

**ОТЗЫВ официального оппонента**  
**на диссертацию на соискание ученой степени**  
**кандидата физико-математических наук**  
**Балашовой Дарьи Михайловны**  
**на тему: «Ветвящиеся случайные блуждания**  
**со знакопеременными источниками»**  
**по специальности 1.1.4 – «теория вероятностей**  
**и математическая статистика»**

Диссертация Балашовой Д.М. посвящена исследованию ряда задач о ветвящихся случайных блужданиях (ВСБ) с непрерывным временем на однородной решетке  $Z^d$ . Теория ветвящихся процессов в настоящее время является разветвленной областью теории вероятностей и инструментом исследования, используемым в различных областях математики, таких как теория алгоритмов, теория массового обслуживания, теория случайных отображений, а также во многих разделах других наук, особенно в биологии и экономике. Актуальность выбранной темы также подтверждается высоким уровнем публикаций и апробации материала соискателем.

В первой главе диссертации рассматривается задача о ВСБ с конечным числом источников трех типов. Именно источник может либо являться точкой рождения или гибели новых частиц, либо быть точкой нарушения симметричности случайного блуждания, либо и то и другое одновременно. Отметим, что такие задачи рассматривались раньше в работах Е.Б. Яровой, но в диссертации рассмотрен случай источников отрицательной интенсивности, что усложняет исследование. Первые из сформулированных результатов касаются числа положительных собственных значений и простоты наибольшего собственного значения в случае, когда все источники имеют первый тип и расположены в вершинах правильного симплекса. Результат о количестве собственных значений может быть получен из общей теории возмущений в общем случае (без конкретизации положения источников). Отметим, однако, что в процессе доказательства найдены выражения для интенсивности источников, при которой

гарантированно есть положительное собственное значение, и интенсивности, при которой гарантированно есть по крайней мере два таких собственных значения. Эти выражения представляют некоторый интерес сами по себе. Далее сформулирован ряд стандартных для таких моделей результатов об уравнениях, которым удовлетворяет производящая функция и моменты локального и глобального числа частиц. Доказательства опущены в силу того, что они повторяют доказательства аналогичных результатов из работ Е.Б. Яровой. Далее получены достаточные условия существования положительного собственного значения для произвольного конечного числа источников любого типа. В предположении, что существуют положительные собственные значения и старшее из них является простым, получена асимптотика глобальных и локальных моментов численностей частиц. Наконец доказано, что при таких условиях и правильной нормировке, существует предельное распределение частиц. Последний результат и является основным в первой главе диссертации.

Во второй главе диссертации рассматриваются ВСБ с одинаковыми источниками первого типа (только ветвление) в каждой точке решетки, в предположении, что в начальный момент времени в каждой точке решетки находится одна частица. Большая часть главы посвящена случаю, когда источники являются критическими, т. е. когда среднее число потомков при одном делении равняется одному. В этом случае показана нерегулярность роста моментов локальной численности частиц субпопуляции, именно, что второй момент растет быстрее квадрата первого. В случае невозвратности случайного блуждания показана сходимости распределения поля частиц к предельному стационарному распределению. Далее в этой главе получено асимптотическое поведение первого и второго условных моментов локальной численности субпопуляции (именно — потомков одной частицы), при условии, что субпопуляция не выродилась. Отметим, что результаты для второго условного момента получены на «подходящем» расстоянии от стартовой точки, т. е. когда расстояние от точки наблюдения до точки, где находился прародитель субпопуляции, растет по времени подходящим образом. Данный результат получен для случая суперэкспоненциально легких хвостов и для тяжелых хвостов. Отметим, что

порядок роста расстояния до точки наблюдения в этих случаях рассматривался различным. Наконец доказано, что в случае надкритической ветвящейся среды и суперэкспоненциально легких хвостов блуждания существует зона регулярного роста моментов.

В третьей главе диссертации рассмотрена модель аналогичная модели из второй главы, но теперь допускаются разные типы частиц с возможностью превращения друг в друга. Предполагается, что в каждой точке решетки находятся источники с одинаковыми интенсивностями, а в начальный момент времени в каждой точке есть по одной частице каждого типа. В этой главе получены результаты для условного математического ожидания локального числа потомков субпопуляции частиц определенного типа. В качестве потомка может выступать также частица любого типа. Также в этой главе для ВСБ с конечной дисперсией скачков (легкими хвостами) в размерностях один и два получены результаты о кластеризации популяции частиц. Именно, что с вероятностью стремящейся к единице при больших временах можно найти квадрат (отрезок в одномерном случае) без частиц конкретного типа. Размер этого квадрата растет указанным образом с ростом времени.

Все выносимые на защиту Балашовой Д.М. результаты снабжены подробными доказательствами и являются достоверными научными фактами, полученными впервые. Результаты работы несомненно привлекут внимание специалистов.

