $\eta = 2$ , что обеспечивает наиболее точное решение при минимальном сеточном поглощении, в то время как  $\eta = 1$  соответствует наибольшему сеточному поглощению и, следовательно, более устойчивому численному алгоритму.

Третье слагаемое в схеме (2.9) является центрально-разностной аппроксимацией оператора поглощения в уравнении Бюргера (2.1). Введенная таким образом численная схема имеет второй порядок точности по времени  $\theta$  и первый – по координате распространения волны  $Z$ . Отметим, что повысить точность численного уравнения (2.1) можно с помощью упомянутого выше метода расщепления по физическим факторам [56, 59–60, 102], например, вычисляя решение на каждом шаге сетки по  $Z$  как последовательность решений подзадач  $P(\theta, Z+\Delta Z) = L_{A,\Delta Z/2} L_{N,\Delta Z} L_{A,\Delta Z/2} P(\theta, Z)$ . Операторы поглощения  $L_A$  и нелинейности  $L_N$  при этом рассчитываются независимо с использованием своих оптимальных численных схем, а итоговый алгоритм приобретает второй порядок точности по координате  $Z$  за счет дробления полного шага  $\Delta Z$  на подшаги.



**Рис. 2.11.** Профили нелинейной волны (случай двухчастотного взаимодействия с  $f_{\text{dif}} = 10$  кГц) на различных расстояниях  $Z$  в длинах образования разрыва: оператор поглощения рассчитан спектральным (черные кривые при  $Z > 0$ ) и временным (красные кривые при  $Z > 0$ ) методами.

В этом случае диссипативную задачу удобно решать в спектральном представлении, поскольку для каждой гармоники поля давления существует точное аналитическое решение в виде затухающей экспоненты [56]. Сравнение расчетов для оператора поглощения, записанного в частотном (рис. 2.11, черные кривые) и временном (рис. 2.11, красные кривые) представлениях, показало различие менее, чем на 1%, поэтому далее было решено реализовать полностью временной конечно-разностный алгоритм как для оператора нелинейности, так и для оператора поглощения.

### 2.3.1 Сравнение спектрального и временного подходов при двухчастотном взаимодействии волн накачки

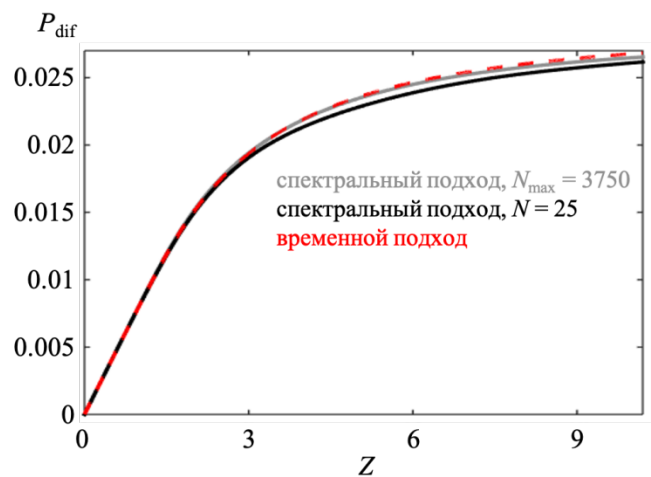
Верификация временного алгоритма (2.9) и проверка его точности в режимах формирования ударных фронтов в профиле нелинейной волны была проведена путем сравнения результатов временных расчетов с результатами спектрального (2.7) (полного и оптимизированного) подхода, для амплитуды давления волны разностной частоты при параметрическом взаимодействии двух плоских гармонических волн накачки.

На рисунке 2.12 приведены результаты расчета безразмерной амплитуды давления ВРЧ  $P_{\text{dif}}$  для волны накачки с частотами  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц и  $f_{\text{pump2}} = 140$  кГц при максимально достижимом в эксперименте [21] начальном давлении на параметрическом излучателе  $p_0 = 0.6$  МПа и характерной длине нелинейности  $l_{\text{sh}} = 1.7$  м ( $\Gamma = 0.01$ ).

Серой кривой представлен спектральный расчет с учетом полного числа гармоник  $N_{\text{max}} = 3750$  в системе (2.7), черной кривой – спектральный алгоритм с

учетом 25 гармоник, а красной пунктирной кривой – временной расчет согласно (2.9). Из рис. 2.12 следует, что решения уравнения Бюргера (2.1) в спектральном и временном представлениях отличаются незначительно, при этом временной подход превосходит по точности спектральный расчет с частотной фильтрацией пороговым методом прореживания спектра.

Для временного алгоритма был отмечен выигрыш по времени вычислений в 100 раз по сравнению со спектральным расчетом без оптимизации, и время его работы сравнимо



**Рис. 2.12.** Зависимость безразмерной амплитуды давления волны разностной частоты с частотой  $f_{\text{dif}} = 10$  кГц от расстояния  $Z$ , для трех различных численных алгоритмов.

со спектральным расчетом с оптимизацией для малого числа удерживаемых компонент. Таким образом, реализованный метод типа Годунова (2.9) может быть использован для расчета амплитуды давления волны разностной частоты в случае импульсного начального возбуждения среды с широким спектром.

### 2.3.2 Моделирование генерации низкочастотного излучения в случае мощной импульсной накачки

Численное моделирование задачи о параметрической генерации низкочастотного излучения высокочастотной импульсной накачкой проводилось на примере трех характерных начальных сигналов с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) и различными типами огибающей. Для верификации алгоритма и возможности сравнения полученных в работе результатов с более ранними исследованиями [71] были рассмотрены два примера модельных импульсов с ЛЧМ, центральной частотой  $f_0 = 3.5$  МГц и гауссовской и гипергауссовской функциями огибающей:

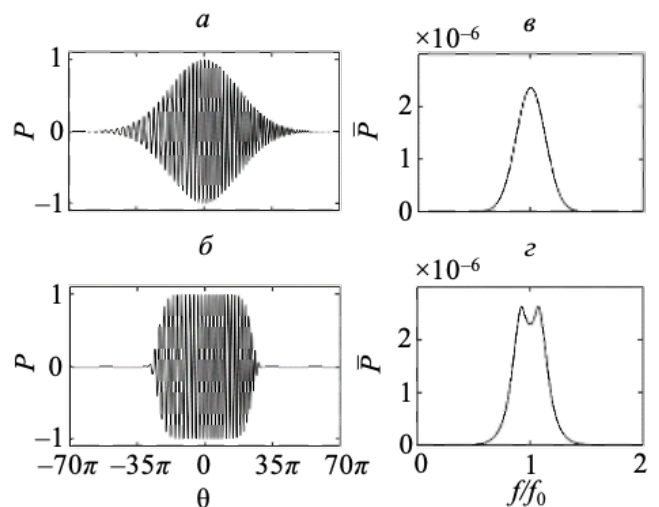
$$P(\theta, Z = 0) = E(\theta) \sin(\theta + \varphi(\theta)) = \exp\left(-\left[\frac{2\theta}{50\pi}\right]^{2m}\right) \sin\left(\theta + \frac{\theta^2}{275\pi}\right), \quad (2.13)$$

где  $m = 1$  и  $m = 5$  соответствует огибающим в виде гаусса и гипергаусса (рис. 2.13, а–б).

В качестве третьего примера был рассмотрен импульсный сигнал с прямоугольной огибающей, состоящий из суммы гармонической волны на частоте  $f_0 = 150$  кГц и волны с ЛЧМ в диапазоне 135–145 кГц (рис. 2.14, а), характерный для работы подводной параметрической антенной решетки [21]. Первый и последний циклы под его огибающей, демонстрирующие изменение частоты от начала к концу импульса, представлены на рис. 2.14, в.

Отметим, что для всех трех импульсных сигналов характерно

увеличение частоты осцилляций от начала к концу импульса. На рисунках 2.13, в–г и 2.14, б представлены начальные спектры описанных  $\bar{P}$  выше импульсных сигналов. Относительная ширина ЛЧМ спектра прямоугольного импульса в области  $f < f_0$  (рис. 2.14, б) меньше, чем ширина модельных спектров импульсов с гауссовской и гипергауссовской



**Рис. 2.13.** Начальные безразмерные профили (а–б) и спектры (в–г) фазомодулированных сигналов с гауссовской (а, в) и гипергауссовской (б, г) огибающей и линейной частотной модуляцией.

временными огибающими (рис. 2.13,  $\nu$ - $z$ ), которые имеют близкую по величине ширину и сосредоточены симметрично вокруг центральной частоты  $f_0$ .

При моделировании распространения модельных ЛЧМ импульсов и смешанного гармонического с ЛЧМ сигнала использовались физические параметры сред, соответствующих исследованиям [21, 71, 108]: глицерин (более диссипативная среда) и вода (менее диссипативная среда), приведенные в таблице 1.

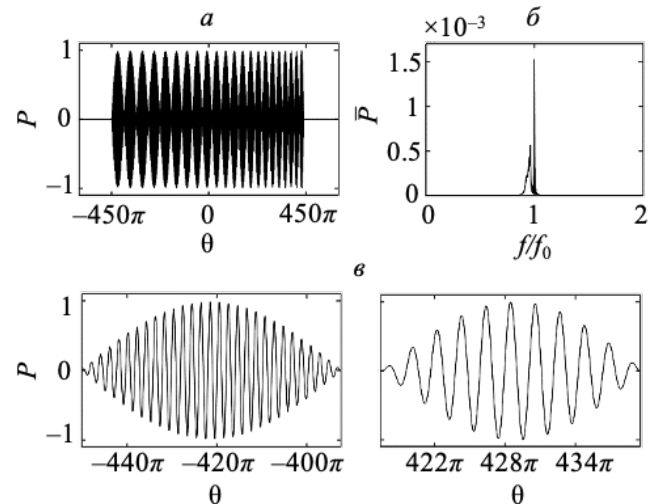
**Таблица 1.** Физические параметры среды распространения для различных типов начального импульсного возбуждения.

	среда	$c_0$ , м/с	$\rho_0$ , кг/м <sup>3</sup>	$\beta$	$\delta$ , м <sup>2</sup> /с
Модельные ЛЧМ импульсы	глицерин	1920	1260	5.4	$2 \times 10^{-5}$
Гарм. волна + ЛЧМ	вода	1502.25	996.81	3.5	$4.42 \times 10^{-6}$

Были рассчитаны характерные длины образования разрыва  $l_{sh}$  для периодов с максимальной амплитудой давления  $p_0$  в профиле волн накачки, длины поглощения  $l_{abs}$  высокочастотной накачки на центральной частоте  $f_0$  и числа Гольдберга  $\Gamma$ . Значения этих величин, а также параметры численного алгоритма, такие как безразмерные шаги пространственной ( $\Delta Z$ ) и временной ( $\Delta \theta$ ) численных сеток, число точек  $M$  на период волны накачки и общее число точек временного окна  $N$  приведены в таблицах 2 и 3, соответственно.

Пространственный шаг  $\Delta Z$  варьировался в зависимости от режима распространения для обеспечения устойчивости численного алгоритма (2.9). Также моделировался предельный случай  $\Gamma = 0$ , когда механизмом, ограничивающим длину параметрических взаимодействий, является только поглощение на ударных фронтах.

Время расчетов в среде MATLAB 2022a на ПК с 64 Гб оперативной памяти и восьмиядерным процессором AMD Ryzen 7 3700X@3.59GHz составляло 10–30 минут в режиме слабой нелинейности ( $\Gamma = 1$ ) и 30–100 минут в ударноволновом режиме ( $\Gamma = 0.1$ ) при распространении сигналов до  $Z = 25$ .



**Рис. 2.14.** Начальный профиль (а) и спектр (б) импульсного сигнала в виде суммы гармонической волны и волны с линейной частотной модуляцией. Первый и последний циклы под прямоугольной огибающей импульса (в).

**Таблица 2.** Максимальная амплитуда давления в импульсе, характерные величины длин поглощения  $l_{abs}$ , и нелинейности  $l_{sh}$ , и их отношения  $\Gamma = l_{sh} / l_{abs}$ .

	$p_0$ , МПа	$l_{sh}$ , м	$l_{abs}$ , м	$\Gamma$
Модельные ЛЧМ импульсы	0.051–0.51	0.15–1.5	1.5	0.1–1
Гарм. волна + ЛЧМ	0.06–0.6	1.7–17	17	0.1–1

**Таблица 3.** Параметры численного алгоритма.

	$\Delta Z$	$\Delta\theta$	$M$	$N$
Модельные ЛЧМ импульсы	$(1.3–5.3) \times 10^{-4}$	0.06	120	12000
Гарм. волна + ЛЧМ	$(3.1–7.8) \times 10^{-4}$	0.08	80	72000

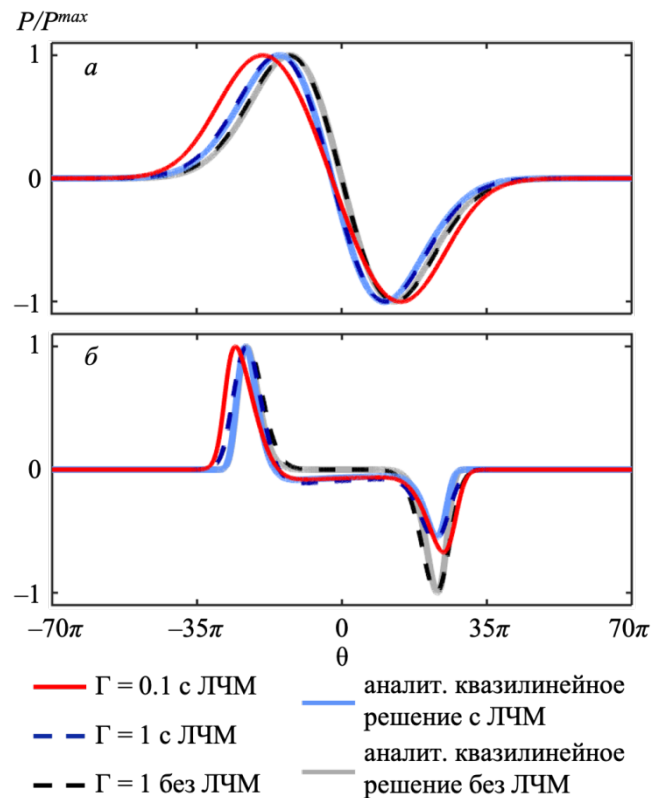
Для определения наиболее выигрышных режимов излучения волн накачки также был исследован вопрос об эффективности параметрической генерации низкочастотного излучения для описанных выше трех случаев импульсного начального возбуждения. Во-первых, рассматривалось отношение амплитуды демодулированных импульсов к амплитуде исходных импульсов накачки. В качестве второй метрики рассчитывалась энергия низкочастотного излучения  $E_{low}$  как сумма квадратов модулей дискретных низкочастотных спектральных компонент с номерами  $n = 1 \dots n_{max}$ , амплитуда которых спадала в  $10^5$  раз относительно максимума низкочастотной части спектра, отнесенная к полной энергии начального сигнала  $E_0$ , рассчитанной путем суммирования энергии всех дискретных гармоник в спектре  $n = 1 \dots N_{max}$ :

$$E_{low} = \sum_n |\bar{P}_n|^2, \quad E_0 = \sum_n |\bar{P}_{n,0}|^2. \quad (2.14)$$

Для первичной апробации работы численного алгоритма в случае импульсного начального возбуждения результаты моделирования распространения гауссовского и гипергауссовского высокочастотных импульсов сравнивались с известным аналитическим решением на больших расстояниях  $Z \gg 1$ , полученным в квазилинейном приближении [4, 71]. В общем случае при наличии частотной модуляции решение для низкочастотного демодулированного импульса определяется поведением исходной огибающей  $E(\theta)$  и видом фазомодулирующей функции  $\varphi(\theta)$  и пропорционально

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{E(\theta)}{1 + d\varphi / d\theta} \right)^2. \quad (2.15)$$

На рисунке 2.15 представлены результаты такого сравнения нормированных на максимум (отличающийся для различных режимов распространения), безразмерных профилей давления модельных гауссовского (рис. 2.15, *а*) и гипергауссовского (рис. 2.15, *б*) импульсов [71] на расстоянии 25 длин поглощения  $l_{\text{abs}} (Z = 25)$ . Как видно из рисунка, численные решения, полученные для случая слабой нелинейности ( $\Gamma = 1$ ) в отсутствие частотной модуляции (черные штриховые кривые) и с ЛЧМ (синие штриховые кривые), в точности совпадают с соответствующими аналитическими решениями (серые и голубые кривые, соответственно), что свидетельствует о корректности работы алгоритма. В случае сильного проявления нелинейных эффектов для ЛЧМ импульсов ( $\Gamma = 0.1$ , ударноволновой режим, красные кривые) численные решения качественно повторяют поведение аналитического.

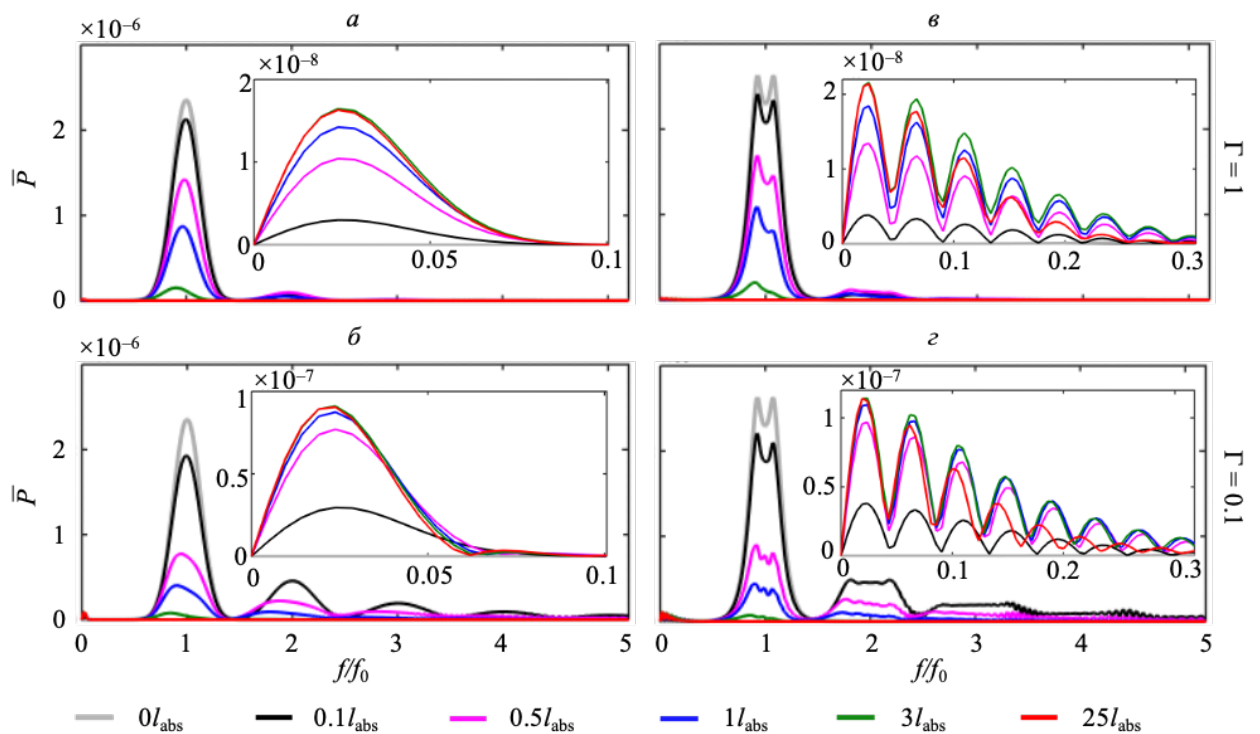


**Рис. 2.15.** Сравнение аналитического квазилинейного решения с результатами численного моделирования для профилей модельных импульсных сигналов с гауссовской (*а*) и гипергауссовской (*б*) огибающими на расстоянии  $Z = 25$ . Изображены следующие модели: аналитическое решение в отсутствие ( $\Gamma = 1$ , серые кривые) и при наличии линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) ( $\Gamma = 1$ , голубые кривые), численное квазилинейное решение без ЛЧМ ( $\Gamma = 1$ , черные штриховые кривые), численные решения с ЛЧМ в квазилинейном ( $\Gamma = 1$ , синие штриховые кривые) и ударноволновом ( $\Gamma = 0.1$ , красные кривые) режимах распространения.

Отметим, что для импульса с гипергауссовской огибающей (рис. 2.13, *б*) наблюдается более несимметричная форма демодулированного импульса (рис. 2.15, *б*): амплитуда первой положительной фазы импульса больше, чем амплитуда последующей отрицательной фазы. Асимметрия демодулированного профиля объясняется увеличением частоты сигнала от начала к концу исходного импульса накачки, что приводит к усилению нелинейных эффектов, более раннему формированию ударных фронтов и дополнительному к линейному поглощению энергии высокочастотной волны в конце импульса. Большая асимметрия для исходного импульса с гипергауссовской огибающей (рис. 2.15, *б*) по сравнению с гауссовской (рис. 2.15, *а*) обусловлена наличием большего

числа высокоамплитудных высокочастотных периодов в конце начального профиля волны.

На рисунке 2.16 показана эволюция спектров  $\bar{P}$  гауссовского (рис. 2.16, *a–б*) и гипергауссовского (рис. 2.16, *в–г*) импульсов при прохождении различных расстояний  $Z = z/l_{\text{abs}}$ , равных 0 (серые кривые), 0.1 (черные кривые), 0.5 (розовые кривые), 1 (синие кривые), 3 (зеленые кривые) и 25 (красные кривые), для различных режимов распространения волны: квазилинейный режим ( $\Gamma = 1$ ) и ударноволновой режим ( $\Gamma = 0.1$ ). Как видно из рис. 2.16, с увеличением расстояния исходно высокочастотный спектр обоих типов сигналов переходит в область низких частот, что является демонстрацией эффекта самодемодуляции [6].

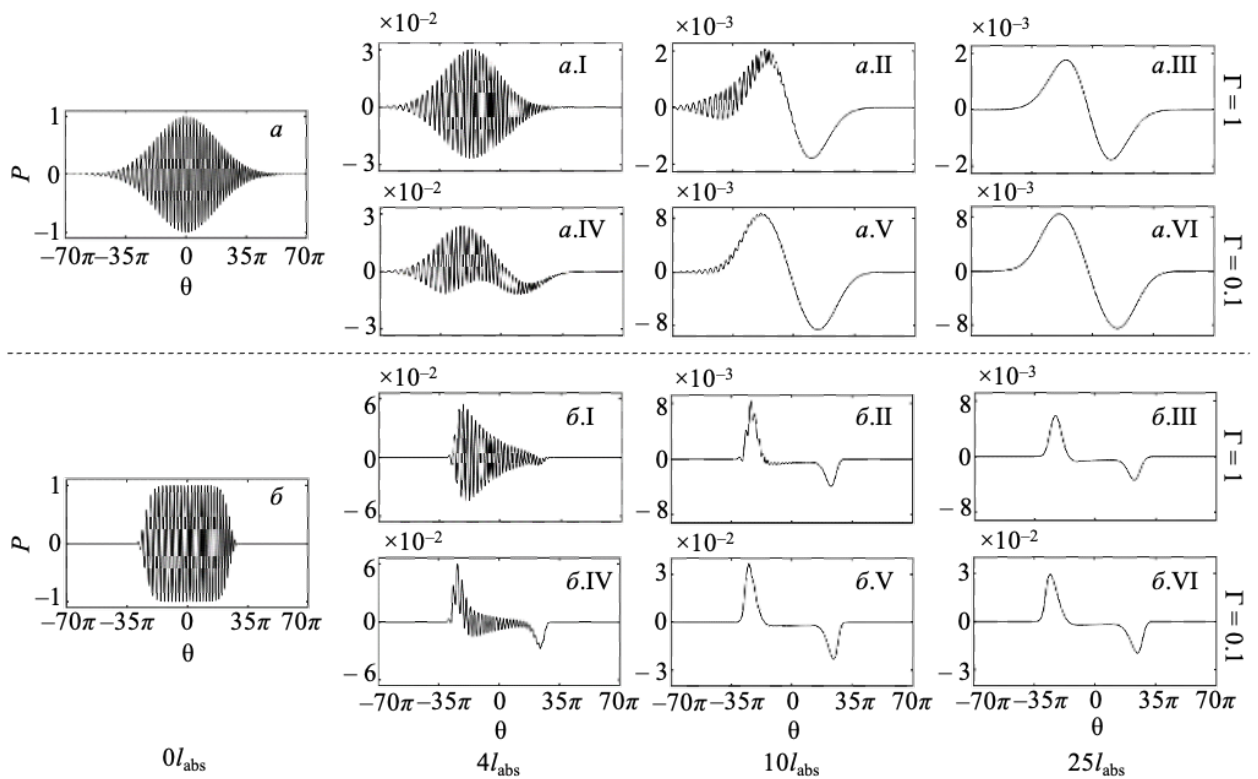


**Рис. 2.16.** Спектры импульсных сигналов с гауссовской (*a–б*) и гипергауссовской (*в–г*) огибающими для случаев квазилинейного ( $\Gamma = 1$ , *a, в*) и ударноволнового ( $\Gamma = 0.1$ , *б, г*) распространения, построенные на различных расстояниях  $Z = z/l_{\text{abs}}$ : 0 (серые кривые), 0.1 (черные кривые), 0.5 (розовые кривые), 1 (синие кривые), 3 (зеленые кривые) и 25 (красные кривые).

Насыщение низкочастотной части спектра происходит на расстояниях порядка  $Z = 1$  в ударноволновом ( $\Gamma = 0.1$ ) и  $Z = 3$  квазилинейном ( $\Gamma = 1$ ) режимах распространения. При этом амплитуда высокочастотной накачки на этих расстояниях еще велика по сравнению с амплитудой низкочастотного излучения и становится сравнимой с ней лишь при  $Z = 3$  для  $\Gamma = 0.1$  и  $Z = 6$  для  $\Gamma = 1$ . Тенденция более раннего насыщения в ударноволновом режиме ( $\Gamma = 0.1$ ) связана с дополнительным, помимо линейного, поглощением энергии волны

накачки на образующихся в профиле волны разрывах. Однако, несмотря на такое уменьшение длины параметрических взаимодействий, максимальная безразмерная амплитуда низкочастотной части спектра в этом случае приблизительно в 5–6 раз больше, чем для квазилинейного режима.

Таким образом, с точки зрения максимально достижимой амплитуды давления низкочастотного излучения, его генерация происходит более эффективно в ударноволновых режимах. Отметим, что при распространении от  $Z = 3$  (рис. 2.16, зеленые кривые) до  $Z = 25$  длин поглощения (рис. 2.16, красные кривые) форма низкочастотной части спектра практически не меняется, но для демодулированного спектра гипергаусса (рис. 2.16, в–г) начинают сказываться эффекты поглощения в области высоких частот.



