

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи



Майоров Петр Александрович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ТЕЧЕНИЙ
ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ
В НЕГИДРОСТАТИЧЕСКОМ
ПРИБЛИЖЕНИИ**

Специальность 1.2.2. —

«Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2025

Работа выполнена на кафедре вычислительных методов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук
Соловьев Андрей Валерьевич

Официальные оппоненты: **Зубов Владимир Иванович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник, Вычислительный
центр им. А.А. Дородницына Российской акаде-
мии наук Федерального исследовательского цен-
тра «Информатика и управление» Российской ака-
демии наук

Гусев Анатолий Владимирович,
кандидат физико-математических наук, старший
научный сотрудник, Институт вычислительной
математики им. Г.И. Марчука Российской акаде-
мии наук

Криксин Юрий Анатольевич,
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник, Институт приклад-
ной математики им. М.В. Келдыша Российской
академии наук

Защита состоится 31.03.2025 в 16:30 на заседании диссертационного совета МГУ.012.1 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, строение 52, факультет ВМК, ауд. 685.

E-mail: ds@cs.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д.27) и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/3352>.

Автореферат разослан «___» _____ 2025 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета МГУ.012.1,

д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН



Ильин А. В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Изучение течений жидкости со свободной поверхностью охватывает широкий диапазон задач — от потоков в небольших экспериментальных лотках до задач вычислительной океанологии, вплоть до глобального моделирования течений в масштабах всей планеты. В этих задачах могут существенно различаться временные и пространственные масштабы изменений, а также набор дополнительных физических процессов, которые необходимо учитывать (придонное трение, ветровой нагон, осадки и др.). Однако, общим фундаментом для этих исследований и задач является непосредственное моделирование течений. Основной фокус данной работы будет направлен на математические модели динамики жидкости в поле силы тяжести и со свободной верхней поверхностью и численные методы для их расчета.

Исторически было разработано множество математических моделей динамики жидкости, которые различаются по степени точности в описании реальных течений и, как следствие, границами применимости и вычислительной сложностью численного решения по ним. Для широкого класса задач применимо гидростатическое приближение, в рамках которого вертикальные ускорения считаются пренебрежимо малыми в уравнении движения. Простейшей гидростатической моделью является система уравнений мелкой воды. Двухслойные и многослойные гидростатические модели течений со свободной поверхностью [1; 2] позволяют воспроизводить динамику внутренних волн в стратифицированной жидкости. Ввиду своей высокой вычислительной эффективности, гидростатические модели используются в задачах глобальной циркуляции мирового океана и климатических исследованиях [3; 4]. Однако стоит отметить, что данное приближение имеет границы применимости и, в частности, не позволяет моделировать течения с сильным вертикальным перемешиванием.

Негидростатические модели динамики жидкости со свободной поверхностью на основе системы уравнений Навье-Стокса [5] позволяют моделировать полный спектр процессов динамики жидкости. Численное моделирование по этой системе уравнений без дополнительных приближений сводится к решению разностного аналога уравнения Пуассона на давление. Для регулярных или квазирегулярных вычислительных областей для решения урав-

нения Пуассона можно использовать вычислительно эффективные решатели на основе быстрого преобразования Фурье [6]. Однако, при наличии сложных топографических особенностей, поле давления можно получить только путем решения большой системы линейных уравнений. В трехмерных задачах количество вычислительных ячеек почти всегда не позволяет использовать прямые методы, поэтому применяют различные итерационные решатели. Так, в статье [7] используется предобусловленный метод сопряженных градиентов. Количество итераций для сходимости итерационных решателей увеличивается с ростом количества вычислительных ячеек, поэтому данные методы слабо масштабируемы.

Использование гиперболических систем уравнений, приближающих уравнения Навье-Стокса, позволяет уйти от решения уравнения Пуассона и использовать явные, хорошо параллелизируемые разностные схемы. Так в работе [8] предлагается приближение, основанное на модифицированной системе уравнений, в которой ограничение дивергенции поля скорости связано с другими законами сохранения, следуя идеям так называемой «гиперболической очистки дивергенции» [9].

При создании модели динамики жидкости для океанологических задач одним из вопросов является выбор механизма определения положения поверхности. В современных моделях преимущественно используются два подхода: «жесткая крышка» и свободная поверхность). В первом подходе положение поверхности считается фиксированным все время расчета [7] и на каждом шаге по времени определяется давление на этой поверхности. Фиксированная расчетная область является большим преимуществом данного подхода. Однако моделирование гравитационных волн и приливных течений в приближении «жесткой крышки» не представляется возможным. Второй подход рассматривает поверхность как некоторую функцию от времени определяемую, например, согласно кинематическому условию (отсутствие потоков через поверхность. Существуют различные варианты реализации данного подхода: переход в постоянную систему координат [10] и прямое моделирование на подвижных сетках [5].

При анализе различных методов моделирования течений жидкости со свободной поверхностью можно прийти к выводу об удобстве использования смешанных эйлерово-лагранжевых (СЭЛ) переменных [11; 12]. преимуще-

ство данного подхода заключается в способности обеспечивать численные расчеты решений в подвижной области, следя за изменениями величин, размещенных в узлах расчетной сетки, что находится в непосредственной связи с развитием вычислительной сетки.

Многообразие задач вычислительной океанологии и подходов, описанных выше, привело к созданию большого количества океанологических моделей, различающихся математической постановкой, численными методами решения и областями применимости. Так, в институте Вычислительной Математики им. Г. И. Марчука разрабатывается модель общей циркуляции океана - INMOM [13]. Она основана на системе «примитивных» уравнений в гидростатическом и Буссинесковом приближениях, записанных в обобщенных ортогональных координатах по горизонтали и в σ -системе координат по вертикали.

Во многих мировых математических центрах разрабатываются собственные модели. Большинство моделей общей циркуляции основаны на гидростатическом приближении: модель NEMO [14] разрабатывается консорциумом европейских научных организаций, включая Центр научных исследований Франции (CNRS) и Европейский центр среднесрочных прогнозов погоды (ECMWF), используемая в климатических и океанографических исследованиях; модель MOM [15], которая разрабатывается и поддерживается Принстонским университетом и Национальным центром атмосферных исследований (NCAR) в США, широко используется в климатических исследованиях и является частью многих климатических моделей; Но так же есть примеры глобальных негидростатических моделей - MITgcm [16], разработанная Массачусетским технологическим институтом (MIT). Она используется для моделирования как океанических, так и атмосферных процессов, включая их взаимодействие. Данная модель основана на полных уравнениях Навье-Стокса для несжимаемой жидкости.