Вместе с тем, следует отметить, что текст диссертации содержит ряд опечаток, неточностей и изъянов в оформлении, которые существенно затрудняют чтение диссертации.

Текст диссертации составлен из текстов отдельных статей. При соединении текстов в один появился целый ряд редакционных проблем. Именно, некоторые объекты вводятся заново в каждой главе диссертации, для одного и того же объекта в разных главах, а иногда и на протяжении одной главы, используются разные обозначения. Отметим также, что в тексте по ошибке оставлено большое количество английских слов и сокращений.

Отметим также, что несмотря на достаточно адекватный обзор литературы, приводимый во введении, из текста диссертации иногда сложно понять, в чем именно состоит продвижение автора. Некоторые результаты, выносимые на защиту, уже были получены до данной диссертации, но в других, технически более простых случаях. Мне кажется, что отметить аналоги этих результатов и указать, где и в каких случаях они доказаны, стоило отдельно.

Ниже приводится список найденных опечаток и неточностей, за исключением указания мест, где встречается английский текст.

1) На странице 8 при описании содержания первой главы вместо «со знакопеременными источником ветвления» должно быть «со знакопеременными источниками ветвления».

2) На странице 9 в первом абзаце слово «степень» повторяется два раза подряд.

3) На странице 11 написано, что оператор  $A$  самосопряженный из  $\mathbb{R}^p$  в  $\mathbb{R}^p$ . Скорее всего имеется в виду только  $p=2$ , иначе пространство не гильбертово, и самосопряженные операторы не определены.

4) На странице 11 перед формулой (1.2) вместо «которые имеет вид» должно быть «который имеет вид».

5) В формулах (1.2) и (1.5) один и тот же оператор обозначен разными буквами.

6) На странице 14 в последнем предложении перед формулировкой теоремы 1.1 вместо «а в источниках» должно быть «а источники».

7) На странице 15 в первой строке перепутано обозначение для последней переменной в системе линейных уравнений.

8) На странице 17 в последнем абзаце лишний союз «и».

9) На странице 19 при описании смысла  $G_0$  вместо «как  $t \rightarrow$ » должно быть «при  $t \rightarrow$ ».

10) На странице 23 перед последней формулой вместо «элемент удовлетворяющее уравнению» должно быть «элемент, удовлетворяющий уравнению».

11) В формулировке теоремы 1.3 сказано, что оператор  $A$  имеет вид (1.1), но формула (1.1) не относится к определению оператора. Скорее всего имеется в виду формула (1.2).

12) В последней формуле на странице 25 и в первой формуле на странице 26 неверно указаны индексы суммирования в первой сумме — оба предела должны быть на  $r$  больше.

13) Из обозначений на страницах 25-26 следует, что, например, случай в котором есть источник первого рода с отрицательной интенсивностью и источник второго рода с положительной интенсивностью не рассматриваются. Судя по всему это неточность обозначений, а результат теоремы 1.8 верен и в этом случае.

14) На странице 34, после двух первых формул вместо «ак» должно быть «как».

15) На странице 42 после формулы (2.10) последняя переменная производящей функции несколько раз обозначена  $s$ , до этого она была  $z$ . В частности есть формула в которой берется частная производная по  $s$  у функции, зависящей от  $z$ .

16) На странице 49 в многострочной формуле переменная  $k$ , по которой берется предел, в промежуточных вычислениях записана перед знаком предела.

17) На странице 54 между формулами (2.29) и (2.30) вместо «критическим условием» должно быть «начальным условием».

18) На странице 59 в первом абзаце доказательства теоремы 2.4 и на странице 62 в первом абзаце доказательства теоремы 2.5 вместо «различных последовательности равенств» должно быть «различных последовательностях равенств».

19) На странице 63 в последней строке два раза повторяется слово «так».

20) На странице 72 перед формулой (3.6) вместо «моменты конечно» должно быть «моменты конечны».

Указанные замечания относятся в основном к оформлению диссертации, а не к содержанию представленных в ней результатов и не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени

М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.4 – «теория вероятностей и математическая статистика» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена, согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Балашова Дарья Михайловна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.4 – «теория вероятностей и математическая статистика».

Официальный оппонент:

кандидат физико-математических наук,  
научный сотрудник Санкт-Петербургского отделения Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН

РЯДОВКИН Кирилл Сергеевич

Контактные данные:

тел.: +7(812)312-40-58, e-mail: ryadovkin@pdmi.ras.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом  
защищена диссертация:

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

Адрес места работы:

191023, г. Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27, Санкт-Петербургское отделение  
Математического института им. В. А. Стеклова РАН  
Тел.: +7(812)312-40-58, e-mail: ryadovkin@pdmi.ras.ru

Подпись сотрудника Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А.  
Стеклова РАН К. С. Рядовкина удостоверяю: