

**ОТЗЫВ официального оппонента**  
**о диссертации на соискание учёной степени**  
**доктора физико-математических наук**  
**БЫКОВА Владимира Владиславовича**  
**на тему: «Верхнепредельные ляпуновские**  
**характеристики линейных дифференциальных систем»**  
**по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения,**  
**динамические системы и оптимальное управление»**

Диссертация В. В. Быкова посвящена исследованию свойств специального класса функционалов на пространстве линейных обыкновенных дифференциальных систем – верхнепредельных ляпуновских инвариантов, включающего в себя многие из широко используемых асимптотических характеристик решений таких систем. Основное внимание в работе уделено изучению характера зависимости рассматриваемых функционалов от коэффициентов линейной системы и, в частности, зависимости этих функционалов от параметра.

**1. Актуальность темы диссертации.** Исследование показателей Ляпунова и родственных им величин восходит к работам математиков московской школы по теории показателей Ляпунова Р. Э. Винограда, Б. Ф. Былова, В. М. Миллионщикова, Д. М. Гробамана и других. Изучение различных асимптотических характеристик решений линейных обыкновенных дифференциальных систем как функционалов на пространстве их матриц коэффициентов (отождествляемых с самими системами) является одним из основных направлений современной теории показателей Ляпунова. Это направление своим возникновением обязано В. М. Миллионщикову, начавшему систематические исследования по этой тематике в 80-х годах прошлого столетия. Отмечу, что указанное направление находится на стыке таких двух казалось бы далёких друг от друга разделов математики как теория обыкновенных дифференциальных уравнений и дескриптивная теория множеств и функций. Исследования В. М. Миллионщикова были продолжены и продолжают его учениками, а также представителями аима-атинской школы по асимптотической теории дифференциальных уравнений. Важной частью

этого научного направления является исследование для параметрических линейных дифференциальных систем их асимптотических свойств как функций параметра, начатое и развиваемое в работах математиков минской школы по асимптотической теории дифференциальных уравнений. Сказанное подтверждает актуальность темы диссертации, непосредственно примыкающей к работам О. Перрона, В. М. Миллионщикова, М. И. Рахимбердиева, И. Н. Сергеева, А. Н. Ветохина, Е. К. Макарова, Т. М. Алдибекова, О. И. Морозова, В. Г. Агафонова, В. Г. Феклина, К. Е. Ширяева, Ю. И. Дементьева, Е. Е. Салова, А. Ф. Рожина, А. М. Дауылбаева, А. О. Султанбековой, Е. А. Барабанова, А. В. Липницкого, М. В. Карпука, А. С. Войделевича, А. Ф. Касабуцкого, Л. Баррейры, К. Валлс и многих других российских и зарубежных исследователей, в том числе и автора отзыва.

**2. Соответствие диссертации специальности и отрасли науки, по которым она представлена к защите.** В диссертационной работе В. В. Быкова объект исследования – пространство линейных однородных обыкновенных дифференциальных систем с кусочно-непрерывными на временной полуоси коэффициентами, наделённое одной из двух топологий: компактно-открытой или равномерной, а также непрерывные параметрические семейства таких систем. Предмет исследования – свойства характеристик асимптотического поведения решений таких систем с точки зрения дескриптивной теории функций. Тема диссертации и её содержание соответствуют отрасли физико-математических наук, специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

**3. Содержание диссертации. Степень новизны результатов, полученных в диссертации, и научных положений, выносимых на защиту.** Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, семи глав и списка литературы.

Первая глава диссертации является вводной, она содержит нужные для замкнутого изложения результатов диссертации предварительные сведения и обзор литературы.

Вторая глава диссертации посвящена решению задачи В. М. Миллионщикова об описании показателей Ляпунова непрерывного параметрического семейства линейных систем как функций параметра, пробегающего метрическое пространство; непрерывность семейства понимается в смысле топологии

равномерной сходимости коэффициентов на временной полуоси. В диссертации получен следующий результат: класс функций, определяемый показателями Ляпунова, для семейств систем с ограниченными коэффициентами совпадает с классом верхнепредельных функций, имеющих непрерывные миноранту и мажоранту, а для семейств систем с неограниченными коэффициентами – с классом всех верхнепредельных функций. Получен ряд следствий из этих результатов, а также дано полное описание спектров показателей Ляпунова параметрических семейств с неограниченными коэффициентами.

