

**ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Давыдова Александра Вадимовича
на тему: «Спектральный анализ интегродифференциальных операторов,
возникающих в теории вязкоупругости»
по специальности 1.1.1 – «Вещественный, комплексный и
функциональный анализ»**

Диссертационная работа Давыдова Александра Вадимовича «Спектральный анализ интегродифференциальных операторов, возникающих в теории вязкоупругости» посвящена исследованию интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Изучение указанных уравнений автором осуществляется с помощью спектрального анализа оператор-функций, которые являются символами исходных уравнений. Спектральный анализ таких операторных функций, основывается на идеях, восходящих к работам М.В. Келдыша. Эти идеи получили развитие в работах Дж. Э. Аллахвердиева, Г.В. Радзиевского и А.И. Милославского, посвященных изучению дробно-мероморфных оператор-функций, обобщением которых являются изучаемые в диссертации символы интегродифференциальных уравнений. Результаты о разрешимости и оценках решений интегро-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве получены в работах В.В. Власова, Н.А. Раутиан и соавторов, Н.Д. Копачевского, Д.А. Закоры, М. Fabrizzio. Спектральный анализ символов данных интегродифференциальных уравнений проводится в работах В.В. Власова, Н.А. Раутиан, С.А. Иванова, Н.Д. Копачевского и Д.А. Закоры. Кроме того, рассматривались задачи управления и обратные задачи для этих уравнений в работах С.А. Авдониной, С.М. Dafermos, L. Pandolfi, С.А. Иванова. Отметим, что изучаемые абстрактные интегро-дифференциальные уравнения могут быть реализованы как интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в задачах теории вязкоупругости и

теплопроводности, теории акустики и усреднения. С помощью таких уравнений моделируются, например, колебания вязкоупругой пластины в сверхзвуковом потоке жидкости или газа в рамках поршневой модели.

Диссертация общим объёмом 121 стр. состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Во введении даётся общая характеристика работы, постановка задач, а также проводится обзор исследований, проводившихся ранее по теме диссертации.

Первая глава диссертации посвящена уравнению колебания вязкоупругой пластины в сверхзвуковом потоке жидкости или газа. Данное уравнение представляет собой уравнение Гуртина-Пипкина, модифицированное относительно компактным возмущением.

В начале первой главы приведена постановка задачи Коши для абстрактного интегродифференциального уравнения второго порядка, введены необходимые для дальнейшего исследования определения и обозначения, а также приведены результаты из теории пространств Соболева и Харди, на которые диссертант опирается в своих исследованиях.

Приводится уравнение колебания вязкоупругой пластины в сверхзвуковом потоке жидкости или газа из теории вязкоупругих сред. Данное уравнение затем переписывается в операторном. Автор исследует конкретный вид дифференциальных операторов с граничными условиями, а также доказывает важные свойства данных операторов, служащие основой для исследования уравнения в операторном виде в дальнейшем.

Далее автором установлена корректная разрешимость задачи Коши, ассоциируемой с данным уравнением в пространствах Соболева. С помощью анализа резольвенты символа уравнения получены результаты о слабой разрешимости уравнения в пространствах Соболева с экспоненциальным весом. Кроме того, А. В. Давыдовым получено условие асимптотической устойчивости решений, а также оценка снизу критической скорости потока, при которых колебания перестают быть устойчивыми в зависимости от конкретных физических параметров изначальной задачи.

В первой главе также исследуется асимптотика спектра символа уравнения. Используя операторный аналог теоремы Руше, автор устанавливает асимптотику спектра символа уравнения и показывает связь с асимптотикой спектра символа немодифицированного уравнения Гуртина-Пипкина.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию уравнения Гуртина-Пипкина. В данной главе представлены следующие результаты исследования: вычисление асимптотики не вещественного спектра символа данного уравнения в случае ядер релаксации, представимых в виде интеграла Стильеса, исследования разрешимости данного уравнения в шкале пространств, а также доказательство возможности наличия бесконечного не вещественного спектра при учете трения Кельвина-Фойгхта.