**Рис. 2.17.** Эволюция безразмерных профилей импульсных сигналов с гауссовской (*a*) и гипергауссовской (*б*) огибающими в квазилинейном ( $\Gamma = 1$ ) и ударноволновом ( $\Gamma = 0.1$ ) режимах распространения, на различных расстояниях  $Z = z/l_{\text{abs}}$ : 0, 4, 10 и 25.

На рисунке 2.17 показана эволюция формы безразмерных профилей импульсов с исходно гауссовской (*a*) и гипергауссовской (*б*) огибающими при прохождении расстояний  $Z = z/l_{\text{abs}}$ , равных 0, 4, 10 и 25, для квазилинейного ( $\Gamma = 1$ ) и ударноволнового ( $\Gamma = 0.1$ ) режимов распространения волны. Как и в случае эволюции спектров, здесь также видно, что проявление самодемодуляции происходит на меньших расстояниях в ударноволновом режиме ( $\Gamma = 0.1$ ) по сравнению с квазилинейным ( $\Gamma = 1$ ). Отметим, что высокочастотные осцилляции на профиле демодулированного импульса ( $Z = 4$ ) в

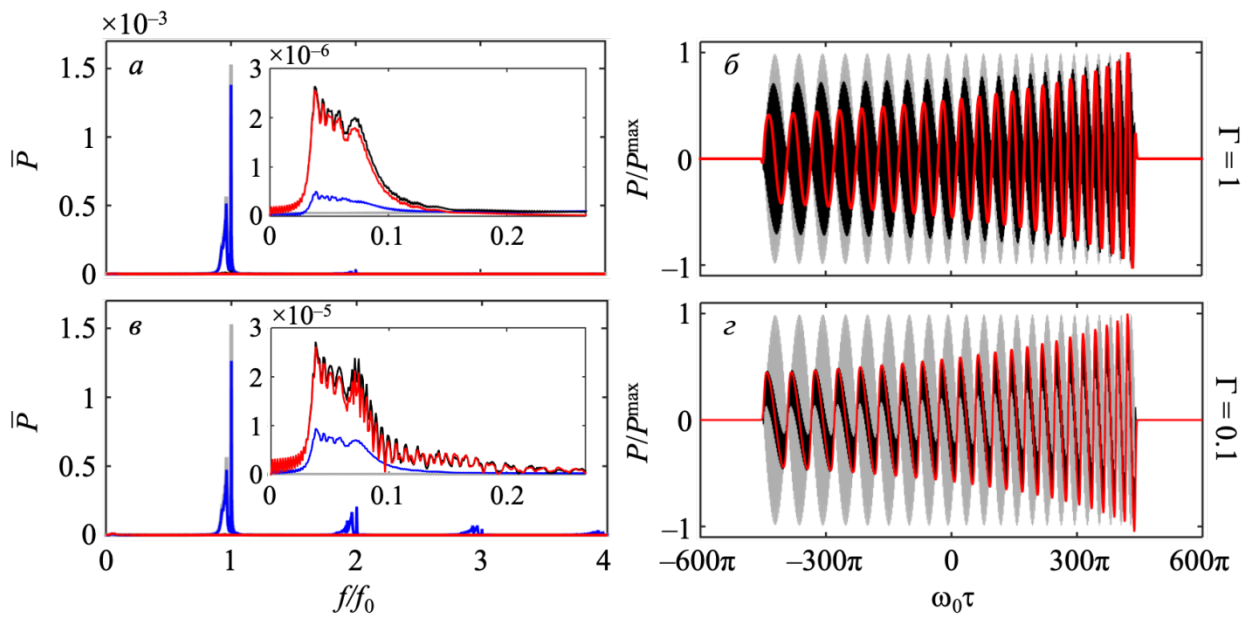


ударноволновых режимах (рис. 2.17, *a.I*, *a.IV*, *б.I* и *б.IV*) гораздо менее выражены по сравнению с квазилинейным случаем ( $\Gamma = 0.1$ , *a.IV* и *б.IV*).

Можно также заметить, что поскольку частота осцилляций увеличивается к правому краю исходных импульсов (рис. 2.17, *a-б*), то сигнал там раньше становится демодулированным за счет более раннего поглощения одиночных периодов, в то время как с левого края высокочастотные осцилляции сохраняются дольше. На расстояниях порядка  $Z = 10$  в режиме сильной нелинейности ( $\Gamma = 0.1$ ) профили демодулированных сигналов уже практически гладкие (рис. 2.17, *a.V*, *б.V*) и имеют в 4 раза бóльшую амплитуду, чем в квазилинейном режиме ( $\Gamma = 1$ ), где еще сохраняются высокочастотные осцилляции с левого края импульсов, достигая 20% от максимума (рис. 2.17, *a.II*, *б.II*). При распространении от  $Z = 10$  до  $Z = 25$  демодулированные импульсы практически не меняют своей формы (рис. 2.17, *a.II-III* и *a.V-VI*, *б.II-III* и *б.V-VI*), однако для гипергауссовских импульсов эффекты линейного поглощения проявляются несколько сильнее, что также наблюдалось и в соответствующих спектрах (рис. 2.16, *в-г*).

Результаты численного моделирования распространения прямоугольного импульса смешанных сигналов (гармонического + ЛЧМ) [21] в двух характерных режимах показаны на рис. 2.18 для расстояний  $Z = z/l_{\text{abs}} = 0$  (серые кривые), 0.1 (синие кривые), 4 (черные кривые) и 25 (красные кривые). Как и в случае с модельными сигналами, в спектре импульса (рис. 2.18, *a-б*) по мере его распространения наблюдается формирование низкочастотных компонент исходно высокочастотной волны [6, 71] с бóльшей максимальной амплитудой в случае разрывного режима.

Хотя безразмерная начальная ширина спектра прямоугольного ЛЧМ сигнала уже начального спектра обоих модельных импульсов, в силу значительной разницы между максимальной частотой  $f_0$  и минимальной частотой в этом спектре, ширина его низкочастотной части при  $Z > 0$  оказывается сравнимой с модельными сигналами. Стоит отметить, что в профиле смешанного импульса (рис. 2.18, *в-г*) самодемодуляция происходит внутри каждого цикла исходной огибающей, при этом наблюдается рост амплитуды демодулированных периодов огибающей (черные и красные кривые) по мере увеличения частоты колебаний к концу импульса. Это связано с тем, что, в отличие от модельных сигналов, в исходном смешанном импульсе при  $Z = 0$  все циклы огибающей имели одинаковую амплитуду, а с увеличением частот накачки нелинейные эффекты проявляются сильнее.



**Рис. 2.18.** Спектры (*а–б*) и нормированные на максимум профили (*в–г*) прямоугольного ЛЧМ импульса для случаев слабого ( $\Gamma = 1$ , *а, в*) и сильного ( $\Gamma = 0.1$ , *б, г*) проявления нелинейности, на различных расстояниях в длинах поглощения: 0 (серые кривые), 0.1 (синие кривые), 4 (черные кривые) и 25 (красные кривые).

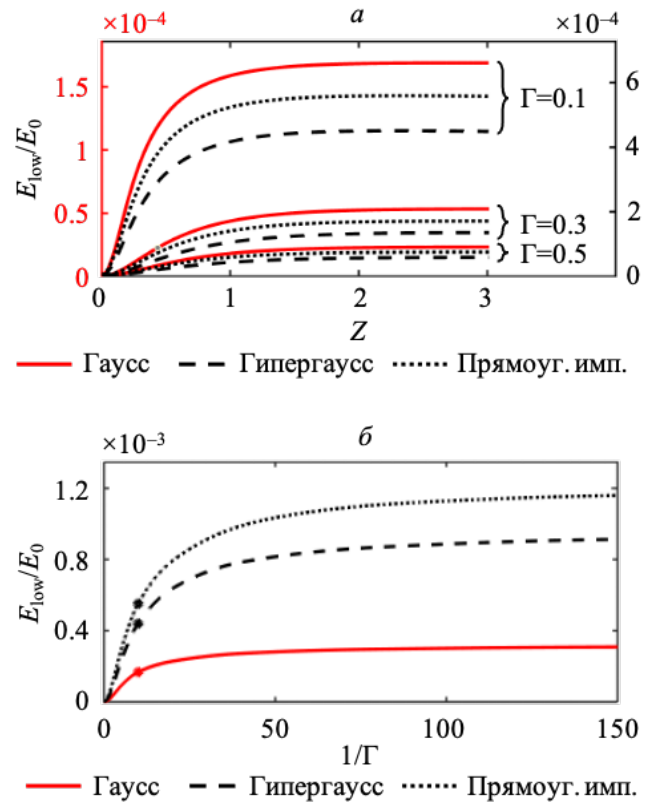
Расчет эффективности параметрической генерации низкочастотного излучения был проведен для рассматриваемых трех случаев импульсного начального возбуждения и различных режимов распространения волны ( $\Gamma = 0.1, 0.3$  и  $0.5$ ). На рисунке 2.19, *а* построены графики зависимости введенной выше безразмерной метрики эффективности,  $E_{\text{low}}/E_0$  (2.14), от пройденного безразмерного расстояния  $Z$  для гауссовского ЛЧМ импульса (красные кривые, которым соответствует шкала слева, выделенная красным цветом), гипергауссовского ЛЧМ импульса (черные штриховые кривые, шкала справа) и прямоугольного ЛЧМ импульса (черные пунктирные кривые, шкала справа). Как видно из рисунка 2.19, *а*, на малых расстояниях, пока нелинейные эффекты сказываются слабо, энергия низкочастотного сигнала зависит квадратично от расстояния  $Z$ , в соответствии с квазилинейным приближением [4]. Затем рост энергии замедляется и происходит установление режима насыщения на расстояниях порядка  $Z = 1-1.5$  в зависимости от режима работы излучателя.

Насыщение происходит раньше в ударноволновых режимах, что коррелирует с меньшими расстояниями установления формы и амплитуды низкочастотной части спектра относительно квазилинейного режима. Для гипергауссовского импульса эффективность генерации низкочастотного излучения примерно в 3 раза больше по сравнению с гауссовским импульсом, что связано с присутствием большего числа высокоамплитудных периодов заполнения огибающей исходного импульса накачки и, соответственно, более сильного проявления нелинейных эффектов.

Эффективность перекачки энергии в низкие частоты для прямоугольного ЛЧМ + гармоническая волна импульса близка к случаю сигнала с гипергауссовской огибающей. Важно отметить, что конечная доля энергии, трансформируемой от высокочастотной накачки в низкочастотное излучение, составляет около 0.06% для разрывного режима генерации ( $\Gamma = 0.1$ ) по сравнению с 0.007% и 0.002% для квазилинейных режимов ( $\Gamma = 0.5$  и 1, соответственно). Таким образом, использование ударноволновых режимов может в десятки раз повысить эффективность параметрической генерации низкочастотного излучения.

На рисунке 2.19, б представлены зависимости эффективности генерации низкочастотного излучения  $E_{low}/E_0$  от величины  $1/\Gamma \sim p_0$ . Точками отмечены значения эффективности для

рассматриваемых в работе ударноволновых режимов при  $\Gamma = 0.1$ , достижимых в работе исследованных ранее параметрических излучателей [21, 69]. Расчеты были выполнены вплоть до  $\Gamma = 0.1/30$ , т.е. с увеличением давления на излучателе в 30 раз, и в предельном случае  $\Gamma = 0$ . С ростом  $1/\Gamma$  величина  $E_{low}/E_0$  сначала растет согласно квазилинейному приближению как  $1/\Gamma^2$  [4], а затем насыщается. Максимальные значения эффективности в  $1.2 \times 10^{-3}$ ,  $0.9 \times 10^{-3}$  и  $0.3 \times 10^{-3}$  (прямоугольный ЛЧМ + гармоническая волна, гипергауссовский и гауссовский ЛЧМ импульсы, соответственно) достигаются при  $\Gamma = 0$ , когда длина параметрических взаимодействий ограничивается только поглощением на ударных фронтах, и в 2 раза превышают эффективность при  $\Gamma = 0.1$ .



**Рис. 2.19.** Зависимость энергии низкочастотного излучения  $E_{low}/E_0$ , отнесенной к энергии волн накачки  $E_0$ , от безразмерного расстояния  $Z$  в длинах поглощения при  $\Gamma = 0.1$ ,  $\Gamma = 0.3$  и  $\Gamma = 0.5$  (а) и от обратного числа Гольдберга  $1/\Gamma$  в области насыщения (б) для гауссовского ЛЧМ импульса (красные кривые), гипергауссовского ЛЧМ импульса (черные штриховые кривые) и прямоугольного ЛЧМ импульса (черные пунктирные кривые).

### 2.3.3 Выводы к третьему параграфу

Были исследованы особенности нелинейной демодуляции высокочастотных импульсных сигналов при распространении плоских волн в среде, когда длина параметрических взаимодействий ограничивается как термовязким поглощением, так и дополнительным поглощением энергии волны на образующихся в профиле высокочастотной волны накачки ударных фронтах, при разной степени проявления линейного и нелинейного поглощения.

Для описания нелинейного распространения импульсного сигнала и параметрических процессов в одномерной постановке была разработана численная модель решения уравнения Бюргерса во временном представлении. Моделирование нелинейного оператора проводилось на основе удароулавливающей схемы типа Годунова [105], поскольку спектральный подход, представленный в п. 2.3.1, требует учета большого числа гармоник и может быть оптимизирован лишь для двухчастотного параметрического взаимодействия, но не для более общего случая импульсной накачки. По сравнению со спектральным методом, построенный временной алгоритм позволяет описывать нелинейные и диссипативные эффекты при параметрических взаимодействиях в импульсных полях с выигрышем в сотни раз. По сравнению с существующим нелинейным алгоритмом на основе точного решения уравнения простых волн [58–61, 64–65, 71–72], в котором необходимо выбирать шаг временной сетки так, чтобы обеспечить порядка 50 узлов на ударном фронте волны, для схемы Годунова необходимо лишь 2–3 узла при решении одномерных нелинейных задач [104, 109] и 7–8 для дифракционных задач [110].

Для верификации алгоритма и исследования отличительных особенностей нелинейной самодемодуляции различных акустических сигналов было рассчитано распространение импульсных частотно-модулированных модельных сигналов с гауссовской и гипергауссовской огибающими и ЛЧМ, ранее рассмотренных в работе [71]. В качестве другого примера для рассмотрения отличительных особенностей нелинейной самодемодуляции различных акустических сигналов был взят ЛЧМ импульс с прямоугольной огибающей, излучаемый подводным параметрическим излучателем [21]. Для всех трех сигналов характерно увеличение частоты осцилляций в сторону конца импульса.

Показано, что эффект нелинейной демодуляции высокочастотных импульсов различных типов и установления стационарного по форме и амплитуде низкочастотного импульса достигается в квазилинейном режиме на расстоянии порядка трех длин линейного поглощения высокочастотной накачки, а в ударноволновом режиме – на

меньших расстояниях, порядка одной длины поглощения, при расстоянии образования ударного фронта равном 0.1 от длины линейного поглощения ( $\Gamma = 0.1$ ). При этом амплитуды спектральных компонент исходных ВЧ импульсов на этих расстояниях еще достаточно велики по сравнению с амплитудами НЧ части спектра и становятся сравнимыми с ней на дистанциях шести и трех длин поглощения для квазилинейного и ударноволнового режимов, соответственно. В предельном случае доминирующего влияния поглощения на ударных фронтах, установление профиля низкочастотного импульса происходит на расстояниях порядка 20–30 характерных длин образования разрыва (раньше – для гауссовского импульса).

Отметим, что для импульсов с исходной ЛЧМ и гауссовской и гипергауссовской огибающими высокочастотные осцилляции на профилях установившихся низкочастотных импульсов в области исходно пониженной частоты (левый край импульсов) не затухают вплоть до десяти длин поглощения высокочастотной накачки и составляют 5–20% для различных режимов распространения. Для прямоугольного ЛЧМ + гармоническая волна импульса самодемодуляция происходит внутри каждого цикла исходной огибающей и сопровождается увеличением амплитуды демодулированных периодов огибающей с ростом частоты колебаний к правому краю из-за усиления нелинейных эффектов.

Эффективность генерации низкочастотных импульсов определялась по величинам достигаемых амплитуд демодулированного импульса и его энергии относительно соответствующих параметров исходных импульсов накачки. Так, установившаяся амплитуда давления низкочастотного импульса, нормированная к амплитуде импульса накачки, в ударноволновом случае ( $\Gamma = 0.1$ ) была почти на порядок больше, чем в квазилинейном режиме ( $\Gamma = 1$ ), несмотря на наличие дополнительного поглощения на образующихся в профиле волны разрывах.

Продемонстрировано, что наличие у исходного сигнала более равномерной и близкой к прямоугольной огибающей, и, как следствие, более широкого спектра или же больших различий между минимальными и максимальными взаимодействующими частотами, способствует лучшей перекачки энергии в область низких частот. Относительная доля энергии,  $E_{low}/E_0$ , трансформируемой от высокочастотной накачки в область низких частот в ударноволновых режимах существенно выше и составляет порядка 0.06% ( $\Gamma = 0.1$ ) по сравнению с 0.002% в квазилинейном режиме ( $\Gamma = 1$ ). В предельном случае  $\Gamma \rightarrow 0$ , когда параметрические эффекты ограничиваются только нелинейным поглощением на разрывах в профиле волны, эта величина дополнительно увеличивается в 2 раза.

Таким образом, при параметрической генерации низкочастотного импульса относительные и абсолютные величины его амплитуды и энергии увеличиваются при увеличении амплитуды исходных импульсов накачки и усилении нелинейных эффектов, демонстрируя, что переход к ударноволновым режимам распространения способствует более эффективному протеканию параметрических процессов. Развитый временной алгоритм представляется перспективным при описании эффектов нелинейной демодуляции импульсных сигналов в разрывных режимах.

#### **§ 2.4 Выводы ко второй главе**

В качестве первого шага для решения трехмерной нелинейно-дифракционной задачи о генерации низкочастотного излучения на разностной частоте параметрическим излучателем с помощью уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова (1.4) была решена одномерная нелинейная задача на основе уравнения Бюргерса (2.1), поскольку расчет нелинейного оператора представляет наибольшую сложность из-за необходимости учета большого числа спектральных компонент.

Для описания двухчастотного нелинейного взаимодействия высокочастотных волн накачки был разработан новый оптимизированный спектральный алгоритм для расчета нелинейного оператора, так как количество операций пропорционально квадрату числа гармоник, которое составляет несколько тысяч для корректного описания режимов образования ударных фронтов в профиле нелинейной волны, что делает решение трехмерных задач практически нереализуемым с точки зрения процессорного времени и затрачиваемой памяти.

Рассмотрены различные способы оптимизации нелинейного алгоритма. Во-первых, это метод прореживания спектра на некотором расстоянии, отсекающий по пороговому давлению низкоамплитудные спектральные компоненты, который позволил существенно сократить количество спектральных компонент вплоть до 25 или 50 (вместо нескольких тысяч) с ошибкой в вычислении амплитуды давления волны разностной частоты, равной 3% и 2%, соответственно, при выполнении прореживания на расстоянии трех длин нелинейности. Второй метод состоял в оценке вклада в формирование низкочастотного излучения от пар взаимодействующих частот, после чего выбиралось определенное количество спектральных компонент с наибольшим вкладом, по которым в нелинейном алгоритме и проводились вычисления. Однако этот метод оказался менее точным и требовал удержания около 150 гармоник для достижения точности порогового метода, поэтому в дальнейшем не использовался.

Таким образом, разработка оптимизированного спектрального алгоритма позволила провести отбор 50 спектральных компонент, оказывающих наибольшее влияние на генерацию волны разностной частоты, для различных случаев двухчастотного взаимодействия, и тем самым уменьшить процессорное время расчета оператора нелинейности, как минимум, в тысячи раз.

Для случая импульсной накачки был развит численный алгоритм во временном представлении, верификация которого для расчета поля параметрического излучателя при двухчастотном нелинейном взаимодействии волн накачки показала выигрыш по времени в сотни раз относительно случая полного учета гармоник.

При этом численные результаты для амплитуды давления низкочастотного излучения, полученные с использованием временного и полного спектрального алгоритмов, совпадают с точностью до 1%, что демонстрирует возможность использовать развитый метод при решении задачи в случае импульсной накачки. Кроме того, развитый в работе временной подход на основе схемы Годунова требует использования всего лишь 2–3 узлов временной сетки на ударный фронт волны при решении одномерных нелинейных задач [104, 109], поэтому является более предпочтительным при описании эффектов нелинейной демодуляции импульсных сигналов, которые в разрывных режимах протекают гораздо эффективнее.

### Глава 3

## ДВУХЧАСТОТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН НАКАЧКИ В КВАЗИЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

*В данной главе используются материалы, опубликованные в статье [A2] и материалах конференции «Волны–2022».*

В третьей главе используется квазилинейный подход как необходимый шаг в разработке полной трехмерной численной модели нелинейно-дифракционного описания параметрических взаимодействий на основе уравнения ХЗК [50]. Однако при этом, в отличие от существующих аналитических решений с приближенным описанием дифракции волны разностной частоты и/или волн накачки и численных алгоритмов для осесимметричных источников [4, 6, 51, 68–69, 71–74, 76–79], в настоящей главе уравнение ХЗК решается численно в 3D для реалистичных начальных условий на параметрическом высокочастотном излучателе эллипсоидной формы [21].

Необходимость точно описывать дифракционные эффекты возникает, например, при описании полей медицинских ультразвуковых излучателей, так как это влияет на разработку протоколов облучения и предсказание различных эффектов, возникающих в биоткани при ультразвуковом воздействии. Поскольку в современных медицинских исследованиях все активнее применяются излучатели высоко интенсивного сфокусированного ультразвука в виде многоэлементных решеток [101, 115–119], создающих сложную дифракционную структуру в ближнем поле излучателя, то возрастает необходимость использования точных дифракционных моделей для характеристики работы таких излучателей.

Поэтому данная глава направлена на разработку численной спектральной модели для описания процесса генерации ВРЧ в свободном поле в дифрагирующих по обеим координатам пучках волн накачки, поперечным выделенному направлению распространения волн. Поля давления волн накачки рассчитываются в линейном приближении, а полученные решения на каждом шаге численной сетки вдоль оси пучка используются для расчета нелинейных источников при описании трехмерного поля волны разностной частоты.

Развитый квазилинейный подход будет расширен в главе 4 на решение трехмерной полной нелинейной задачи с использованием описанного в главе 2 оптимизированного спектрального алгоритма для вычисления нелинейного оператора, позволяющего существенно сократить число спектральных компонент в численном алгоритме.



### §3.1 Генерация волны разностной частоты в диффразирующем пучке волн накачки

#### 3.1.1 Система параболических уравнений в квазилинейном приближении и ее решение в спектральном представлении на основе метода переменных направлений

В случае линейного распространения волн накачки, генерируемых плоским двухчастотным ультразвуковым излучателем в однородной среде с диссипацией, решение линеаризованного уравнения Вестервельта (1.3) для каждой волны накачки можно записать в виде интеграла Рэлея [100]:

$$p_{\text{pump}1,2}^R(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega_{\text{pump}1,2}\rho_0}{2\pi} \int \frac{v_{\text{pump}1,2}^n(\mathbf{r}')e^{ik_{\text{pump}1,2}|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} dS'. \quad (3.1)$$

В выражении (3.1)  $p_{\text{pump}1,2}^R(\mathbf{r})$  – комплексные амплитуды действительного поля давления  $p_{\text{pump}1,2}^R(\mathbf{r})/2 \cdot e^{-i\omega\tau} + \text{к.с.}$ ,  $k_{\text{pump}1,2} = \omega_{\text{pump}1,2}/c_0 + ik''_{\text{pump}1,2}$  – волновые числа волн накачки,  $k''_{\text{pump}1,2}$  – коэффициенты затухания,  $v_{\text{pump}1,2}^n(\mathbf{r}')$  – комплексные амплитуды нормальной компоненты колебательной скорости  $v_{\text{pump}1,2}^n(\mathbf{r}')/2 \cdot e^{-i\omega\tau} + \text{к.с.}$  на поверхности излучателя,  $\mathbf{r}'$  – радиус-вектор на поверхности излучателя,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор в точке наблюдения,  $S'$  – область интегрирования, представляющая собой поверхности элементов, излучающих на частотах  $\omega_{\text{pump}1,2}$  [21]. В случае равномерного распределения колебательной скорости  $v_{\text{pump}1,2}^n(\mathbf{r}') = v_0$  – действительная величина, а  $p_0 = v_0\rho_0c_0$  – характерная величина амплитуды давления вблизи излучателя.