В третьей главе изучаются границы подвижности показателей Ляпунова и других верхнепредельных ляпуновских инвариантов под действием возмущений, убывающих заданным образом. Автором разработаны оригинальные методы, позволяющие доказывать принадлежность верхней и нижней границ подвижности таких функционалов второму бэровскому классу. В качестве приложения автором получено решение задачи В. М. Миллионщикова о наименьшем бэровском классе максимального показателя как функции параметра. Кроме того, в этой главе получено частичное решение ещё одной задачи В. М. Миллионщикова – о бэровском классе минимального показателя. Именно, показано, что минимальный показатель параметрического семейства систем, коэффициенты которых растут не быстрее заданной функции, принадлежит третьему классу Бэра (ранее А. Н. Ветохиным было установлено, что указанный показатель, вообще говоря, не принадлежит второму классу Бэра). Подчеркну, что, как и в части второй главы, автор не предполагает коэффициенты рассматриваемых систем ограниченными, что значительно усложняет рассматриваемую им задачу.

В четвёртой главе методы третьей главы применяются к изучению показателей автора отзыва. Установлена принадлежность верхних и нижних сигма-показателей и нижних экспоненциальных показателей автора отзыва второму бэровскому классу, а верхних экспоненциальных показателей – третьему. На самом деле, для тех из перечисленных выше показателей, которые принадлежат второму бэровскому классу, сделано даже несколько больше: описаны совокупности их лебеговских множеств. Кроме того, для верхних показателей доказана их одновременная достижимость.

В пятой главе диссертации получены результаты о бэровской классификации показателей Боля. С использованием этих результатов и результатов

третьей главы получено полное решение задачи В. М. Миллионщикова о наименьшем классе Бэра мажорант условных показателей Боля как функций параметра.

В шестой главе установлено отсутствие связи (кроме естественной) между классами Бэра ляпуновских инвариантов в топологиях равномерной сходимости на компактах и на всей временной полуоси. Показано, что номера (порядковые числа) классов Бэра таких функционалов могут быть сколь угодно большими, более того, такие функционалы могут даже не принадлежать ни одному из классов Бэра. Получено полное описание четвёрок  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  порядковых чисел, которые являются номерами классов Бэра указанных функционалов соответственно на пространствах линейных дифференциальных систем с ограниченными и неограниченными коэффициентами, снабжённых равномерной и компактно-открытой топологиями. Для функционалов, инвариантных относительно обобщённого преобразования Ляпунова, получено необходимое условие на такие четвёрки. Получен также ряд следствий из приведённых результатов.

В седьмой главе изучается вопрос о представлении функционала на пространстве линейных систем в виде повторного предела от последовательности функционалов с компактным носителем; значения последних определяются сужением матрицы системы на некоторый (вообще говоря, свой для каждого функционала) отрезок полуоси. Доказано, что любой функционал  $k$ -го класса Бэра ( $k \in \mathbb{N}$ ) можно представить в виде  $k$  повторных пределов от последовательности непрерывных функционалов с компактным носителем, причём количество пределов, вообще говоря, нельзя уменьшить, разрешив функционалам с компактным носителем быть разрывными, даже в классе ляпуновских инвариантов. Таким образом, решена поставленная И. Н. Сергеевым задача о связи бэровских классов функционалов и формул.

**4. Обоснованность и достоверность выводов, сформулированных в диссертации.** Все сформулированные в диссертации утверждения, их доказательства и заключительные выводы корректны и строго математически обоснованы. Они согласуются с известными результатами о бэровской классификации характеристик асимптотического поведения решений линейных дифференциальных систем. Цитирование работ других авторов полное. Диссертация содержит все необходимые библиографические ссылки, имеющие

отношение к её теме или используемым в ней методам доказательств.

**5. Научная и практическая значимости результатов диссертации с указанием рекомендаций по их использованию.** Результаты диссертации носят теоретический характер и относятся к области фундаментальных исследований.

*Научная значимость* результатов диссертации В. В. Быкова состоит в разработке методов доказательства принадлежности довольно широкого класса функционалов, заданных на пространстве линейных дифференциальных систем с компактно-открытой топологией, второму классу Бэра. К указанному классу относятся, в частности, максимальные показатели, верхние и нижние сигма-показатели и ряд других.

*Практическая значимость* результатов диссертации В. В. Быкова заключается в использовании их для дальнейшего продолжения исследований по теории показателей Ляпунова. Результаты диссертации могут быть использованы при чтении специальных курсов на математических факультетах государственных университетов и пединститутов.

**6. Соответствие научной квалификации соискателя учёной степени, на которую он претендует.** В диссертации В. В. Быкова решён ряд трудных задач теории показателей Ляпунова, некоторые из которых были поставлены более 40 лет назад, – уже одно это даёт достаточное основание квалифицировать представленную диссертацию как докторскую. В ней систематически развито новое научное направление, позволяющее изучать асимптотические характеристики с несобственными значениями, в том числе, для систем с неограниченными коэффициентами. Считаю, что совокупность результатов, полученных в диссертации, вносит существенный вклад в теорию показателей Ляпунова.

Таким образом, представленная диссертация В. В. Быкова даёт убедительные основания считать, что научная квалификация соискателя соответствует учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

**7. Опубликованность результатов диссертации в научной печати.** Основные положения и результаты диссертации достаточно полно изложены в 69 опубликованных научных работах (без соавторов – 51), из которых 17

работ опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК России для публикации результатов диссертации.

Диссертацию отличают хороший стиль, чёткое изложение результатов и образцовое оформление. Автореферат диссертации правильно и полно отражает её содержание и основные положения, выносимые на защиту.

**8. Замечания по диссертации.** В тексте диссертации имеется некоторое количество описок, но все они легко восстанавливаются по контексту. В разделе 5.4 диссертации рассматриваются центральные показатели диффеоморфизмов метризованных векторных расслоений, при этом глава 5 называется "Бэровская классификация показателей Боля". Следовало бы для главы 5 выбрать другое название, более точно отражающее её содержание.

**9. Выводы.** Представленная диссертация Быкова Владимира Владиславовича «Верхнепредельные ляпуновские характеристики линейных дифференциальных систем» является единым законченным научным квалификационным исследованием. Диссертация представляет собой существенное научное достижение в области асимптотической теории дифференциальных уравнений. В ней разработаны новые методы решения сложных и актуальных задач теории показателей Ляпунова. Указанные выше замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М. В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» (по физико-математическим наукам) и критериям, определённым пп. 2.1–2.5 «Положения о присуждении учёных степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова», а также оформлена согласно приложениям №№ 5, 6 «Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова».

**10. Заключение.** Считаю, что соискатель Быков Владимир Владиславович несомненно заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» за:

- 1) описание показателей Ляпунова параметрического семейства линейных дифференциальных систем, непрерывного в топологии равномерной схо-

- димости коэффициентов на полуоси;
- 2) вычисление наименьшего класса Бэра максимальных показателей линейной дифференциальной системы как функций параметра;
  - 3) доказательство одновременной достижимости максимальных показателей и верхних сигма-показателей показателями Ляпунова;
  - 4) установление совпадения классов формул функционалов на пространстве линейных дифференциальных систем с классами Бэра в компактно-открытой топологии.

Официальный оппонент:  
доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Беларуси,  
главный научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений  
государственного научного учреждения «Институт математики  
Национальной академии наук Беларуси»

Изобов Николай Алексеевич

(подпись)  
«06» «07.» 2022 г.

Контактные данные: тел.: +375(017) 378-09-15, e-mail: izobov@im.bas-net.by  
Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация: 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Адрес места работы:

220072, г. Минск, ул. Сурганова, д.11,

Институт математики НАН Беларуси,

Тел: +375(017) 378-09-15, e-mail: math@im.bas-net.by

Подпись главного научного сотрудника Института математики  
НАН Беларуси Н. А. Изобова удостоверяю:

Ведущий специалист  
по кадрам  
ИНС

  
*Людмила В. И. Лисовская*