В сфере вычислительной океанологии, где исследуются сложные нелинейные процессы, предъявляются высокие требования к используемым численным схемам. Современные численные методы вычислительной гидродинамики нового поколения акцентируют внимание на двух ключевых характеристиках – консервативности и точности моделирования конвективных потоков. Консервативность достигается, например, за счет использования метода ко-

нечного объема. Актуальные схемы высокой разрешающей способности, схемы Годуновского типа [17], определяют конвективные потоки через точное или приближенное решение задачи о распаде произвольного разрыва с различными методами их коррекции: TVD, TVB, ENO, MUSCL и др. Также в последнее время развитие получили схемы класса КАБАРЕ[18], относящиеся к семейству балансно-характеристических схем. Эти схемы совмещают достоинства консервативных и характеристических подходов. Их использование в задачах индустриальной математики подтвердило определенные преимущества по сравнению со схемами высокой разрешающей способности при моделировании вихревых и турбулентных течений с неполным разрешением спектра турбулентных пульсаций.

Существующие математические модели требуют постоянного обновления, чтобы удовлетворить современные требования к точности в моделировании океанических и прибрежных течений. В этом контексте, разработка алгоритмов нового поколения является крайне актуальной. Разработка негидростатической модели является важной задачей. Такая модель способна учесть не только горизонтальные, но и вертикальные градиенты плотности, что особенно важно при моделировании прибрежных областей и процессов вертикального перемешивания.

Целью данной работы является построение явных и явно-неявных балансно-характеристических численных алгоритмов расчета динамики стратифицированной жидкости со свободной поверхностью и учетом сил Кориолиса в негидростатическом приближении на подвижных сетках в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных и математическое моделирование течений стратифицированной жидкости с помощью построенных численных алгоритмов.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

- (1) Построение математической модели динамики слабосжимаемой жидкости со свободной поверхностью в приближении «мягкой крышки».
- (2) Построение явной балансно-характеристической схемы класса КАБАРЕ в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных для

расчетов на сетках, адаптирующихся к уровню свободной поверхности.

- (3) Построение явно-неявной балансно-характеристической схемы класса КАБАРЕ в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных, явной по горизонтальным направлениям и неявной по вертикали.
- (4) Разработка эффективного алгоритма разрешения введенной неявности для явно-неявной схемы.
- (5) Верификация разработанной методики на модельных задачах и результатах физических экспериментов.

Основные положения, выносимые на защиту:

- (1) Математическая модель негидростатической динамики стратифицированной слабосжимаемой жидкости в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных со свободной границей в приближении «мягкой крышки» с учетом сил Кориолиса, вязкости и диффузии.
- (2) Явный балансно-характеристический метод в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных для решения системы уравнений динамики стратифицированной слабосжимаемой жидкости со свободной поверхностью над неровным дном и учетом сил Кориолиса, обладающий свойством сбалансированности.
- (3) Явно-неявный балансно-характеристический метод, явный - вдоль горизонтальных направлений и неявный - по вертикали, в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных для решения для решения системы уравнений динамики стратифицированной слабосжимаемой жидкости со свободной поверхностью. Алгоритм гиперболической прогонки для эффективного разрешения введенной неявности.
- (4) Комплекс программ для моделирования задач расчета течений жидкости в негидростатическом приближении со свободной поверхностью с учетом сил Кориолиса на сетках с переменным количеством ячеек по вертикали.
- (5) Результаты валидации построенных алгоритмов на лабораторных экспериментах по исследованию гравитационных течений

стратифицированной жидкости, подтверждающие хорошую качественную и количественную согласованность с экспериментальными данными. Результаты численного расчета течений в Черном море, подтверждающие возможность моделирования реальных морских акваторий.

Научная новизна:

- (1) Впервые построена явная балансно-характеристическая схема класса КАБАРЕ для уравнений в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных и применена для моделирования течений жидкости со свободной поверхностью.
- (2) Впервые построена явно-неявная балансно-характеристическая схема класса КАБАРЕ, явная - вдоль горизонтальных направлений и неявная - по вертикали для уравнений в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных и применена для моделирования течений жидкости со свободной поверхностью.
- (3) Впервые разработан алгоритм гиперболической прогонки для эффективного разрешения неявности в схемах класса КАБАРЕ.

Практическая значимость данной диссертации заключается в разработанных новых численных моделях негидростатической динамики жидкости со свободной поверхностью. Основанный на гиперболизированной системе уравнений Навье-Стокса численный алгоритм имеет вычислительную эффективность сравнимую с гидростатическими моделями, обеспечивая баланс между численной эффективностью и точностью моделирования. Разработанная модель обладает потенциалом для применения в реальных инженерных и научных задачах. Проведенные валидационные расчеты, подтверждают способность численного алгоритма предоставлять детальные и точные результаты, что позволяет говорить о перспективности использования модели в морской инженерии, прогнозировании погодных условий, изучении воздействия природных катастроф на окружающую среду и других областях. Модель также может служить инструментом для исследования как локальных течений, так и моделирования динамики жидкостей в больших акваториях на подробных вычислительных сетках.

Достоверность полученных результатов обеспечивается достаточным количеством проведенных тестовых и модельных расчетов. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах.

- (1) Научная конференция «Ломоносовские чтения 2018» (Москва, 16-27 апреля 2018 г).
- (2) Научная конференция «Ломоносовские чтения 2020» (Москва, 21 октября - 2 ноября 2020 г).
- (3) Научная конференция "Тихоновские чтения 2020"(Москва, 26-31 октября 2020 г).
- (4) Научная конференция «Ломоносовские чтения 2021» (Москва, 20-29 апреля 2021 г).
- (5) Научная конференция "Моря России: Год науки и технологий в РФ - Десятилетие наук об океане ООН"(Севастополь, 20-24 сентября 2021 г).
- (6) Международная конференция «Марчуковские научные чтения 2021» (Новосибирск, Академгородок, 4-8 октября 2021 г).
- (7) V Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (Москва, 27-30 июня 2022 г).
- (8) Научно-исследовательский семинар кафедры вычислительных методов факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.