Если, как будет показано ниже, поле высокочастотных волн накачки, генерируемое параметрическим излучателем и рассчитанное с помощью интеграла Рэлея (3.1), имеет узкую направленность с полным углом расхождения в дальнем поле порядка нескольких градусов, то от уравнения Вестервельта (1.3) можно перейти к более простому для численного решения нелинейному параболическому уравнению ХЗК (1.4) [50]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau \partial z} = \frac{c_0}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} + \frac{\beta}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2}. \quad (3.2)$$

В рамках квазилинейного подхода решение уравнения (3.2) можно найти методом последовательных приближений [4, 99]. В этом случае комплексные амплитуды  $p_{\text{pump}1,2}$  поля давления волн накачки  $p_{\text{pump}1}(x, y, z)/2 \cdot \exp(i\omega_{\text{pump}1}\tau) + p_{\text{pump}2}(x, y, z)/2 \cdot \exp(i\omega_{\text{pump}2}\tau) + \text{к.с.}$  удовлетворяют линейному уравнению:

$$\frac{\partial p_{\text{pump}1,2}}{\partial z} = \frac{c_0}{2i\omega_{\text{pump}1,2}} \left( \frac{\partial^2 p_{\text{pump}1,2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_{\text{pump}1,2}}{\partial y^2} \right) - \frac{\delta\omega_{\text{pump}1,2}^2}{2c_0^3} p_{\text{pump}1,2}, \quad (3.3)$$

а амплитуда поля давления волны разностной частоты  $p_{\text{dif}}(x, y, z)/2 \cdot \exp(i\omega_{\text{dif}}\tau) + \text{к.с.}$  – линейному неоднородному уравнению с заданным источником:

$$\frac{\partial p_{\text{dif}}}{\partial z} = \frac{c_0}{2i\omega_{\text{dif}}} \left( \frac{\partial^2 p_{\text{dif}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_{\text{dif}}}{\partial y^2} \right) - \frac{\delta\omega_{\text{dif}}^2}{2c_0^3} p_{\text{dif}} + \frac{i\beta\omega_{\text{dif}}}{2c_0^3\rho_0} p_{\text{pump2}}^* p_{\text{pump1}}. \quad (3.4)$$

Как уже было сказано ранее, рассматривается случай, когда частоты волн накачки кратны разностной частоте и  $f_{\text{pump1}} > f_{\text{pump2}}$ , т.е.  $f_{\text{pump1}} = mf_{\text{dif}}$  и  $f_{\text{pump2}} = (m-1)f_{\text{dif}}$ . Тогда уравнения (3.3), (3.4) для комплексных амплитуд давления волн накачки  $p_{\text{pump1}}(x, y, z)$ ,  $p_{\text{pump2}}(x, y, z)$  и волны разностной частоты  $p_{\text{dif}}(x, y, z)$  записываются так:

$$\begin{cases} \frac{\partial p_{\text{pump1}}}{\partial z} = \frac{c_0}{2im\omega_{\text{dif}}} \left( \frac{\partial^2 p_{\text{pump1}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_{\text{pump1}}}{\partial y^2} \right) - \frac{\delta m^2 \omega_{\text{dif}}^2}{2c_0^3} p_{\text{pump1}} \\ \frac{\partial p_{\text{pump2}}}{\partial z} = \frac{c_0}{2i(m-1)\omega_{\text{dif}}} \left( \frac{\partial^2 p_{\text{pump2}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_{\text{pump2}}}{\partial y^2} \right) - \frac{\delta(m-1)^2 \omega_{\text{dif}}^2}{2c_0^3} p_{\text{pump2}}, \\ \frac{\partial p_{\text{dif}}}{\partial z} = \frac{c_0}{2i\omega_{\text{dif}}} \left( \frac{\partial^2 p_{\text{dif}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_{\text{dif}}}{\partial y^2} \right) - \frac{\delta\omega_{\text{dif}}^2}{2c_0^3} p_{\text{dif}} + \frac{i\beta\omega_{\text{dif}}}{2c_0^3\rho_0} p_{\text{pump1}} p_{\text{pump2}}^* \end{cases} \quad (3.5)$$

Первые два уравнения системы (3.6) на каждом шаге сетки  $\Delta z$  решались методом расщепления по физическим факторам [56, 59–60, 102] в следующем виде, что обеспечивало второй порядок точности численной схемы по всем трем пространственным координатам:

$$p_{\text{pump1,2}}(x, y, z + \Delta z) = L_{D,\Delta z/2} L_{A,\Delta z} L_{D,\Delta z/2} p_{\text{pump1,2}}(x, y, z). \quad (3.6)$$

В схеме (3.6) для оператора поглощения  $L_{A,\Delta z}$  использовалось точное решение в виде затухающей экспоненты на полном шаге сетки  $\Delta z$  [56], как и в главе 2.

Дифракционный оператор  $L_{D,\Delta z/2}$  рассчитывался методом переменных направлений [103], согласно которому переход от слоя  $l$  к слою  $(l+1)$  в пределах полушага  $\Delta z/2$  для каждой гармоники  $P = \{p_{\text{dif}}, p_{\text{pump1}}, p_{\text{pump2}}\}$  происходил в два этапа: сначала на первом шаге  $\Delta z/4$  конечно-разностная схема для уравнений (3.5) расписывалась явно по оси  $x$  (индекс  $i$ ) и неявно по оси  $y$  (индекс  $j$ ) и вычислялись значения на промежуточном слое. Затем на втором шаге  $\Delta z/4$  численная схема, наоборот, записывалась неявно по  $x$  и явно по  $y$ , что позволяло рассчитать финальное поле давления в слое  $(l+1)$ :

$$\begin{cases} -\alpha_y \tilde{P}_{i,j-1} + (1 + 2\alpha_y) \tilde{P}_{i,j} - \alpha_y \tilde{P}_{i,j+1} = \alpha_x P_{i-1,j}^l + (1 - 2\alpha_x) P_{i,j}^l + \alpha_x P_{i+1,j}^l, \\ -\alpha_x P_{i-1,j}^{l+1} + (1 + 2\alpha_x) P_{i,j}^{l+1} - \alpha_x P_{i+1,j}^{l+1} = \alpha_y \tilde{P}_{i,j-1} + (1 - 2\alpha_y) \tilde{P}_{i,j} + \alpha_y \tilde{P}_{i,j+1} \end{cases} \quad (3.7)$$

В уравнениях (3.7) введены коэффициенты  $\alpha_x = \frac{c_0 \Delta z / 2}{4i\omega_n (\Delta x)^2}$ ,  $\alpha_y = \frac{c_0 \Delta z / 2}{4i\omega_n (\Delta y)^2}$ .

На краях прямоугольной области ставились условия PML (от англ. “perfect matching layers”) для каждого направления  $x$  и  $y$ , чтобы уменьшить амплитуду побочных отражений от границ численной сетки [106–107]. Использование поглощающих слоев приводит уравнения в (3.7) к следующему виду:

$$\begin{aligned} (-\lambda_y - \beta_y) \tilde{P}_{i,j-1} + (1 + 2\beta_y) \tilde{P}_{i,j} + (\lambda_y - \beta_y) \tilde{P}_{i,j+1} &= (\beta_x - \lambda_x) P_{i-1,j}^l + (1 - 2\beta_x) P_{i,j}^l + (\beta_x - \lambda_x) P_{i+1,j}^l, \\ (-\lambda_x - \beta_x) P_{i-1,j}^{l+1} + (1 + 2\beta_x) P_{i,j}^{l+1} + (\lambda_x - \beta_x) P_{i+1,j}^{l+1} &= (\beta_y - \lambda_y) \tilde{P}_{i,j-1} + (1 - 2\beta_y) \tilde{P}_{i,j} + (\beta_y - \lambda_y) \tilde{P}_{i,j+1}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

В схеме (3.8) введены коэффициенты  $\beta_x = \frac{\alpha_x}{S_x^2}$ ,  $\lambda_x = \frac{\beta_x \Delta x S_x'}{2 S_x}$ , где  $S_x = 1 + i\sigma_x(x)$  с коэффициентом затухания внутри поглощающего слоя  $|x| \geq x_{\text{PML}}$  ( $x_{\text{PML}} = x_{\text{max}} - L_{\text{PML},x}$ ), равным  $\sigma_x(x) = \sigma_{x0}(x - x_{\text{PML}})^n / L_{\text{PML},x}$ : сила слоя  $\sigma_{x0} = 50$ , степень в распределении поглощения  $n = 3$ , ширина  $L_{\text{PML},x} = 150\Delta x$ . Вне поглощающего слоя ( $|x| < x_{\text{PML}}$ )  $\sigma_x(x) = 0$ , и выражение (3.8) переходит в (3.7). Аналогичные формулы можно записать и для PML-слоя в направлении оси  $y$ .

Для последнего уравнения системы (3.5), описывающего эволюцию комплексной амплитуды давления ВРЧ, численная схема записывалась так:

$$p_{\text{dif}}(x, y, z + \Delta z) = L_{D,\Delta z/2} L_{N,\Delta z/2} L_{A,\Delta z} L_{N,\Delta z/2} L_{D,\Delta z/2} p_{\text{dif}}(x, y, z), \quad (3.9)$$

где дифракционный и диссипативный операторы рассчитывались аналогичным накачке образом, а нелинейный оператор  $L_{N,\Delta z/2}$  в квазилинейном приближении рассчитывался прибавкой к амплитуде волны разностной частоты функции нелинейных источников

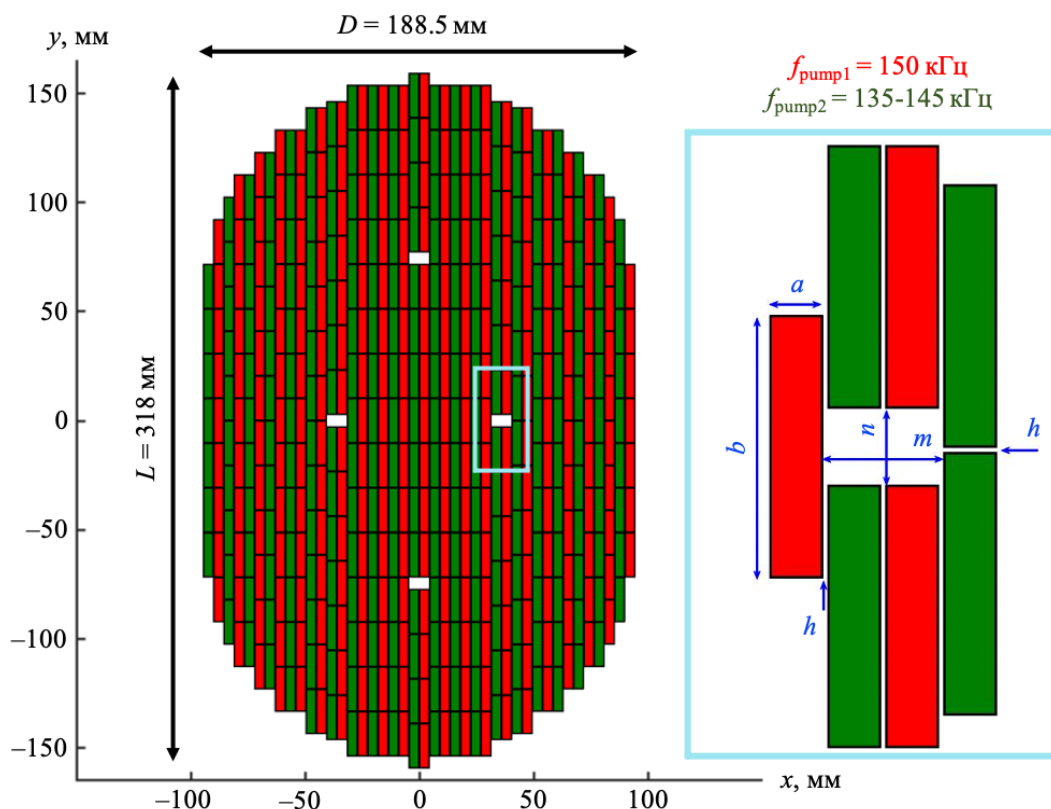
$$\frac{i\beta\omega_{\text{dif}}}{2c_0^3 \rho_0} p_{\text{pump1}} p_{\text{pump2}}^*, \quad (3.10)$$

умноженной на половинный шаг  $\Delta z/2$ . При этом в операторной схеме (3.9) нелинейные источники на первом половинном шаге  $\Delta z/2$  рассчитывались как среднее арифметическое от функции (3.10), вычисленной на начальном и промежуточном слоях, а на втором половинном шаге  $\Delta z/2$  – на промежуточном и конечном слоях.

### 3.1.2 Постановка реалистичных граничных условий на излучателе сложной геометрии

Моделирование поля волны разностной частоты проводилось на примере параметров недавно разработанной подводной параметрической двумерной антенной решетки эллипсовидной формы с полосовой структурой распределения излучающих элементов для двух каналов частот [21], схема которой изображена на рис. 3.1. При моделировании двухчастотного нелинейного взаимодействия предполагалось, что одна половина прямоугольных по форме элементов излучает сигнал на фиксированной частоте  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц, вторая половина – на выбранных для двухчастотного моделирования

частотах  $f_{\text{pump}2} = 135, 140$  или  $145$  кГц. Форма излучателя близка к эллипсоиду с осями  $L = 318$  мм и  $D = 188.5$  мм, при этом его бóльший размер ориентирован вертикально. Поверхность излучателя представляет собой 544 прямоугольных элемента площадью  $a \times b = 4 \times 20$  мм<sup>2</sup> каждый с зазором  $h = 0.5$  мм между ними, а также 4 неактивных области площадью  $m \times n = 9.5 \times 6$  мм<sup>2</sup>.



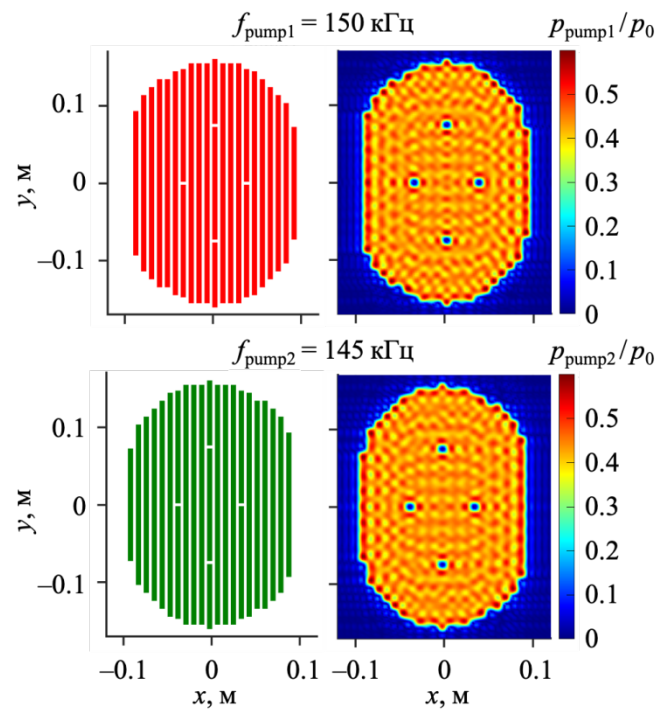
**Рис. 3.1.** Геометрия эллипсоидного излучателя (слева) с осями  $L = 318$  мм и  $D = 188.5$  мм полосовой структуры, излучающего волны накачки на двух частотах: фиксированной частоте  $f_{\text{pump}1} = 150$  кГц (соответствующие элементы излучателя отмечены красным) и переменной частоте  $f_{\text{pump}2} = 135-145$  кГц (соответствующие элементы излучателя отмечены зеленым). Антенная решетка состоит из 544 элементов площадью  $a \times b = 4 \times 20$  мм<sup>2</sup> с зазором  $h = 0.5$  мм между ними и 4 неактивных областей площадью  $m \times n = 9.5 \times 6$  мм<sup>2</sup>. Схема излучателя вблизи одной из неактивных областей приведена на рисунке справа.

При расчете интеграла Рэлея (3.1) для каждой из волн накачки предполагалось постоянство компоненты колебательной скорости, перпендикулярной поверхности элементов, расположенных в плоскости  $z = 0$ , т. е. направленной вдоль оси  $z$  (рис. 3.2, слева). Начальное условие на излучателе в численном моделировании параболических уравнений (3.3) и (3.4) задавалось для комплексной амплитуды давления, при этом пересчет распределения скорости в распределение давления происходил следующим образом. Вначале рассчитывался двумерный пространственный спектр  $S_v(k_x, k_y)$  с пространственными частотами  $k_x$  и  $k_y$  в обоих поперечных направлениях для заданного равномерного распределения колебательной скорости  $v = v_0 = p_0/(r_0 c_0)$ . Так как антенна

представляет собой совокупность прямоугольных элементов, то для каждого прямоугольника может быть получено аналитическое выражение  $S_{v,n}(k_x, k_y) = v_0 ab / (4\pi^2) \cdot \text{sinc}(k_x a / 2) \cdot \text{sinc}(k_y b / 2)$ , где  $n$  – номер прямоугольника, при этом полный спектр  $S_v(k_x, k_y)$  рассчитывался как сумма вкладов от отдельных прямоугольных элементов с учетом их геометрического расположения. Из линеаризованного уравнения Эйлера  $\partial v / \partial t = (-1/\rho_0) \partial p / \partial z$  следует соотношение для пространственных спектров давления и  $z$ -компоненты колебательной скорости каждого прямоугольного элемента,  $S_{p,n}(k_x, k_y) = \omega \rho_0 S_{v,n}(k_x, k_y) / (k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}$ , что позволяет найти полный спектр  $S_p(k_x, k_y)$ .

Далее, полученное граничное условие для компонент углового спектра  $S_p(k_x, k_y)$  фильтровалось с помощью пространственного фильтра, который ограничивает компоненты с пространственной частотой выше  $0.7k_{\max}$ , где  $k_{\max}$  – соответствующее максимальное волновое число для каждой из волн накачки. Такая фильтрация высоких пространственных частот позволяет сгладить резкие градиенты в начальном пространственном распределении поля давления, полученном с помощью обратного двумерного преобразования Фурье, и уменьшить ошибки использования параболического приближения при описании компонент поля, распространяющихся под большими углами относительно оси пучка [120].

Отметим, что выбор значения пространственной частоты немного больше или меньше, чем  $0.7k_{\max}$ , практически не повлияет на начальные распределения и соответствующие результаты моделирования. В результате сглаживания граничных условий убираются компоненты углового спектра с очень большими углами распространения относительно оси  $z$ , учет которых проявился бы на пространственных распределениях давления как нежелательная рябь, которая, на самом деле, не влияет на поле давления вдали от источника. Компоненты углового спектра, которые не были



**Рис. 3.2.** Равномерные распределения амплитуды колебательной скорости на поверхности излучателя (слева) и соответствующие им сглаженные начальные условия на излучателе для нормированных амплитуд давлений  $p_{\text{pump}1,2}/p_0$  волн накачки с частотами  $f_{\text{pump}1} = 150$  кГц и  $f_{\text{pump}2} = 145$  кГц (справа) для численного решения уравнения ХЗК.

отфильтрованы (с волновыми числами ниже  $0.7k_{\max}$ , но все еще распространяющиеся под большими углами), распространяются к поперечным границам области моделирования и затем поглощаются слоями PML. Таким образом, фильтрация была произведена для улучшения работы и стабильности численной схемы, а пространственная частота среза фильтра представляет собой относительно произвольное значение, выбранное в разумных пределах. На рис. 3.2 представлены сглаженные такой фильтрацией распределения амплитуд давлений  $p_{\text{pump}1,2}/p_0$  волн накачки на примере частот  $f_{\text{pump}1} = 150$  кГц и  $f_{\text{pump}2} = 145$  кГц.

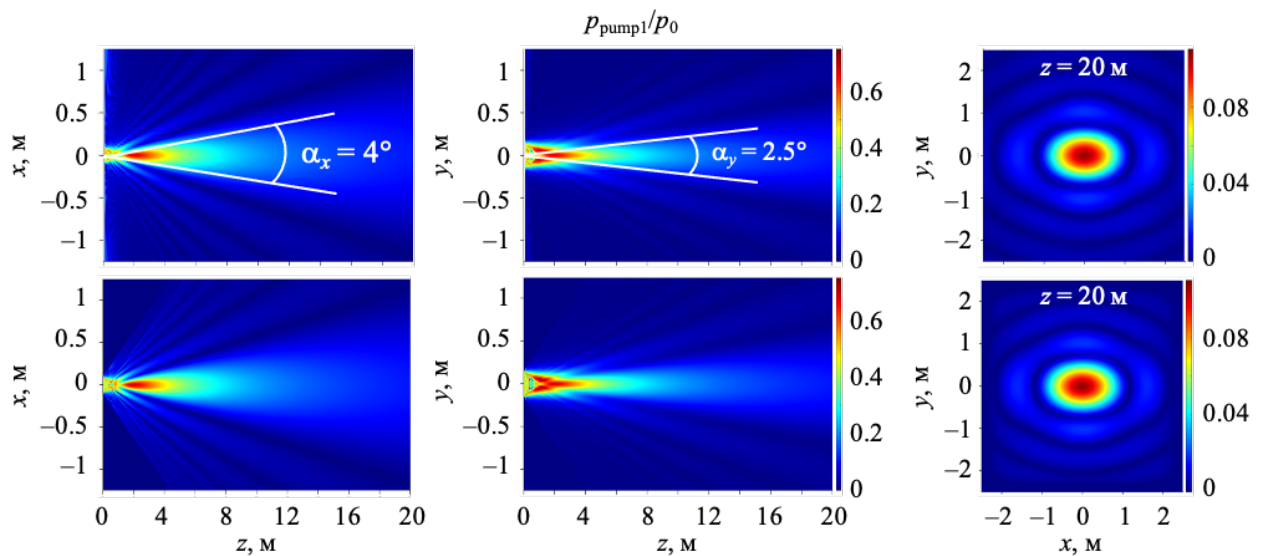
В качестве параметров среды и величины начального давления использовались данные из экспериментов, выполненных с подводной параметрической антенной:  $p_0 \leq 0.6$  МПа,  $c_0 = 1502.25$  м/с,  $\rho_0 = 996.81$  кг/м<sup>3</sup> [21] и характерные для морской воды параметры нелинейности  $\beta = 3.5$  и поглощения  $\delta = 4.42 \times 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с [114]. Стоит отметить, что в эксперименте [21] при амплитудах давления  $p_0$  порядка 0.6 МПа реализовывался близкий к разрывному нелинейный режим работы антенны, так как характерная длина образования разрыва в волне накачки  $l_{\text{sh}} = \rho_0 c_0^3 / (\beta \omega_{\text{pump}1} p_0)$  в этом случае составляет 1.7 м, в то время как характерные длины дифракции для размеров решетки вдоль осей  $x$  и  $y$  составляют  $l_{d,x} = \omega_{\text{pump}1,2} (D/2)^2 / (2c_0) = 2.8$  м и 2.7 (2.6, 2.5) м,  $l_{d,y} = \omega_{\text{pump}1,2} (L/2)^2 / (2c_0) = 7.9$  м и 7.7 (7.4, 7.1) м для волн накачки с частотами  $f_{\text{pump}1} = 150$  кГц и  $f_{\text{pump}2} = 145$  (140, 135) кГц. Поэтому для возможности использования квазилинейного приближения дальнейшее моделирование проводилось для амплитуды давления  $p_0 = 0.06$  МПа, которая в 10 раз меньше, чем максимально достижимая в эксперименте.

В соответствии с геометрией поля, рассчитанной на основе линейного моделирования интеграла Рэля до  $z = 100$  м (3.1), были определены следующие параметры численного спектрального алгоритма для решения линейного уравнения ХЗК: пространственный продольный шаг  $\Delta z = 0.02$  м,  $\Delta x = \Delta y = 0.0025$  м – поперечные шаги на прямоугольной сетке размером  $4000 \times 4000$  точек в пространственном окне  $10$  м  $\times$   $10$  м. Квазилинейный алгоритм, как и нелинейная плоская задача в главе 2, реализовывался в среде MATLAB R2022a.

### 3.1.3 Сравнение конечно-разностного алгоритма и точного решения в виде интеграла Рэля для линейной задачи

Сначала были рассчитаны линейные поля давления волн накачки с помощью интеграла Рэля (3.1). На рис. 3.3 в верхнем ряду приведен пример двумерных распределений  $p_{\text{pump}1}/p_0$  амплитуды волны с частотой  $f_{\text{pump}1} = 150$  кГц, нормированных на  $p_0 = 0.06$  МПа. Как следует из рис. 3.3, поле волны накачки имеет узкую направленность с

полными углами расхождения пучка в направлениях осей  $x$  и  $y$ , составляющими  $\alpha_x = 4^\circ$  и  $\alpha_y = 2.5^\circ$ , соответственно. Углы  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$  были рассчитаны по уровню  $-6$  дБ от максимальной амплитуды с использованием соответствующих одномерных поперечных распределений, полученных при  $z = 20$  м и представленных на рис. 3.4, а, 3.4, б серой сплошной линией. Таким образом, поле волн накачки действительно имеет малую расходимость, что позволяет использовать параболическое приближение уравнения Вестервельта (1.3), справедливое для компонент углового спектра пучка с полными углами расходимости приблизительно до  $\pm 15^\circ$  [51].



**Рис. 3.3.** Двумерные распределения линейного поля волны накачки  $p_{\text{pump1}}/p_0$  с частотой  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц: верхний ряд – решение, полученное с помощью интеграла Рэлея для идеальных граничных условий на излучателе, нижний ряд – численное решение уравнения ХЗК со сглаженными граничными условиями.

Результаты численного моделирования линеаризованного уравнения ХЗК для амплитуды давления волны накачки с частотой 150 кГц в сравнении с решением полной дифракционной модели (интегралом Релея) также представлены на рис. 3.3 (нижний ряд) и рис. 3.4 (красная штриховая линия). На вкладке к осевому распределению амплитуды давления вдоль оси  $z$  на рис. 3.4, в показано в увеличенном масштабе поведение обоих решений в ближнем поле пучка. Видно, что численное решение в параболическом приближении практически не отличается от решения полной дифракционной задачи (3.1), что подтверждает правомерность использования параболического приближения и правильность работы численного алгоритма. Некоторые отличия, как и ожидалось, проявляются вблизи излучателя до расстояний порядка 1 м, что связано с влиянием и неточным описанием высокочастотных компонент пространственного спектра волны в ближнем поле пучка на расстояниях  $z < a(ka)^{1/3}$ , где  $k$  – волновое число накачки,  $a$  – характерный размер излучателя [51].

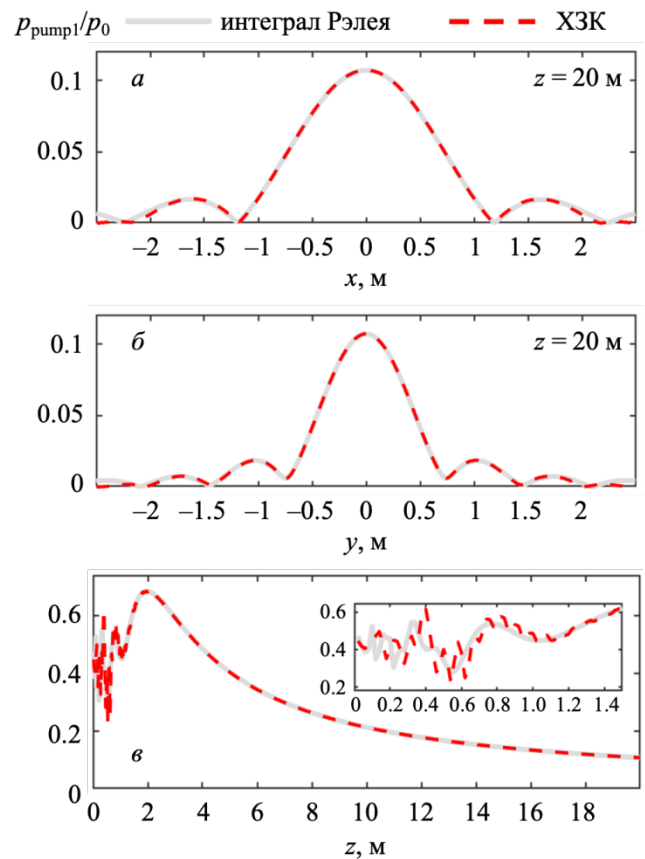
Для волны накачки с частотой  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц амплитуда давления на оси (рис. 3.4, в) достигает максимума на расстоянии около 2 м, меньшем характерной длины дифракции  $l_{d,x} = 2.8$  м для более короткой стороны антенны вдоль координаты  $x$ , после чего убывает, асимптотически приближаясь к зависимости  $1/z$  согласно закону расходящейся сферической волны.

Стоит отметить, что на рассматриваемых расстояниях эффекты поглощения для волн накачки сказываются незначительно. Характерная длина поглощения  $l_{\text{abs}} = 2c_0^3/(\delta\omega^2)$  в морской воде ( $\delta = 4.42 \times 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с [114]) для частоты 150 кГц составляет 1727 м, поэтому амплитуда давления волн накачки при  $z = 20$  м лишь на 2% меньше, а при  $z = 150$  м – на 10% меньше, чем в отсутствие поглощения ( $\delta = 0$ ). Таким образом, эффекты линейного поглощения волн накачки в данном случае не будут ограничивать расстояние, на котором

происходит перекачка энергии волн накачки в разностную частоту, т.е. длину антенны бегущей волны. Ограничивающим фактором для рассматриваемого в этой главе квазилинейного приближения являются только эффекты дифракционной расходимости.

### §3.2 Результаты квазилинейного моделирования

На рис. 3.5 представлены двумерные нормированные на  $p_0 = 0.06$  МПа распределения амплитуды волны разностной частоты  $p_{\text{dif}}$  для случая  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц, демонстрирующие узкую направленность поля ВРЧ с полными углами расхождения  $\beta_x = 5.2^\circ$  и  $\beta_y = 4.6^\circ$  в направлениях осей  $x$  и  $y$ , соответственно, рассчитанными аналогично волнам накачки по уровню –6 дБ от максимальной амплитуды с использованием соответствующих одномерных поперечных распределений (рис. 3.6, а–б), полученных при



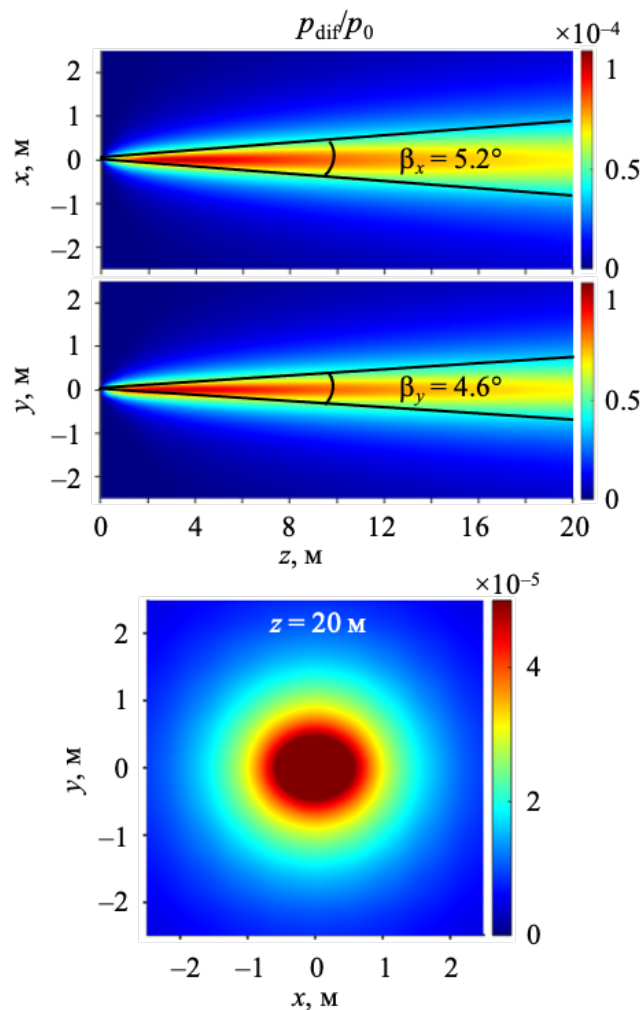
**Рис. 3.4.** Одномерные распределения амплитуды волны накачки  $p_{\text{pump1}}/p_0$  с частотой  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц: серая сплошная линия – интеграл Рэлея, красная штриховая линия – численное решение уравнения ХЗК в линейном случае. *а* и *б* – поперечные распределения  $p_{\text{pump1}}$  по осям  $x$  и  $y$ , рассчитанные на расстоянии  $z = 20$  м; *в* – осевое распределение вдоль оси  $z$ ; на вкладке к рисунку изображены решения в ближнем поле.



$z = 20$  м, и отсутствие боковых лепестков, что более детально показано на рис. 3.6. На рис. 3.6, а–б представлены одномерные поперечные распределения амплитуды давления ВРЧ  $p_{\text{dif}}$ , рассчитанные в дальнем поле волн накачки на расстоянии  $z = 20$  м. Эти распределения были получены для трех значений величины разностной частоты  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц (красная кривая), 10 кГц (черная кривая) и 15 кГц (серая кривая) и нормированы на  $np_0$ , где  $n = 1, 2$  и 3, соответственно.

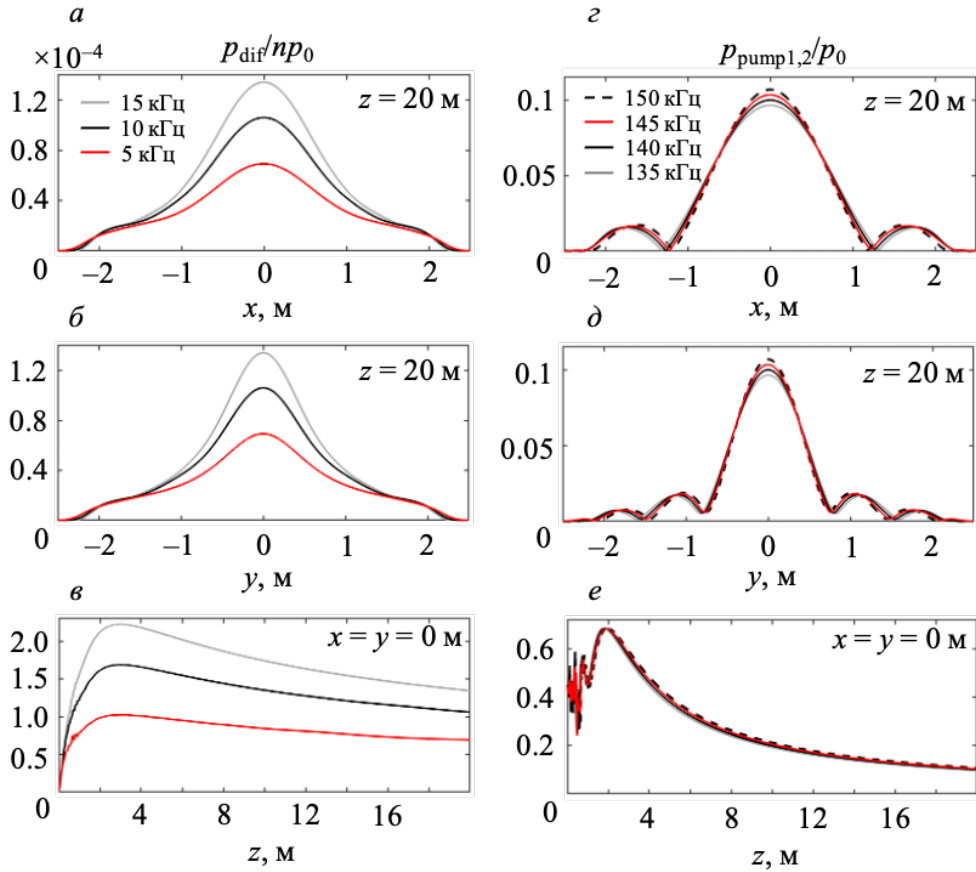
Поле приведенных полей ВРЧ имеет узкую направленность с полными углами расхождения пучка  $\beta_x = 5.2^\circ$ ,  $4.7^\circ$ ,  $4.5^\circ$  и  $\beta_y = 4.6^\circ$ ,  $4.0^\circ$ ,  $3.7^\circ$  в направлении осей  $x$  и  $y$  для  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц, 10 кГц, 15 кГц, что несколько шире аналогичных диаграмм направленности волн накачки. Как видно, направленность ВРЧ возрастает с увеличением  $f_{\text{dif}}$ , поскольку при увеличении частоты дифракционные эффекты проявляются слабее. Заметим, что для волн разностной частоты углы расхождения пучка в обоих направлениях отличаются меньше, чем для волн накачки, поскольку генерация разностной частоты продолжается и на расстояниях больших длины дифракции  $l_{d,x}$  волн накачки, когда высокочастотные пучки расширяются в этом направлении, но еще не дифрагируют в направлении оси  $y$ .

Зависимости амплитуды волн разностной частоты вдоль оси пучка представлены на рис. 3.6, в. На расстояниях до 3 м, меньших длины дифракции  $l_{d,x}$  волны накачки относительно оси  $x$ , для всех трех выбранных значений  $f_{\text{dif}}$  амплитуда волны разностной частоты возрастает с увеличением пройденного расстояния  $z$ , поскольку амплитуды волн накачки достаточно велики и их вклад в  $p_{\text{dif}}$  превосходит ее уменьшение за счет дифракции, затем достигает максимума на расстоянии около 3 м, большем, чем для волн накачки, и плавно убывает, в основном, за



**Рис. 3.5.** Двумерные распределения поля волны разностной частоты  $p_{\text{dif}}/p_0$  с частотой  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц, рассчитанные в квазилинейном приближении и нормированные на  $p_0 = 0.06$  МПа.

счет дифракционных эффектов, поскольку диссипативные потери при физических значениях параметров среды, как упоминалось выше, малы. Кроме того, убыль амплитуды ВРЧ происходит также за счет уменьшения вклада, вносимого в нее от волн накачки из-за уменьшения их амплитуды, обусловленного дифракционной расходимостью высокочастотных пучков.



**Рис. 3.6.** (а–в) Распределения амплитуды давления ВРЧ  $p_{\text{dif}}$ , нормированные на  $np_0$ , рассчитанные для трех случаев величины разностной частоты  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц ( $n = 1$ , красная линия), 10 кГц ( $n = 2$ , черная линия) и 15 кГц ( $n = 3$ , серая линия) в квазилинейном приближении: а и б – поперечные распределения вдоль осей  $x$  и  $y$ , рассчитанные на расстоянии  $z = 20$  м; в – осевое распределение вдоль оси  $z$ . (г–е) Двумерные распределения амплитуды давления волн накачки для различных значений  $f_{\text{pump}1,2}$ :  $f_{\text{pump}1} = 150$  кГц (черная штриховая кривая),  $f_{\text{pump}2} = 145$  кГц (красная кривая),  $f_{\text{pump}2} = 140$  кГц (черная сплошная кривая),  $f_{\text{pump}2} = 135$  кГц (серая кривая) в квазилинейном приближении.

Как видно из рис. 3.6, а–в максимальная амплитуда ВРЧ тем больше, чем больше частота  $f_{\text{dif}}$ , и составляет 0.010%, 0.034% и 0.069% от амплитуды давления на излучателе  $p_0$ . В отличие от приближения плоских волн, где амплитуда ВРЧ пропорциональна величине  $f_{\text{dif}}$ , в рассматриваемом случае дифрагирующих пучков накачки она увеличивается гораздо быстрее, чем по линейному закону, за счет ослабления дифракции волны с большей разностной частотой. При этом с увеличением давления на излучателе  $p_0$

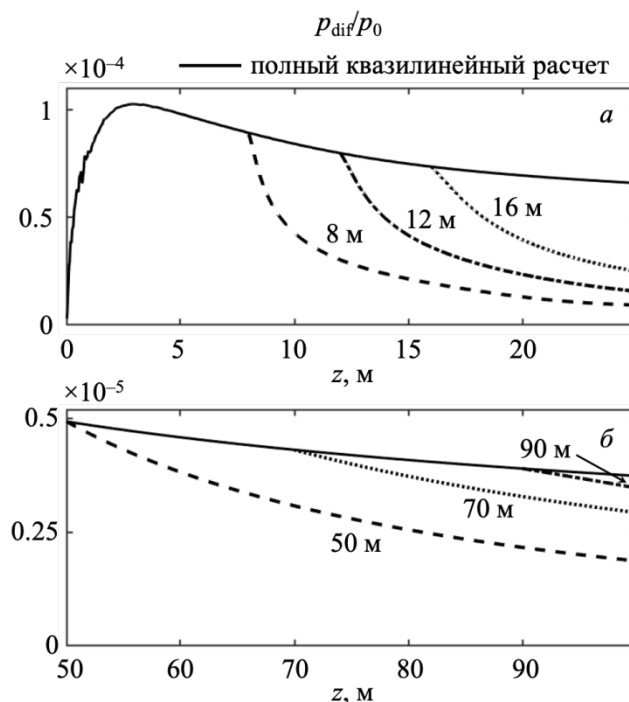
эффективность генерации ВРЧ (зависимость  $p_{\text{dif}}/p_0$  от  $p_0$ ), растет линейно в соответствии с аналитическими результатами квазилинейной теории [4].

Распределения давления для всех волн накачки (рис. 3.6,  $z-e$ ) достаточно близки: так, для волн накачки с частотами  $f_{\text{pump}2} = 145$  (140, 135) кГц они отличаются только небольшим, пропорциональным величине  $f_{\text{pump}2}$ , уменьшением амплитуды в дальнем поле на расстоянии  $z = 20$  м на 3.2%, 6.5% и 9.7%, соответственно, в силу более сильной расходимости пучков с меньшей частотой, и незначительным, также пропорциональным величине  $f_{\text{pump}2}$ , смещением максимума осевого распределения на 3.1%, 6.2%, и 9.2% в сторону излучателя.

На рис. 3.7 приведены зависимости нормированной на  $p_0$  амплитуды волны разностной частоты на оси пучка для случая  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц и различных расстояний от излучателя: сплошной линией представлены результаты полного квазилинейного расчета, а различными штриховыми линиями – зависимости в случаях, когда источники (3.10) искусственно выключались по достижении расстояний  $z = 8, 12, 16$  м (а), 50, 70, 90 м (б).

Из рис. 3.7 следует, что генерация волны разностной частоты продолжается на расстояниях, заметно превосходящих длины дифракции волн накачки в обоих поперечных направлениях, то есть в сферически расходящихся пучках взаимодействующих волн, поскольку заметное уменьшение амплитуд волн

накачки в  $e$  раз будет наблюдаться лишь после прохождения диссипативной длины (длина диссипации волн накачки составляет порядка 1700 м), во много раз превышающей дифракционную. Поэтому при выключении источников на расстояниях, по крайней мере, до  $z = 90$  м амплитуда ВРЧ начинает спадать гораздо быстрее. Таким образом, следует ожидать, что при увеличении амплитуды волн накачки и численных расчетах без



**Рис. 3.7.** Зависимости амплитуды волны разностной частоты  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц, нормированные на  $p_0 = 0.06$  МПа, вдоль оси  $z$ : квазилинейный расчет до (а)  $z = 25$  м и (б)  $50 \text{ м} < z < 100$  м (сплошная линия) и при искусственном выключении нелинейности на различных расстояниях  $z = 8, 12, 16, 50, 70, 90$  м (числа у кривых).

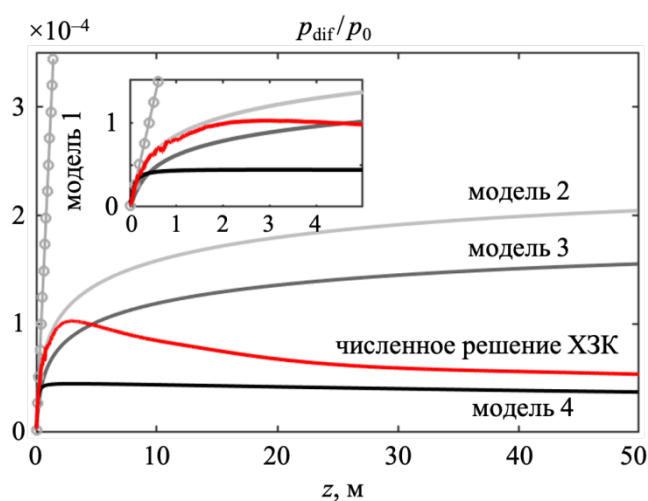
приближения квазилинейности, важную роль будут играть нелинейные эффекты ограничения амплитуд волн накачки за счет каскадной генерации высших гармоник [86].

### §3.3 Сравнение численных результатов с известными аналитическими решениями

Наконец, представляет интерес сравнить полученные численные решения с результатами существующих приближенных дифракционных моделей [4], рассмотренных в главе 1, в которых также используется квазилинейное приближение, что проиллюстрировано на рис. 3.8 для случая ВРЧ с частотой  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц. На рисунке представлены зависимости амплитуды давления волны разностной частоты от расстояния на оси пучка.

Результаты численного решения уравнения ХЗК в квазилинейном приближении показаны красными кривыми в сравнении с результатами четырех известных аналитических и полуаналитических моделей. Одна из них (модель 1) состоит в том, что амплитуда ВРЧ рассчитывается в предположении взаимодействия плоских волн накачки, поэтому она неограниченно возрастает с увеличением пройденного расстояния  $z$  (1.9). Результаты этой модели показаны на рис. 3.8 серой маркерной линией (рис. 3.8, «1») и справедливы только на расстояниях  $z \ll L_{d,x}, L_{d,y}$ , где  $L_{d,x} = 0.09$  м и  $L_{d,y} = 0.26$  м – длины дифракции волны разностной частоты в обоих направлениях.

Другая модель (модель 2) построена в предположении взаимодействия недифрагирующих волн накачки с гауссовским граничным распределением на круглом излучателе радиуса  $(S/\pi)^{1/2}$ , где  $S = 0.04352$  м<sup>2</sup> – площадь рассматриваемой в работе антенной решетки. Полученная с помощью нее зависимость  $p_{\text{dif}}(z)/p_0$  представлена светло-серой сплошной кривой (рис. 3.8, «2»): на малых расстояниях это приближенное решение



**Рис. 3.8.** Сравнение результатов различных квазилинейных моделей для амплитуды ВРЧ с частотой  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц на оси пучка: численное решение квазилинейного уравнения ХЗК (красная кривая) и приближенные аналитические модели: расчет для плоских волн (1), приближения недифрагирующих волн накачки с гауссовым начальным распределением на круглом (2) и прямоугольном (3) излучателях, приближение дифрагирующих волн накачки с гауссовым начальным распределением на круглом излучателе (4). На вкладке к рисунку представлены соответствующие решения в ближнем поле.

соответствует численному решению уравнения ХЗК, однако далее оно продолжает расти, поскольку ограничивающим фактором здесь является только дифракция волны разностной частоты.

Третья модель, изображенная темно-серой сплошной кривой (рис. 3.8, «3»), аналогична второй, но получена для прямоугольного излучателя с размерами, соответствующими осям эллипса  $L$  и  $D$ . Это решение было умножено на дополнительный коэффициент  $S/LD$  для компенсации отличия площадей эллипсоидального [21] и прямоугольного излучателей и ведет себя аналогичным модели 2 образом.

Четвертая модель учитывает дифракцию волн накачки, которые, как и во второй модели, имеют гауссовское начальное распределение на круглом излучателе радиуса  $(S/\pi)^{1/2}$ . Результаты этой модели показаны на рис. 3.8. черной сплошной кривой (рис. 3.8, «4») и имеют схожую тенденцию с полученным численным решением уравнения ХЗК: начальное увеличение амплитуды в ближнем поле излучателя и её медленное уменьшение на больших расстояниях, в области сферической расходимости взаимодействующих волн. Однако количественно аналитические результаты сильно отличаются от численных, что связано с отличием в граничных условиях.

Таким образом, все рассмотренные в этом параграфе четыре аналитические модели верно описывают поведение амплитуды ВРЧ только в ближнем поле на оси пучка, однако не могут быть использованы на больших расстояниях.

### § 3.4 Выводы к третьей главе

На основе точного решения линейной дифракционной задачи для волн накачки с помощью интеграла Рэлея (3.1) было показано, что поле исходных волн имеет узкую направленность, поэтому задача о параметрической генерации волны разностной частоты может быть решена с помощью параболического уравнения ХЗК (1.4), (3.2), результаты моделирования которого практически не отличались от решения полной дифракционной задачи (3.1). На основе метода переменных направлений был развит трехмерный дифракционный алгоритм для реалистичных начальных условий на параметрическом излучателе произвольной формы без приближенного описания дифракционных эффектов для волны накачки и ВРЧ.

В квазилинейном приближении рассчитаны одномерные и двумерные распределения амплитуды давления ВРЧ для трех различных величин  $f_{\text{dif}}$ . Показано, что направленность низкочастотного излучения шире и более сглажена по обоим поперечным направлениям, чем у волн накачки. При этом чем больше величина разностной частоты, тем более узконаправленное излучение генерируется параметрической антенной. Проанализирована

эффективность генерации поля ВРЧ в зависимости от величины  $f_{\text{dif}}$  и показано, что с увеличением разностной частоты возрастает доля перекаченной в нее от волн накачки энергии. Так, амплитуда ВРЧ увеличивается примерно в 3.5 и 7 раз при увеличении  $f_{\text{dif}}$  от 5 кГц до 10 кГц и 15 кГц, что отличается от приближения плоских волн, где амплитуда ВРЧ растет линейно с увеличением  $f_{\text{dif}}$ .

Показано, что в приближении квазилинейности поглощение и сферическая расходимость взаимодействующих волн на рассмотренных расстояниях порядка 100 м от излучателя не являются факторами, ограничивающими расстояния, на которых происходит генерация пучка разностной частоты. В реалистичных условиях, при увеличении амплитуды волн накачки и проведении численных расчетов без приближения квазилинейности, важную ограничивающую роль будут играть нелинейные эффекты уменьшения амплитуд волн накачки за счет каскадной генерации высших гармоник.

Сравнение полученного численного решения уравнения ХЗК с существующими аналитическими результатами, в которых также применяется квазилинейный подход, однако используются дополнительные предположения о начальных условиях на излучателе и поведении высокочастотных волн накачки, показало, что аналитические решения количественно верно описывают поведение амплитуды давления ВРЧ лишь в ближнем поле излучателя и только на оси пучка (модель 4), но не могут быть использованы даже для качественного описания поля на больших расстояниях.

Результаты, полученные в этой главе, служат основой для дальнейшего решения полной нелинейной трехмерной задачи о генерации волны разностной частоты в случае более интенсивных волн накачки, когда квазилинейное приближение уже не может быть применено.

## Глава 4

### ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА О ГЕНЕРАЦИИ ВОЛНЫ РАЗНОСТНОЙ ЧАСТОТЫ ПРИ ДВУХЧАСТОТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН НАКАЧКИ В РАЗРЫВНЫХ РЕЖИМАХ В СВОБОДНОМ ПОЛЕ

*В данной главе используются материалы, опубликованные в статье [A1] и материалах конференций «ICU–2023», «Волны–2023», «XXXV сессия РАО».*

Эта глава посвящена результатам трехмерного численного моделирования параметрических взаимодействий в свободном поле в ударноволновых режимах. Разработан новый численный алгоритм решения параболического уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова в спектральном представлении в 3D для сильно нелинейных условий распространения волн с оптимизацией алгоритма вычисления нелинейного оператора с помощью описанного в главе 2 метода прореживания спектра, исключающего низкоамплитудные составляющие, которые слабо влияют на формирование поля волны разностной частоты.

Развитая численная модель, в отличие от большинства встречающихся в литературе алгоритмов, использующих приближение квазилинейности и/или осевой симметрии дифрагирующих пучков [4–7, 35–42, 68–69, 71–80], позволяет исследовать нелинейные взаимодействия в режимах образования ударных фронтов в профиле волны. Она не накладывает ограничений на постановку начальных условий на параметрическом излучателе (в главе 3 развит соответствующий дифракционный алгоритм) и построена для произвольного соотношения между взаимодействующими частотами накачки и их отношения к генерируемой разностной частоте. Эффективность параметрической генерации и свойства направленности пучка на разностной частоте сравниваются при различных уровнях начальной мощности на излучателе при использовании квазилинейного и нелинейного подходов.

#### § 4.1 Спектральный численный алгоритм решения нелинейного уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова

Согласно спектральному подходу, описанному в главе 2, решение уравнения ХЗК (1.4), (3.2) ищется в виде разложения в конечный ряд Фурье с  $N_{\max}$  числом временных гармоник с угловыми частотами  $\omega_n = n\omega_{\text{dif}}$ , которые кратны разностной частоте

$$\omega_{\text{dif}} = \omega_{\text{pump1}} - \omega_{\text{pump2}} \quad \text{двух волн накачки:} \quad p(\tau, x, y, z) = \sum_{n=-N_{\max}}^{N_{\max}} p_n(x, y, z) \exp(in\omega_{\text{dif}}\tau).$$

Подстановка этого выражения в уравнение ХЗК (1.3), (3.2) приводит к необходимости решения системы связанных уравнений для амплитуд спектральных компонент  $p_n$ :

$$\frac{\partial p_n}{\partial z} = \frac{c_0}{2in\omega_{\text{dif}}} \left( \frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_n}{\partial y^2} \right) - \frac{\delta n^2 \omega_{\text{dif}}^2}{2c_0^3} p_n + \frac{i\beta n \omega_{\text{dif}}}{c_0^3 \rho_0} \left( \sum_{m=1}^{N_{\text{max}}-n} p_m^* p_{n+m} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} p_m p_{n-m} \right). \quad (4.1)$$

В соответствии с методом расщепления по физическим факторам [56, 59–60, 102] на каждом шаге  $\Delta z$  по оси операторы дифракции, поглощения и нелинейности в уравнении (4.1) решаются отдельно. Здесь была использована схема, которая обеспечивает точность второго порядка:

$$p_n(x, y, z + \Delta z) = L_{D, \Delta z/2} L_{A, \Delta z/4} L_{N, \Delta z/2} L_{A, \Delta z/2} L_{N, \Delta z/2} L_{A, \Delta z/4} L_{D, \Delta z/2} p_n(x, y, z). \quad (4.2)$$

Оператор дифракции  $L_D$ , как и в главе 3, рассчитывался на каждом полушаге  $\Delta z/2$  с использованием метода переменных направлений [103], с введением поглощающего слоя для подавления побочных отражений от границ [106–107]. Для оператора поглощения  $L_A$  было использовано точное аналитическое решение в виде убывающей экспоненты [56]. Для расчета нелинейного оператора  $L_N$  в спектральном представлении система нелинейных уравнений (4.1) решалась методом Рунге-Кутты 4-го порядка точности для заранее отобранного списка из 50 спектральных компонент согласно методу прореживания спектра, представленному в главе 2.

Численное моделирование, как и в предыдущих главах, проводилось на примере двухчастотного взаимодействия волн накачки с частотами  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц и  $f_{\text{pump2}} = 145$  кГц, 140 кГц и 135 кГц, что привело к генерации волн разностной частоты  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц, 10 кГц и 15 кГц, соответственно. На поверхности каждого прямоугольного элемента параметрической антенной решетки [21] задавалось равномерное распределение колебательной скорости с амплитудой  $v_0$ . Начальное давление на поверхности излучателя составляло  $p_0 = 0.6$  МПа в нелинейном режиме.

Характерный коэффициент тепловязкого поглощения  $\delta_{\text{normal}} = 4.42 \times 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с [114] был увеличен в десять раз (как и в главе 2), чтобы обеспечить устойчивость численной схемы при расчете нелинейного оператора с использованием ограниченного числа гармоник [113]. Это искусственное увеличение коэффициента поглощения согласуется с экспериментальными данными, так как в морской воде обычно наблюдается дополнительное поглощение из-за присутствия водорослей и взвесей. В этом случае длина поглощения  $l_{\text{abs}} = 2c_0^3 / (10\delta_{\text{normal}}\omega_{\text{pump1}}^2)$  для высокочастотной волны накачки с частотой  $\omega_{\text{pump1}}$  составляет около 170 м.

Характерная длина нелинейности  $l_{\text{sh}} = \rho_0 c_0^3 / (\beta \omega_{\text{pump1}} p_0)$  составляет 1.7 м при  $p_0 = 0.6$  МПа, тогда как характерные длины дифракции вдоль осей  $x$  и  $y$  равны  $l_{dx} = \omega_{\text{pump1,2}}(D/2)^2 / (2c_0) = 2.5\text{--}2.8$  м и  $l_{dy} = \omega_{\text{pump1,2}}(L/2)^2 / (2c_0) = 7.1\text{--}7.9$  м для волн накачки с частотами 135–150 кГц. Таким образом, нелинейная и дифракционная длины волн



накачки сопоставимы друг с другом и значительно меньше их длины поглощения (т.е. распространение волн происходило в условиях слабого линейного поглощения).

Параметры численной сетки при решении нелинейного уравнения ХЗК соответствовали аналогичным параметрам в квазилинейном дифракционном алгоритме: пространственный продольный шаг  $\Delta z = 0.02$  м,  $\Delta x = \Delta y = 0.0025$  м – поперечные шаги на прямоугольной сетке размером  $4000 \times 4000$  точек в пространственном окне  $10 \text{ м} \times 10 \text{ м}$ , а число гармоник  $N = 50$  (предварительно отобранных в соответствии с процедурой прореживания спектра). Квазилинейный алгоритм был реализован в среде MATLAB R2022a, и его время работы составило до 55 часов, а объем оперативной памяти для хранения массивов полей давления, состоящих из  $N = 3$  спектральных компонент, составил 0.72 Гб. Нелинейный алгоритм же был реализован на языке FORTRAN 2003, распараллелен с применением OpenMP, а соответствующие расчеты проводились на высокопроизводительном сервере Supermicro SERVER SYS-6028R-TR со 128 Гб оперативной памяти DDR4 с частотой 2133 МГц. Процессорное время нелинейного алгоритма составляло до 65 часов при работе на процессоре Intel Xeon E5-2630v4@2.2GHz с 10 ядрами и 12 Гб оперативной памяти для хранения массивов полей давления ( $N = 50$ ).

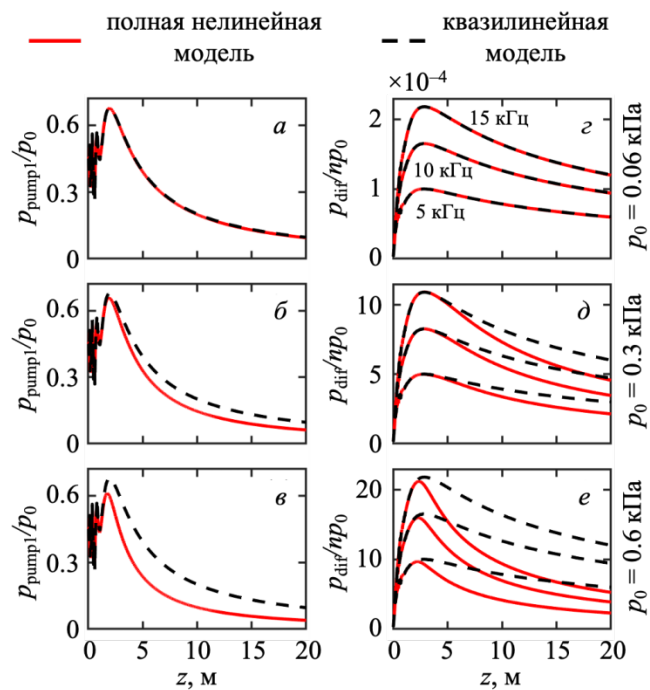
## **§ 4.2 Результаты нелинейной и квазилинейной моделей для полей волн накачки и разностной частоты в присутствии разрывов**

### *4.2.1 Поведение пучка на оси и дифракционная расходимость в квазилинейном, переходном и ударноволновом режимах распространения*

В поле параметрического излучателя [21] сильно нелинейное взаимодействие волн накачки соответствует начальному давлению  $p_0$ , близкому к 0.6 МПа. Следовательно, представляет интерес сравнить результаты нелинейного и квазилинейного моделирования при увеличении выходных уровней работы излучателя. На рисунке 4.1 продемонстрировано такое сравнение для нормированных на  $p_0$  осевых распределений амплитуды давления  $p_{\text{pump1}}/p_0$  для волны накачки с частотой  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц (*a–в*) и амплитуд давления трех волн разностной частоты  $p_{\text{dif}}/np_0$ , нормированных на  $np_0$  (*г–е*), где  $n = 1, 2, 3$  для  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц, 10 кГц и 15 кГц, соответственно. Результаты представлены для трех значений давления на излучателе  $p_0$ : 0.06 МПа (квазилинейный режим, рис. 4.1, *a, г*), 0.3 МПа (переходный режим, рис. 4.1, *б, д*) и 0.6 МПа (ударноволновой режим, рис. 4.1, *в, е*). Красные сплошные кривые соответствуют результатам, полученным с использованием нелинейной модели (4.1), черные пунктирные кривые – результатам квазилинейного моделирования (3.5).

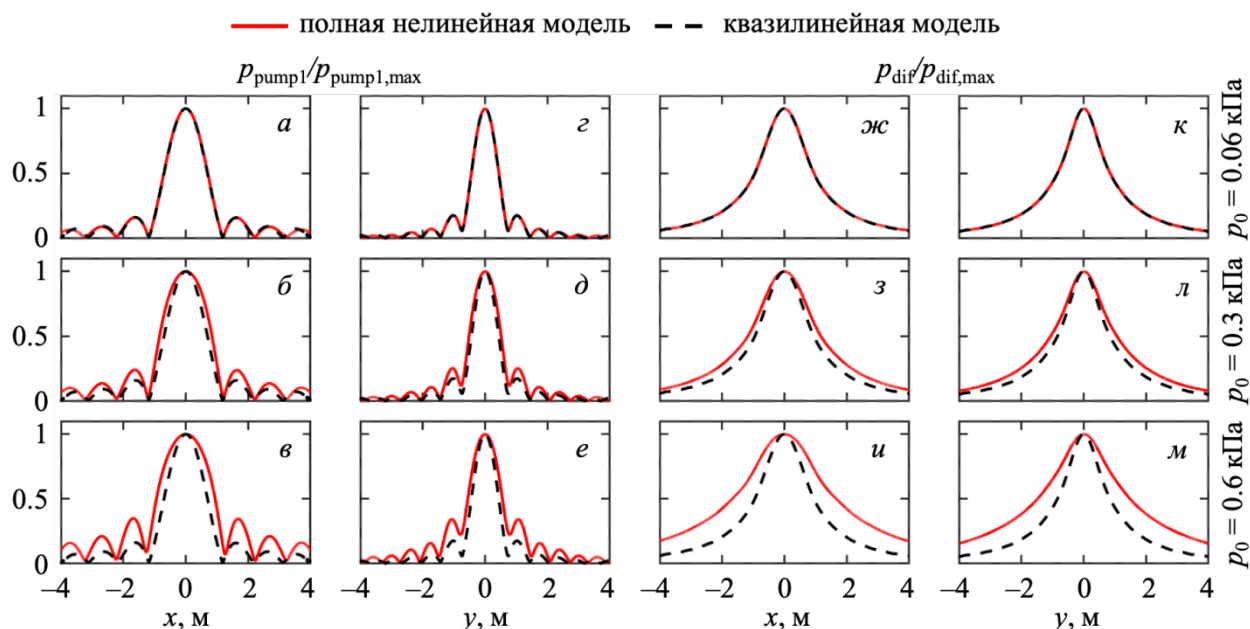
Как видно из рисунка 4.1, на небольших расстояниях от излучателя, где нелинейные эффекты и дифракция волн накачки слабы, наблюдается линейный рост амплитуд волн разностной частоты во всех трех режимах как для нелинейных (4.1), так и для квазилинейных (3.5) моделей. Такой начальный линейный рост пропорционально значению  $f_{\text{dif}}$  согласуется с квазилинейным решением для плоских волн накачки, распространяющихся без поглощения (1.7) [4]. Однако на больших расстояниях, поскольку с увеличением частоты волны дифрагируют слабее, наблюдается более быстрый рост амплитуды давления на оси пучка для разностных частот 10 кГц и 15 кГц (до 3.5 и 7 раз, соответственно) по сравнению с 5 кГц. Максимальное отношение амплитуды ВРЧ к начальной амплитуде давления волн накачки  $p_0$  при этом достигает 0.66% при самом высоком значении разностной частоты (15 кГц), рассматриваемом при моделировании (рис. 4.1, е). Когда на оси пучка достигаются условия формирования ударных фронтов в профиле волны, наблюдается заметное уменьшение амплитуды давления как волн накачки, так и ВРЧ по сравнению с квазилинейным распространением из-за перекачки энергии от волн накачки к их высшим гармоникам и комбинационным частотам.

Поперечная структура проиллюстрирована на рис. 4.2, где представлены распределения амплитуд давления для волны накачки с  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц (рис. 4.2, а–е) и волны разностной частоты с частотой  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц (рис. 4.2, ж–м) на расстоянии  $z = 20$  м. Численные решения приведены для нелинейного (красные сплошные кривые) и квазилинейного (черные пунктирные кривые) моделирования для тех же режимов работы излучателя, определяемых амплитудой давления  $p_0$ , что и на рис. 4.1. Все поперечные распределения нормированы на соответствующие максимальные значения.



**Рис. 4.1.** Одномерные осевые распределения безразмерной амплитуды давления волны накачки с частотой  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц (а–в) и трех волн разностной частоты (z–e) с частотами  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц ( $n = 1$ ), 10 кГц ( $n = 2$ ) и 15 кГц ( $n = 3$ ), рассчитанные с использованием полного нелинейного (красные сплошные кривые) и квазилинейного (черные штриховые кривые) подходов для трех значений амплитуды давления на излучателе  $p_0$ : 0.06 МПа (а, z, квазилинейный режим), 0.3 МПа (б, d, переходный режим), 0.6 МПа (в, e, ударноволновой режим).

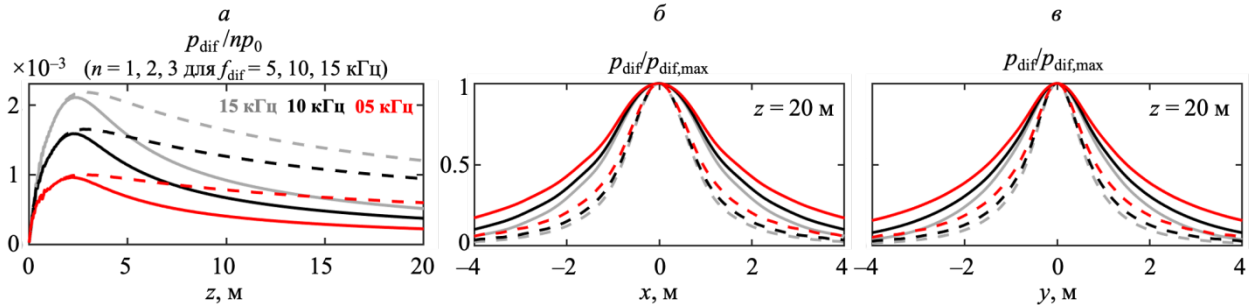
Как следует из рис. 4.2, в ударноволновых режимах распространения при  $p_0 = 0.6$  МПа поперечная структура и соответствующие свойства направленности как пучков накачки, так и пучков разностной частоты, моделируемых с помощью нелинейной модели, отличаются от предсказаний квазилинейной теории. По сравнению с квазилинейными результатами, наблюдается увеличение ширины пучка, определенной по уровню давления  $-6$  дБ, примерно в два раза. Так, для волны накачки с частотой  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц полные углы расхождения пучка увеличиваются с  $\alpha_x = 4^\circ$  и  $\alpha_y = 2.5^\circ$  в направлении осей  $x$  и  $y$  для квазилинейного подхода ( $a, z$ ) до  $\alpha_x = 5.4^\circ$  и  $\alpha_y = 3.2^\circ$  для нелинейной модели ( $в, e$ ). Аналогичное поведение наблюдается и для волны разностной частоты с  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц: в квазилинейном случае углы расхождения составляют  $\beta_x = 5.4^\circ$  и  $\beta_y = 4.8^\circ$  ( $ж, к$ ), а в ударноволновом режиме  $\beta_x = 9.6^\circ$  и  $\beta_y = 8.5^\circ$  ( $и, м$ ), соответственно. Такое уширение или аподизация пучка образуется за счет поглощения на ударных фронтах и соответствующего уменьшения амплитуды волны вблизи оси, но не на периферии пучка, где ударные фронты еще не сформировались, и пропорционально  $p_0^{1/2}$  [4]. Таким образом, в ударноволновых режимах использование квазилинейного приближения неприменимо как с точки зрения оценки амплитуды давления на оси, так и для определения свойств направленности волн накачки и волн разностной частоты.



**Рис. 4.2.** Одномерные поперечные распределения амплитуды давления на расстоянии  $z = 20$  м от излучателя для волны накачки с  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц ( $a-e$ ) и волны разностной частоты волны с  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц ( $ж-м$ ) для нелинейной модели (красные сплошные кривые) и квазилинейной модели (черные кривые) для 3 значений начального давления  $p_0$ : 0.06 МПа ( $a, z, ж, к$ ); 0.3 МПа ( $б, д, з, л$ ); 0.6 МПа ( $в, е, и, м$ ).

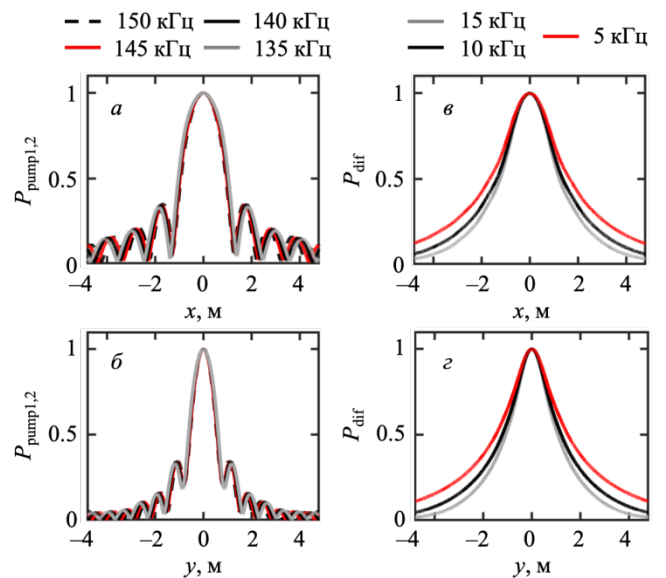
На рисунке 4.3 представлены одномерные безразмерные распределения амплитуды давления ВРЧ для различных  $f_{\text{dif}}$  в сильно нелинейном режиме работы параметрического

излучателя ( $p_0 = 0.6$  МПа) для полного нелинейного (сплошные кривые) и квазилинейного (штриховые кривые) моделирования. Как следует из рисунка, в ударноволновых режимах распространения волн эффект аподизации пучков ВРЧ примерно в 1.5–2 раза наблюдается для всех значений разностной частоты.



**Рис. 4.3.** *a* – осевые безразмерные распределения амплитуды давления волны разностной частоты в сильно нелинейном (сплошные линии) и квазилинейном (штриховые линии) режимах; *б* и *в* – поперечные, нормированные на максимальные значения распределения давления по осям  $x$  и  $y$  при  $z = 20$  м.

Далее проанализируем подробнее свойства направленности пучков волн накачки и разностной частоты для амплитуды давления на излучателе  $p_0 = 0.6$  МПа, что соответствует ударноволновому режиму его работы. Поперечные распределения амплитуд волн накачки по осям  $x$  и  $y$  для частот  $f_{\text{pump}1} = 150$  кГц (черная штриховая кривая) и  $f_{\text{pump}2} = 145$  кГц (красная сплошная кривая), 140 кГц (черная сплошная кривая), 135 кГц (серая сплошная кривая) показаны на рис. 4.4, *a–б*. Распределения нормированы на соответствующие максимальные значения. Полные углы расхождения пучков накачки в направлениях осей  $x$  и  $y$ , рассчитанные на расстоянии  $z = 20$  м

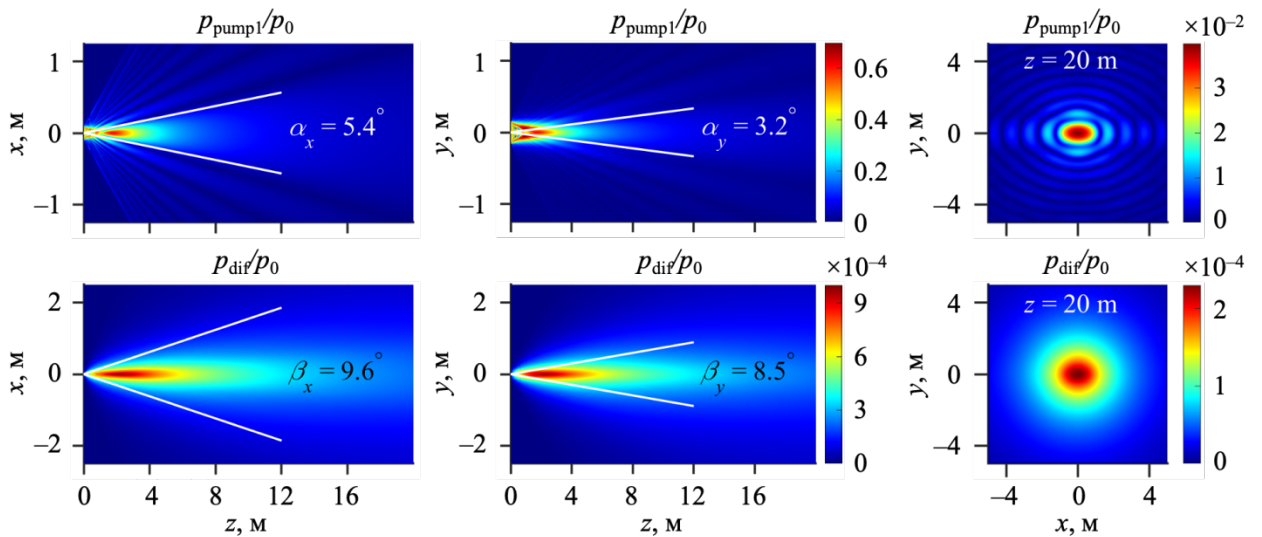


**Рис. 4.4.** Поперечные распределения для волн накачки с  $f_{\text{pump}1} = 150$  кГц и  $f_{\text{pump}2} = 145$  кГц, 140 кГц, 135 кГц (*a–б*) и волн разностной частоты с  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц, 10 кГц, 15 кГц (*в–з*). Все распределения нормированы на соответствующие максимальные значения, оси ординат обозначены как:  $P_{\text{pump}1,2} = p_{\text{pump}1,2}/p_{\text{pump}1,2,\text{max}}$  и  $P_{\text{dif}} = p_{\text{dif}}/p_{\text{dif,max}}$ .

по уровню –6 дБ относительно максимальной амплитуды давления, составили  $\alpha_x = 5.4^\circ$  и  $\alpha_y = 3.2^\circ$  для волны накачки с частотой  $f_{\text{pump}1} = 150$  кГц и отличаются менее, чем на  $0.5^\circ$ , для всех значений  $f_{\text{pump}2}$ , поскольку частоты волн накачки достаточно близки.

Соответствующие нормированные поперечные распределения амплитуд давления ВРЧ с частотами  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц (красная кривая), 10 кГц (черная кривая) и 15 кГц (серая кривая) показаны на рис. 4.4, в–г. Чем больше величина разностной частоты, тем сильнее направленность пучка, которая составляет для этого набора частот  $\beta_x = 9.6^\circ, 8.2^\circ, 7.3^\circ$  в направлении оси  $x$  и  $\beta_y = 8.5^\circ, 7.2^\circ, 6.4^\circ$  в направлении оси  $y$ , соответственно. Более высокая направленность на более высоких частотах обусловлена ослаблением дифракционных эффектов. Отметим, что углы расхождения пучков волн разностной частоты более сглажены в направлениях осей  $x$  и  $y$  по сравнению с пучками волн накачки. Это связано с тем, что генерация ВРЧ продолжается и после того, как пучки накачки дифрагируют по оси  $x$  (наименьший размер эллиптической антенной решетки), но еще не дифрагируют в направлении оси  $y$ .

На рисунке 4.5 представлены двумерные поперечные и осевые распределения для волны накачки  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц (первый ряд) и волны разностной частоты  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц (второй ряд) для ударноволнового режима  $p_0 = 0.6$  МПа. Двумерные распределения также демонстрируют высокую направленность, как пучков накачки, так и пучков разностной частоты, а также отличительную особенность низкочастотного излучения – отсутствие боковых лепестков и более равномерное поперечное распределение, которое более близко к радиально-симметричной форме, чем поперечное распределение для волн накачки.



**Рис. 4.5.** Двумерные поперечные распределения при  $z = 20$  м и продольные распределения в плоскостях  $(x, z)$  и  $(y, z)$  амплитуды давления для волны накачки с  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц (первый ряд) и волны разностной частоты с  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц (второй ряд), рассчитанные с использованием нелинейной модели в ударноволновом режиме  $p_0 = 0.6$  МПа.

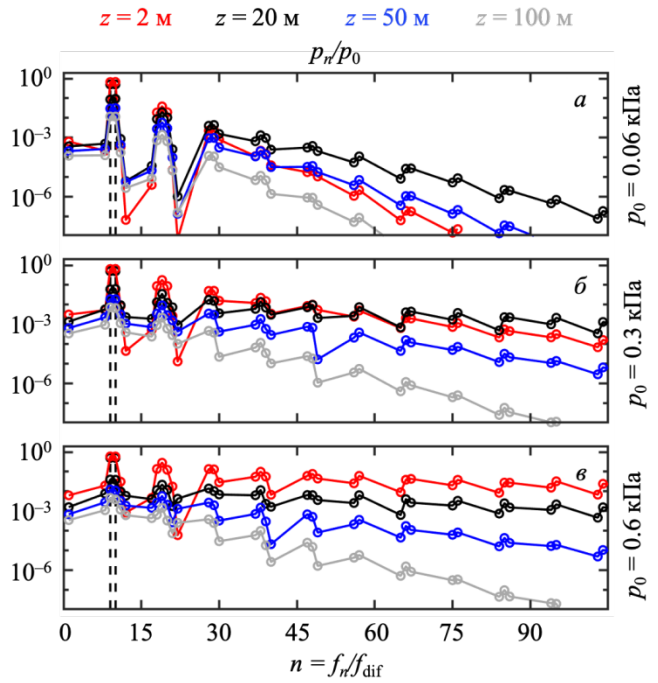
#### 4.2.2 Профили и спектры нелинейной волны в различных режимах распространения

Как обсуждалось ранее, нелинейный оператор в системе уравнений (4.1) рассчитывался с использованием метода прореживания спектра. Этот подход эффективно уменьшает количество спектральных составляющих и уравнений, участвующих в численном моделировании.

На рисунке 4.6 представлены амплитуды первых 36 спектральных компонент нелинейной волны, смоделированной с учетом  $N = 50$  гармоник (наивысшая частота  $f = 189f_{\text{dif}}$ ,  $f_{\text{dif}} = 15$  кГц,  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц и  $f_{\text{pump2}} = 135$  кГц), как функция номеров гармоник  $n = f/f_{\text{dif}}$ , на нескольких расстояниях:  $z = 0$  (штриховые вертикальные черные линии),  $z = 2$  м (красные кривые),  $z = 20$  м (черные кривые),  $z = 50$  м (синие кривые) и  $z = 100$  м (серые кривые). Три представленных режима соответствуют трем амplitудам давлениям в источнике: квазилинейный режим при амплитуде давления на излучателе  $p_0 = 0.06$  МПа (а), переходной режим  $p_0 = 0.3$  МПа (б) и ударноволновой режим  $p_0 = 0.6$  МПа (в).

Сначала на расстоянии  $z = 0$  спектр состоит из двух частот накачки  $f_{\text{pump1}}$  и  $f_{\text{pump2}}$  (изображены двумя вертикальными штриховыми линиями на рис. 4.6), затем происходит генерация гармоник вверх и вниз по спектру, включая генерацию ВРЧ. Впоследствии, при  $z > 0$  полный спектр будет состоять из последовательности чередующихся пиков, состоящих из нескольких высокоамплитудных гармоник волн накачки и их комбинационных частот, а также комбинационных составляющих меньшей амплитуды, расположенных между пиками.

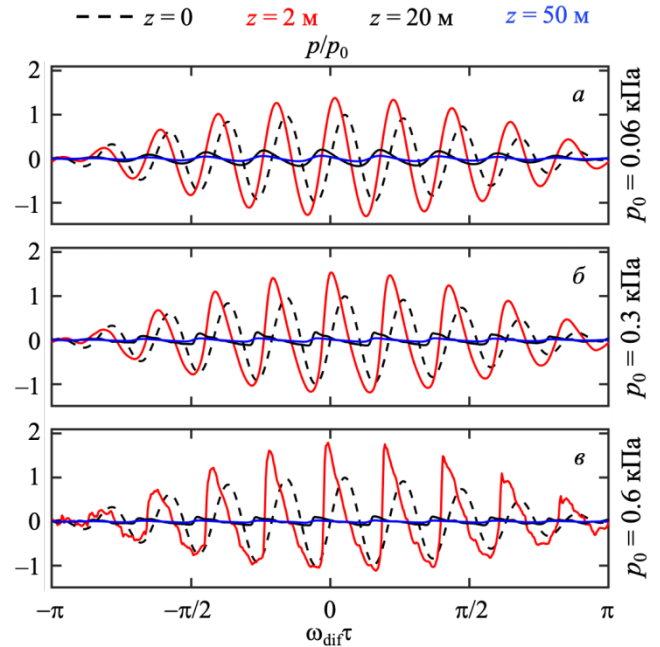
Метод частотной фильтрации сохраняет в нелинейном алгоритме только разностную частоту, волны накачки и несколько спектральных составляющих с высокой амплитудой, окружающих каждый пик. Количество пиков и всех гармонических составляющих (здесь  $N = 50$ ) определяется выбранным порогом давления при фильтрации. Спектры,



**Рис. 4.6.** Спектры нелинейной волны для двухчастотного взаимодействия волн накачки с частотами  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц и  $f_{\text{pump2}} = 135$  кГц ( $f_{\text{dif}} = 15$  кГц) на расстояниях  $z = 0$  (вертикальные штриховые черные линии),  $z = 2$  м, 20 м, 50 м и 100 м: квазилинейный режим при амплитуде давления на излучателе  $p_0 = 0.06$  МПа (а), переходной режим  $p_0 = 0.3$  МПа (б) и ударноволновой режим  $p_0 = 0.6$  МПа (в).

представленные на рис. 4.6, *a*, соответствуют квазилинейному режиму, когда высокие частоты генерируются только на больших расстояниях ( $z = 20$  м) по сравнению с режимом образования ударных волн (рис. 4.6, *в*), где обогащенный гармониками спектр уже наблюдается в ближней зоне, на расстоянии  $z = 2$  м.

На рис. 4.7 показан один период профилей, восстановленных по спектрам, представленным на рис. 4.6, на дистанциях  $z = 0$  (черные штриховые кривые),  $z = 2$  м (красные кривые),  $z = 20$  м (черные кривые) и  $z = 50$  м (синие кривые); значения давления на излучателе составляют  $p_0 = 0.06$  МПа (*a*),  $p_0 = 0.3$  МПа (*б*) и  $p_0 = 0.6$  МПа (*в*). При распространении волн комбинированные эффекты дифракционных и нелинейных искажений приводят к образованию асимметричной пилообразной формы. Хорошо заметные искусственные осцилляции присутствуют в решениях для  $z > 0$  на рис. 4.7, *в* и возникают из-за эффекта отражения частот, наблюдаемого в спектрах с ограниченным числом гармоник вплоть до  $18f_{\text{pump1}}$ . Такие осцилляции отсутствуют в квазилинейном случае (рис. 4.7, *a*) и слабо заметны в переходном режиме на рис. 4.7, *б*. Однако, как было продемонстрировано в одномерной нелинейной задаче с использованием алгоритма прореживания спектра, несмотря на то что как спектры, так и профили сигналов искусственно искажаются, такое поведение оказывает незначительное влияние на поле волны разностной частоты.



**Рис. 4.7.** Один низкочастотный период профиля волны для двухчастотного взаимодействия волн накачки с частотами  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц и  $f_{\text{pump2}} = 135$  кГц ( $f_{\text{dif}} = 15$  кГц) на расстояниях  $z = 0, 2$  м,  $20$  м и  $50$  м: квазилинейный режим при амплитуде давления на излучателе  $p_0 = 0.06$  МПа (*a*), переходной режим  $p_0 = 0.3$  МПа (*б*) и ударноволновой режим  $p_0 = 0.6$  МПа (*в*).

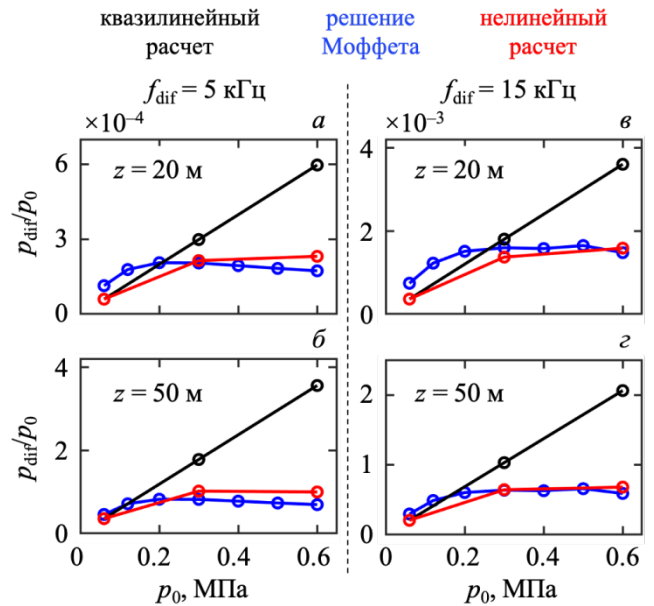
### § 4.3 Эффективность генерации волны разностной частоты

Важной характеристикой работы параметрического излучателя является его эффективность. Одним из показателей эффективности может служить зависимость амплитуды волны разностной частоты на оси пучка от амплитуды давления на излучателе на различных расстояниях. На рис. 4.8 приводится график такой зависимости на расстояниях  $z = 20$  м и  $50$  м, рассчитанной для трех моделей: решения Моффета (синяя

кривая), квазилинейный подход (черная кривая) и нелинейная модель (красная кривая). Нелинейное аналитическое решение Моффетта [75], подробно описанное в главе 1, домножалось на дополнительный коэффициент  $S/DL$  ( $D$  и  $L$  – размеры антенны) для компенсации разницы площадей эллипсовидного [21] и прямоугольного излучателей, где  $S = 0.04352 \text{ м}^2$  – площадь антенной решетки [21].

Как показано на рис. 4.8, численные решения, полученные с помощью квазилинейной и нелинейной моделей, как и ожидалось, хорошо согласуются при низких начальных давлениях на излучателе  $p_0$ . При этом в квазилинейной модели эффективность линейно возрастает с увеличением  $p_0$  [4], а в нелинейной модели она сначала растет линейно, а затем насыщается при условиях, близких к условиям формирования ударных фронтов в профиле волны. Решение Моффетта [75] на всех расстояниях имеет максимум при  $p_0 = 0.2 \text{ МПа}$ , когда возникает режим, близкий к образованию ударных волн в профиле нелинейной волны, т.е.  $l_{d,x} < l_{sh} < l_{d,y}$ , и немного уменьшается с дальнейшим увеличением  $p_0$  из-за нелинейного поглощения на разрывах, однако такого уменьшения эффективности не наблюдается для нелинейной численной модели. Следовательно, наиболее эффективная параметрическая генерация соответствует амплитудам на излучателе, близким к условиям формирования ударных фронтов в пучке и превышающим их. Абсолютное значение амплитуды давления разностной частоты на оси пучка в режиме насыщения будет линейно возрастать с увеличением  $p_0$ .

Другим показателем эффективности может служить процент от общей мощности, трансформируемой от волн накачки в ВРЧ. Этот процент увеличивается с увеличением мощности излучателя без эффекта насыщения. Для наибольшего значения  $f_{\text{dif}} = 15 \text{ кГц}$  при  $z = 50 \text{ м}$  такой коэффициент передачи составляет 0.002%, 0.03% и 0.05% от общей начальной мощности волн накачки, которая составляла 0.023 кВт, 0.58 кВт и 2.3 кВт для  $p_0 = 0.06 \text{ МПа}$ ,  $p_0 = 0.3 \text{ МПа}$  и  $p_0 = 0.6 \text{ МПа}$ , соответственно.



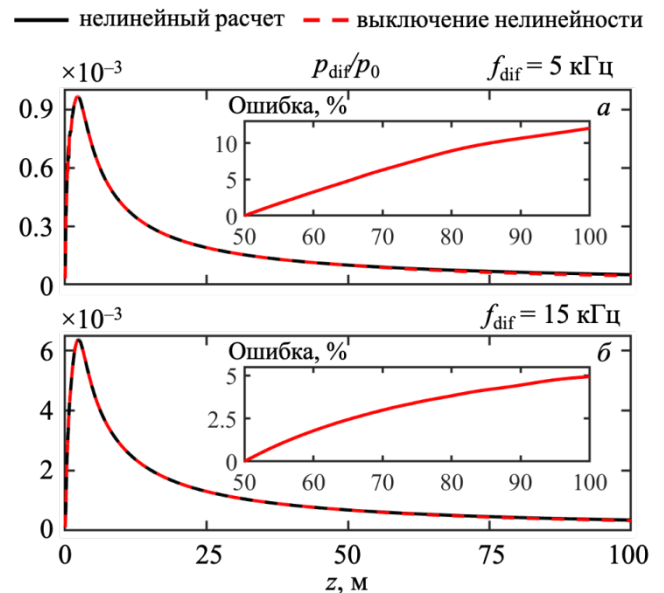
**Рис. 4.8.** Эффективность генерации волны разностной частоты параметрическим излучателем на расстояниях  $z = 20 \text{ м}$  и  $50 \text{ м}$  для 3 моделей: решение Моффетта, квазилинейный подход и нелинейная модель:  $f_{\text{dif}} = 5 \text{ кГц}$  (а, б) и  $f_{\text{dif}} = 15 \text{ кГц}$  (в, г).



Наконец, были определены расстояния, на которых прекращается генерация ВРЧ и после которых можно рассматривать дальнейшее распространение низкочастотной составляющей с использованием линейных моделей. Для этого было рассчитано поле давления ВРЧ с искусственным отключением нелинейности на расстоянии  $z = z^*$  и проведено сравнение со случаем нелинейного моделирования до конечной дистанции, большей, чем  $z^*$ .

Результаты расчетов амплитуд давления волны разностной частоты на оси пучка, нормированных на максимальное начальное давление  $p_0 = 0.6$  МПа, для разностных частот  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц и 15 кГц и выбранной дистанции  $z^* = 50$  м представлены на рис. 4.9. На вставках к рис. 4.9, (а–б) сплошными красными кривыми представлена ошибка в расчетах с искусственно отключенной нелинейностью по сравнению с нелинейным моделированием до конечной дистанции 100 м. Из рис. 4.9 следует, что такая ошибка при расчетах до  $z = 100$  м составляет не более 12% для  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц (рис. 4.9, а) и не более 5% для  $f_{\text{dif}} = 15$  кГц (рис. 4.9, б). Эта разница между решениями при  $z = 100$  м не превышает 3% для обоих значений  $f_{\text{dif}}$ , если нелинейность искусственно выключается при  $z^* = 75$  м.

Сравнение таких моделей показывает, что поглощение в воде (длина поглощения составляет 170 м для частот накачки), несмотря на то, что оно было увеличено в десять раз по сравнению с литературными данными, все еще оказывается слабым, чтобы значительно уменьшить амплитуду волн накачки и, таким образом, подавить параметрические эффекты на расстоянии до 100 м от излучателя. Таким образом, генерация волны разностной частоты продолжается на расстояниях, значительно превышающих дифракционные длины волн накачки в обоих поперечных направлениях, то есть, когда пучки накачки расходятся по сферическому закону [4].



**Рис. 4.9.** Осевые распределения амплитуды давления волны разностной частоты с  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц (а) и 15 кГц (б), нормированные на  $p_0 = 0.6$  МПа: нелинейный расчет до  $z = 100$  м (сплошная черная кривая) и с искусственным отключением нелинейности при  $z^* = 50$  м (штриховая красная кривая). На вставках показана ошибка между расчетом с искусственно отключенной нелинейностью по сравнению с нелинейным моделированием до  $z = 100$  м.

#### § 4.4 Выводы к четвертой главе

В этой главе представлен трехмерный алгоритм решения уравнения ХЗК для моделирования параметрических взаимодействий в дифрагирующем пучке двух интенсивных высокочастотных волн накачки. Была использована полностью нелинейная постановка задачи с оптимизированным спектральным алгоритмом для вычисления нелинейного оператора при сохранении только заранее заданных спектральных составляющих, амплитуды которых выше некоторых пороговых значений, что делает расчет трехмерной нелинейной задачи практически реализуемым.

Разработанный алгоритм позволяет моделировать нелинейные взаимодействия с произвольным соотношением между частотами накачки и генерируемой разностной частотой, в условиях образования ударных волн при слабом линейном поглощении. При численном моделировании с сохранением в алгоритме  $N = 50$  спектральных компонент потребовалось 12 Гб оперативной памяти для хранения массивов полей давления, а процессорное время расчетов до 100 м составило около 65 часов на высокопроизводительном сервере Supermicro SERVER SYS-6028R-TR. Однако без частотной фильтрации количество спектральных составляющих увеличилось бы до  $N_{\max} = 2500-7500$ , то есть в 50–150 раз, а время расчета возросло бы квадратично, и такое моделирование оказалось бы невозможным как с точки зрения времени работы алгоритма, так и с точки зрения требуемой памяти.

Было показано, что в ударноволновых режимах работы параметрического излучателя решение задачи о генерации акустической волны разностной частоты в нелинейной постановке отличается от результатов, полученных в квазилинейном приближении, в двух основных аспектах. Во-первых, с увеличением расстояния распространения наблюдается дополнительное уменьшение нормированных на давление на излучателе амплитуд как волн накачки, так и ВРЧ на оси пучка из-за нелинейного поглощения и передачи энергии от частот накачки к их высшим гармоникам и комбинационным составляющим. Однако эффекты нелинейного поглощения, обусловленные образованием разрывов в профиле волны, сначала проявляются вблизи оси пучка, где амплитуда наиболее высока, а не на периферии. Это приводит к сглаживанию распределений поля давления волны разностной частоты, что объясняет второе различие между предсказаниями нелинейной модели и результатами квазилинейной теории. Сильные нелинейные эффекты приводят к примерно двукратному увеличению углов расхождения пучков, что наблюдается как для волн накачки, так и для ВРЧ в дальнем поле.

Получено, что генерируемые пучки разностной частоты расходятся сильнее, чем пучки высокочастотных волн накачки, при этом для рассматриваемого излучателя эллипсоидальной формы пучок на разностной частоте более радиально симметричный, чем пучки волн накачки, поскольку низкочастотная составляющая генерируется постепенно вдоль направления распространения волн накачки, что часто упоминается в литературе как сходство с принципом антенны бегущей волны [1–3].

Эффективность параметрических излучателей является важным показателем, когда обсуждается использование принципа параметрической генерации низкочастотного излучения в том или ином практическом приложении. Было рассмотрено две метрики эффективности. Так, для наибольшего значения величины разностной частоты (15 кГц) максимальное отношение амплитуды давления ВРЧ к начальной амплитуде давления волн накачки достигает 0.66% на оси пучка, когда начинают формироваться разрывы. Однако, поскольку такой безразмерный показатель эффективности насыщается при увеличении давления на излучателе, амплитуда волны разностной частоты сама по себе линейно возрастает с ростом давления на излучателе. Этот эффект дополняет результаты хорошо известной полуаналитической нелинейной модели [75], которая предсказывает наибольшую эффективность при условиях, близких к разрывным, и ее медленное снижение при более высоких значениях начальных давлений.

Другим важным показателем эффективности параметрического излучателя является процент от общей мощности, переходящей к пучку разностной частоты от мощности накачки. Было получено, что такая эффективность возрастает с увеличением общей мощности на излучателе без эффекта насыщения: например, для волны разностной частоты 15 кГц на расстоянии 50 м от источника она составляет 0.002%, 0.03% и 0.05% от общей начальной мощности волн накачки в квазилинейном ( $p_0 = 0.06$  МПа), переходном ( $p_0 = 0.3$  МПа) и ударноволновом ( $p_0 = 0.6$  МПа) режимах, соответственно. Следовательно, эффективность передачи энергии возрастает с увеличением мощности волн накачки.

Таким образом, показано, что, с точки зрения обеих метрик, генерация низкочастотного излучения на разностной частоте происходит эффективнее при больших начальных давлениях и, следовательно, мощностях на параметрическом излучателе, при которых реализуются сильно нелинейные режимы распространения волн, что существенно отличается от поведения высших гармоник, амплитуды которых насыщаются с ростом давления на излучателе. Однако, как было показано выше, повышение эффективности параметрических взаимодействий при высоких уровнях исходной мощности и в режимах формирования ударных фронтов сопровождается уширением диаграммы направленности пучков разностной частоты. Поэтому,

нелинейный трехмерный подход может помочь в поиске оптимизированных параметров излучения волн накачки с целью увеличения выходной мощности на разностной частоте при сохранении желаемой направленности низкочастотного пучка.

## Глава 5

### ОСОБЕННОСТИ ГЕНЕРАЦИИ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ РАЗНОСТНОЙ ЧАСТОТЫ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ НА ПРИМЕРЕ МЕЛКОВОДНОГО АКУСТИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

*В данной главе используются материалы, опубликованные в трудах конференции «XXXVI сессия РАО».*

Заключительная глава настоящей диссертации посвящена исследованию процессов генерации и распространения низкочастотного излучения на разностной частоте, формируемого бигармонической накачкой, в плоском неоднородном мелководном акустическом волноводе. Известно, что распространение акустических волн в водном слое в присутствии границ на дне и поверхности отличается от распространения в свободном пространстве. Это проявляется в наличии многократных отражений от границ как волн накачки, так и волны разностной частоты, и модовой структуре акустических полей, и как следствие, необходимости учета взаимодействий между всеми отраженными волнами.

В линейных задачах распространения низкочастотного звука в водной среде широко используется модовое представление поля в 3D, и численно решается система модовых параболических уравнений, позволяя получить решение для поля акустического давления при гармоническом [121] и импульсном [122] начальном возбуждении среды.

В задачах нелинейной акустики при исследовании параметрических взаимодействий в мелком море удобным инструментом для получения акустических полей является, например, неоднородное уравнение ХЗК [123] с соответствующими граничными условиями на дне и поверхности волновода. На основе решения уравнения ХЗК в квазилинейном приближении аналитически были исследованы особенности распространения волны разностной частоты и модовая структура решения, например, в случае гауссовского распределения на излучателе недифрагирующих волн накачки для однородного волновода с жесткой и мягкой, а также с двумя мягкими границами [81]. Влияние неоднородностей среды на поле ВРЧ оценивалось для линзоподобных сред путем сведения неоднородной задачи с параболическим профилем скорости звука к распространению в эквивалентной однородной среде в различных режимах работы параметрического излучателя с некоторыми допущениями при задании геометрии расхождения пучков накачки, как и в задачах для свободного пространства [82]. Кроме того, были получены приближенные квазилинейные аналитические решения для произвольной ориентации слабо дифрагирующего пучка накачки относительно оси волновода [83].

Несмотря на то, что формирование и распространение волны разностной частоты в условиях мелкого моря было неоднократно исследовано аналитически, хотя и с учетом ряда упрощений задачи, это позволило изучить физику параметрических процессов при волноводном распространении и выявить ряд важных особенностей относительно распространения волн в безграничном пространстве. Тем не менее, стоит отметить, что численное моделирование решения уравнения ХЗК позволяет получить более точные результаты, в том числе и в режимах сильного проявления нелинейности среды, что практически невозможно учесть аналитически, а также рассмотреть различные типы границ и неоднородностей среды при описании работы реалистичных параметрических излучателей сложной формы.

### § 5.1 Уравнение Хохлова-Заболотской-Кузнецова в неоднородной среде

Запишем уравнение типа ХЗК, описывающее параметрические процессы в средах со скалярными неоднородностями скорости звука  $c$ , которым соответствует последнее слагаемое в уравнении (5.1), в бегущей системе координат в среде с равновесной скоростью звука  $c_0$  [123]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau \partial z} = \frac{c_0}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + \frac{\beta}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2} + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} + \frac{c - c_0}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}. \quad (5.1)$$

Уравнение (5.1), аналогично главам 3 и 4, решалось численно в спектральном представлении согласно алгоритмам (3.5) в квазилинейном приближении и (4.2) в полной нелинейной постановке для амплитуд спектральных компонент  $p_n$ , обобщаемым на случай неоднородной среды в виде (5.2) и (5.3), соответственно:

$$\begin{cases} \frac{\partial p_{\text{pump1}}}{\partial z} = \frac{c_0}{2i\omega_{\text{pump1}}} \left( \frac{\partial^2 p_{\text{pump1}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_{\text{pump1}}}{\partial y^2} \right) - \frac{\delta \omega_{\text{pump1}}^2}{2c_0^3} p_{\text{pump1}} + i\omega_{\text{pump1}} \frac{c - c_0}{c_0^2} p_{\text{pump1}} \\ \frac{\partial p_{\text{pump2}}}{\partial z} = \frac{c_0}{2i\omega_{\text{pump2}}} \left( \frac{\partial^2 p_{\text{pump2}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_{\text{pump2}}}{\partial y^2} \right) - \frac{\delta \omega_{\text{pump2}}^2}{2c_0^3} p_{\text{pump2}} + i\omega_{\text{pump2}} \frac{c - c_0}{c_0^2} p_{\text{pump2}} \\ \frac{\partial p_{\text{dif}}}{\partial z} = \frac{c_0}{2i\omega_{\text{dif}}} \left( \frac{\partial^2 p_{\text{dif}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_{\text{dif}}}{\partial y^2} \right) - \frac{\delta \omega_{\text{dif}}^2}{2c_0^3} p_{\text{dif}} + i\omega_{\text{dif}} \frac{c - c_0}{c_0^2} p_{\text{dif}} + \frac{i\beta \omega_{\text{dif}}}{2c_0^3 \rho_0} p_{\text{pump1}} p_{\text{pump2}}^* \end{cases}, \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_n}{\partial z} = & \frac{c_0}{2in\omega_{\text{dif}}} \left( \frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_n}{\partial y^2} \right) - \frac{\delta n^2 \omega_{\text{dif}}^2}{2c_0^3} p_n + in\omega_{\text{dif}} \frac{c - c_0}{c_0^2} p_n + \\ & + \frac{i\beta n \omega_{\text{dif}}}{c_0^3 \rho_0} \left( \sum_{m=1}^{N_{\text{max}}-n} p_m^* p_{n+m} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} p_m p_{n-m} \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

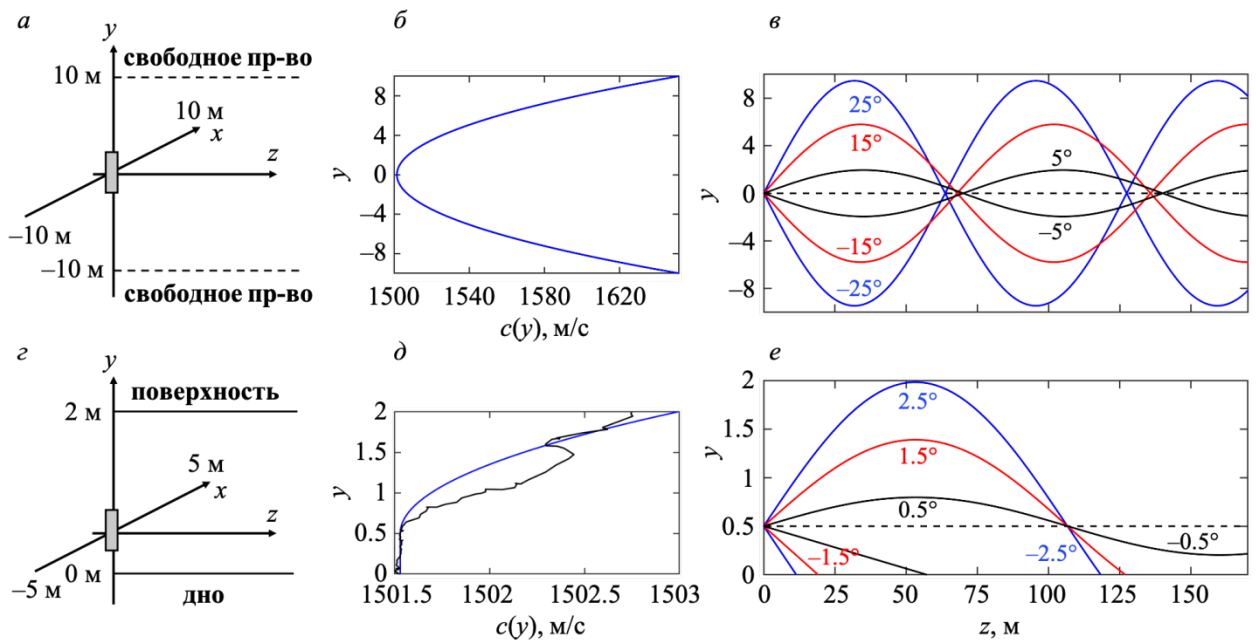
Действие оператора поглощения  $L_A$  для каждой гармоники  $p_n$  в (3.5) и (4.2) заменялось на совместный учет диссипативных эффектов и наличия пространственных неоднородностей скорости звука (при необходимости) посредством действия оператора

$L_{A+Inh}$ , для расчета которого, например, на полном шаге  $\Delta z$  использовалось точное аналитическое экспоненциальное решение [56]:

$$p_n(z + \Delta z) = p_n(z) \exp\left(-\frac{\delta n^2 \omega_{\text{dif}}^2}{2c_0^3} \Delta z + i n \omega_{\text{dif}} \frac{c - c_0}{c_0^2} \Delta z\right). \quad (5.4)$$

### 5.1.1 Модели неоднородных сред и границ

Численное моделирование полей волн накачки и волны разностной частоты проводилось на примере нескольких моделей неоднородной среды. Предварительно рассчитывалось распространение волн в свободном однородном пространстве в обоих направлениях  $x$  и  $y$  (рис. 5.1, а) с постоянной скоростью звука по глубине  $c(y) = c_0 = 1501.53$  м/с, взятой из данных эксперимента для подводного параметрического излучателя в мелководном акустическом волноводе глубиной около двух метров [21]. При расчете дифракционного оператора в свободном пространстве на границах прямоугольной численной сетки ставились поглощающие слои PML для уменьшения побочных отражений, как и в главах 3–4.



**Рис. 5.1.** Два типа рассматриваемых границ (а, с) с соответствующими профилями скорости звука  $c(y)$  при наличии неоднородностей: параболический профиль скорости  $c(y)$  в свободном пространстве (б) и полупараболическая аппроксимация экспериментальной кривой в волноводе (д), а также геометрия лучей для рассматриваемы типов ПЗК (е, е).

Далее рассматривалось распространение в свободном пространстве при наличии подводного звукового канала (ПЗК) с симметричным параболическим профилем скорости звука  $c(y) = c_0 + b_{\text{симм}} y^2$  (рис. 5.1, б), где коэффициент  $b_{\text{симм}} = 1.5$  (мс)<sup>-1</sup> выбирался из условия, чтобы большинство лучей волн накачки в плоскости  $(y, z)$ , выходящих под

углами до  $\pm 25^\circ$  к направлению распространения  $z$ , траектории которых были рассчитаны аналитически согласно лучевой теории [124], оставались внутри выбранного окна  $\pm 10$  метров (рис. 5.1, в).

Также было исследовано распространение ВРЧ в изоскоростном ( $c_0 = 1501.53$  м/с) мелководном акустическом волноводе глубиной 2 м с мягкими границами на дне и поверхности по направлению  $y$  (т. е. при  $y = 0$  м и  $y = 2$  м выполнялось условие нулевого давления) с излучателем, расположенным на расстоянии 50 см от дна [21] (рис. 5.1, з).

В неоднородной модели такого волновода гладкий полупараболический профиль скорости звука  $c(y)$  в численном моделировании (рис. 5.1, д, синяя кривая) был получен путем аппроксимации изрезанной экспериментальной кривой (рис. 5.1, д, черная кривая) следующим образом: при  $y \leq 50$  см скорость звука  $c(y) = c_0$ , а при  $y > 50$  см экспериментальная зависимость аппроксимировалась параболой  $c(y) = c_0 + b_{\text{экс}} y^2$  с найденным методом наименьших квадратов коэффициентом  $b_{\text{экс}} = 0.65$  (мс) $^{-1}$ . Соответствующие такому профилю  $c(y)$  траектории лучей в плоскости  $(y, z)$  приведены на рис. 5.1, е. В этом случае внутри волновода (при  $y > 50$  см) удерживаются только лучи, выходящие под углом менее  $2.5^\circ$  к оси  $z$ .

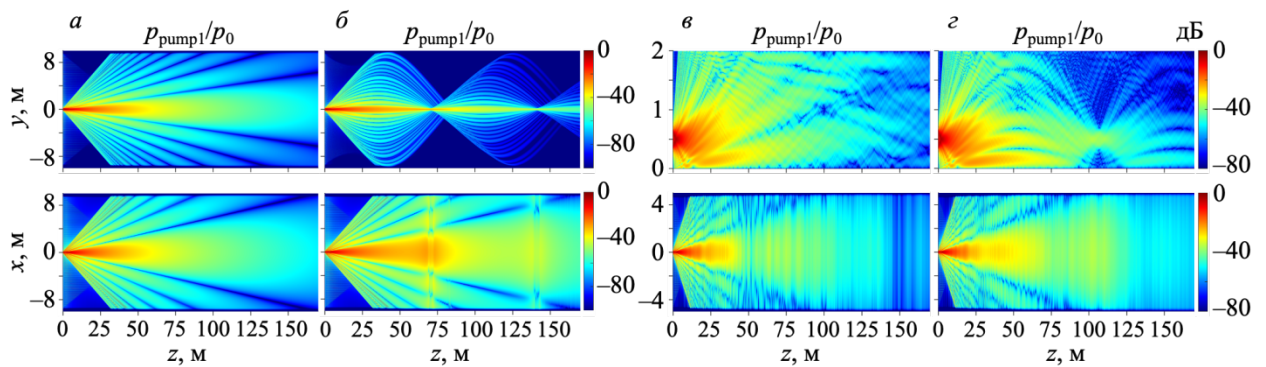
## § 5.2 Квазилинейное моделирование

При моделировании параметрических процессов в квазилинейном режиме работы параметрического излучателя согласно алгоритму (5.2) были взяты следующие параметры задачи: начальное давление на излучателе, работающем в таком режиме, составило  $p_0 = 0.06$  МПа, а коэффициент поглощения в этой главе был увеличен в 30 раз относительно табличного значения  $\delta_{\text{табл}} = 4.42 \times 10^{-6}$  м $^2$ /с [114] для иллюстрации параметрических эффектов на меньших расстояниях с целью уменьшения времени расчетов и составил  $\delta = 13 \times 10^{-5}$  м $^2$ /с. Тогда характерные масштабы задачи: длина нелинейности для высокочастотной волны накачки  $l_{\text{sh}} = 17$  м, длины дифракции  $l_{d,x} = 2.5$ – $2.8$  м и  $l_{d,y} = 7.1$ – $7.9$  м для волн накачки с частотами  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц и  $f_{\text{pump2}} = 145$  (140, 135) кГц, длина поглощения волны накачки с наибольшей частотой  $l_{\text{abs,pump1}} = 57$  м (все еще режим слабого линейного поглощения).

На рисунке 5.2 представлены результаты численного моделирования полей волн накачки, демонстрирующие классические отличия в распространении волн в неоднородных средах и/или в присутствии мягких границ относительно свободного однородного пространства (рис. 5.2, а). Приведены двумерные пространственные распределения на примере волны накачки с частотой  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц в квазилинейном режиме работы параметрического излучателя для описанных в п. 5.1.1 четырех моделей.



Как следует из рис. 5.2, наличие ПЗК (рис. 5.2, б) локализует высокочастотное излучение в сердцевине канала, увеличивая дистанцию его распространения. Так, на расстоянии  $z = 170$  м ( $3l_{\text{abs,pump1}}$ ) безразмерный уровень сигнала на оси излучателя в ПЗК на 9 дБ выше, чем в свободном пространстве. Отметим, что распределение поля давления в плоскости  $(y, z)$  повторяет поведение лучей с их фокусировкой на оси канала на расстояниях порядка 64–70 м (рис. 5.1, в). При этом лучи, выходящие под большими углами к оси излучателя в плоскости  $(y, z)$ , приходят в эту область не в фазе, что приводит к достаточно протяженной зоне фокусировки длиной около 6 м и проявляется рябью в распределении поля давления волны накачки в плоскости  $(x, z)$ .

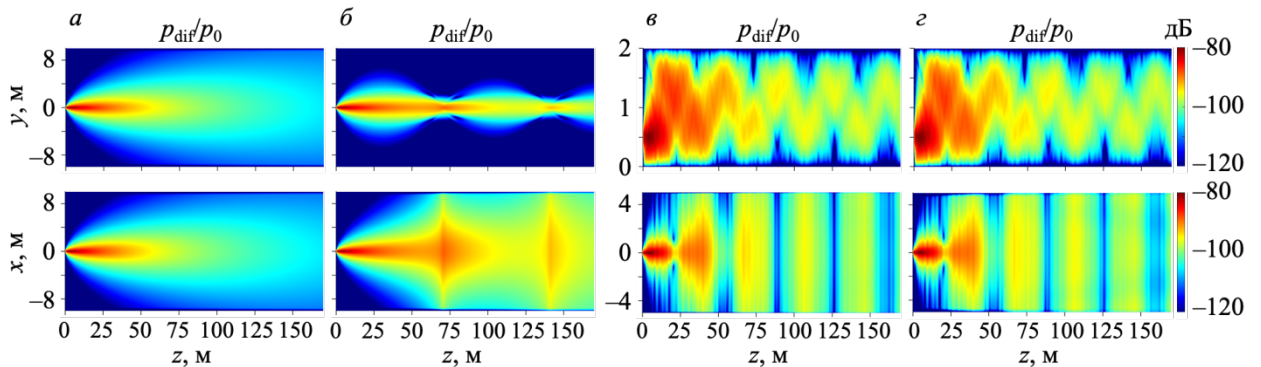


**Рис. 5.2.** Пространственные распределения поля волны накачки с частотой  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц при распространении в различных средах: свободное однородное (а) и неоднородное (б) пространство; однородный (в) и неоднородный (г) волновод;  $p_0 = 0.06$  МПа.

В присутствии границ (рис. 5.2, в) поле давления волны накачки претерпевает многократные отражения от дна и поверхности в плоскости  $(y, z)$ , что проявляется в немонотонности распределения поля в плоскости  $(x, z)$ , взятого при  $y = 0.5$  м (координата центра излучателя). При учете пространственных неоднородностей (рис. 5.2, г), помимо отражений от границ, также наблюдается поворот лучей и дополнительное увеличение амплитуды давления в месте схождения лучей при  $z = 107$  м (рис. 5.1, е).

На рисунке 5.3 продемонстрированы пространственные распределения поля ВРЧ с частотой  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц. Получено, что полный угол расхождения пучка ВРЧ в направлении оси  $y$ , рассчитанный при  $z = 50$  м по уровню  $-6$  дБ от максимума давления, составляет  $5.7^\circ$  в свободном пространстве (рис. 5.3, а) и  $3.5^\circ$  в ПЗК (рис. 5.3, б). Таким образом, распространение в ПЗК увеличивает направленность НЧ излучения на разностной частоте в 1.6 раза. Поскольку дистанция распространения волн накачки в ПЗК увеличивается, это, как следствие, увеличивает и область генерации ВРЧ: так, при  $z = 170$  м безразмерный уровень сигнала ВРЧ на оси излучателя в ПЗК на 8 дБ выше, чем при распространении в свободном пространстве. Как следует из рис. 5.3, б фокусировка излучения в плоскости

$(y, z)$  приводит к изменению распределения поля и в плоскости  $(x, z)$ , построенного при  $y = 0.5$  м, как и для волны накачки. Отметим, что, в отличие от распределений поля давления волны накачки в ПЗК (рис. 5.2, б), узконаправленный пучок ВРЧ (рис. 5.3, б) фокусируется в плоскости  $(y, z)$  единым образом, и в распределении в плоскости  $(x, z)$  также наблюдается увеличение давления. Таким образом, рост интенсивности в зоне фокусировки (64–70 м) существенно расширяет область засветки сигналом заданного уровня, что характерно для узконаправленного излучения.

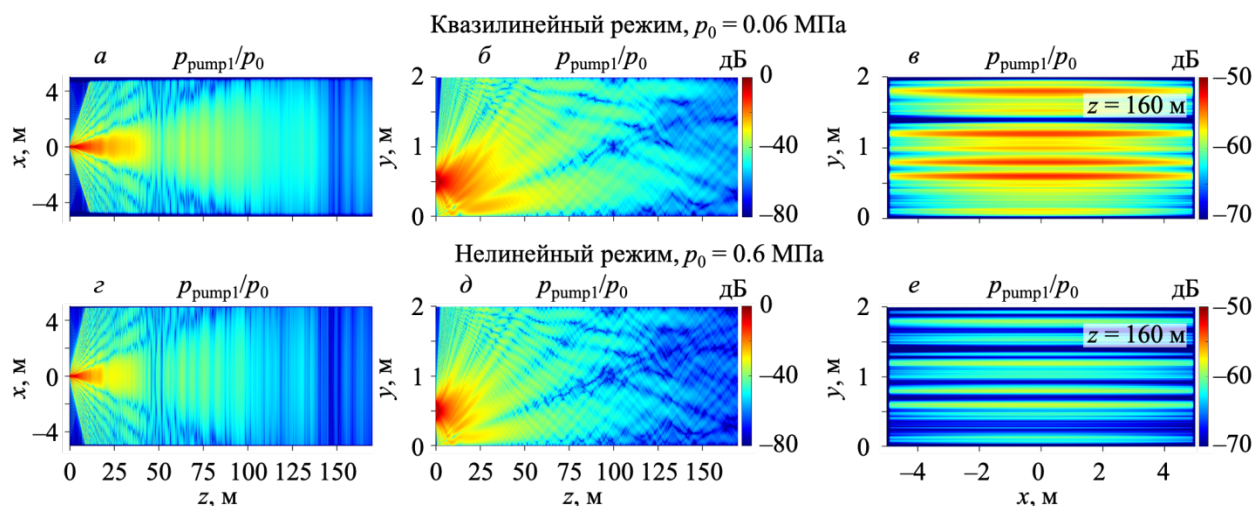


**Рис. 5.3.** Пространственные распределения поля ВРЧ с частотой  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц при распространении в различных средах: свободное однородное (а) и неоднородное (б) пространство; однородный (в) и неоднородный (г) волновод;  $p_0 = 0.06$  МПа.

При наличии мягких границ поле ВРЧ приобретает модовую структуру [124] с отражениями от дна и поверхности (рис. 5.3, в–г), качественно не меняющуюся с пройденным расстоянием  $z$ , что также способствует увеличению дальности распространения ВРЧ. При этом, в отличие от волн накачки, для ВРЧ не наблюдается существенных отличий в случае однородного (рис. 5.3, в) и неоднородного пространства (рис. 5.3, г), где вариация скорости звука с глубиной составляет  $< 0.1\%$ . Это связано с тем, что существенные отличия в поведении волн накачки в изоскоростном (рис. 5.2, в) и неоднородном (рис. 5.2, г) волноводах наблюдаются на расстояниях  $z > 50$  м (т.е. превышающих  $l_{\text{abs,pump1}}$ ), где амплитуды волн накачки уже малы из-за сказывающихся эффектов поглощения и поэтому слабо влияют на формирование НЧ излучения на разностной частоте.

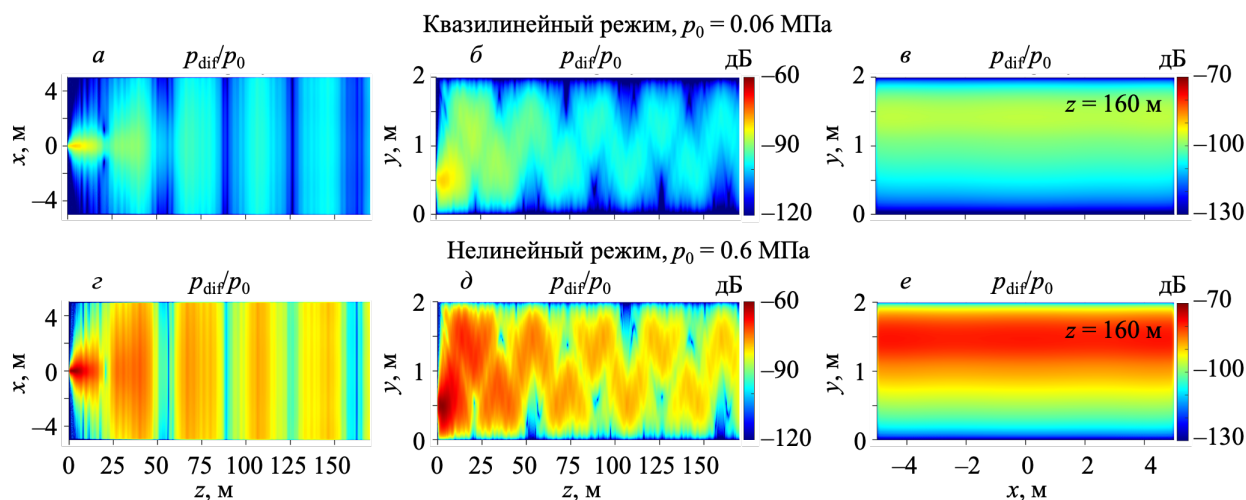
### § 5.3 Разрывный режим в однородном волноводе

В этом параграфе анализируются отличия ударноволнового режима работы параметрического излучателя ( $p_0 = 0.6$  МПа и  $l_{\text{sh}} = 1.7$  м) от квазилинейного ( $p_0 = 0.06$  МПа и  $l_{\text{sh}} = 17$  м) на примере изоскоростного волновода с мягкими границами. Полученные численно результаты для полей волн накачки и ВРЧ изображены на рис. 5.4 и рис. 5.5 на примере волн с частотами  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц и  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц, соответственно.



**Рис. 5.4.** Квазилинейное (а–в) vs полное нелинейное (г–е) распространение волны накачки с  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц в однородном волноводе: пространственные продольные и поперечные ( $z = 160$  м) распределения поля давления.

Из рисунка 5.4 следует, что при переходе от квазилинейного (рис. 5.4, а–в) к разрывному режиму распространения (рис. 5.4, г–е) структура отражений поля волны накачки в волноводе качественно не меняется, однако примерно в 2 раза укорачивается область взаимодействия волн накачки (рис. 5.4, д) и, как следствие, область генерации ВРЧ из-за дополнительного поглощения энергии нелинейной волны на разрывах.

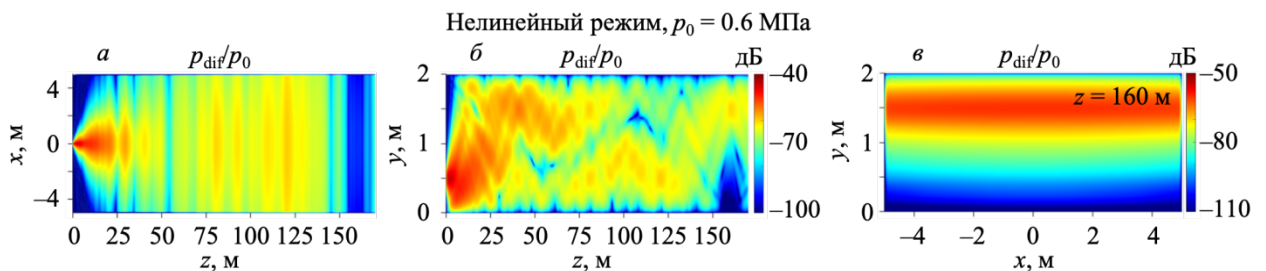


**Рис. 5.5.** Квазилинейное (а–в) vs полное нелинейное (г–е) распространение ВРЧ с  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц в однородном волноводе: пространственные продольные и поперечные ( $z = 160$  м) распределения поля давления.

Как и в квазилинейном режиме работы параметрического излучателя (рис. 5.5, а–в), поле ВРЧ в разрывном режиме (рис. 5.5, г–е) представляет собой суперпозицию нескольких мод волновода и качественно повторяет поведение поля в квазилинейном режиме, но сильнее концентрируется в середине волновода и отличается на 20 дБ

большими уровнями давления и выходной мощности ВРЧ, поэтому исследование сильно нелинейных режимов перспективно для практических применений.

Наконец, на рис. 5.6 продемонстрированы пространственные распределения поля ВРЧ с частотой  $f_{\text{dif}} = 15$  кГц при двухчастотном взаимодействии волн накачки с частотами  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц и  $f_{\text{pump2}} = 135$  кГц в разрывном режиме работы параметрического излучателя. Как следует из рисунка, с ростом величины  $f_{\text{dif}}$  увеличивается максимальный уровень сигнала ВРЧ на 17 дБ, что наблюдалось и в свободном пространстве. В случае свободного распространения без границ поле давления низкочастотного сигнала на бóльшей разностной частоте качественно повторяло поле ВРЧ с меньшей  $f_{\text{dif}}$  с отличиями в амплитуде давления и с несколько более узкой направленностью, однако в волноводе при изменении  $f_{\text{dif}}$  для ВРЧ наблюдается качественно иное поведение. Так, поле ВРЧ с частотой  $f_{\text{dif}} = 15$  кГц (рис. 5.6, б) значительно заполняет пространство волновода, чем в случае  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц (рис. 5.5, д), при этом в нем наблюдается наличие мелкомасштабных структур. Отметим, что в разрывном режиме повышение величины разностной частоты в 3 раза увеличивает значение выходной мощности ВРЧ на оси излучателя (при  $z = 170$  м) в 50 раз, которое достигает значений порядка 0.016% от исходной мощности накачки на параметрическом излучателе.



**Рис. 5.6.** Пространственные распределения поля ВРЧ с  $f_{\text{dif}} = 15$  кГц в однородном волноводе в сильно нелинейном режиме ( $p_0 = 0.6$  МПа).

#### § 5.4 Выводы к пятой главе

В пятой главе впервые развит подход к исследованию параметрических процессов с двухчастотной накачкой в трехмерной полной нелинейной постановке для распространения волн в неоднородных средах в присутствии границ в ударноволновых режимах работы параметрического излучателя. Численный алгоритм разработан на основе уравнения типа ХЗК с учетом пространственных неоднородностей скорости звука по глубине на примере мелководного акустического волновода с мягкими границами на дне и поверхности.

Показаны отличия при распространении волны разностной частоты с учетом отражений от границ и в подводном звуковом канале относительно распространения в

свободном однородном пространстве. Продемонстрировано, что при переходе к разрывному режиму удастся достичь существенно бóльших уровней давления и мощности ВРЧ, чем в квазилинейном режиме работы параметрического излучателя.

Отметим, что представленная численная модель универсальна и может быть модифицирована, например, на случай нерегулярного волновода со случайным пространственным распределением скорости звука.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В работе с помощью численных методов исследованы особенности нелинейной генерации низкочастотного излучения высокочастотной дифрагирующей накачкой в различных режимах работы параметрического излучателя, включая режимы сильного проявления нелинейных эффектов с образованием ударных фронтов в профиле волны. Получены результаты для реалистичных граничных условий на примере подводного параметрического излучателя в свободном поле, а также в присутствии границ и неоднородностей среды.

1. Развитый метод оптимизации расчета нелинейного оператора в спектральном алгоритме позволяет осуществлять моделирование трехмерных задач о параметрической генерации волны разностной частоты, поскольку число спектральных компонент, необходимых для корректного описания ударноволновых режимов при двухчастотном взаимодействии, сокращается с нескольких тысяч до десятков при сохранении точности расчета амплитуды давления волны разностной частоты с максимальной ошибкой в пределах 2–3%. Показано, что частотную фильтрацию удерживаемых в алгоритме гармоник предпочтительнее проводить на расстоянии трех длин образования разрыва для высокочастотного периода волны накачки с максимальной амплитудой.

Показано также, что аналитическое решение, полученное в квазилинейном приближении, существенно отличается от численного решения полной нелинейной задачи на расстояниях, больших двух характерных длин образования разрыва для периода волны накачки с максимальной амплитудой.

2. Расчет поля давления во временном представлении на основе удароулавливающей схемы типа Годунова, используемой в работе в случае импульсной накачки, выигрывает даже при двухчастотном взаимодействии (в сотни раз по сравнению со спектральным расчетом без оптимизации). Развитый подход позволяет использовать 2–3 узла временной сетки на разрыв против порядка 50 точек для существующих нелинейных алгоритмов, используемых при описании параметрических взаимодействий в ударноволновых режимах. Эффект нелинейной демодуляции высокочастотного импульса наступает раньше в сильно нелинейных режимах по сравнению с квазилинейным (на расстояниях порядка одной длины поглощения волн накачки против трех) и протекает эффективнее, несмотря на наличие дополнительного поглощения волн накачки на образующихся в профиле волны разрывах. Для обоих типов режимов характерно, что максимум в спектре демодулированного импульса достигает насыщения на меньших расстояниях, чем становится сравнимым с амплитудой волн накачки.

3. Квазилинейный трехмерный спектральный алгоритм направлен на полное описание эффектов дифракции без приближений при задании длины взаимодействия волн накачки, начальных условий на излучателе и геометрии задачи. Показано, что направленность низкочастотного излучения шире и более сглажена по обоим поперечным направлениям, чем у волн накачки. При этом, чем больше величина разностной частоты, тем более узконаправленное излучение генерируется параметрической антенной. Продемонстрировано, что известные аналитические решения, использующие дополнительные предположения об условиях на излучателе и поведении высокочастотных волн накачки, справедливы лишь в ближнем поле излучателя на оси пучка.

4. Сравнение результатов полного нелинейного и квазилинейного моделирования трехмерного уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова показало, что в ударноволновых режимах использование квазилинейного приближения неприменимо ни для оценки амплитуды давления на оси, ни для описания направленности волн накачки и волн разностной частоты (в сильно нелинейных режимах для параметров рассматриваемой задачи происходит двукратное увеличение углов расхождения пучка волн разностной частоты). Продемонстрировано, что ударноволновые режимы работы параметрического излучателя оптимальнее для генерации низкочастотного излучения по двум метрикам. Во-первых, эффективность параметрического излучателя (т.е. безразмерная амплитуда давления волны разностной частоты на оси) сначала растет линейно с увеличением начального давления на излучателе, а затем насыщается при больших давлениях. Во-вторых, мощность волны разностной частоты возрастает с увеличением начальной мощности на излучателе без эффекта насыщения и составляет порядка 0.05% от мощности волн накачки для параметров рассматриваемой задачи в разрывном режиме против 0.002% в квазилинейном.

5. Развита численная модель позволяет описывать параметрические процессы в неоднородной среде при наличии отражений от границ и исследовать отличия при волноводном распространении волны разностной частоты относительно распространения в свободном однородном пространстве.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Хотелось бы выразить искреннюю благодарность своему научному руководителю, Петру Викторовичу Юлдашеву, за постановку интересной задачи совместно с Верой Александровной Хохловой, помощь и поддержку в самых разных вопросах, в том числе, с технической стороны моей диссертационной работы. Огромная благодарность ему за подробные и исчерпывающие ответы на мои вопросы в различных областях физики и численных методов, без которых эта диссертация была бы невозможна.

Особую признательность хочу выразить моему научному консультанту, Вере Александровне Хохловой, за мудрое научное руководство на протяжении моего обучения в аспирантуре физического факультета, а также за предоставленные возможности для моего развития в качестве молодого ученого. Также выражаю благодарность Игорю Борисовичу Есипову за профессиональную поддержку и плодотворное сотрудничество в процессе работы над моей диссертацией.

От всей души благодарю коллектив Лаборатории медицинского и промышленного ультразвука МГУ за готовность помочь в любой момент и за создание теплой и дружественной атмосферы в лаборатории.

Отдельную благодарность хочу выразить своим родителям за их поддержку и веру в меня на протяжении всего времени обучения в аспирантуре и написания диссертационной работы, а также своему мужу, который был рядом в самые непростые моменты научной деятельности и вдохновлял меня на дальнейшие исследования.



## ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Публикации в рецензируемых научных журналах, удовлетворяющих

### Положению о присуждении учёных степеней в МГУ имени М.В. Ломоносова:

A1. **Kvashennikova A.V.**, Yuldashev P.V., Khokhlova V.A., Esipov I.B. *Fully nonlinear three-dimensional modeling of parametric interactions in the field of a dual-frequency acoustic array* // The Journal of the Acoustical Society of America. 2024. Vol. 155. No. 3. P. 1682–1693. **JIF = 2,1 (WoS)**. Общий объём статьи = 1,125 п.л., личный вклад = 0,9 п.л.

A2. **Тюрина А.В. (Квашенникова А.В.)**, Юлдашев П.В., Есипов И.Б., Хохлова В.А. *Генерация акустической волны разностной частоты в дифрагирующем пучке волн накачки в квазилинейном приближении* // Акустический журнал. 2023. Т. 69. № 1. С. 22–131. **IF = 1,846 (РИНЦ)**. Общий объём статьи = 0,8125 п.л., личный вклад = 0,65 п.л.

Переводная версия: **Tyurina A.V. (Kvashennikova A.V.)**, Yuldashev P.V., Esipov I.B., Khokhlova V.A. *Quasilinear approximation for modeling difference-frequency acoustic wave in a diffracting pump-wave beam* // Acoustical Physics. 2023. V. 69. No. 1. P. 30–39. **JIF = 0,9 (WoS)**. Общий объём статьи = 0,8125 п.л., личный вклад = 0,65 п.л.

A3. **Тюрина А.В. (Квашенникова А.В.)**, Юлдашев П.В., Есипов И.Б., Хохлова В.А. *Численная модель спектрального описания генерации ультразвуковой волны разностной частоты при двухчастотном взаимодействии* // Акустический журнал. 2022. Т. 68. № 2. С. 152–161. **IF = 1,846 (РИНЦ)**. Общий объём статьи = 0,8125 п.л., личный вклад = 0,65 п.л.