Автор приводит постановку задачи Коши для уравнения Гуртина-Пипкина, доказывает связь данного уравнения с уравнением колебания вязкоупругой пластины, описанной в первой главе, вводит необходимые для дальнейшего изложения определения и обозначения.

Во второй главе исследуется асимптотика не вещественного спектра символа уравнения в случае ядер релаксации, представимых в виде интеграла Стильеса. В работе рассматриваются ядра релаксации с полиномиальным стремлением к бесконечности в нуле и экспоненциальным убыванием на бесконечности. Данные ядра используются во многих моделях теории вязкоупругости и теории распространения тепла в средах с памятью. Автор приводит асимптотику не вещественного спектра символа уравнения Гуртина-Пипкина для ядер релаксации, представимых в виде интеграла Стильеса. Результаты автора являются существенным развитием результатов, установленных А.Э. Ерёменко и С.А. Иванова.

Также во второй главе автором приводятся результаты о разрешимости в шкале пространств уравнения Гуртина-Пипкина. Диссертант определяет и приводит основные свойства шкалы пространств, связанных с неограниченным оператором уравнения. Далее с помощью оценок нормы

резольвенты символа уравнения автором установлена сильная разрешимость уравнения для пространств Соболева с $\gamma = 0$. Для ядер релаксации, представляющих собой бесконечную сумму убывающих экспонент с полиномиальными коэффициентами, существенно ослабляются требования, предъявляемые к начальным данным для получения сильного решения. Кроме того, в данном разделе представлена теорема, посвященная слабой разрешимости уравнения. На основании трех представленных выше результатов автор устанавливает корректную разрешимость в шкале пространств уравнения Гуртина-Пипкина.

В заключительной части второй главы рассмотрено уравнение Гуртина-Пипкина с внутренним трением, или трением Кельвина-Фойгхта. Проведен анализ невещественного спектра символа данного уравнения – рассмотрены случаи, когда эта часть конечна и когда спектр содержит счётное число невещественных собственных значений, приведены конкретные примеры ядер релаксации для данного оператора, когда невещественный спектр бесконечен. Данный результат обобщает исследования А.Э. Ерёмченко и С.А. Иванова и дает ответ на вопрос, возможно ли наличие бесконечного невещественного спектра символа данного уравнения.

В заключении кратко сформулированы полученные новые результаты исследования и перспективные направления дальнейших исследований по теме.

При работе над диссертацией автор продемонстрировал уверенное владение методами спектральной теории, комплексного анализа. Тематика диссертации является актуальной и тесно связана с приложениями.

Данные результаты изложены в 5 научных статьях, опубликованных в рецензируемых журналах, входящих в базы данных Scopus и Web of Science. Результаты диссертации обсуждались на ряде научно-исследовательских семинаров, а также излагались на международных конференциях.

В тексте диссертации имеется незначительное количество опечаток и неточностей, нарушений правил пунктуации. Кроме того, принадлежность

функции $u(t)$ классу $L_{2,\gamma}([0, +\infty), H)$ в тексте диссертации обозначается как $u(t) \in L_{2,\gamma}([0, +\infty), H)$. Это обозначение двусмысленно, так как может обозначать также то, что значение функции u в точке t принадлежит классу $L_{2,\gamma}([0, +\infty), H)$. Для определенности следует обозначать принадлежность функции $u(t)$ классу $L_{2,\gamma}([0, +\infty), H)$ как $u(\cdot) \in L_{2,\gamma}([0, +\infty), H)$.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.1 – «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена, согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Давыдов Александр Вадимович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 – «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник отдела вычислительной физики и кинетических уравнений ФГУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук»

Сакбаев Всеволод Жанович

29.11.2022

Контактные данные:

тел. +7 499 978-13-14, e-mail: fumi2003@mail.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом

защищена диссертация:

01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Адрес места работы:

125047, Москва, Миусская пл., д.4, ИПМ им. М.В.Келдыша РАН

ФГУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук»

Тел: +7 499 978-13-14; e-mail: office@keldysh.ru

Подпись ведущего научного сотрудника

ФГУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук»

В.Ж. Сакбаева удостоверяю:

Ученый секретарь ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

А.А. Давыдов

01.12.2022