Личный вклад. Все результаты работы получены автором лично под научным руководством к.ф.-м.н. А. В. Соловьева при консультациях д.ф.-м.н., проф. В.М. Головизнина. В работах [A.1], [A.3], [A.4] вклад автора диссертации в полученные результаты в части аналитического исследования, математического моделирования, численных методов, разработки комплекса программ и проведении расчетов является определяющим. В работе [A.2] вклад автора диссертации заключается в определении математической модели и построении основной численной схемы, соавторами предложен алгоритм учета сил поверхностного натяжения.

Программный комплекс, предназначенный для моделирования двумерных и трехмерных течений стратифицированной жидкости, реализо-

ван автором диссертации на языке Fortran. В основу реализации программного комплекса положены алгоритмы, подробно описанные в разделах 2.7, 3.4, 4.4 и 4.5 диссертации. Реализованы две версии программного комплекса - для явной и явно-неявной разностной схемы. Обе версии состоят из следующих модулей: построение сетки, формирование начальных данных (в том числе, из внешних источников), расчет течения жидкости, подготовка данных с результатами расчета для выдачи в графическом формате. Все модули распараллелены с помощью технологии MPI на произвольное число процессоров для расчета на параллельных кластерах. Все результаты расчетов, приведенные в диссертации, получены с помощью этих программных комплексов.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 4 печатных изданиях, изданных в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 137 страниц, включая 33 рисунка и 6 таблиц. Список литературы содержит 73 наименования.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена определению и описанию математической модели, описывающей динамику жидкости со свободной поверхностью. Приводятся различные модификации и приближения классической системы дифференциальных уравнений, позволяющие ускорять численные алгоритмы ее разрешения.

Раздел начинается с классической системы уравнений Буссинеска, описывающей динамику жидкости:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{v} &= 0, \\
\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} \otimes \vec{v}) &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \frac{\rho}{\rho_0} \vec{g} + \vec{D}_v, \\
\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{\psi} \otimes \vec{v}) &= \vec{D}_\psi, \\
\rho &= \rho(\vec{\psi}), \vec{\psi} = \{S, T\},
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\vec{v} = (u, v, w)$ - вектор скорости, T - температура, S - соленость, P - давление, ρ - плотность и величины \vec{D}_* содержат учет силы Кориолиса, вязкости, диффузии и других физических процессов.

Положение свободной поверхности - $H(x, y, t)$, определяется кинематическим условием:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t} + v_x \frac{\partial H}{\partial x} + v_y \frac{\partial H}{\partial y} - v_z \right) \Big|_H = 0. \tag{2}$$

Система позволяет описывать как ламинарные течения, так и сложные турбулентные потоки. Поле давления P определяется эллиптическим уравнением, численное решение которого приводит к разностному аналогу уравнения Пуассона, что требует значительных вычислительных ресурсов, особенно в сложных трехмерных областях. Из этого вытекает потребность введения приближений и упрощений в математическую модель, которые позволяют применять более эффективные численные алгоритмы решения.

Далее вводится разделение всех переменных $f(x, y, z, t) = f_0(x, y, t) + \delta f(x, y, z, t)$, где f_0 - основные горизонтальные (средние по вертикали) характеристики течений, δf - отклонение от среднего, что позволяет разделить систему уравнений на баротропную, определяющую величины f_0 , и бароклинную, определяющую δf , подсистемы. Таким образом в отдельную подсистему, меньшей размерности, выделяются наиболее быстрые процессы - гравитационные волны.

В описанной выше модели существует два уровня поверхности. Один из них, $H_0(x, y, t)$, определяется из решения баротропной системы уравнений. Другой, $H(x, y, t)$ - уровень свободной поверхности, колеблется относительно $H_0(x, y, t)$ и определяется бароклинной системой уравнений. Если априорно известно, что амплитуда колебаний свободной поверхности является малой величиной, то уровень $H_0(x, y, t)$ можно считать постоянным ($H_0 = const$) и

отказаться от решения баротропной подсистемы. Далее данное приближение будем называть приближением «мягкой крышки».

Затем описывается один из возможных вариантов гиперболизации системы уравнений с помощью приближения слабой сжимаемости. Давление представляется в виде суммы $P(x,y,z,t) = P_0(x,y,z,t) + \delta P(x,y,z,t)$ где $P_0(x,y,z,t) = \rho_0 g (H_0(x,y,z,t) - z)$ — основная часть гидростатического давления и $\delta P(x,y,z,t)$ — негидростатическая добавка. Вводится дополнительная безразмерная переменная $\theta(x,y,z,t)$ определяющая степень сжатия объема бесконечно малой лагранжевой частицы относительно первоначального $\theta_0 = 1$ и уравнение состояния, определяющее негидростатическую добавку давления $\delta P = c^2 (\theta(x,y,z,t) - \theta_0)$, где $c = const$ — искусственная скорость звука. Искусственная скорость звука подбирается, исходя из компромисса между малым отклонением θ от $\theta_0 = 1$ и приемлемым шагом по времени. Эта методика позволяет получить гиперболическую систему уравнений и использовать явные разностные схемы при её решении.

Далее, переходя в смешанные эйлерово-лагранжевые переменные, выписывается итоговая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{J} \frac{\partial J \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\theta \vec{u}) &= 0, \\
\frac{1}{J} \frac{\partial J \theta \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\theta \vec{v} \otimes \vec{u}) &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla \delta P - \frac{\delta \rho}{\rho_0} \vec{g} + \vec{D}_v, \\
\frac{1}{J} \frac{\partial J \theta S}{\partial t} + \nabla \cdot (\theta S \vec{u}) &= D_S, \\
\frac{1}{J} \frac{\partial J \theta T}{\partial t} + \nabla \cdot (\theta T \vec{u}) &= D_T, \\
\rho &= \rho(S, T), \delta \rho = \rho - \rho_0, \delta P = c^2 (\theta - \theta_0) \\
\vec{v} &= (v_x, v_y, v_z)^T, \vec{u} = (v_x, v_y, v_z - \dot{z})^T
\end{aligned} \tag{3}$$

где (x, y, z) — эйлерова декартова система координат, которая связана с лагранжевой системой координат (x', y', z') якобианом перехода $J = \partial(x,y,z)/\partial(x',y',z')$, \dot{z} — скорость перемещения координаты z : $\dot{z} = 0$ соответствует эйлеровым координатам, при $\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial t}$ — Лагранжевым, остальные параметры совпадают с параметрами системы (1). Координаты по горизонтальным направлениям OX и OY — считаем эйлеровыми и неподвижными, что дает $J = \partial z / \partial z'$.

Вторая глава посвящена построению явной балансно-характеристической численной схемы на основе схемы КАБАРЕ для решения системы уравнений (3), исследованию ее свойств и валидации на лабораторных экспериментах в двумерной постановке в плоскости Oxz .

Схемы класса КАБАРЕ [18] предназначены для численного решения гиперболических систем уравнений. В схеме используется удвоенный набор сеточных переменных – один набор относится к ячейкам (консервативные ς), другой к граням между ячейками (потокосые ψ).

В силу процедуры построения схемы класса КАБАРЕ являются консервативными, имеют второй порядок точности и имеют минимальный вычислительный шаблон. Явные схемы устойчивы при числе Куранта $CFL \leq 1$. Схема КАБАРЕ для уравнения переноса без процедуры монотонизации бездиссипативна. Процедура монотонизации, отражающая принцип максимума для локальных инвариантов Римана, вносит необходимую вязкость в зонах разрывов.

Шаг по времени в схеме КАБАРЕ состоит из выполнения 3 фаз. Приводятся итоговые разностные формулы для балансных фаз 1 и 3, полученные методом конечного объема. Выводится характеристическая форма системы уравнений (3) и определяется набор локальных инвариантов Римана и их характеристические скорости, необходимые для построения второй фазы схемы КАБАРЕ. Подробное описание методики КАБАРЕ содержится в [18].

Отдельного описания заслуживает алгоритм учёта подвижной сетки. Условие для свободной поверхности (2) в плоскости Oxz :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial x} - w \right) \Big|_{z=H(x,t)} = 0$$

есть неоднородное уравнение переноса величины $z_0 = H(x,t)$ - положения свободной поверхности. Разностные уравнения для которого также выписываются согласно методике схемы КАБАРЕ.

Перемещение внутренних горизонтальных граней зависит от выбранного типа сетки. Для эйлеровой сетки внутренние высоты граней неподвижны и изменяется только положение свободной поверхности. Для так называемой сигма-сетки пропорции высот ячеек остаются постоянными во времени, а по-

ложения граней зависят от положения свободной поверхности:

$$z_{*,k}^n - z_{*,N_z}^n = \alpha_k (z_{*,0}^n - z_{*,N_z}^n), k = 0..N_z \quad (4)$$

где $0 = \alpha_{N_z} < \alpha_{N_z-1} < \dots < \alpha_1 < \alpha_0 = 1$. Возможно применение и других моделей движения внутренних граней сетки.

Скорости перемещения в каждом случае определяются через величину сдвига грани за шаг по времени.

Таким образом, определяется явный численный алгоритм решения на каждом шаге по времени - схема CABARET-NH. Величина шага по времени выбирается из условия Куранта ($CFL < 1$):

$$\tau^n = CFL \cdot \min_{\forall cell} \left(\min \left(\frac{\Delta x}{|(\lambda_p^x)^n|}, \frac{\Delta z^n}{|(\lambda_p^z)^n|} \right) \right) \quad (5)$$

Далее приводится доказательство свойства сбалансированности (well-balanced) для построенной схемы.

Алгоритм расчета положения свободной поверхности исследуется на задаче о малых колебаниях свободной поверхности [19]. Результаты расчётов показывают хорошее соответствие численного решения по модели CABARET-NH и аналитического решения данной задачи при различных значениях искусственной скорости звука. С увеличением искусственной скорости звука решения стремится к аналитическому (рис. 1).

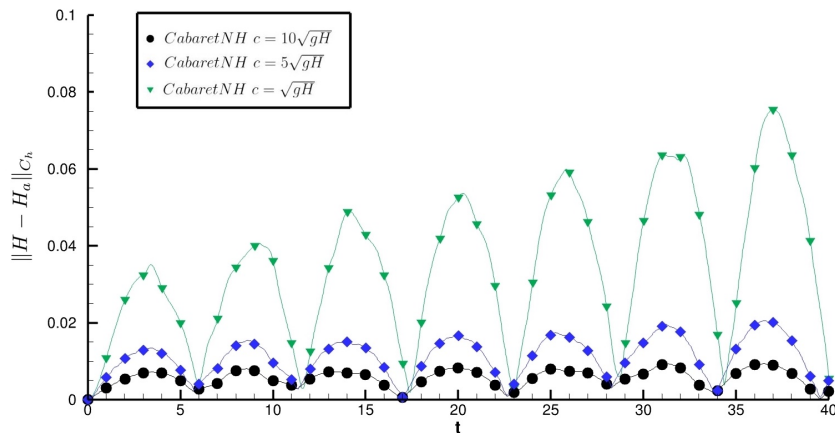


Рис. 1 — Отклонение численного решения от аналитического.

Валидация явного численного алгоритма CABARET-NH проводилась на лабораторных экспериментах по изучению динамики стратифицированных гравитационных течений, описанных в статье [20]. Результаты численного моделирования с использованием численной схемы CABARET-NH подтверждают применимость построенной математической модели и соответствующей численной схемы для моделирования течений стратифицированной по плотности жидкости в лабораторных условиях. Качественная и количественная согласованность результатов численных расчетов с экспериментальными показывает высокую точность построенной модели и численного метода расчета по этой математической модели. Положения фронта потока гравитационного течения согласуется с теоретическими оценками статьи [21] (рис. 2).

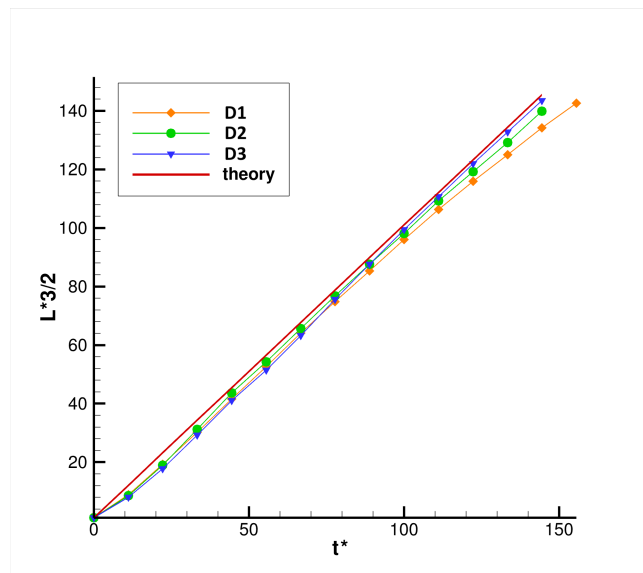


Рис. 2 — Безразмерное положение фронта потока $L^{*3/2}$ в расчетах по модели CABARET-NH для экспериментов D1-D3 и график аналитического решения приближенной задачи.

В третьей главе описывается методика построения явно-неявной схемы на основе балансно-характеристической схемы КАБАРЕ, явной вдоль направления OX и неявной вдоль OZ , и алгоритм решения по ней. Расчетная область в задачах вычислительной океанологии зачастую обладает существенно различающимися горизонтальным и вертикальным размерами. Как следствие применяемые в этих задачах вычислительные ячейки имеют высокое аспектное отношение. Главным ограничением на шаг по времени из условия Куранта является вертикальный размер используемых ячеек. В то же время использование полностью неявных схем для решения системы урав-

нений (3), приводит к необходимости разрешения больших систем линейных уравнений и уменьшает эффективность распараллеливания полученных алгоритмов. Введение неявности только по одному вертикальному направлению и компактность шаблона схемы позволяет разрешать неявность независимо в каждом отдельном столбце ячеек по оси OZ, что оставляет возможность эффективного распараллеливания вдоль явного направления, а также снять ограничения на шаг по времени (5), получаемые по вертикальному направлению. Разработанный алгоритм гиперболической прогонки позволяет сохранить вычислительную эффективность на уровне явной схемы САВАРЕТ-НН.

Рассмотрим изменения балансной фазы 1 в сравнении с явной схемой:

$$\frac{\vec{\zeta}_C^{n+1/2} - \vec{\zeta}_C^n}{\tau/2} + \sum_k F_x(\vec{\psi}_k^n) + \sum_k F_z(\vec{\psi}_k^{n+1}) = 0 \quad (6)$$

где $\vec{\zeta}_C = \{\theta_C \Delta V, \theta_{CuC} \Delta V, \theta_{CwC} \Delta V, \rho_C \theta_C \Delta V\}$ - величины на основе консервативных переменных, для которых выполняются законы сохранения, F_z - потоки через горизонтальные грани ячейки, вычисляемые по потоковым величинам $\vec{\psi}_k^{n+1}$ с нового слоя по времени, и F_x - остальные потоки (на вертикальных гранях), для вычисления которых используются потоковые величины со старого слоя по времени.

С помощью алгебраических преобразований система разностных уравнений (6) сводится к разностному аналогу уравнений переноса локальных инвариантов Римана:

$$\frac{(I_p^z)_c^{n+1/2} - (I_p^z)_c^n}{\tau/2} + \left(\tilde{\lambda}_p^z\right)_c^{n+1} \frac{(I_p^z)_T^{n+1} - (I_p^z)_B^{n+1}}{\Delta z_c} = G_p^n, \quad p = 1..4 \quad (7)$$

В полученной системе уравнений два набора неизвестных инвариантов $(I_p^z)_c^{n+1/2}$ и $(I_p^z)_T^{n+1}$. Экстраполяционные соотношения характеристической фазы КАБАРЕ определяют связь между неизвестными инвариантами на полуцелом слое $t_{n+1/2}$ и новом слое t_{n+1} , что позволяет исключить из системы уравнений (7) неизвестные инварианты с полуцелого слоя. Таким образом, получается система линейных уравнений с блочной трехдиагональной матрицей (блоки 4 на 4) относительно инвариантов $(I_p^z)_T^{n+1}$ в каждом вертикальном

столбце ячеек независимо. Для разрешения данной системы уравнений применяется метод прогонки.

Величина шага по времени выбирается из условия Куранта по явному направлению ($CFL < 1$):

$$\tau^n = CFL \cdot \min_{\forall cell} \left(\frac{\Delta x}{|(\lambda_p^x)^n|} \right) \quad (8)$$

В отличие от выбора шага по времени в явной схеме (5), неявная схема по вертикальному направлению позволяет снять ограничения на шаг по времени по этому направлению.

Построенный явно-неявный алгоритм SABARET-INH валидируется на лабораторных экспериментах по изучению динамики стратифицированных гравитационных течений, описанных в статье [20], аналогично явной схеме SABARET-NH. Сравнение результатов явной и явно-неявной схемы показывает, что явно-неявная схема обладает большей схемной вязкостью, это выражается в меньшем турбулентном следе за передней частью фронта течения. Стоит отметить, что распространение фронтов по двум схемам практически совпадает.

Для сравнения эффективности расчетов по двум схемам были проведены расчеты на серии вычислительных сеток $[N_x \times N_z]$ с различным аспектным соотношением размеров ячеек $k = \Delta x / \Delta z$. На рассматриваемых сетках, согласно формулам (5) и (8), шаги по времени в явной (τ_{ex}) и явно-неявной (τ_{ei}) схемах удовлетворяют следующему соотношению:

$$\frac{\tau_{ei}}{\tau_{ex}} \approx \frac{\Delta x}{\Delta z} = k \quad (9)$$

Сетка	k	T_{ex} [с]	T_{ei} [с]	T_{ex}/T_{ei}
300×20	1	59	63	0.94
300×50	2.5	374	163	2.29
300×100	5	1691	376	4.50

Таблица 1 — Сравнение вычислительной эффективности по явной схеме SABARET-NH и явно-неявной SABARET-INH

В Таб. 1 представлены данные отражающие затраты процессорного времени для выполнения одного индивидуального расчета для каждой из рассматриваемых численных схем: T_{ex} - время по явной схеме CABARET-NH; T_{ei} - время по явно-неявной схеме CABARET-INH. Полученные данные подтверждают теоретическую оценку ускорения расчета по явно-неявной схеме (9) относительно явной схемы. Один расчетный шаг по явно-неявной схеме на 6-10% медленнее на рассмотренных сетках, что подтверждает высокую эффективность гиперболической прогонки - алгоритма разрешения неявности.

Таким образом, применение явно-неявной схемы CABARET-INH существенно ускоряет расчеты на вычислительных сетках с высоким аспектным отношением ячеек, сохраняя высокое качество получаемых результатов.

Четвертая глава посвящена численному моделированию трехмерных течений неоднородной жидкости и переходу к моделированию течений в масштабах реальных морских акваторий. В начале главы внимание уделяется изменениям в явно-неявной численной схеме CABARET-INH при переходе к системе трехмерных уравнений динамики неоднородной жидкости. Численная схема остается явной вдоль горизонтальных направлений (OX , OY) и неявной по вертикали (OZ). Введенная неявность только вдоль вертикального направления и компактность вычислительного шаблона схемы КАБАРЕ позволяют сохранить алгоритм разрешения неявности, описанный ранее в третьей главе.

Далее приводятся результаты валидации численного алгоритма на лабораторных экспериментах статьи [22] (лабораторная установка рис. 3). Моделировались два эксперимента с гладкой поверхностью дна, отличающиеся плотностью соленой жидкости. В первом эксперименте использовалась плотность $\rho_1 = 1015 \text{ кг/м}^3$, во втором — $\rho_1 = 1025 \text{ кг/м}^3$ ($\rho_2 = 1000 \text{ кг/м}^3$).

Для количественного сравнения полученных положений фронта с экспериментальными данными построены графики максимального распространения фронта по каждому из горизонтальных направлений (x и y), показывающие ширину фронта распространения более плотной жидкости в правом резервуаре (рис. 4). Экспериментальные данные по двум постановкам, представленные в статье [22], ограничены первыми 8 с. Приведенные данные и качественное сравнение показывают хорошее совпадение результатов расчетов с экспериментальными данными. Наличие отклонений от эксперименталь-

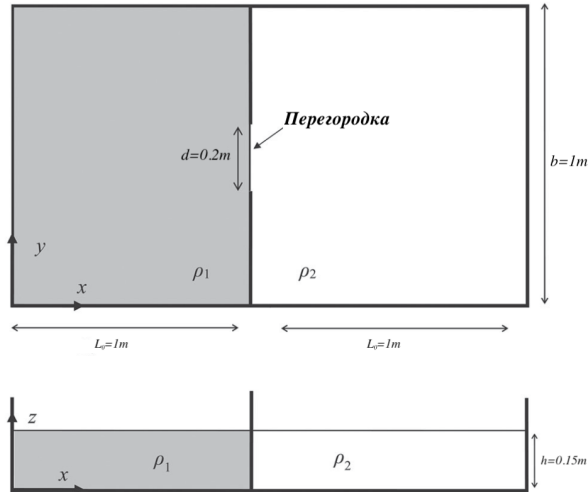


Рис. 3 — Схема экспериментальной установки, вид сверху и сбоку

ных данных может быть объяснено отсутствием модели учета выкатывания перегородки и погрешностью измерений самого эксперимента.

Перед переходом к моделированию течений в масштабах реальных морских акваторий рассматривается вопрос аппроксимации дифференциальных операторов, отвечающих за физические процессы которые необходимо учитывать на данных масштабах: вязкость, диффузия и сила Кориолиса. Добавленные процессы влияют только на балансные фазы схемы CABARET-INH и учитываются согласно методики расщепления по физическим процессам. Для сохранения эффективности явно-неявной схемы данные операторы аппроксимируются явно вдоль горизонтальных направлений и неявно по вертикали.

Описанная выше методика была опробована на задаче моделирования динамики Черного и Азовского морей. Не претендуя на точность и расчет всех физических процессов, влияющих на течения жидкости, целью данного моделирования была проверка робастности полученных численных алгоритмов.

Расчетная сетка по широтному и меридиональному направлениям содержит 286 и 159 ячеек соответственно (пространственное разрешение сетки 4 км). При этом в вертикальном направлении использовалась “эйлерова” сетка (сетка с зафиксированными внутренними гранями) с переменным количеством слоев до 36 слоев в наиболее глубоководных районах Черного моря.

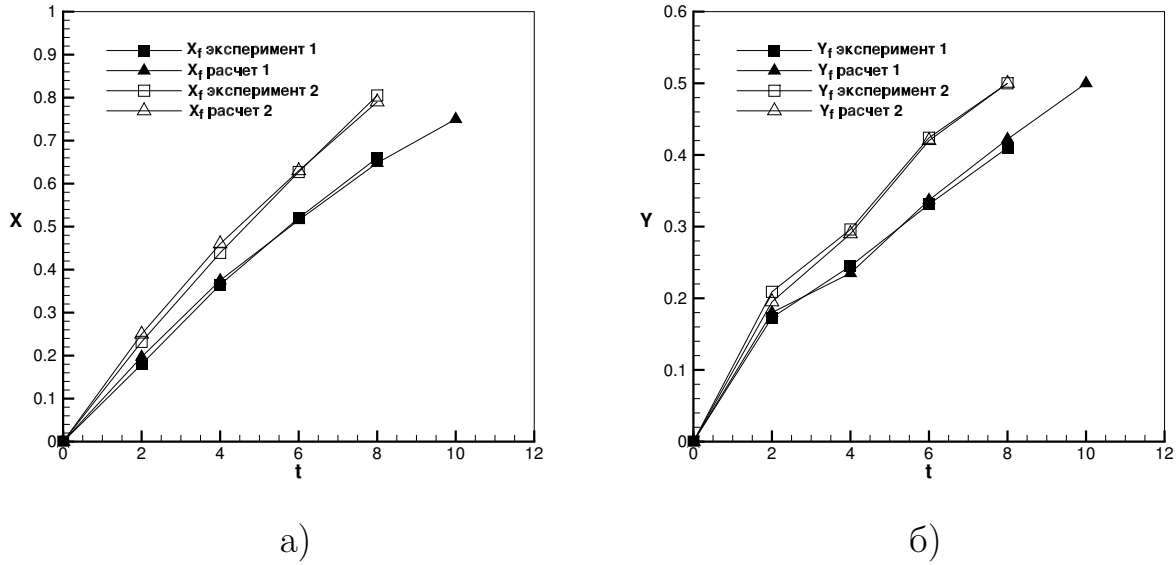


Рис. 4 — Численное (САВАРЕТ-ИНН) и экспериментальное максимальное положение фронта в зависимости от времени в эксперименте 1 ($\rho_1 = 1015$ кг/м³) и в эксперименте 2 ($\rho_1 = 1025$ кг/м³): вдоль осей: а) x ; б) y

Меридиональная и широтная компоненты вектора ветровой нагрузки получены из базы данных Era-Interim data. Батиметрия и начальные данные на 1 января 2006 года были предоставлены научной группой Залесного В. Б. и Гусева А. В. (ИВМ им. Г.И. Марчука РАН).

Был выполнен расчет динамики Черного моря с 1 января 2006 года до 31 декабря 2006 года. На рис. 5 приведены линии тока на глубине 5 метров по модели САВАРЕТ-ИНН. Качественное сравнение результатов расчета с основными течениями в данной акватории [23] показало, что численная модель воспроизводит основное Черноморское течение (Rim Current) с восточным и западным вихрями внутри него, а так же меньшие квазистационарные вихри: антициклон в районе Батуми и вихрь к северу от пролива Босфор. Таким образом, показана применимость построенного численного алгоритма САВАРЕТ-ИНН для расчетов в масштабах реальных морских акваторий.

В **заклучении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

- (1) Описана негидростатическая модель динамики жидкости со свободной поверхностью, основанная на гиперболизации системы уравнений Навье-Стокса с помощью приближения слабой сжи-

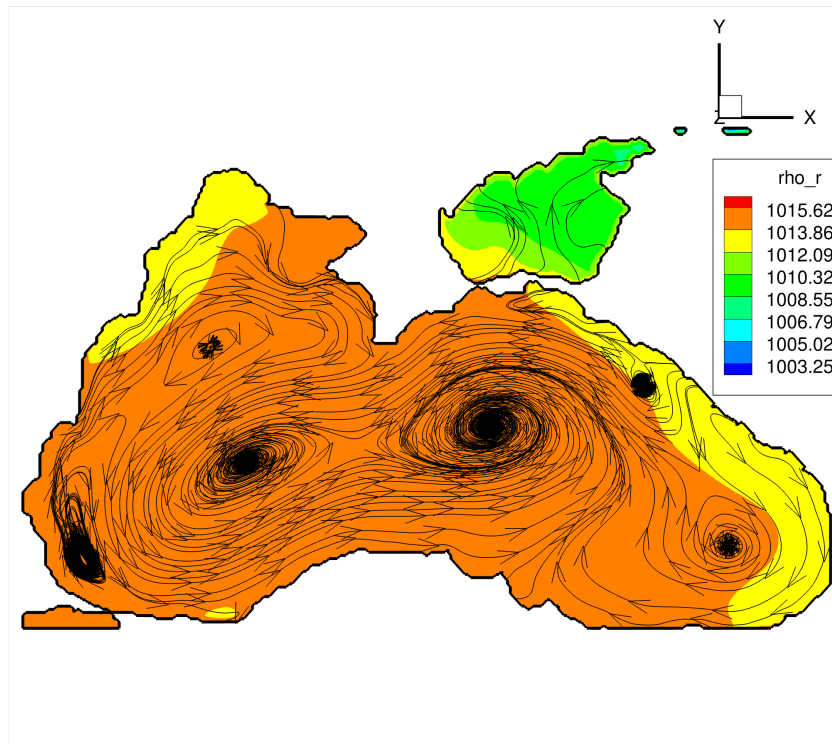


Рис. 5 — Линии тока на глубине 5 метров модели CABARET-INH 20.05.2006

маемости - ALE-HNS (Arbitrary Lagrangian-Eulerian Hyperbolic Navie-Stocks). Гиперболический тип полученной системы уравнений позволяет применять вычислительно эффективные явные схемы. Дифференциальная система уравнений выводится в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных, что помогает естественным образом учитывать положение свободной поверхности и использовать адаптивные по вертикали сетки при численном решении по данной системы.

- (2) На основе балансно-характеристической схемы КАБАРЕ построена явная численная схема CABARET-NH для дифференциальной модели ALE-HNS в двухмерной и трехмерной постановках и приведен алгоритм расчета по ней. Доказано свойство сбалансированности полученной схемы. Проведены верификационные расчеты.
- (3) Построена явно-неявная численная схема CABARET-INH для дифференциальной модели ALE-HNS в двухмерной и трехмерной постановках – явная вдоль горизонтальных направлений и неявная по вертикальному. Построенная схема позволяет снять ограничения на шаг по времени по вертикальному направлению,

что существенно увеличивает расчетный шаг по времени на сетках с большим аспектным отношением вычислительных ячеек. Приведен эффективный алгоритм расчета по построенной схеме на основе гиперболической прогонки.

- (4) Реализованы две версии программного комплекса - для явной и явно-неявной разностной схемы. Обе версии состоят из следующих модулей: построение сетки, формирование начальных данных (в том числе, из внешних источников), расчет течения жидкости, подготовка данных с результатами расчета для выдачи в графическом формате. Все модули распараллелены с помощью технологии MPI на произвольное число процессоров для расчета на параллельных кластерах.
- (5) Используя разработанные программные комплексы, проведена валидация построенных численных моделей на лабораторных экспериментах динамики стратифицированной жидкости. Результаты расчетов показывают хорошую качественную и количественную согласованность с экспериментальными данными. Проведена проверка робастности построенного численного алгоритма на задаче моделирования течений в Черном и Азовском морях.

Публикации автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

- A.1 Неявные обратимые по времени схемы КАБАРЕ для квазилинейных уравнений мелкой воды / В. М. Головизнин, Д. Ю. Горбачев, А. М. Колокольников, П. А. Майоров и др. // Вычислительные методы и программирование. — 2016. — Т. 17. — С. 402–414. [RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0.468], [0.9 / 0.8]

Работа опубликована в открытой печати. Автором построена численная схема, алгоритм ее разрешения и получены все основные результаты, научное руководство осуществлено В.М. Головизниным. Остальными соавторами предложен алгоритм построения графиков дисперсионных и диссипативных поверхностей.

- А.2 Моделирование динамики жидкости со свободной поверхностью в гравитационном поле схемой КАБАРЕ / Н. А. Афанасьев, В. М. Головизнин, П. А. Майоров, А. В. Соловьев // Математические заметки СВФУ. — 2022. — т. 29, № 4. — с. 77–94. [Scopus, SJR: 0.344], [1.3 / 0.6]

Работа опубликована в открытой печати. Все результаты получены автором, постановка задачи и научное руководство осуществлено А.В. Соловьевым и В.М. Головизниным. Вклад автора диссертации заключается в определении математической модели, построении основной численной схемы, разработке программной реализации. Соавтором Н. А. Афанасьевым предложен алгоритм учета сил поверхностного натяжения и его программная реализация.

- А.3 Явно-неявная схема CABARETI-NH для уравнений динамики слабосжимаемой жидкости / В. М. Головизнин, П. А. Майоров, Н.А. Афанасьев, П.А. Майоров, А.В. Соловьев // Вычислительные методы и программирование. — 2023. — Т. 24, № 2. — С. 152–169. [RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0.468], [1.3 / 1.2]

Работа опубликована в открытой печати. Все результаты получены автором, постановка задачи и научное руководство осуществлено А.В. Соловьевым и В.М. Головизниным. Вклад остальных соавторов заключается оцифровке результатов экспериментов.

- А.4 Явный численный алгоритм для уравнений негидростатической динамики жидкости на основе схемы КАБАРЕ / В. М. Головизнин, П. А. Майоров, П.А. Майоров, А.В. Соловьев, Н.А. Афанасьев // Математическое моделирование. — 2023. — Т. 35, № 5. —

С. 62–86. [RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0.559], [1.8 / 1.6]

Перевод: Explicit numerical algorithm for the nonhydrostatic fluid dynamics equations based on the cabaret scheme / V. M. Goloviznin, P. A. Mayorov, P. A. Mayorov, A. V. Solovjev, N. A. Afanasiev // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2023. — Vol. 15, no. 6. — P. 1008–1023. [Scopus, SJR: 0.286], [1.8 / 1.6]

Работа опубликована в открытой печати. Все результаты получены автором, постановка задачи и научное руководство осуществлено А.В. Соловьевым и В.М. Головизниным. Вклад остальных соавторов заключается в плодотворном обсуждении построенного автором численного алгоритма.

Список литературы

1. *Kurganov A., Petrova G.* Central-upwind schemes for two-layer shallow water equations // *SIAM Journal on Scientific Computing*. — 2009. — Vol. 31, no. 3. — Pp. 1742–1773.
2. Validation of the low dissipation computational algorithm CABARET-MFSH for multilayer hydrostatic flows with a free surface on the lock-release experiments / V. M. Goloviznin [et al.] // *Journal of Computational Physics*. — 2022. — Vol. 463. — P. 111239.
3. The GFDL global ocean and sea ice model OM4. 0: Model description and simulation features / A. Adcroft [et al.] // *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*. — 2019. — Vol. 11, no. 10. — Pp. 3167–3211.
4. *Korn P.* Formulation of an unstructured grid model for global ocean dynamics // *Journal of Computational Physics*. — 2017. — Vol. 339. — Pp. 525–552.
5. *Casulli V.* A semi-implicit finite difference method for non-hydrostatic, free-surface flows // *International journal for numerical methods in fluids*. — 1999. — Vol. 30, no. 4. — Pp. 425–440.

6. *Matsumura Y., Hasumi H.* Brine-driven eddies under sea ice leads and their impact on the Arctic Ocean mixed layer // *Journal of Physical Oceanography*. — 2008. — Vol. 38, no. 1. — Pp. 146–163.
7. A finite-volume, incompressible Navier Stokes model for studies of the ocean on parallel computers / J. Marshall [et al.] // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. — 1997. — Vol. 102, no. C3. — Pp. 5753–5766.
8. *Escalante C., Luna T. M. de* A general non-hydrostatic hyperbolic formulation for Boussinesq dispersive shallow flows and its numerical approximation // *Journal of Scientific Computing*. — 2020. — Vol. 83, no. 3. — P. 62.
9. Divergence correction techniques for Maxwell solvers based on a hyperbolic model / C.-D. Munz [et al.] // *Journal of Computational Physics*. — 2000. — Vol. 161, no. 2. — Pp. 484–511.
10. *Залесный В., Гусев А., Фомин В.* Численная модель негидростатической морской динамики, основанная на методах искусственной сжимаемости и многокомпонентного расщепления // *Океанология*. — 2016. — Т. 56, № 6. — С. 959–971.
11. *Головизнин В. М., Самарский А. А., Фаворский А. П.* Вариационный принцип получения уравнений магнитной гидродинамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 1981. — Т. 21, № 2. — С. 409–422.
12. *Головизнин В. М., Сабитова А., Самарская Е. А.* О полностью консервативных локально-баротропных разностных схемах газовой динамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных // *Дифференциальные уравнения*. — 1985. — Т. 21, № 7. — С. 1144–1155.
13. *Gusev A., Diansky N.* Numerical simulation of the world ocean circulation and its climatic variability for 1948–2007 using the INMOM // *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. — 2014. — Vol. 50. — Pp. 1–12.
14. NEMO ocean engine / G. Madec [et al.]. — 2017.
15. Elements of the modular ocean model (MOM) / S. M. Griffies [et al.] // *GFDL Ocean Group Tech. Rep.* — 2012. — Vol. 7, no. 620. — P. 47.
16. MITgcm documentation / A. Adcroft [et al.]. — 2018.

17. *Einfeldt B.* On Godunov-type methods for gas dynamics // SIAM Journal on numerical analysis. — 1988. — Vol. 25, no. 2. — Pp. 294–318.
18. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов / В. Головизнин [и др.]. — 2013.
19. *Benjamin T. B., Ursell F. J.* The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. — 1954. — Vol. 225, no. 1163. — Pp. 505–515.
20. An experimental investigation of density-stratified inertial gravity currents / C. Gladstone [et al.] // Sedimentology. — 2004. — Vol. 51, no. 4. — Pp. 767–789.
21. *Huppert H. E., Simpson J. E.* The slumping of gravity currents // Journal of Fluid Mechanics. — 1980. — Vol. 99, no. 4. — Pp. 785–799.
22. Experimental and numerical simulation of three-dimensional gravity currents on smooth and rough bottom / M. La Rocca [et al.] // Physics of Fluids. — 2008. — Vol. 20, no. 10.
23. Circulation in the surface and intermediate layers of the Black Sea / T. Oguz [et al.] // Deep Sea Research Part I: Oceanographic Research Papers. — 1993. — Vol. 40, no. 8. — Pp. 1597–1612.