Переводная версия: **Tyurina A.V. (Kvashennikova A.V.)**, Yuldashev P.V., Esipov I.B., Khokhlova V.A. *Spectral modeling of difference-frequency generation in the case of two-frequency interaction of ultrasound waves* // Acoustical Physics. 2022. V. 68. No. 2. P. 130–137. **JIF = 0,9 (WoS)**. Общий объём статьи = 0,8125 п.л., личный вклад = 0,65 п.л.

### Публикация в рецензируемом научном журнале из перечня ВАК РФ:

A4. Сергеева М.С., **Тюрина А.В. (Квашенникова А.В.)**, Юлдашев П.В., Хохлова В.А. *Метод численного расчета генерации ультразвуковых волн разностной частоты в условиях формирования ударного фронта* // Учёные записки физического факультета Московского университета. 2022. № 4, с. 2240101. **IF = 0,062 (РИНЦ)**. Общий объём статьи = 0,375 п.л., личный вклад = 0,15 п.л.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Westervelt P. J. Parametric end-fire array // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1960. V. 32. N. 4. P. 934–935.
2. Westervelt P. J. Parametric acoustic array // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1963. V. 35. N. 4. P. 535–537.
3. Зверев В. А. Как зарождалась идея параметрической акустической антенны // *Акустический журнал*. 1999. Т. 45. № 5. С. 685–692.
4. Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И. Нелинейная гидроакустика. Ленинград Судостроение, 1981.
5. Hamilton M. F. Sound Beams. In book: *Nonlinear Acoustics* (ed. by M.F. Hamilton and D.T. Blackstock). Academic Press, 1998.
6. Berktaу H. O. Possible exploitation of non-linear acoustics in underwater transmitting applications // *Journal of Sound and Vibration*. 1965. V. 2. N 4. P. 435–461.
7. Наугольных К. А., Солюян С. И., Хохлов Р. В. О нелинейном взаимодействии звуковых волн в поглощающей среде // *Акустический журнал*. 1963. Т. 9. № 2. С. 192–197.
8. Зверев В. А., Калачев А. И. Измерение рассеяния звука звуком при наложении параллельных пучков // *Акустический журнал*. 1968. Т. 14. № 2. С. 214–219.
9. Зверев В. А., Калачев А. И. Изучение звука в области пересечения двух звуковых пучков. *Акустический журнал*. 1969. Т. 15. № 3. С. 369–376.
10. Зарембо Л. К. Акустическая излучающая параметрическая антенна // *Успехи физических наук*. 1979. Т. 128. № 4. С. 713–720.
11. Гурбатов С. Н., Демин И. Ю., Сутин А. М. Взаимодействие нелинейно-ограниченных сферических пучков в параметрических излучателях // *Акустический журнал*. 1979. Т. 25. № 4. С. 515–520.
12. Донской Д. М., Зайцев В. Ю., Наугольных К. А., Сутин А. М. Экспериментальные исследования поля мощного параметрического излучателя в мелком море // *Акустический журнал*. 1993. Т. 39. № 2. С. 266–274.
13. Есипов И. Б., Попов О. Е. Роль дисперсии скорости звука в повышении эффективности параметрической антенны в мелководном волноводе // *Известия Российской Академии наук: серия физическая*. 2020. Т. 84. № 6. С. 638–643.
14. Zhou H., Huang S. H., Li W. Parametric acoustic array and its application in underwater acoustic engineering // *Sensors*. 2020. V. 20. N. 7. P. 2148.

15. Новиков Б. К., Тимошенко В. И. Параметрические антенны в гидролокации. Ленинград Судостроение, 1990.
16. Воронин В. А., Тарасов С. П., Тимошенко В. И. Применение параметрических антенн в морских исследованиях // *Акустический журнал*. 1995. Т. 41. № 3. С. 405–409.
17. von Deimling J. S., Held P., Feldens P., Wilken D. Effects of using inclined parametric echosounding on sub-bottom acoustic imaging and advances in buried object detection // *Geo-Marine Letters*. 2016. V. 36. N. 2. P. 113–119.
18. Humphrey V. F., Robinson S. P., Smith J. D., Martin M. J., Beamiss G.A., Hayman G., Carroll N.L. Acoustic characterization of panel materials under simulated ocean conditions using a parametric array source // *Journal of the Acoustical Society of America*. 2008. V. 124. N. 2. P. 803–814.
19. Qu K., Zou B., Chen J., Guo Y., Wang R. Experimental study of a broadband parametric acoustic array for sub-bottom profiling in shallow water // *Shock and Vibration*. 2018. V. 2018. N. 1. P. 3619257.
20. Есипов И. Б., Калачев А. И., Соколов А. Д., Сутин А. М., Шаронов Г. А. Исследования дальнего распространения сигналов мощного параметрического излучателя // *Акустический журнал*. 1994. Т. 40. № 1. С. 71–75.
21. Esipov I., Naugolnykh K., Timoshenko V. The parametric array and long-range ocean research // *Acoustics today*. 2010. V. 6. N. 2. P. 20–26.
22. Cheng Y., Zhao A., Hui J., An T., Zhou B. Parametric underwater transmission based on pattern time delay shift coding system // *Mathematical Problems in Engineering*. 2018. V. 2018. N. 1. P. 1–7.
23. Bennett M. B., Blackstock D. T. Parametric array in air // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1975. V. 57. N. 3. P. 562–568.
24. Yoneyama M., Fujimoto J., Kawamo Y., Sasabe S. The audio spotlight: an application of nonlinear interaction of sound waves to a new type of loudspeaker design // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1983. V. 73. N. 5. P. 1532–1536.
25. Gan W. S., Tan E. L., Kuo S. M. Audio Projection: directional sound and its applications in immersive communication // *EEE Signal Processing Magazine*. 2011. V. 28. N. 1. P. 43–57.
26. Gan W.-S., Yang J., Kamakura T. A review of parametric acoustic array in air // *Applied Acoustics*. 2012. V. 73. N. 12. P. 1211–1219.

27. Arnela M., Guasch O., Sánchez-Martín P., Camps J., Alsina-Pagès R.M., Martínez-Suquía C. Construction of an omnidirectional parametric loudspeaker consisting in a spherical distribution of ultrasound transducers // *Sensors*. 2018. V. 18. N. 12. P. 4317.
28. Skinner E., Groves M., Hinders M. K. Demonstration of a length limited parametric array // *Applied Acoustics*. 2019. V. 148. P. 423–433.
29. Hedberg C. M., Haller K. C. E., Kamakura T. A Self-Silenced Sound Beam // *Acoustical Physics*. 2010. V. 56. N. 5. P. 637–639.
30. Tong L. H., Lai S. K., Yan J. W., Li C. Highly directional acoustic waves generated by a horned parametric acoustic array loudspeaker // *Journal of Vibration and Acoustics*. 2019. V. 141. N. 1. P. 011012.
31. Tanaka K., Shi C., Kajikawa Y. Binaural active noise control using parametric array loudspeakers // *Applied Acoustics*. 2017. V. 116. P. 170–176.
32. Pampin J., Kollin J. S., Kang E. Applications of ultrasonic sound beams in performance and sound art // *Proceedings of the joint 33rd International Computer Music Conference*. 2007. P. 492–495.
33. Shi C., Gan W.-S. Development of a parametric loudspeaker: a novel directional sound generation technology // *IEEE Potentials*. 2010. V. 29. N. 6. P. 20–24.
34. Nomura H., Hedberg C. M., Kamakura T. Numerical simulation of parametric sound generation and its application to length-limited sound beam // *Applied Acoustics*. 2012. V. 73. N. 12. P. 1231–1238.
35. Prieur F., Johansen T.F., Hilm S., Torp H. Fast simulation of second harmonic ultrasound field using a quasi-linear method // *Journal of the Acoustical Society of America*. 2012. V. 131. N. 6. P. 4365–4375.
36. Zhu L., Florencio D. 3D numerical modeling of parametric speaker using finite-difference time-domain // *IEEE international conference on acoustics, speech and signal processing (ICASSP)*. 2015. P. 5982–5986.
37. Zhong J., Kirby R., Qiu X. A spherical expansion for audio sounds generated by a circular parametric array loudspeaker // *Journal of the Acoustical Society of America*. 2020. V. 147. N. 5. P. 3502–3510.
38. Zhong J., Kirby R., Qiu X. The near field, Westervelt far field, and inverse-law far field of the audio sound generated by parametric array loudspeakers // *Journal of the Acoustical Society of America*. 2021. V. 149. N. 3. P. 1524–1535.
39. Zhong J., Zou H., Lu J., Zhang D. A modified convolution model for calculating the far field directivity of a parametric array loudspeaker // *Journal of the Acoustical Society of America*. 2023. V. 153. N. 3. P. 1439–1451.

40. Červenka M., Bednařík M. Non-paraxial model for a parametric acoustic array // *Journal of the Acoustical Society of America*. 2013. V. 134. N. 2. P. 933–938.
41. Červenka M., Bednařík M. A versatile computational approach for the numerical modeling of parametric acoustic array // *Journal of the Acoustical Society of America*. 2019. V. 146. N. 4. P. 2163–2169.
42. Červenka M., Bednařík M. An algebraic correction for the Westervelt equation to account for the local nonlinear effects in parametric acoustic array // *Journal of the Acoustical Society of America*. 2022. V. 151. N. 6. P. 4046–4052.
43. Chiou S.-Y., Forsberg F., Fox T.B., Needleman L. Comparing differential tissue harmonic imaging with tissue harmonic and fundamental gray scale imaging of the liver // *Journal of Ultrasound in Medicine*. 2007. V. 26. N. 11. P. 1557–1563.
44. Forsberg F., Stanczak M., Sinanan J. K., Blackman R. Second-generation differential tissue harmonic imaging improves the visualization of renal lesions // *Journal of Ultrasound in Medicine*. 2023. V. 42. N. 4. P. 853–857.
45. Kim D. H., Kwon Y. S., Kang D.-H., Shim S., Park J. H., Lee B.C. Difference-frequency-based ultrasonic contrast imaging of material elasticities // *Proceedings of the 2022 IEEE International Ultrasonics Symposium*. 2022. P. 1–4.
46. Li Y., Polyak D., Johnson E., Yecies D., Shevidi S., de la Zerda A., Gephart M. H., Chu S. Difference-frequency ultrasound imaging with non-linear contrast // *IEEE Transactions on Medical Imaging*. 2020. V. 39. N. 5. P. 1759–1766.
47. Law S., Zhou Y. High-intensity focused ultrasound ablation by the dual-frequency excitation // *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*. 2018. V. 66. N. 1. P. 18–25.
48. Tian L., Zheng H., Xie W., Li F., Wang Z., Li Y. Real time monitoring of tissue damage in HIFU focal region by ultrasonic excitation acoustic signal amplitude // *Journal of Applied Acoustics*. 2022. V. 41. N. 4. P. 520–526.
49. Гаврилов Л. Р. Фокусированный ультразвук высокой интенсивности в медицине. Фазис Москва, 2013.
50. Заболотская Е. А., Хохлов Р. В. Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков // *Акустический журнал*. 1969. Т. 15. № 1. С. 40–47.
51. Tjøtta J. N., Tjøtta S., Vefring E.H. Effects of focusing on the nonlinear interaction between two collinear finite amplitude sound beams // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1991. V. 89. N. 3. P. 1017–1027.

52. Aanonsen S. I. Numerical computation of the nearfield of a finite amplitude sound beam // Technical Report 73, Department of Mathematics, University of Bergen, Bergen, Norway, 1983.
53. Hamilton M. F., Tjøtta J. N., Tjøtta S. Nonlinear effects in the farfield of a directive sound source // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1985. V. 78. N. 1. P. 202–216.
54. Christopher P. T., Parker K. J. New approaches to nonlinear diffractive field propagation // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1991. V. 90. N. 1. P. 488–499.
55. Kamakura T., Tani M., Kumamoto Y., Ueda K. Harmonic generation in finite amplitude sound beams from a rectangular aperture source // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1992. V. 91. N. 6. P. 3144–3151.
56. Khokhlova V. A., Souchon R., Tavakkoli J., Sapozhnikov O.A., Cathignol D. Numerical modeling of finite amplitude sound beams: Shock formation in the nearfield of a cw plane piston source // *Journal of the Acoustical Society of America*. 2001. V. 110. N. 1. P. 95–108.
57. Филоненко Е. А., Хохлова В. А. Эффекты акустической нелинейности при терапевтическом воздействии мощного фокусированного ультразвука на биологическую ткань // *Акустический журнал*. 2001. Т. 47. № 4. С. 541–549.
58. Cleveland R. O., Hamilton M. F., Blackstock D. T. Time-domain modeling of finite-amplitude sound in relaxing fluids // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1996. V. 99. N. 6. P. 3312–3318.
59. Y.-S. Lee and M.F. Hamilton, “Time-domain modeling of pulsed finite-amplitude sound beams,” *Journal of the Acoustical Society of America*. 1995. V. 97. N. 2. P. 906–917.
60. Tavakkoli J., Cathignol D., Souchon R., Sapozhnikov O. A. Modeling of pulsed finite-amplitude focused sound beams in time domain // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1998. V. 104. N. 4. P. 2061–2072.
61. Cleveland R. O., Chambers J. P., Bass H. E., Raspet R., Blackstock D. T., Hamilton M. F. Comparison of computer codes for the propagation of sonic boom waveforms through isothermal atmospheres // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1996. V. 100. N. 5. P. 3017–3027.
62. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А. Нелинейная теория звуковых пучков. Москва Наука, 1982.
63. Pestorius F. M. Propagation of plane acoustic noise of finite amplitude // Technical Report ARL-TR-7323, Applied Research Laboratory, University of Texas at Austin, 1973.
64. Christopher T. A nonlinear plane-wave algorithm for diffractive propagation involving shock waves // *Journal of Computational Acoustics*. 1993. V. 1. N. 3. P. 371–393.

65. Хохлова В. А., Пономарев А. Е., Аверкью М. А., Крам Л. А. Нелинейные импульсные поля прямоугольных фокусированных источников диагностического ультразвука // *Акустический журнал*. 2006. Т. 52. № 4. С. 560–570.
66. Бессонова О. В., Хохлова В. А., Бэйли М. Р., Кэнни М. С., Крам Л. А. Фокусировка мощных ультразвуковых пучков и предельные значения параметров разрывных волн // *Акустический журнал*. 2009. Т. 55. № 4–5. С. 445–456.
67. Савицкий О. А., Чистякова Т. А. Математическая модель распространения ультразвуковых пучков высокой интенсивности // *Известия Южного федерального университета. Технические науки*. 2010. Т. 107. № 6. С. 168–174.
68. Kamakura T., Hamada N., Aoki K., Kumamoto Y. Nonlinearly generated spectral components in the nearfield of a directive sound source // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1989. V. 85. N. 6. P. 2331–2337.
69. Tjøtta J. N., Tjøtta S., Vefring E. H. Propagation and interaction of two collimated finite amplitude sound beams // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1990. V. 88. N. 6. P. 2859–2870.
70. Kamakura T., Tani M., Kumamoto Y., Breazeale M.A. Parametric sound radiation from a rectangular aperture source // *ACUSTICA*. 1994. V. 80. P. 332–338.
71. Averkiou M. A., Lee Y.-S., Hamilton M. F. Self-demodulation of amplitude- and frequency-modulated pulses in a thermoviscous fluid // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1993. V. 94. N. 5. P. 2876–2883.
72. Vos H. J., Goertz D. E., de Jong N. Self-demodulation of high-frequency ultrasound // *Journal of the Acoustical Society of America*. 2010. V. 127. N. 3. P. 1208–1217.
73. Савицкий О. А. Нелинейная трансформация импульсных акустических сигналов в поле звуковых пучков // *Сборник трудов научной конференции «Сессия научного совета РАН по акустике и XXV сессия Российского акустического общества»*. 2012. С. 155–158.
74. Moffett M. B., Mellen R. H. Model for parametric acoustic sources // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1977. V. 61. N. 2. P. 325–337.
75. Moffett M. B., Mellen R. H., Konrad W. L. Parametric acoustic sources of rectangular aperture // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1978. V. 63. N. 5. P. 1326–1331.
76. Muir T. G., Willette J. G. Parametric acoustic transmitting arrays // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1972. V. 52. N. 5 (Part 2). P. 1481–1486.
77. Garrett G. S., Tjøtta J. N., Tjøtta S. Nearfield of a large acoustic transducer, Part II: Parametric radiation // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1983. V. 74. N. 3. P. 1013–1020.

78. Ding D. A simplified algorithm for the second-order sound fields // *Journal of the Acoustical Society of America*. 2004. V. 108. N. 6. P. 2759–2764.
79. Гринберг И. Э., Новиков В. К., Тимошенко В. И. Параметрическая антенна в режиме самодетектирования // *Акустический журнал*. 1984. Т. 30. № 2. С. 199–203.
80. Yang J., Kan S., Gan W.-S., Tian J. A fast field scheme for the parametric sound radiation from rectangular aperture source // *Chinese Physical Letters*. 2004. V. 21. N. 1. P. 110–113.
81. Карабутова Н. Е., Новиков В. К. Работа параметрического излучателя звука в плоском волноводе // *Акустический журнал*. 1986. Т. 32. № 1. С. 65–70.
82. Гурбатов С. Н., Прончатов-Рубцов Н.В. Параметрическая генерация низкочастотного сигнала в звуковых волноводных каналах // *Акустический журнал*. 1984. Т. 30. № 1. С. 51–57.
83. Зайцев В. Ю., Островский Л. А., Сутин А. М. Модовая структура поля параметрического излучателя в акустическом волноводе // *Акустический журнал*. 1987. Т. 33. № 1. С. 37–42.
84. Есипов И. Б., Попов О. Е., Кенигсбергер Г. В., Сизов И. И. Параметрическая антенна для гидрофизических исследований на протяженных трассах // *Известия Российской Академии наук: серия физическая*. 2016. Т. 80. № 10. С. 1340–1349.
85. Есипов И. Б., Попов О. Е., Солдатов В. Г. Компрессия сигнала параметрической антенны в мелководном волноводе // *Акустический журнал*. 2019. Т. 65. № 4. С. 490–498.
86. Schock S. G., LeBlanc L. R., Mayer L. A. Chirp subbottom profiler for quantitative sediment analysis // *Geophysics*. 1989. V. 54. N.4. P. 445–450.
87. Plets R. M. K., Dix J. K., Adams J. R., Bull J. M., Henstock T. J., Gutowski M., Best A. I. The use of a high-resolution 3D chirp sub-bottom profiler for the reconstruction of the shallow water archaeological site of the Grace Dieu (1439), River Hamble, UK // *Journal of Archaeological Science*. 2009. V. 36. N. 2. P. 408–418.
88. Nikolovska A., Sahling H., Bohrmann G. Hydroacoustic methodology for detection, localization, and quantification of gas bubbles rising from the seafloor at gas seeps from the eastern Black Sea // *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*. 2008. V. 9. N. 10. P. 10010.
89. Muñoz A., Cristobo J., Rios P., Druet M., Polonio V., Uchupi E., Acosta J. Sediment drifts and cold-water coral reefs in the Patagonian upper and middle continental slope // *Marine and Petroleum Geology*. 2012. V. 36. N. 1. P. 70–82.



90. Schreider A. A., Schreider A. A., Sazhneva A. E., Galindo-Zaldivar J., Ruano P., Maldonado A., Martos-Martin Y., Lobo F. Structure of subsurface sediments in the scan basin (Scotia Sea) // *Oceanology*. 2018. V. 58. P. 133–136.
91. Kuo S. M., Morgan D.R. Active noise control: a tutorial review // *Proceedings of the IEEE*. 1999. V. 87. N. 6. P. 943–973.
92. Brooks L. A., Zander A. C., Hansen C. H. Investigation into the feasibility of using a parametric array control source in an active noise control system // *Proceeding of ACOUSTICS*. 2005.
93. Bellin J. L. S., Beyer R. T. Experimental investigation of an end-fire array // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1962. V. 34. N. 8. P. 1051–1054.
94. Berktaу H. O., Leahy D. J. Farfield performance of parametric transmitters // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1974. V. 55. N. 3. P. 539–546.
95. Berktaу H. O., Shooter J. A. Nearfield effects in end-fire line arrays // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1973. V. 53. N. 2. P. 550–556.
96. Fenlon F. H. On the performance of a dual frequency parametric source via matched asymptotic solutions of Burgers' equation // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1974. V. 55. N. 1. P. 35–46.
97. Новиков Б. К., Руденко О. В., Солуян С. И. К вопросу о параметрическом излучателе ультразвука // *Акустический журнал*. 1975. Т. 21. № 4. С. 591–597.
98. Новиков Б. К., Рыбачек М. С., Тимошенко В. И. Взаимодействие дифрагирующих звуковых пучков и теория высоконаправленных излучателей ультразвука // *Акустический журнал*. 1977. Т. 23. № 4. С. 621–626.
99. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. Москва Наука, 1975.
100. O'Neil H. T. Theory of focusing radiators // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1949. V. 21. N. 5. P. 516–526.
101. Юлдашев П. В., Хохлова В. А. Моделирование трехмерных нелинейных полей ультразвуковых терапевтических решеток // *Акустический журнал*. 2011. Т. 57. № 3. С. 337–347.
102. Zemp R. J., Tavakkoli J., Cobbold R. S. C. Modeling of nonlinear ultrasound propagation in tissue from array transducers // *Journal of the Acoustical Society of America*. 2003. V. 113. N. 1. P. 139–152.
103. Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P., Numerical Recipes (3rd ed.) New York Cambridge University Press, 2007.

104. Аверьянов М. В. Экспериментальная и численная модель распространения нелинейных акустических сигналов в турбулентной атмосфере. Дисс. на соискание степ. канд. физ.-мат. наук. МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2008.
105. Kurganov A., Tadmor E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations // *Journal of Computational Physics*. 2000. V. 160. N. 1. P. 241–282.
106. Collino F. Perfectly matched absorbing layers for the paraxial equations // *Journal of Computational Physics*. 1997. V. 131. N. 1. P. 164–180.
107. Doc J.-B., Lihoreau B., Felix S., Faure C., Dubois G. Three-dimensional parabolic equation model for low frequency sound propagation in irregular urban canyons // *Journal of the Acoustical Society of America*. 2015. V. 137. N. 1. P. 310–320.
108. Тюрина А. В., Юлдашев П. В., Есипов И. Б., Хохлова В. А. Численная модель спектрального описания генерации ультразвуковой волны разностной частоты при двухчастотном взаимодействии // *Акустический журнал*. 2022. Т. 68. № 2. С. 152–161.
109. Коннова Е. О., Хохлова В. А., Юлдашев П. В. Использование графических ускорителей при моделировании нелинейных ультразвуковых пучков с ударными фронтами на основе уравнения Вестервельта // *Акустический журнал*. 2023. Т. 69. № 1. С. 13–21.
110. Бессонова О. В., Хохлова В. А., Бэйли М. Р., Кэнни М. С., Крам Л. А. Метод определения параметров акустического поля в биологической ткани для терапевтических применений мощного фокусированного ультразвука // *Акустический журнал*. 2010. Т. 56. № 3. С. 380–390.
111. Пищальников Ю. А., Сапожников О. А., Хохлова В. А. Модификация спектрального подхода к описанию нелинейных акустических волн с разрывами // *Акустический журнал*. 1996. Т. 42. № 3. С. 412–417.
112. Кашеева С. С., Сапожников О. А., Хохлова В. А., Аверкью М. А., Крам Л. А. Нелинейное искажение и поглощение мощных акустических волн в среде со степенной зависимостью коэффициента поглощения от частоты // *Акустический журнал*. 2000. Т. 46. № 2. С. 211–219.
113. Maxwell A. D., Yuldashev P. V., Kreider W., Khokhlova T. D., Schade G. R., Hall T. L., Sapozhnikov O. A., Bailey M. R., Khokhlova V. A. A prototype therapy system for transcutaneous application of boiling histotripsy // *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*. 2017. V. 64. N. 10. P. 1542–1557.

114. Pierce A. D. *Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications* (3rd ed.). New York Springer, 2019.
115. Gavrilov L. R., Hand J. A. A theoretical assessment of the relative performance of spherical phased arrays for ultrasound surgery // *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*. 2000. V. 47. N. 1. P. 125–139.
116. Hynynen K., McDannold N., Clement G., Jolesz F. A., Zadicario E., Killiany R., Moore T., Rosen D. Pre-clinical testing of a phased array ultrasound system for MRI-guided noninvasive surgery of the brain-A primate study // *European Journal of Radiology*. 2006. V. 59. N. 2. P. 149–156.
117. Hand J. W., Shaw A., Sathoo N., Rajagopal S., Dickin R. J., Gavrilov L. R. A random phased array device for delivery of high intensity focused ultrasound // *Physics in Medicine and Biology*. 2009. V. 54. N. 19. P. 5675–5693.
118. Ильин С. А., Юлдашев П. В., Хохлова В. А., Гаврилов Л. Р., Росницкий П. Б., Сапожников О. А. Применение аналитического метода для оценки качества акустических полей при электронном перемещении фокуса многоэлементных терапевтических решеток // *Акустический журнал*. 2015. Т. 61. №. 1. С. 57–64.
119. Bawiec C. R., Khokhlova T. D., Sapozhnikov O. A., Rosnitskiy P. B., Cunitz B. W., Ghanem M. A., Hunter C., Kreider W., Schade G. R., Yuldashev P. V., Khokhlova V. A. A prototype therapy system for boiling histotripsy in abdominal targets based on a 256-element spiral array // *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*. 2021. V. 68. N. 5. P. 1496–1510.
120. Goodman J. W. *Introduction to Fourier Optics* (2nd ed.). New York McGraw-Hill, 1996.
121. Тыщенко А. Г., Заикин О. С., Сорокин М. А., Петров П. С. Комплекс программ для расчета акустических полей в мелком море на основе метода широкоугольных модовых параболических уравнений // *Акустический журнал*. 2021. Т. 67. №. 5. С. 533–541.
122. Тыщенко А. Г., Козицкий С. Б., Казак М. С., Петров П. С. Современные методы расчета акустических полей в океане, основанные на их представлении в виде суперпозиции мод // *Акустический журнал*. 2023. Т. 69. №. 5. С. 620–636.
123. Пелиновский Е. Н., Соустова И. А., Фридман В. Е. Уравнение Заболотской-Хохлова для ограниченных звуковых пучков в неоднородных средах // Тезисы докладов «Нелинейная гидроакустика – 76». 1976. С. 22–25.
124. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. *Теория волн*. Москва Наука, 1979.