

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи



Богуш Игорь Андреевич

**Ультракомпактные объекты в скалярно-тензорных
теориях гравитации, мотивированных теорией струн**

Специальность 1.3.3. — «Теоретическая физика»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., проф.
Гальцов Дмитрий Владимирович

Москва — 2022

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Расширенные теории гравитации, мотивированные теорией струн и супергравитацией	28
1.1 Теория Эйнштейна-Максвелла с дилатоном и аксионом	29
1.2 Теория Эйнштейна с дилатоном и антисимметричной формой	30
1.3 α -модель Эйнштейна-Максвелла с дилатоном	31
1.3.1 $\alpha^2 = 3$ модель Эйнштейна-Максвелла с дилатоном	32
1.4 Скалярно-тензорные теории гравитации с минимальной связью	32
Глава 2. Методы генерации решений в скалярно-тензорных теориях гравитации	34
2.1 Сигма-модель для гравитации Эйнштейна с набором полей Максвелла и скалярами	34
2.2 Скрытые симметрии модели ЭМД	35
2.2.1 Сигма-модельное представление	35
2.2.2 Подгруппа преобразований Элерса-Харрисона для КК ЭМД	36
2.2.3 Матричное представление	38
2.2.4 Параметризация зарядов	41
2.3 Преобразования для модели скалярно тензорной теории гравитации	42
2.3.1 Скрытые симметрии сигма-модели	42
2.3.2 Преобразования Клемана	43
2.3.3 Преобразования Эриша-Гюрсеса	46
2.3.4 Генерация высших скалярных мультиполей	47
2.4 Сигма-модель для гравитации Эйнштейна с антисимметричной формой и дилатоном в произвольной размерности	47
2.4.1 Преобразования Харрисона для гипербран	49
Глава 3. Генерация и анализ решений	51
3.1 Статичные дионы с НУТ и независмым дилатонным зарядом в КК ЭМД	51

3.2	Статичные дионы с НУТ и вырожденной зарядовой матрицей в КК ЭМД	58
3.2.1	Три дилатонных ветви	63
3.2.2	Экстремальные решения	70
3.2.3	Окисление до пятимерных решений и пятимерные кротовые норы	72
3.3	Общее стационарное решение сгенерированное из решения Керр-НУТ в КК ЭМД	76
3.4	Статические реинкарнации решений в ЭМС	86
3.5	Генерация стационарных решений в ЭМС	90
3.5.1	Применение преобразований Клемана к деформированному решению Фишера	90
3.5.2	Фантомные вращающиеся обобщения решений Фишера	92
3.6	Ложные вращающиеся решения скалярно-тензорных теорий	97
3.7	Браны с независимым скалярным зарядом в α -ЭМД	100
3.7.1	Получение заряженной ФЯНВ-браны	100
3.7.2	ФЯНВ-браны с параметром деформации	106
Глава 4. Термодинамика и формула Смарра		109
4.1	Структура стержней	109
4.2	Заряды Комара	113
4.3	Длина и энтропия стержня	117
4.4	Примеры	118
4.4.1	Вращающийся ЭМД дион с НУТ	118
4.4.2	Вращающийся ЭМДА дион с НУТ	121
Глава 5. БПС-решения		127
5.1	Ложная суперсимметрия в ЭМД	127
5.1.1	Вырожденность дилатинного уравнения	128
5.1.2	Вырожденность t -компоненты гравитинного уравнения	129
5.1.3	Ограничение на заряды	130
5.1.4	Примеры	131
5.2	БПС-браны	133

Глава 6. Геодезические, пробные скалярные поля и скрытые симметрии	136
6.1 Геодезические на фоне статичных решений КК ЭМД	136
6.1.1 Геодезические в четырехмерной интерпретации	136
6.1.2 Геодезические в пятимерной интерпретации	143
6.1.3 Редукция геодезических уравнений из 5D в 4D	146
6.2 Геодезические и пробное скалярное поле на фоне гипербраны со скалярными волосами	148
6.2.1 Геодезические	148
6.2.2 Пробное скалярное поле	151
6.3 Гравитационная тень сингулярных вращающихся решений со скалярным зарядом	158
6.3.1 Базис локального наблюдателя и сохраняющиеся величины	158
6.3.2 Алгоритм получения гравитационных теней	160
6.3.3 Изображения гравитационных теней	163
6.4 Генерация конформных тензоров Киллинга в расслоенных пространствах	171
6.4.1 Формализм	171
6.4.2 Послойно-редуцируемые тензоры Киллинга	175
6.4.3 Связь с тенями черных дыр и других УКО	182
6.4.4 Применение и примеры	190
Заключение	198
Словарь терминов	207
Список литературы	209

Введение

Общая теория относительности (ОТО) [1; 2] уже более века является отправной точкой в фундаментальных исследованиях по гравитации. Проверке ОТО были посвящены многочисленные наблюдения и эксперименты [3]. Экспериментальные подтверждения ОТО можно разделить на две группы: эксперименты в земных или околоземных условиях, а также наблюдения за ближним и дальним космосом. Наиболее значимыми эффектами, которые подтверждают правильность ОТО являются: гравитационное замедление времени, задержка сигнала (эффект Шапиро), гравитационное красное смещение, гравитационное отклонение света, геодезическая прецессия и прецессия перигелия, увлечение инерциальных систем вращающимися телами. Кроме того, наблюдения за бинарными системами косвенно подтверждают существование гравитационных волн. Апофеозом стала прямая регистрация гравитационных волн наземными средствами [4]. С недавнего времени, научному сообществу стало доступно и прямое наблюдение за ультракомпактными объектами (УКО) с помощью радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой [5; 6]. Последние два типа наблюдений позволяют приблизиться к разгадке самых смелых предсказаний ОТО – существование черных дыр и гравитационных волн.

Несмотря на большой массив данных, подтверждающих ОТО, существует и ряд нерешенных проблем: построение теории квантовой гравитации, проблемы причинности и сингулярностей, проблемы кривых вращения галактик и ускоренного расширения Вселенной, приводящие к концепциям темной материи и темной энергии, и др. Кроме того, экспериментальное обнаружение бозона Хиггса актуализирует вопрос поиска теории великого объединения взаимодействий, включающей гравитацию, а также выяснение существования фундаментальных скалярных полей.

В поиске альтернатив общей теории относительности возникли скалярно-тензорные теории гравитации [7–10]. Особую популярность получили подходы, основанные на теории суперструн, включающей модели супергравитации и теории Калуцы-Клейна. Со скалярно-тензорными теориями также связаны теории с неминимальной связью [11] и теории с кручением [12; 13]. В зависимости от способа перехода к низкоэнергетическому пределу и редукции к низшим размерностям, а также выбора типа струн и способа усечения этих теорий, можно

получить целую плеяду эффективных теорий, бозонный сектор которых включает некоторый набор скалярных и векторных полей.

В данной работе рассматриваются модели гравитации с наборами скалярных и векторных абелевых полей, которые могут иметь в действии для векторных полей префактор зависящий от скалярных полей, а именно, теория Эйнштейна-Максвелла с дилатоном (ЭМД), теория Эйнштейна-Максвелла с дилатоном и аксионом (ЭМДА), скалярно-тензорная теория гравитации с минимальной связью (ЭМС), теория Эйнштейна с антисимметричной формой и дилатоном (ЭАД). Кроме того, данные теории связаны с другими теориями через конформные/дисформные преобразования и другие дуальности. Многие теоретические вопросы гравитации и соответствующие математические инструменты были разработаны для более простых моделей гравитации, например, чистой теории гравитации Эйнштейна, либо теории Эйнштейна-Максвелла с электромагнитным полем. В данной работе рассматривается более широкий круг моделей, включающих также скалярные поля. Основной целью была разработка новых методов генерации точных решений, а также получение и анализ новых решений, которые могут быть использованы как модели ультракомпактных астрофизических объектов. При этом мы не ограничивались решениями для регулярных черных дыр, но также стремились изучить сингулярные решения, к которым в последнее время наблюдается возрастающий интерес. Были рассмотрены вопросы, которые либо дополняют понимание структуры расширенных теорий гравитации, либо обобщают, (а некоторых случаях создают новые) методы решений. Также были изучены свойства решений в пространстве параметров, в частности взаимоотношение между регулярными и сингулярными решениями, дана более полная, чем ранее известная в литературе, классификация последних. Построена термодинамика черных дыр с сингулярностями на оси для наиболее широкого класса рассматриваемых моделей. Предложена методология поиска решений с сохранением части суперсимметрии (БПС-решения) для так называемой ложной суперсимметрии в ЭМД. Изучены геодезические кривые пробных частиц, а также динамика пробного скалярного поля в контексте проблем причинности и сингулярностей. Построен численный алгоритм с применением технологии параллельных вычислений CUDA для получения релятивистских изображений и теней УКО в различных моделях гравитации, а также рассмотрены тени УКО в ЭМС. Проведена работа по изучению способов генерации конформных тензоров Киллинга

с помощью подбора слоения пространства-времени. Опишем каждое из этих направлений более подробно.

Пятимерная гравитация сводится к модели ЭМД с фиксированной дилатонной константой $\alpha = \sqrt{3}$ при компактификации пятой координаты к циклической S^1 (далее КК ЭМД). Классические вакуумные решения пятимерной гравитации, независящие от пятой циклической координаты, широко обсуждались в прошлом, например [14–22]. Другие важные работы, развивающие математический аппарат и изучающие точные решения, включают в себя работы [23–30] и др. В прошлом основной интерес заключался в изучении регулярных черных дыр данной теории и их связь с супергравитацией и теорией струн [31–37]. Для регулярной черной дыры дилатонный заряд не является независимым параметром в соответствии с известной теоремой об отсутствии скалярных волос. Позже, новые обобщения и расширения данной области начали привлекать к себе внимание, например, решения, зависящие от пятой координаты с асимптотикой пятимерного вакуума [38–41], черные дыры со скалярными волосами в теории ЭМС с более общей функцией связи [42–45], решения применимые для голографии [46; 47] и решения для астрофизического применения [48–50]. Другим направлением оказались решения с голыми сингулярностями. Если прежде подобные решения полностью отбрасывались как нефизические, с недавних времен они находят применение в моделировании метрик УКО вне парадигмы Керра [51] или как затравочные решения для техник генерации точных решений в модифицированной гравитации [11; 52; 53]. Одним из типов сингулярностей является струна Мизнера, которая с необходимостью появляется в решениях с параметром Ньюмена-Унти-Тамбурино (НУТ). В [54] было предложено, что в рамках интерпретации Боннора (струна Мизнера порождена некоторыми материальными источниками) такие решения могут быть реабилитированы как потенциальные кротовые норы нового типа в теории Эйнштейна-Максвелла [55].

Учитывая возможную физическую ценность таких сингулярных решений и решений с параметром НУТ, в работе произведен пересмотр более общего класса решений теории КК ЭМД, в которых дилатонный заряд предполагается независимым. Теория рассмотрена в контексте представления сигма-модели наподобие [15; 19; 22; 26]. В четырех измерениях теория КК эквивалентна четырехмерной теории ЭМД [56] с дилатоном, чья константа связи равна $\alpha = \sqrt{3}$. В качестве метода генерирующего новые стационарные решения для $\alpha = \sqrt{3}$ бу-

дет рассмотрена дальнейшая редукция до трех-мерной сигма-модели [23–26] на косетное пространство $G = SL(3, R)/SO(2, 1)$. Оказывается, теория Эйнштейна-Максвелла и теории КК являются единственными представителями семейства теорий ЭМД (с общей дилатонной константой связи), которые допускают косетное представление [56] (решения с общей α изучались численно, в частности в [29; 57]). Метод геодезических для решения уравнений сигма-модели впервые введен в работе Крамера и Нойгебауера [58], в котором потенциалы параметризованы так называемой зарядовой матрицей $A \in SL(3, R)$. Используя данный подход, Рашид [22] получил общее вращающееся дионное решения без НУТ-заряда. Более детальное изучение термодинамики, симметрий и геометрии вблизи горизонта было предложено в работе [59].

В то же время, ряд некоторых вопросов связанных с пространством решений в КК ЭМД оставался неизученным, что решается в данной работе. Перечислим такие вопросы, представленные в данной работе. Во-первых, в большинстве работ рассматриваются только дионные решения без НУТ-заряда. Во-вторых, большинство метрик полученных с помощью сигма-модели соответствуют вырожденным матрицам A , при этом ограничение $\det A = 0$ рассматривается как условие космической цензуры [34]. Как будет показано далее, связь между регулярностью метрики и вырожденностью матрицы A не столь однозначна, а условие $\det A = 0$ является лишь необходимым, но не достаточным. Заряды локально асимптотически плоских решений в ЭМД, которые будут рассмотрены далее, включают в себя массу M , параметр НУТ N , электрический и магнитный заряды Q, P и дилатонный заряд D . Для решений с вырожденной зарядовой матрицей, дилатонный заряд не является независимым параметром в соответствии с теоремой об отсутствии волос в скалярно-тензорных теориях гравитации [60–62]. Но модель ЭМД также позволяет получить решения без электрического и магнитного зарядов и ненулевым дилатонным зарядом. Такие решения известны как решения Фишера-Яниса-Ньюмена-Винкура (ФЯНВ) [63–67]. Эти решения обладают сингулярным “горизонтом” и завоевывают широкую популярность в качестве простой модели голых сингулярностей [68], которые могут описывать наблюдаемые свойства компактных объектов за рамками Керровской парадигмы [51]. Решения ФЯНВ соответствуют определенному семейству невырожденных зарядовых матриц статического сектора ЭМД [22]. Но полное обобщение решения ФЯНВ на теорию КК ЭМД не было получено до сих пор. В работе построены общие локально асимптотиче-

ски плоские дионные решения с независимым дилатонным зарядом и изучены различные частные случаи.

Помимо этого, в работе показано, что подкласс решений, на который наложено условие $\det A = 0$, также содержит сингулярные решения. Условие вырожденности зарядовой матрицы имеет вид кубического уравнения относительно дилатонного заряда D . В работе показано, что условие всегда имеет три корня (с учетом кратности), соответствующие трем ветвям КК дионов. Одна из ветвей содержит ранее известные черные дыры, в то время как другие две (связанные электромагнитной дуальностью) можно рассматривать как новые голые сингулярности. Другой интересной обнаруженной чертой является периодичность некоторых свойств решений в пространстве параметров. А именно, введя два перемешивающих угла для электрического/магнитного зарядов и массы/НУТ-параметра, было обнаружено, что кубическое уравнение содержит лишь определенную линейную комбинацию этих углов, по которой уравнение периодично, что влечет за собой периодичность свойств решений в пространстве параметров относительно данной комбинации.

Напомним, что электрические и магнитные конфигурации в КК ЭМД связаны дискретной дуальностью, которая обращает знак дилатона. Соответствующие метрики четырехмерного пространства схожи друг с другом. Но с точки зрения пятимерной картины, они значительно отличны друг от друга: электрическое решение сингулярно, а магнитный монополь регулярен и соответствует произведению евклидовой Тауб-НУТ метрики и оси времени. Ходос и Детвейлер [16] обнаружили другое пятимерное регулярное решение, которое имеет лишь электрический заряд в четырех измерениях, но представляет пятимерную кротовую нору. Но вопрос дионного и НУТ обобщения такого решения оставался неизученным, и если такие решения существуют, какова их четырехмерная интерпретация. С другой стороны, недавно было показано [55], что четырехмерное решение Брилла, которое представляет из себя по сути решение Райсснера-Нордстрема теории Эйнштейна-Максвелла с НУТ-зарядом, становится четырехмерной кротовой норой в сверхзаряженном случае. Иными словами, голая сингулярность Райсснера-Нордстрема преобразуется в кротовую нору, если добавить к ней НУТ-параметр. Тогда, возникает вопрос, если сверхэкстремальные невращающиеся черные дыры или голые сингулярности в КК ЭМД могут быть аналогичным образом преобразованы в кротовые норы. В работе автора диссертации [69] показано, что ответ отрицательный: в

отличие от теории Эйнштейна-Максвелла, НУТ-параметр в КК ЭМД не преобразуем сверхэкстремальные голые сингулярности в кротовые норы. Однако, в рамках пятимерной интерпретации, такие кротовые норы могут существовать. Они обобщают электрические решения Ходоса-Детвейлера на более общий класс решений с четырьмя независимыми параметрами, которые ограничиваются двумя неравенствами.

Также, с целью изучению возможных проблем в окрестности струны Мизнера, рассмотрены геодезические на фоне полученных решений. Хотя решения с НУТ-зарядом имеют ряд проблем интерпретационного характера в связи с существованием региона с нарушением причинности в окрестности струны Мизнера, в работе [55] было показано для теории Эйнштейна-Максвелла, что среди замкнутых времениподобных кривых не существует геодезических. Будет рассмотрен аналогичный вопрос для теории КК ЭМД.

Для решений с вырожденной зарядовой матрицей с ненулевым НУТ зарядом рассмотрены их вращающиеся обобщения, найденные ранее Торбуновым [69; 70]. Показано, что для регулярной ветви решений, такие решения всегда физичны. Для двух же других ветвей, решения кажутся на первый взгляд нефизичными, но допускают комплексификацию параметра вращения, которое возвращает решение к физическому. При этом условие экстремальности решений, которое выражает параметр вращения через другие заряды приводит к тому, что в сингулярных ветвях решений экстремальными являются лишь решения с нулевым моментом вращения. Сверхэкстремальные вращающиеся решения в четырехмерной интерпретации допускают существование кротовых нор с кольцевыми сингулярностями.

Далее в работе рассмотрена общая теория относительности Эйнштейна с минимально связанным безмассовым скалярным полем (ЭМС), которая недавно вызвала новый интерес ввиду различных дуальностей, связывающих эту теорию с неминимальными скалярно-тензорными теориями, такими как Хорндески и вырожденными скалярно-тензорными теориями высшего порядка (DHOST) [11; 52]. Этот интерес дает новую жизнь знаменитому фишеровскому решению ЭМС [63], неоднократно переоткрытому многими авторами [64–66; 71–76], в частности, Янисом, Ньюменом и Веникуром [66; 77] ФЯНВ (или FJNW) (эквивалентность найденных решений показана в [74; 75], см. также [67], а также решению Бочаровой, Бронникова и Мельникова [78]. Благодаря конформным и дисформным дуальностям сингулярные решения имеют новую

интерпретацию в альтернативных теориях [11; 53; 79]. Поэтому интересно найти новые физически релевантные решения для минимальной скалярной теории Эйнштейна и, прежде всего, наделить решение Фишера вращением. Это оказалось нетривиальной задачей.

Более ранняя попытка ввести угловой момент в ФЯНВ была предпринята в [80] с использованием алгоритма Яниса-Ньюмана (ЯН) [81] (подробное обсуждение этого метода см. в [82]). Ввиду простоты решения, полученного в работе [80], оно неоднократно применялось в астрофизическом контексте, например, [51; 83–85]. Но стоит отметить, что метод ЯН изначально был предложен просто как формальный трюк, который генерирует метрику Керра из решения Шварцшильда. Хотя этот алгоритм позже был проверен в различных других теориях [82], не было дано строгого математического доказательства его справедливости в общем случае, особенно в скалярно-тензорных теориях. Явная проверка [86] выполнения некоторых уравнений Эйнштейна для метрики из работы [80] привела к отрицательному выводу (см. также [87]). Однако, поскольку это решение до сих пор используется в приложениях [51; 85], мы снова возвращаемся здесь к проблеме его справедливости, подтверждая результат работы [86].

В последнее время решение ФЯНВ стало популярным в четырех измерениях, для моделирования отклонений от стандартной парадигмы физики черных дыр в скалярно-тензорных теориях [83; 88–90]. Были изучены геодезические, траектории заряженных частиц, аккреционные диски в ФЯНВ и др. [91–93]. Для наблюдений были сформулированы некоторые предсказания, которые следует учитывать в астрофизике в поисках новой физики. Дополнительный интерес к ФЯНВ связан с тем, что его аналог в модифицированных моделях гравитации, таких как Хорндески или DHOST [11; 52; 53; 79; 94–96], может дать несингулярное решение этих теорий [52; 97; 98].

Недавно были предложены и другие стационарные решения минимальной скалярной теории Эйнштейна [99], одно из которых асимптотически плоское. Оно имеет керроподобную метрику, но стремится к несферическому решению Пенни [65] в статическом пределе, поэтому его нельзя рассматривать как истинно вращающееся решение ФЯНВ.

Кратко упомянем некоторые другие ранее полученные результаты. В рамках теории Бранса-Дикке (БД) было предпринято несколько попыток построить вращающееся решение (и более общие, наделенные параметром Ньюмана-Унти-Тамбурино (НУТ)) [100–102] с использованием формы Киннерсли

полевых уравнений в БД. Эти решения не воспроизводят решение ФЯНВ в Эйнштейновской системе отсчета. Для общих скалярно-тензорных теорий была разработана классификация решений и проанализирована их стабильность [103]. Особый интерес вызывают кротовые норы в скалярно-тензорных теориях с фантомным скалярным полем [104–107]. Наиболее полный обзор различных решений (включая решения с поправками для идеальной жидкости, электровакуумные решения) для общего класса скалярно-тензорных теорий в контексте вопросов черных дыр, голых сингулярностей, кротовых нор, их стабильности и космологии дан в работах [8–10]. В [108] также была предложена вращающаяся версия аналога решения ФЯНВ в БД с использованием трюка ЯН, которую мы здесь также проверяем.

Несколько математически строгих методов решения уравнений Эйнштейна основаны на скрытой симметрии и их размерной редукции. Скрытые симметрии статических уравнений ЭМС были обнаружены давно [67; 76; 109]. Здесь мы даем им современную интерпретацию в терминах трехмерной σ -модели, полученной ранее в контексте более общей теории Эйнштейна-Максвелла с дилатоном [56]. Различные родственные методы генерации для минимальных скалярных систем Эйнштейна и Эйнштейна-Максвелла были предложены в прошлом на основе дальнейшей редукции размерности до двух измерений. Мы напомним здесь некоторые из них, а затем расширим их набор, включив в него метод, предложенный Клеманом [110] с помощью преобразований Клемана (ПК), которые генерируют вакуумное решение Керра из Шварцшильда, используя симметрии уравнений теории Эйнштейна-Максвелла. В предложенном автором подходе поле Максвелла вводится как вспомогательное на промежуточном этапе расчетов. Обобщая этот подход для включения минимального скалярного поля, мы получаем новые вращающиеся обобщения решения ФЯНВ. Оказывается, для успешного применения ПК в присутствии скалярного поля необходимо комбинировать ФЯНВ с решением Зипоя-Вурхиза (ЗВ) [111; 112], имеющим аналогичную структуру в сфероидальных координатах. Мы также используем технику, предложенную Эришом и Гюрсесом [113] (ЭГ-преобразование), которые заметили, что стационарные аксиально симметричные решения ЭМС можно разделить на чисто электровакуумную часть плюс некоторые дополнительные слагаемые. Для аксиально симметричного вращающегося вакуумного решения мы получаем его обобщение с некоторым нетривиальным скалярным полем.

Статическое решение ФЯНВ было отправной точкой для других обобщений: для произвольных размерностей [114], для теории Эйнштейна-Максвелла [71], для теории ЭМД [35], и они всегда приводили к сингулярным метрикам. Заметим, что объекты с сингулярными горизонтами не могут появиться в вакууме [77], но обычно встречаются в теориях со скалярным полем. Кроме того, будет показан способ генерации комбинации решений ЗВ и ФЯНВ, используя технику σ -модели. Также, будет показана связь между вращающимся решением ФЯНВ с метрикой Томиматсу-Сато (ТС) в случае фантомных скалярных полей.

Далее рассмотрим супергравитационные дилатонные p -браны, которые являются решениями уравнений ЭАД [115–117]. Как известно, электрическая или магнитная однозарядная асимптотически плоская брана с изотропным поперечным пространством, удовлетворяющим условию космической цензуры, определяется тремя параметрами: натяжением, зарядом Пейджа и асимптотическим значением дилатона [118]. Скалярный дилатонный заряд тоже присутствует, но он носит вторичный характер и не является свободным параметром в соответствии с известной теоремой об отсутствии волос в случае $p = 0$. Черные дилатонные браны имеют два горизонта, при этом внутренний горизонт сингулярен. Таким образом, их экстремальный предел имеет сингулярный горизонт, хотя и проявляет суперсимметрию. Однако оказывается, что геодезическое расстояние до сингулярности бесконечно, поэтому экстремальный горизонт не наблюдается как голая сингулярность [119].

Более общие решения были найдены путем прямого интегрирования уравнений Эйнштейна (см. [120]), но было показано, что они содержат голые сингулярности [118]. Сингулярные браны с дополнительными параметрами также могут представлять интерес как классические аналоги тахионных бран или систем брана-антибрана [121–125]. Однако, общая структура сингулярных бран и их связь с сингулярными решениями общей теории относительности систематически не исследовались. В качестве шага к этой цели мы строим и исследуем сингулярные браны, связанные с решением ФЯНВ четырехмерной гравитации Эйнштейна, минимально связанной с безмассовым скалярным полем. Решение ФЯНВ имеет сильную сингулярность кривизны вместо горизонта событий [67; 126; 127]. Его можно распространить на высшие измерения [128] и обобщить на вращающиеся решения [99; 129; 130].

Решение ФЯНВ с определенным значением скалярного заряда можно признать решением теории Эйнштейна-Максвелла с дилатоном в пределе исче-

зающего электромагнитного поля. Математически эту связь можно объяснить существованием трехмерной сигма-модели, таргет-пространство которой содержит подпространство, соответствующее минимальной скалярной теории Эйнштейна. Этот факт также может быть использован для техники генерации решений. Изометрические преобразования таргет-пространства можно использовать для генерации заряженных черных дыр с сингулярным горизонтом, используя в виде затравочного решения ФЯНВ в четырех измерениях [129].

Аналогичная техника генерации была предложена в [131] для многомерных систем гравитации с антисимметричными формами, которую использована в диссертации для генерации p -бранных решений со скалярным зарядом в качестве независимого параметра. Это достигается путем применения обобщенных преобразований Харрисона [132] к затравочному решению, связанному с решением ФЯНВ. Новое решение открывает способ изучения стандартных дилатонных БПС-бран с новой точки зрения. При определенном значении дилатонного заряда новое семейство сводится к стандартному классу регулярных p -бран. В это семейство входят, в частности, NS5-браны из супергравитаций типа IIA/V. Явной проверкой спинорных уравнений Киллинга в работе показано, что расширенное семейство не содержит новых суперсимметричных решений, кроме хорошо известного класса экстремальных дилатонов.

В частном случае трехмерного поперечного пространства мы также выводим более общие p -бранные решения, снабженные, помимо независимого скалярного заряда, дополнительным параметром деформации типа Зипоя-Вурхиза [111; 112]. Это возможно благодаря некоторой особой симметрии решений класса Вейля со скалярным зарядом.

Изучено поведение геодезических вблизи сингулярностей бран, определяя условия достижения последних за конечное собственное и асимптотическое время. Мы также рассматриваем поведение пробного скалярного поля вблизи сингулярностей. Кроме того, мы изучаем поведение пробного скалярного поля в окрестности сингулярности. Пробные скалярные поля связаны с такими вопросами как, например, излучение Хокинга [133]. В диссертации исследована возможность квантовой ненаблюдаемости сингулярности (для определения квантового излучения или ненаблюдаемости сингулярностей см. [134]).

Рассмотрим вопросы термодинамики более подробно. Формулы массы для черных дыр и концепция нередуцируемой массы были предложены Христоводулу [135], Хокингом [136], Христоводулу и Руффини [137] и Смэрром [138] в

начале 1970-х, незадолго до того, как Хокинг обнаружил испарение черных дыр [139]. Они сыграли важную роль в понимании извлечения энергии из вращающихся черных дыр и энергетического баланса сливающихся черных дыр, что было прекрасно подтверждено в недавних экспериментах LIGO. Затем, термодинамика черных дыр [140—143] дала им глубокую квантовую интерпретацию. Математические основы и подробный вывод массовых формул в теории Эйнштейна-Максвелла были даны Картером [144].

Исходная интегральная формула массы Смарра [138] связывает полные значения массы, углового момента и электрический заряд черных дыр в теории Эйнштейна-Максвелла с площадью горизонта. Слагаемое площади в этой формуле изначально интерпретировался как работа напряжений горизонта. В дальнейшем эта интерпретация была забыта в пользу термодинамической. Когда интерес обратился к решениям с НУТ, было обнаружено [145—148], что струна Мизнера также вносит вклад в массовую формулу Смарра, и этот вклад был включен в определение энтропии. Эта интерпретация была недавно возрождена в несколько иных терминах в серии статей [149—153], основанных на боннорской интерпретации струн Мизнера как мягких физических особенностей [54].

На наш взгляд, наиболее естественное описание решений со струной Мизнера и Дирака, а также ориентированные многоцентровые решения с распорками могут быть представлены в терминах стержневой структуры, введенной Хармарком [154], развивающей более ранние идеи Эмпарана и Реалла [155]. Основная новизна этого подхода заключается в выводе отдельных формул парциальных масс для каждого компонента всей системы, представленной набором стержней. В этой интерпретации струны Мизнера выглядят как независимые компоненты равноправно с горизонтом черных дыр.

В рамках представления стационарных осесимметричных решений в координатах Вейля, решения порождаются информацией на полярной оси. В данном виде ось выглядит как объект распределенной материи, являющейся источником уравнений Пуассона для гравитационного потенциала [156]. Соответственно, полное гравитационное поле можно рассматривать как нелинейную суперпозицию таких компонентов, как черные дыры, распорки, струны Мизнера и Дирака. Несмотря на нелинейность уравнений Эйнштейна, полную массу, угловой момент (и электрический заряд в случае электровакуума) можно представить как сумму индивидуальных вкладов компонент. Эта простая

аддитивность связана с законами сохранения интегралов Комара и Гаусса. Магнитный заряд и магнитная масса (НУТ) в этом описании обусловлены струнами Мизнера и Дирака, которые соответствуют отдельным элементам в системе стержней, поэтому эти заряды не входят в массу горизонта черной дыры. Их вклад входит в асимптотическую массу Комара как собственные массы струн Дирака и Мизнера вместе с вкладом черной дыры.

Отличие горизонта от струнных стержней состоит в том, что направления первых времениподобны, а направления вторых пространственноподобны. Оба стержня являются горизонтами Киллинга и имеют соответствующую поверхностную гравитацию. Но энтропийная интерпретация поверхностного вклада пространственноподобных стержней (часто встречающаяся) не кажется убедительной. Альтернативная интерпретация может быть похожа на исходную точку зрения Смарра.

Эта программа ранее выполнялась для системы Эйнштейна-Максвелла [157; 158], а здесь она расширена до обобщенной модели с набором скаляров и векторных полей. В работе показано, что предложение Томимацу в контексте электровакуума [159; 160] по вычислению интегралов Комара по стержням через граничные значения потенциалов Эрнста может быть обобщено на сигма-модельное стационарное представление такой модели. Удивительно, но полученные формулы масс очень похожи на формулы, полученные в случае Эйнштейна-Максвелла и не содержат скалярные вклады. Приведены примеры для дилатонной и дилатон-аксионной гравитаций.

Рассмотрим вопрос анализа теней УКО. Недавнее наблюдение тени сверхмассивного компактного объекта в центре галактики M87 [5; 161] и Sgr A* [6] телескопом Event Horizon Telescope (ЕНТ) открыло возможность для изучения гравитации в ее самой сильной форме [162–167]. Изображения черных дыр получают в микроволновом диапазоне, но поскольку мы имеем дело с геометрической оптикой, вполне уместна оптическая терминология. Оптический вид удаленного УКО, освещенного внешними источниками, может быть самым различным в зависимости от геометрического положения источника относительно линии наблюдения, угла наклона к угловой скорости вращения объекта, схемы освещения (подсветка внешним источником, излучение от аккреционных дисков и т.д.) [168], наличие плазмы [165], темной материя/энергия [169–173] и многих других факторов. Общим признаком является наличие темного пятна, соответ-

ствующего поглощению фотонов объектом и обычно связанного с горизонтом событий и фотонной поверхностью.

В принципе, наличие горизонта событий не является абсолютно необходимым для формирования таких изображений. Тени могут возникать от голых сингулярностей или червоточин, поэтому важной задачей является поиск различий между тенями настоящих черных дыр и их имитаторов [51; 85; 174]. На самом деле, в то время как размеры тени M87* и Sgr A* можно последовательно интерпретировать в рамках общей теории относительности, при известных оценках массы и расстояния до центральной черной дыры в галактике M87 или Млечном Пути интервал ошибок все еще достаточно велик, чтобы соответствовать предсказаниям различных теорий, включающих скалярные и векторные поля с минимальным или неминимальным взаимодействием с гравитацией. Отклонения от гравитации Эйнштейна можно параметризовать с помощью феноменологических некерровских метрик [175], которые при интерпретации в терминах стандартных уравнений Эйнштейна могут нарушать фундаментальные принципы, такие как энергетические условия, космическую цензуру и теоремы об отсутствии волос. Результаты ЕНТ накладывают ограничения на параметры таких нарушений [176]. Используя тени, можно извлечь информацию о массе объекта, параметре вращения [177], электрическом/магнитном заряде [178–181], некерровских параметрах искажения [182; 183], наличии скалярных волос [184–188], термодинамики [189], темной материи/энергии [190; 191] или попытаться найти новую физику [192–196]. Гипотетические УКО, такие как червоточины, регулярные черные дыры [197], гравизвезды или голые сингулярности, можно отличить друг от друга по их теням [198–201], особенно при наличии светящихся аккреционных дисков [180; 185; 202–207] или плазмы [208]. Эти перспективы сильно стимулировали разработку новых методов визуализации теней черных дыр, как аналитических, так и численных.

С математической точки зрения, общие закономерности формирования теней можно понять не только на основе изучения фотонных орбит, т.е. одномерных подмногообразий пространства-времени, но и на основе геометрии двумерных поверхностей, например фотонной сферы радиуса $3M$ в пространстве Шварцшильда [209–216]. В четырехмерном пространстве-времени это омбилическая гиперповерхность: для нее пропорциональны первая и вторая квадратичные формы. В керровском пространстве-времени нет фотонных поверхностей (ФП), но есть сферические поверхности постоянного радиуса в

координатах Бойера-Линдквиста, на которых лежат сферические орбиты постоянного радиуса [217], не заполняющие эти поверхности плотно, а образующие полотно из кривых, которые лежат под определенным углом наклона. Как трехмерные гиперповерхности в пространстве-времени, такие сферы можно назвать частично омбилическими [218]: для них первая и вторая квадратичные формы пропорциональны не для всех касательных векторов, а их части, соответствующей определенному соотношению полярных и азимутальных импульсов, которые могут быть связаны с прицельным параметром. Это понимание может быть полезным, если геодезические уравнения неинтегрируемы [219]. Это приводит к альтернативной визуализации гравитационных полей, позволяя видеть свойства, не зависящие от выбора наблюдателя и источников света при отбрасывании теней. Также, возможно определение незамкнутых омбилических и частично омбилических поверхностей, визуализирующих свойства вылета фотонов из области сильного гравитационного поля.

Скалярно-тензорная теория гравитации привлекает внимание к гипотезе космической цензуры [127; 220], которая часто нарушается в присутствии скалярного поля, вследствие знаменитых теорем об отсутствии (скалярных) волос для черных дыр. Статическое сферически-симметричное ЭМС-решение ФЯНВ представляет собой семейство, параметризованное массой и скалярным зарядом, и представляет собой голую сингулярность. В зависимости от величины скалярного заряда эта сингулярность может быть невидимой (слабой) или видимой (сильной) из бесконечности, в зависимости от того, окружена сингулярность фотонной сферой или нет [88]. Тени и профили аккреционных дисков вокруг статического решения ФЯНВ изучались в [68; 204] (см. также [174]), где были обнаружены различные отличия от случая черной дыры. Другими характерными чертами голых сингулярностей могут быть свойства сильного линзирования [51; 83] и отрицательная прецессия эллиптических орбит [221; 222]. Автором диссертации были исследованы тени двух новых решений, построенных самим автором [129]. Недавнее сравнение наблюдательных предсказаний одного из решений автора с решением Керра представлено в [223].

Далее, рассмотрим вопрос поиска конформных тензоров Киллинга и их связь с фотонными поверхностями и тенями УКО. Векторы Киллинга описывают изометрии пространства-времени и порождают первые интегралы геодезических уравнений. Конформные векторы Киллинга описывают симметрии пространства-времени, сохраняющие линейный элемент с точностью

до конформного фактора, и обеспечивают набор интегралов движения для изотропных геодезических. Дополнительные симметрии, часто называемые скрытыми, обеспечиваются тензорами Киллинга (ТК) и конформными тензорами Киллинга (КТК) более высокого ранга. Они соответствуют симметриям фазового пространства для геодезических и дают сохраняющиеся величины более высокого порядка по сопряженным импульсам. Основные факты об их существовании и некоторые методы построения известны более полувека [224—231], но в этой области остается ряд нерешенных проблем [232—237]. Кроме того, симметрии на горизонте Киллинга [238; 239] могут быть связаны с энтропией черных дыр [240].

Скрытые симметрии ТК и КТК могут следовать из более сильных симметрий Киллинга-Яно (ТКЯ), и в этом случае полная теория была разработана за последнее десятилетие, см. обзор [234]. Решения, допускающие конформный ТКЯ, относятся к достаточно строгому классу заряженных решений Керр-НУТ-(А)дС типа D и их многомерных обобщений, связанных с типом D в классификации [241; 242]. Решения, допускающие ТК и КТК за пределами этого класса, полностью не классифицированы, но известно их существование в некоторых алгебраически неспециальных пространствах-временях [243; 244]. Недавно было показано, что старый подход Бененти и Франкавиллы [228], основанный на определенном анзаце для обратной метрики в стационарных осесимметричных пространствах-временях, для которого неприводимый ТК может быть представлен в явном виде, применим ко многим популярным в настоящее время “деформированным” метрикам Керра, разделив их на геодезически интегрируемые и неинтегрируемые [235—237]. Некоторые частичные результаты были получены для специальных пространств-времен со структурой *warped/twisted* произведения [245], пространств, допускающих ортогональное поперечностям векторное поле Киллинга [246; 247], или специальных конформных полей Киллинга [248; 249].

Несколько неожиданным оказывается, что уравнения, определяющие изотропные геодезические, и условия интегрируемости уравнений ТК второго ранга связаны между собой [250; 251]. Кроме того, недавно было показано [216; 252], что существование ТК может быть связано с важными характеристиками пространства-времени, такими как фотонные сферы и их обобщения: фундаментальные фотонные поверхности [209; 212—215; 218; 253—258], которые представляют собой компактные подмногообразия, вымощенные изотропными

геодезическими. Такие поверхности важны для сильного гравитационного линзирования и теней черных дыр [162; 165; 210; 211; 259–267]. Они одинаково полезны при анализе теорем об единственности черных дыр [268–277] и при выводе ограничений площади поверхности [278–280].

Новый геометрический метод построения ТК был предложен в работе автора диссертации с соавторами [252]. Оно применимо к многообразиям со слоением коразмерности один и основано на поднятии редуцируемых ТК, построенных по слоям, из касательных к ним векторов Киллинга. Этот подход не требует, чтобы слои были ортогональны векторному полю Киллинга, как предполагалось в [246; 247], и не предполагает, что пространство-время имеет структуру warped/twisted-произведения, как это рассматривалось в [245].

Целью данных вычислений в диссертации является обобщение этого подхода к КТК. Автором найдены общие условия интегрируемости для уравнений подъема от слоя ко всему пространству-времени и доказана теорема, которая дает конструктивный метод для генерации послойно-редуцируемых КТК, которые могут быть нередуцируемыми во всем пространстве-времени. Обсуждается связь таких послойно-редуцируемых КТК с границей тени черных дыр, которая применима во многих важных решениях различных моделей. В диссертации данный новый метод применяется к решениям черных дыр ЭМДА и STU, показывая, что этот метод позволяет получить КТК [281; 282] чисто алгебраически без решения каких-либо дифференциальных уравнений и найти соответствующие гравитационные тени. Вводится класс послойно-редуцируемых ТК и КТК как многообещающий инструмент для получения дальнейших аналитических результатов.

Целью данной работы является исследование моделей эйнштейновской гравитации с набором скалярных и абелевых векторных полей, мотивированных теорией струн, исследование ультракомпактных объектов, существующих в таких моделях, а также обобщение и развитие математического аппарата и инструментов как на случай рассматриваемых моделей, так и выходящих за их рамки.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Сгенерировать ряд новых решений для изучаемых моделей, а именно: сингулярные дионные решения с параметром НУТ без вращения и скалярными волосами в модели КК ЭМД, вращающиеся обобщения

и аналоги решения ФЯНВ в скалярно-тензорной теории, заряженные сингулярные Фишер-браны, а также различные деформированные альтернативы.

2. Изучить физические свойства сгенерированных решений, в том числе движение частиц вдоль геодезических, построить классификацию решений по наличию горизонтов событий и сингулярностей в ЭМД, для Фишер-бран изучить поведение пробного скалярного поля в окрестности сингулярности.
3. Обобщить формулу Смарра на максимально широкий класс рассматриваемых моделей с помощью подхода Комара-Томиматсу.
4. Изучить БПС-решения среди сгенерированных Фишер-бран, а также построить методологию получения ограничений на БПС-состояния в ЭМД с произвольной дилатонной константой.
5. Построить релятивистские изображения и тени УКО для сгенерированных вращающихся решений в ЭМС и провести их анализ в контексте данных, полученных с помощью ЕНТ.
6. Получить условия интегрируемости для генерации КТК из редуцируемых КТК на слое расслоенного пространства, показать их связь с ФП, и построить общие формулы контура тени исходя из связи ФП и по-слойно-редуцируемых КТК.

Научная новизна:

1. Впервые были получены и проанализированы новые решения: сингулярные дионные решения с параметром НУТ без вращения и скалярными волосами в КК ЭМД, вращающиеся обобщения и аналоги решения ФЯНВ в скалярно-тензорной теории, заряженные сингулярные Фишер-браны, а также различные альтернативы с параметром деформации.
2. Было впервые продемонстрировано существование трех физических ветвей решений в КК ЭМД, лишь одна из которых содержит регулярные решения. Экстремальный предел в двух других ветвях накладывает дополнительное ограничение на нулевой момент вращения. Кроме того, впервые была дана полная классификация невращающихся КК ЭМД дионов с параметром НУТ. Было впервые показано отсутствие замкнутых изотропных и времениподобных геодезических в окрестности струны Мизнера в невращающихся КК ЭМД дионах с НУТ.

3. Для новых сгенерированных сингулярных p -бран с произвольной дилатонной константой была впервые изучена возможность квантового “излечения” сингулярности, при которой не возникает проблемы самосопряженности волнового оператора.
4. Впервые был модифицирован метод преобразований Клемана для получения вращающихся решений в модели Эйнштейна-Максвелла со скаляром с минимальной связью (ЭМС) с использованием вспомогательного поля Максвелла.
5. Формула Смарра была впервые обобщена на рассматриваемую обобщенную модель с набором скалярных и абелевых векторных полей, и было продемонстрировано отсутствие скалярных вкладов в ней.
6. Впервые была предложена методика получения ограничений на заряды стационарных БПС-решений исходя из вырожденности соответствующих операторов.
7. Впервые были получены тени и релятивистские изображения новых точных вращающихся решений в ЭМС и дан сравнительный анализ с наблюдениями ЕНТ.
8. Впервые получены условия интегрируемости для генерации КТК из редуцируемых КТК на слое расслоенного пространства, показана связь с ФП и построены общие формулы контура тени УКО с КТК.

Практическая значимость работы состоит в теоретическом изучении моделей, связанных с теориями-претендентами на роль новой фундаментальной теории гравитации, проявления которых могут быть обнаружены в рамках проектов “Event Horizon Telescope” и гравитационно-волновых экспериментов (LIGO, VIRGO, а также планируемых, например, LISA). Кроме того, в работе развиваются некоторые методологические проблемы теории гравитации.

Методология и методы исследования. В работе использовались апробированные аналитические методы дифференциальной геометрии, топологии, абстрактной и линейной алгебр, численные методы исследования. В ходе работы был создан ряд новых алгоритмов для систем символьной компьютерной алгебры. Были использованы методы дифференциальной геометрии для исследования внутренних пространств нелинейных сигма-моделей и генерации новых решений. В численных исследованиях геодезических были использованы схемы Рунге-Кутты 4-го порядка, переложенные на архитектуру графических процес-

соров с технологией CUDA. Для исследования БПС-решений использовался формализм спиноров Киллинга.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Дано обобщение метода генерации решений Клемана на случай теории ЭМС, если рассматривать поле Максвелла как вспомогательное. На основе этого построены и исследованы новые вращающиеся решения в скалярно-тензорной теории. Показано, что их тени могут служить хорошими имитаторами черной дыры Керра и решения не могут быть отсеяны полученными результатами из наблюдений ЕНТ.
2. Сгенерированные решения с первичными скалярными волосами и НУТ-зарядом в теории ЭМД и произвольной зарядовой матрицей. Показано что в общем случае являются голыми сингулярностями. Среди обнаруженных трех независимых ветвей для решений с вырожденной зарядовой матрицей, лишь одна ветвь содержит регулярные черные дыры. Показано, что голые сингулярности, которые находятся параметрически близко к экстремальным невращающимся черным дырам в ЭМД, обладают стабильными замкнутыми фотонными орбитами.
3. Построены и исследованы сингулярные p -браны, генетически связанные с решением Фишера. Показано, что в отдельных случаях сингулярности могут быть ненаблюдаемы в квантовой теории.
4. Дан вывод термодинамической формулы Смарра для теории с набором скалярных и абелевых векторных полей. Показано, что в формулу не входят скалярные заряды.
5. Показано, что решения теории ЭМД с произвольной дилатонной константой и “ложной суперсимметрией” обладают статическим спинором Киллинга, если выполнены условия вырожденности алгебраических однородных уравнений на данный спинор, которые представляются в виде условий на физические поля и асимптотические физические заряды, включая массу, НУТ, электрический и магнитный заряды и скалярный заряд. Предложена методика получения подобных условий, которая может применяться и в рамках других теорий.
6. Показано, что нетривиальный конформный тензор Киллинга в пространстве может быть сгенерирован из тривиальных конформных тензоров Киллинга в слоях с помощью подходящего расслоения, если выполнены определенные условия интегрируемости.

Достоверность полученных результатов обеспечивается применением апробированных методов анализа и согласием с результатами других авторов в частных случаях. Практически все полученные результаты были опубликованы в ведущих мировых и российских научных журналах и многократно докладывались на международных и российских конференциях.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на 14 конференциях/симпозиумах:

1. “Генерация нового заряженного решения с вращением в теории Эйнштейна-Максвелла с дилатоном с помощью сигма-модели”. Ломоносов-2018, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 9-13 апреля 2018.
2. “p-Branes with singular horizons”. Strings, Cosmology, and Gravity Student Conference 2019, Max-Planck-Institut für Physik, г. Мюнхен, Германия, 1-3 апреля 2019 (постер).
3. “Гипербраны со скалярными волосами”. Ломоносовские чтения - 2019, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 15-24 апреля 2019.
4. “Получение новых вращающихся решений в скалярно-тензорной теории гравитации с минимальной связью”. Ломоносов-2019, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 8-12 апреля 2019.
5. “Rotating Fisher-Janis-Newman-Winicour spacetime”. BRICS Association on Gravity, Astrophysics and Cosmology, Казанский Федеральный Университет, г. Казань, Россия, 29 августа - 3 сентября 2019.
6. “Smarr formulas for EMD stationary spacetimes with line singularities”, Gravitational Waves, Black Holes and Fundamental Physics, IFPU, Miramare campus, г. Триест, Италия, 13-16 январь 2020 (постер).
7. “Kaluza-Klein dyons: regular and singular”, The 14th International Conference on Gravitation, Astrophysics and Cosmology (ICGAC14), National Central University, Чжунли, Тайвань, 17-21 августа 2020 (дистанционно).
8. “Формула Смарра для стационарных решений с сингулярностями на полярной оси в модели ЭМД”. Ломоносов-2020, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 10-27 ноября 2020 (дистанционно).
9. “Моделирование и анализ теней гравитирующих ультракомпактных объектов”. Ломоносов-2021, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 12-23 апреля 2021 (дистанционно).

10. “Квантовая трактовка сингулярностей в решениях для бран со скалярными волосами”. Ломоносовские чтения - 2021, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 21-28 апреля 2021.
11. “Killing tensors and photon surfaces in foliated spacetimes”. 16th Marcel Grossmann Meetings (on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Gravitation, and Relativistic Field Theories), University of Rome and ICRANet, г. Рим, Италия, 5-10 июля 2021 (дистанционно).
12. “Einstein-Maxwell-Dilaton-Axion mass formulas for black hole systems with struts and strings”. 16th Marcel Grossmann Meetings (on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Gravitation, and Relativistic Field Theories), University of Rome and ICRANet, г. Рим, Италия, 5-10 июля 2021 (приглашенное участие, дистанционно).
13. “Послойно-редуцируемые конформные тензора Киллинга и их связь с фотонными поверхностями и тенями черных дыр”. Ломоносов-2022, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 11-22 апреля 2022 (дистанционно).
14. “Particle shadows of black holes and new characteristic surfaces”. International Conference on Quantum Field Theory, High-energy Physics, and Cosmology, г. Дубна, Россия, 18-21 июля 2022.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 15 печатных работах [69; 129; 252; 283—294], 5 из которых в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science, Scopus и рекомендованных ВАК [69; 129; 252; 283; 284], 1 – в прочих журналах [285], 9 – в тезисах докладов [286—294]. Еще два препринта [295; 296] приняты к публикации в журнале из списка WoS и Scopus. Два материала конференции [293; 294] приняты к публикации в научном журнале из списка WoS, и 2 статьи в журналах WoS/Scopus написаны не по теме диссертации.

Личный вклад. Автор принимал активное участие в международных и российских конференциях, в написании научных статей опубликованных в ведущих международных и российских журналах, индексируемых в международных базах данных Scopus, Web of Science (WoS), РИНЦ (RSCI), в двух научно-исследовательских проектах, поддержанных грантами РФФИ, в научной и образовательной школе МГУ “Фундаментальные прикладные кос-

мические исследования”. Также, работа автора была поддержана фондом поддержки теоретической физики и математики “Базис”. Автор был удостоен победы в номинации молодого научного сотрудника года физического факультета МГУ за 2022 год. Вклад автора диссертации в основные научные статьи составляет: [129] – 90%, [69] – 75%, [252] – 45%, [283] – 50%, [284] – 60%, [285] – 90%. Во всех основных результатах диссертации вклад автора является основополагающим.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 6 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 245 страниц, включая 25 рисунков и 6 таблиц. Список литературы содержит 385 наименований.

Первая глава содержит краткое описание рассматриваемых моделей: ЭМДА, ЭАД, ЭМД (в том числе КК ЭМД) и ЭМС. Также вводится обобщенная модель с набором скалярных и векторных абелевых полей.

Вторая глава посвящена методам генерации решений в представленных моделях. Она содержит описание сигма-моделей для ЭМД, ЭМС, ЭАД при их редукции к стационарному сектору. Рассматриваются скрытые симметрии и симметрии косетных представления для соответствующих моделей, которые содержат преобразования Харрисона и Элерса. В дополнение к ним, рассматриваются преобразования Клемана, Эриша-Гюрсеса, метод генерации высших скалярных мультиполей.

Третья глава посвящена непосредственно генерации решений: новых сингулярных КК ЭМД дионов с НУТ зарядом, новых вращающихся обобщений решений ФЯНВ, сингулярных p -бран. Дан анализ как новых сгенерированных решений, так и найденных недавно предшественниками (но до сих пор недостаточно изученных), проведена классификация решений.

Четвертая глава содержит вывод термодинамической формулы Смарра для обобщенной модели со скалярными и векторными абелевыми полями. Вводится формализм "стержней" и применяется подход Комара-Томиматсу к построению термодинамики. Рассмотрены примеры для решений ЭМД и ЭМДА с линейными сингулярностями.

Пятая глава посвящена суперсимметричным БПС-решениям в КК ЭМД и ЭАД. Для первой модели предлагается методология вывода ограничений на физические заряды из рассмотрения асимптотического поведения условия вырожденности алгебраической части однородных уравнений дилатино и гра-

вितिно Для новых сгенерированных p -бран во второй модели выделяется класс решений, сохраняющих часть суперсимметрий.

Шестая глава посвящена изучению геодезических и пробных полей на фоне УКО, релятивистских изображений УКО, а также скрытых симметрий, которые стоят за интегрируемостью этих систем. В частности, изучено геодезическое движение пробных частиц в ЭМД и ЭМС, поведение пробного скалярного поля в ЭМС. Изучены релятивистские изображения и тени сгенерированных в работе решений ЭМС. Развита общий формализм для генерации КТК и показана связь сгенерированных КТК с ФП и тенями УКО.

Заключение содержит краткие сведения об основных результатах работы.

Глава 1. Расширенные теории гравитации, мотивированные теорией струн и супергравитацией

Обсудим набор теорий, рассматриваемый в следующих главах. Данные теории имеют в основе эйнштейновскую гравитацию с набором дополнительных скалярных и векторных абелевых полей. Они получаются как низкоэнергетический предел теории струн при ее размерной редукции и самосогласованном усечении.

Начнем с обобщенной модели гравитации Эйнштейна с n_v абелевыми векторными полями $F^I = dA^I$, $I = 1, \dots, n_v$ и n_s скалярными полями Φ^A , $A = 1, \dots, n_s$ описываемом действием вида

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \left[\left(R - \frac{1}{2} f_{AB} \partial_\mu \Phi^A \partial^\mu \Phi^B - \frac{c}{4} K_{IJ} F_{\mu\nu}^I F^{J\mu\nu} \right) \sqrt{-g} - \frac{c}{4} H_{IJ} F_{\mu\nu}^I F_{\lambda\tau}^J \epsilon^{\mu\nu\lambda\tau} \right], \quad (1.1)$$

где R – скаляр Риччи, матрицы f_{AB} , K_{IJ} , H_{IJ} – симметричные матрицы с функциями от скалярных полей Φ^A , $\epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123} = 1$ – антисимметричная тензорная плотность, c – произвольная положительная константа. Также, будем считать, что матрица K_{IJ} положительно определена. Соответствующие уравнения движения состоят из уравнений Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} f_{AB} \Phi_{,\mu}^A \Phi_{,\nu}^B - \frac{c}{2} K_{IJ} \left(F_{\mu\lambda}^I F^{J\lambda}{}_\nu + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^I F^{J\alpha\beta} \right), \quad (1.2)$$

скалярных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} f_{AB} \partial_\nu \Phi^B) &= \frac{1}{2} \frac{\partial f_{BC}}{\partial \Phi^A} \partial_\mu \Phi^B \partial^\mu \Phi^C \\ &+ \frac{c}{4} \frac{\partial K_{IJ}}{\partial \Phi^A} F_{\mu\nu}^I F^{J\mu\nu} + \frac{c}{4} \frac{\partial H_{IJ}}{\partial \Phi^A} F_{\mu\nu}^I F_{\lambda\tau}^J \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda\tau}}{\sqrt{-g}}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

уравнений Максвелла

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} G_I^{\mu\nu}) = 0, \quad G_I^{\mu\nu} = K_{IJ} F^{J\mu\nu} + H_{IJ} F_{\lambda\tau}^J \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda\tau}}{\sqrt{-g}}, \quad (1.4)$$

и тождеств Бьянки

$$\partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu\lambda\tau} F_{\lambda\tau}^I) = 0. \quad (1.5)$$

1.1 Теория Эйнштейна-Максвелла с дилатоном и аксионом

Модель гравитации ЭМДА может быть рассмотрена как согласованное усечение тороидальной T^6 редукции гетеротической струны [297], или усечение $\mathcal{N} = 4$ четырехмерной супергравитации [31; 298]. Действие ЭМДА можно записать в виде:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int \left\{ R - 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} e^{4\phi} \partial_\mu \kappa \partial^\mu \kappa - e^{-2\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \kappa F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right\} \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.6)$$

где $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} E^{\mu\nu\lambda\tau} F_{\lambda\tau}$. Дилатон ϕ и аксион κ параметризуют косет $SL(2, R)/SO(2)$, а группа $SL(2, R)$ представляет симметрию полного действия. Чтобы данное утверждение приняло более очевидный вид, введем комплексный скаляр

$$\zeta = \kappa + i e^{-2\phi} \quad (1.7)$$

и самодуальную 2-форму Максвелла $\mathcal{F} = (F + i\tilde{F})/2$. Тогда действие запишется в виде

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int \left\{ R - 2|\partial\zeta(\zeta - \bar{\zeta})^{-1}|^2 + (i\zeta \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} + c.c.) \right\} \sqrt{-g} d^4x. \quad (1.8)$$

В таком виде, становится более очевидной инвариантность действия при преобразованиях $SL(2, R)$ -группы

$$\begin{aligned} \zeta &\rightarrow \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}, & \alpha\beta - \gamma\delta &= 1, \\ F &\rightarrow (\gamma\kappa + \delta)F + \gamma e^{-2\phi} \tilde{F}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

которые перемешивают модифицированные уравнения Максвелла и тождества Бьянки

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0, \quad (1.10a)$$

$$\nabla_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (1.10b)$$

$$G^{\mu\nu} = e^{-2\phi} F^{\mu\nu} + \kappa \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (1.10c)$$

Кроме того, должны выполняться уравнения Эйнштейна и скалярные уравнения

$$R_{\mu\nu} = 2\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + \frac{1}{2} e^{4\phi} \kappa_{,\mu}\kappa_{,\nu} - e^{-2\phi} \left(2F_{\mu\lambda} F^\lambda{}_\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right), \quad (1.11a)$$

$$\square\phi - \frac{1}{2}e^{4\phi}\partial_\mu\kappa\partial^\mu\kappa + \frac{1}{2}e^{-2\phi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0, \quad (1.11b)$$

$$\square\kappa + 4\partial_\mu\kappa\partial^\mu\phi - e^{-4\phi}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (1.11c)$$

Вращающаяся электрически заряженная черная дыра в модели ЭМДА была получена Сенем в [297] в рамках струнного подхода и независимо Гальцовым и Кечкиным в рамках дилатон-аксионного подхода с включение НУТ и магнитного зарядов [299]. В последнее время данные решения привлекают к себе внимание в качестве альтернативы для метрики Керра с целью поиска астрофизических проявлений новой физики [300–302].

1.2 Теория Эйнштейна с дилатоном и антисимметричной формой

Действие гравитации Эйнштейна с дилатоном и антисимметричной формой в D измерениях (α -модели ЭМД) имеет вид

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa_D^2} \int d^D x \sqrt{-G} \left(R - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{\exp(-\alpha\phi)}{2(n+1)!} F_{(n+1)}^2 \right), \quad (1.12)$$

где G_{MN} представляет метрику D -мерного пространства-времени, $F_{(n+1)} = dA_{(n)}$ – антисимметричная $n+1$ -формы, ϕ – скалярное поле дилатона, α – дилатонная константа связи, принимающая различные значения определено для конкретных теорий, κ_D^2 – константа, связанная с гравитационной постоянной. Квадрат антисимметричной формы имеет вес единица $F^2 = F_{M_1\dots M_{n+1}}F^{M_1\dots M_{n+1}}$. Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$R_{MN} - \frac{1}{2}G_{MN}R = e^{-\alpha\phi}T_{MN}^{(F)} + T_{MN}^{(\phi)}, \quad (1.13a)$$

$$\partial_M \left(e^{-\alpha\phi} \sqrt{-G} F_{(n+1)}^{MM_1\dots M_n} \right) = 0, \quad (1.13b)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_M \left(\sqrt{-G} G^{MN} \partial_N \phi \right) + \frac{\alpha}{2(n+1)!} e^{-\alpha\phi} F_{(n+1)}^2 = 0, \quad (1.13c)$$

где тензоры энергии-импульса для антисимметричной формы и дилатона представлены следующими выражениями

$$T_{MN}^{(F)} = \frac{1}{2n!} \left(F_{MM_1\dots M_n} F_N^{M_1\dots M_n} \right) - \frac{1}{4(n+1)!} G_{MN} F_{(n+1)}^2, \quad (1.14a)$$

$$T_{MN}^{(\phi)} = \frac{1}{2} \left(\partial_M \phi \partial_N \phi - \frac{1}{2} G_{MN} \partial_L \phi \partial^L \phi \right). \quad (1.14b)$$

Данная модель описывает ряд усечений теории суперструн типа IIA/IIB. Например, модель $n = 2, \alpha = 1$ описывает NS-NS сектор, а $n = p + 1, \alpha = (p - 3)/2$ описывает R-R сектор, если $p = 0, 2, \dots$ для IIA или $p = -1, 1, 3, \dots$ для IIB.

1.3 α -модель Эйнштейна-Максвелла с дилатоном

ЭМД α -модель является частным случаем предыдущей модели при $n = 1, D = 4$ и включает действительный скаляр, связанный с гравитацией и напряженностью векторного абелева поля. Связь является экспоненциальной и определяется параметром α . При значениях $\alpha = \sqrt{3}, 1, 1/\sqrt{3}, 0$ она описывает $\mathcal{N} = 4$ и 8 супергравитацию (см. [303]). Действие модели записывается в виде

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - 2(\partial\phi)^2 - e^{-2\alpha\phi} F^2 \right), \quad (1.15)$$

где R – четырехмерный скаляр Риччи, ϕ – поле дилатона, $F = dA$ – два-форма Максвелла. Позже мы воспользуемся уравнениями движения

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.16a)$$

$$\partial_\nu \left(\sqrt{|g|} e^{-2\alpha\phi} F^{\mu\nu} \right) = 0, \quad (1.16b)$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi + \frac{\alpha}{2} e^{-2\alpha\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0, \quad (1.16c)$$

где тензоры энергии-импульса имеют вид

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(T_{\mu\nu}^{(\phi)} + T_{\mu\nu}^{(F)} \right), \quad (1.17a)$$

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial\phi)^2, \quad (1.17b)$$

$$T_{\mu\nu}^{(F)} = e^{-2\alpha\phi} \left(F_\mu{}^\rho F_{\nu\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right). \quad (1.17c)$$

Два других полезных уравнения следуют из свертки уравнения (1.16a)

$$R = 2(\partial\phi)^2, \quad R_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} (\partial\phi)^2. \quad (1.18)$$

1.3.1 $\alpha^2 = 3$ модель Эйнштейна-Максвелла с дилатоном

Частным случаем этой модели является модель с дилатонной константой связи $\alpha = \sqrt{3}$. Она примечательна тем, что возникает из теории Калуцы-Клейна при компактификации пятимерной вакуумной гравитации на окружность

$$\mathcal{S} = \int d^5x \sqrt{|g_5|} R_5, \quad (1.19)$$

в которой предполагается существование пространственно-подобного вектора Киллинга $\partial/\partial x^5$. В таком случае можно ввести стандартный анзац Калуцы-Клейна

$$ds_5^2 = e^{-2\phi/\sqrt{3}} ds_4^2 + e^{4\phi/\sqrt{3}} (dx^5 + 2\mathcal{A}_\mu dx^\mu)^2, \quad (1.20)$$

где ϕ – поле дилатона, \mathcal{A}_μ – вектор Калуцы-Клейна, и метрика четырехмерного пространства зависит только от $x^\mu = t, x^i$. Интегрируя действие (1.19) вдоль циклической координаты x^5 , переобозначая гравитационную константу, и опуская ряд полных производных в действии, получаем четырехмерную модель Эйнштейна-Максвелла с дилатоном (ЭМД):

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - 2(\partial\phi)^2 - e^{-2\alpha\phi} F^2 \right), \quad (1.21)$$

где дилатонная константа связи строго фиксирована $\alpha = \sqrt{3}$, а $F = d\mathcal{A}$ – 2-форма Максвелла.

1.4 Скалярно-тензорные теории гравитации с минимальной связью

Большое количество различных теорий вида (1.1) можно самосогласованно сократить до скалярно-тензорной гравитации с минимальной связью (ЭМС)

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)). \quad (1.22)$$

Соответствующие уравнения движения запишутся в виде

$$R_{\mu\nu} = 2(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi), \quad (1.23a)$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi = 0. \quad (1.23b)$$

Кроме того, модель можно привести к теории Бранса-Дикке с помощью конформных преобразований [304] или со скалярно-тензорной теорией с неминимальной связью кинетического слагаемого в формализме Палатини [11].

Глава 2. Методы генерации решений в скалярно-тензорных теориях гравитации

2.1 Сигма-модель для гравитации Эйнштейна с набором полей Максвелла и скалярами

Воспользуемся результатами работы [305] для получения сигма-модели действия (1.2). Предполагая существование времениподобного вектора Киллинга ∂_t , запишем метрику в форме Калуцы-Клейна

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -f(dt - \omega_i dx^i)^2 + f^{-1} h_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.1)$$

где трехмерная метрика h_{ij} (индексы i, j, \dots пробегает значения 1, 2, 3), трехмерная 1-форма вращения ω_i и гравитационный потенциал f зависят только от пространственных координат x^i . Предполагается, что трехмерные индексы понижаются и повышаются с помощью h_{ij} и обратной метрикой h^{ij} . Пространственные компоненты тождеств Бьянки и модифицированные уравнения Максвелла могут быть удовлетворены путем введения электрического v^I и магнитного u_I потенциалов

$$F_{i0}^I = c_F \partial_i v^I, \quad (2.2)$$

$$G_I^{ij} = c_G \frac{f}{\sqrt{h}} \epsilon^{ijk} \partial_k u_I, \quad (2.3)$$

где c_F, c_G – произвольные константы. Смешанные компоненты R_0^i в уравнении Эйнштейна решаются введением твист-потенциала χ (см. работу [306]), полученного дуализацией 1-формы вращения:

$$f^2 h_{il} \frac{\epsilon^{ljk}}{\sqrt{h}} \partial_j \omega_k = -c_\chi \partial_i \chi - \frac{c_{BCC}}{2} (v^I \partial_i u_I - u_I \partial_i v^I), \quad (2.4)$$

где c_χ – константа. Остальные уравнения сводятся к уравнениям трехмерной гравитирующей сигма-модели для $n_\sigma = 2n_v + n_s + 2$ скаляров $X^M = f, \chi, \Phi_a, v^I, u_I$, $M = 1, \dots, n_\sigma$ и трехмерной метрике h_{ij} :

$$S = \int [\mathcal{R}(h) - \mathcal{G}_{MN}(X) \partial_i X^M \partial_j X^N h^{ij}] \sqrt{h} d^3x, \quad (2.5)$$

где метрика таргет-пространства \mathcal{G}_{MN} может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} G_{MN}dX^M dX^N &= \frac{1}{2f^2} \left(df^2 + \left(c_\chi \partial_i \chi + \frac{cc_{FCG}}{2} (v^I d\partial_i u_I - u_I dv^I) \right)^2 \right) \\ &- \frac{c}{2f} \left(c_F^2 dv^I (K_{IJ} + 4H_{IK} K^{KL} H_{LJ}) dv^J - 4c_{FCG} dv^I H_{IK} K^{KJ} du_J \right. \\ &\left. + c_G^2 du_I K^{IJ} du_J \right) + \frac{1}{2} f_{AB} d\Phi^A d\Phi^B, \end{aligned} \quad (2.6)$$

а K^{IJ} – матрица, обратная к K_{IJ} .

Константы c , c_F , c_G и c_χ сохранены для того, чтобы соответствовать общепринятым конвенциям той или иной модели.

2.2 Скрытые симметрии модели ЭМД

2.2.1 Сигма-модельное представление

Сигма-модельное представление для модели ЭМД с произвольной дилатонной константой α было выведено в работе [56]. Используя результат гл. 2.1 и подбирая нужные константы, получим аналогичный результат с потенциалами

$$F^{ij} = \frac{f}{\sqrt{2h}} e^{2\alpha\phi} \epsilon^{ijk} \partial_k u, \quad F_{i0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_i v, \quad (2.7a)$$

$$-f^2 \epsilon^{ijk} \partial_j \omega_k = v \nabla^i u - u \nabla^i v + \nabla^i \chi. \quad (2.7b)$$

и сигма-моделью (2.5), таргет-пространство которой содержит координаты (потенциалами) $\varphi^A = (f, \chi, u, v, \phi)$

$$\mathcal{G}_{AB} d\varphi^A d\varphi^B = \frac{1}{2f^2} (df^2 + (d\chi + vdu - u dv)^2) - \frac{1}{f} (e^{-2\alpha\phi} dv^2 + e^{2\alpha\phi} du^2) + 2d\phi^2. \quad (2.8)$$

Другие компоненты электромагнитного тензора имеют вид

$$F^{i0} = F^{ij} \omega_j - h^{ij} F_{j0}, \quad F_{ij} = f^{-2} h_{ik} h_{jl} F^{kl} + F_{0i} \omega_j - F_{0j} \omega_i, \quad (2.9)$$

Таргет пространство (2.8) для ЭМД с $\alpha = \sqrt{3}$ обладает 8 векторами Киллинга [56], образуя $sl(3, \mathbb{R})$ -алгебру, откуда понятно, что потенциалы могут быть

собрать в косет $SL(3, R)/SO(2,1)$. Вычисляя ковариантные производные тензора Римана таргет-пространства, можно обнаружить, что лишь два значения дилатонной константы связи $\alpha = \sqrt{3}, 0$ соответствуют ковариантно-постоянному тензору Римана [56]. Первый случай соответствует Калуца-Кляновской ЭМД. Вторым случаем является теория Эйнштейна-Максвелла минимально связанной со скалярным полем.

Метрика (2.8) обладает дискретной электромагнитной дуальностью

$$u \leftrightarrow v, \quad \chi \rightarrow -\chi, \quad \phi \rightarrow -\phi. \quad (2.10)$$

2.2.2 Подгруппа преобразований Элерса-Харрисона для КК ЭМД

Метрика таргет-пространства (2.8) для ЭМД $\alpha = \sqrt{3}$ содержит 8 векторов Киллинга, которые образуют полный набор решений уравнения Киллинга $X_{(A;B)} = 0$

$$X_1 = \partial_\eta - u\partial_u - \chi\partial_\chi, \quad X_2 = \partial_\xi - v\partial_v - \chi\partial_\chi, \quad (2.11a)$$

$$X_3 = \partial_u + v\partial_\chi, \quad X_4 = \partial_v - u\partial_\chi, \quad X_5 = \partial_\chi, \quad (2.11b)$$

$$X_{H_I} = v(\partial_\eta - 2\partial_\xi) + \left(\frac{1}{2}e^{-2\xi} + v^2\right)\partial_v + \frac{1}{2}(\chi - uv)\partial_u + \frac{1}{2}(ue^{-2\xi} + v(\chi + uv))\partial_\chi, \quad (2.11c)$$

$$X_{H_{II}} = u(\partial_\xi - 2\partial_\eta) + \left(\frac{1}{2}e^{-2\eta} + u^2\right)\partial_u - \frac{1}{2}(\chi + uv)\partial_v + \frac{1}{2}(u(\chi - uv) - ve^{-2\eta})\partial_\chi, \quad (2.11d)$$

$$X_E = -\frac{1}{2}((\chi - 3uv)\partial_\eta + (\chi + 3uv)\partial_\xi) + \frac{1}{2}(v(\chi + uv) + ue^{-2\xi})\partial_v + \frac{1}{2}(u(\chi - uv) - ve^{-2\eta})\partial_u + \frac{1}{2}(u^2e^{-2\xi} + v^2e^{-2\eta} + u^2v^2 + \chi^2 - e^{-2\xi-2\eta})\partial_\chi, \quad (2.11e)$$

где

$$\eta = \alpha\phi - \frac{1}{2} \ln f, \quad \xi = -\alpha\phi - \frac{1}{2} \ln f. \quad (2.12)$$

Они образуют алгебру $sl(3, \mathcal{R})$ с подалгеброй векторов Элерса-Харрисона-Киллинга $X_{H_I}, X_{H_{II}}, X_E$. Векторы X_1, \dots, X_5 представляют калибровочные преобразования. Таргет-пространство является однородным римановым пространством с транзитивно действующей на нем группой изометрий $sl(3, \mathcal{R})$.

Нас интересуют преобразования Харрисона, порожденные $X_{H_I}, X_{H_{II}}$. Конечное преобразование потенциалов $\varphi_0^A \rightarrow \varphi^A$, соответствующее электрическому вектору Харрисона-Киллинга X_{H_I} , имеет вид

$$f = \gamma_I f_0, \quad (2.13a)$$

$$e^{2\alpha\phi/3} = \gamma_I e^{2\alpha\phi_0/3}, \quad (2.13b)$$

$$v = \gamma_I^2 (\lambda_I f_0 e^{2\alpha\phi_0} + v_0(1 - 2\lambda_I v_0)), \quad (2.13c)$$

$$u = (\chi_0 - u_0 v_0) \lambda_I + u_0, \quad (2.13d)$$

$$\chi = \chi_0 - u_0 v_0 + uv, \quad (2.13e)$$

где

$$\gamma_I = \left((1 - 2\lambda_I v_0)^2 - 2\lambda_I^2 f_0 e^{2\alpha\phi_0} \right)^{-1/2}.$$

Магнитное преобразование Харрисона похоже на (2.13), и его можно получить из (2.13), используя дискретную электромагнитную дуальность (2.10).

Последовательные электрические и магнитные преобразования Харрисона, действующие на вакуумное решение, приводят к новому решению с нарушенной асимптотической плоскостностью. Для его восстановления и фиксации электромагнитной калибровки выполним калибровочные преобразования с параметрами $\lambda_1, \dots, \lambda_5$, соответствующими вектора X_1, \dots, X_5 . Предполагая, что исходное решение $(f_0, \chi_0, \phi_0, v_0, u_0)$ асимптотически стремится к $(1, 0, 0, 0, 0)$, получаем ограничения на параметры $\lambda_1, \dots, \lambda_5$, чтобы обеспечить схожее асимптотическое поведение преобразованных потенциалов. Окончательная форма преобразований примет вид

$$f = f_0 \sqrt{\frac{x_\infty y_\infty}{xy}}, \quad e^{2\alpha\phi/3} = \sqrt{\frac{x y_\infty}{y x_\infty}}, \quad (2.14a)$$

$$u = \frac{x_\infty}{\sqrt{y_\infty}} \left(\frac{y f_0 \lambda_{II} + z \chi_0 \lambda_I}{x} - \frac{y_\infty}{x_\infty} \lambda_{II} \right), \quad v = \frac{y_\infty}{\sqrt{x_\infty}} \left(\frac{f_0 \lambda_I - \chi_0 \lambda_{II}}{y} - \frac{\lambda_I}{y_\infty} \right), \quad (2.14b)$$

$$\chi = \sqrt{x_\infty y_\infty} \left(\frac{\chi_0(x + yz) - 2f_0^2 y \lambda_I \lambda_{II}}{2xy} + \frac{\lambda_I \lambda_{II}}{x_\infty} \right) - \lambda_{II} \sqrt{y_\infty} v + \frac{\lambda_I}{\sqrt{x_\infty}} u, \quad (2.14c)$$

где

$$z = 1 - 2\chi_0 \lambda_I \lambda_{II}, \quad y = 1 - 2f_0 \lambda_I^2, \quad x = z^2 - 2f_0 y \lambda_{II}^2, \quad (2.15a)$$

$$y_\infty = 1 - 2\lambda_I^2, \quad x_\infty = 1 - 2\lambda_{II}^2 + 4\lambda_I^2 \lambda_{II}^2. \quad (2.15b)$$

Заряды решения могут быть извлечены из асимптотического поведения потенциалов как для исходного, так и для преобразованного решения.

$$f_0 \rightarrow 1 - \frac{2M_0}{r}, \quad \chi_0 \rightarrow \frac{2N_0}{r}, \quad (2.16a)$$

$$f \rightarrow 1 - \frac{2M}{r}, \quad \chi \rightarrow \frac{2N}{r}, \quad u \rightarrow \frac{\sqrt{2}P}{r}, \quad v \rightarrow \frac{\sqrt{2}Q}{r}, \quad \phi \rightarrow \frac{\alpha D}{r}. \quad (2.16b)$$

Соотношение между затравочными зарядами (2.16a) и сгенерированными зарядами (2.16b) можно получить из (2.14)

$$M = M_0 \frac{2x_\infty + 2y_\infty - x_\infty y_\infty - 1}{2x_\infty y_\infty} - \frac{2N_0 \lambda_I \lambda_{II}}{x_\infty}, \quad (2.17a)$$

$$N = \frac{N_0 + 2M_0 \lambda_I \lambda_{II}}{\sqrt{x_\infty y_\infty}}, \quad (2.17b)$$

$$P = -\sqrt{2} \frac{M_0 \lambda_{II} (2y_\infty - 1) - N_0 \lambda_I (2 - x_\infty)}{x_\infty \sqrt{y_\infty}}, \quad (2.17c)$$

$$Q = -\sqrt{2} \frac{M_0 \lambda_I + N_0 \lambda_{II} y_\infty}{\sqrt{x_\infty y_\infty}}, \quad (2.17d)$$

$$D = -\frac{4N_0 \lambda_I \lambda_{II} y_\infty + M_0 (x_\infty y_\infty - 2y_\infty + 1)}{2x_\infty y_\infty}. \quad (2.17e)$$

Существование пяти зарядов, зависящих от четырех параметров λ_I , λ_{II} , M_0 и N_0 , предполагает полиномиальную связь третьей степени

$$P^2(M - D) - Q^2(M + D) + 2NPQ = 2D(M^2 + N^2 - D^2). \quad (2.18)$$

2.2.3 Матричное представление

Для наиболее удобного для генерации вида, представим метрику таргет-пространства в матричном виде

$$\mathcal{G}_{AB} d\varphi^A d\varphi^B = \frac{1}{4} \text{Tr} (\mathcal{M}^{-1} d\mathcal{M} \mathcal{M}^{-1} d\mathcal{M}). \quad (2.19)$$

где \mathcal{M} – симметричная матрица, принадлежащая косету $SL(3, R)/SO(2,1)$. Изометрии таргет-пространства соответствуют преобразованиям матрицы \mathcal{M}

$$\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}' = P^T \mathcal{M} P, \quad (2.20)$$

где $P \in SL(3, R)$ – некоторая матрица. В терминах \mathcal{M} , уравнения сигма-модели принимают вид

$$\nabla_i (\mathcal{M}^{-1} \nabla^i \mathcal{M}) = 0, \quad (2.21)$$

где ∇_i – ковариантная производная в трехмерном пространстве, и трехмерные уравнения Эйнштейна записываются как

$$\mathcal{R}_{ij} = -\frac{1}{4} \text{Tr} (\nabla_i \mathcal{M} \nabla_j \mathcal{M}^{-1}). \quad (2.22)$$

В терминах потенциалов, матричное представление косета было найдено в [56]. Запишем его в другом виде, связанным преобразованиями подобия:

$$\mathcal{M} = e^{2\alpha\phi/3} f^{-1} \begin{pmatrix} -f^2 + 2v^2 f e^{-2\alpha\phi} - (\chi - uv)^2 & \sqrt{2} v f e^{-2\alpha\phi} + \sqrt{2} u (\chi - uv) & \chi - uv \\ \sqrt{2} v f e^{-2\alpha\phi} + \sqrt{2} u (\chi - uv) & f e^{-2\alpha\phi} - 2u^2 & -\sqrt{2} u \\ \chi - uv & -\sqrt{2} u & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Альтернативный вывод σ -модели имеет преимущество, которое позволяет явно использовать $SL(2, R)$ -структуру компактифицированного пространства [24]. Начнем с параметризации 5-метрики в виде

$$ds_{(5)}^2 = \lambda_{ab} (dx^a + a_i^a dx^i) (dx^b + a_j^b dx^j) + \tau^{-1} h_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.24)$$

$$h_{ij} dx^i dx^j = dr^2 + Fr^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.25)$$

где $\tau = -\det \lambda_{ab}$, $a, b = 0, 5$ и $i, j = 1, 2, 3$. Сравнивая предыдущий анзац (1.20) с этим, получим соответствия

$$e^{-4\alpha\phi/3} = \lambda_{55}, \quad A_t = \lambda_{05}/2\lambda_{55}, \quad f = \tau/\sqrt{\lambda_{55}}, \quad (2.26)$$

$$a^0 = -\omega d\varphi = 2N \cos \theta d\varphi, \quad a^5 = 2(\omega A_t + A_\varphi) d\varphi = 2P \cos \theta d\varphi. \quad (2.27)$$

Теперь, мы можем определить дуальный 2-вектор V_a :

$$V_{a,i} = \tau \lambda_{ab} h_{il} \varepsilon^{ljk} a_{l,k}^b = (\lambda_{a0} N + \lambda_{a5} P) \sin \theta, \quad (2.28)$$

откуда матрица \mathcal{M} запишется как

$$\mathcal{M} = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} \tau \lambda_{ab} - V_a V_b & V_a \\ V_b & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Чтобы решить уравнения (2.21), (2.22) для невращающейся конфигурации, следуя работам Крамера и Нойгебауэра [58], предположим, что переменные таргет-пространства φ^A зависят от координат лишь через единственную скалярную функцию $g(x^i)$, т.е. $\varphi^A(x^i) = \varphi^A [g(x^i)]$ является гармонической функцией в \mathbb{Z} -пространстве:

$$\nabla^i \nabla_i g(x^i) = 0. \quad (2.30)$$

Тогда $\varphi^A(g)$ будет геодезической в таргет-пространстве, параметризованной через аффинный параметр g . В матричном представлении, геодезическое уравнение запишется как

$$\frac{d}{dg} \left(\mathcal{M}^{-1} \frac{d\mathcal{M}}{dg} \right) = 0. \quad (2.31)$$

Полагая, что $g \rightarrow 0$ на пространственной асимптотике, и определяя асимптотическое значение матрицы \mathcal{M} на $g = 0$ как $\eta = \text{diag}(-1, 1, -1)$, решение уравнение (2.31) можно представить в виде

$$\mathcal{M} = \eta e^{gA}, \quad (2.32)$$

где A – некоторая постоянная матрица, принадлежащая алгебре Ли $sl(3, R)$, и которая удовлетворяет следующим условиям

$$A^T = \eta A \eta, \quad \text{Tr} A = 0. \quad (2.33)$$

Для того, чтобы найти матрицу A в явном виде, нормализуем гармоническую функцию g так, что на асимптотике она имеет вид

$$g \sim \frac{2}{r}, \quad (2.34)$$

и предположим асимптотическое поведение потенциалов таргет-пространства через заряды в виде (2.16b). Тогда на асимптотике матрица \mathcal{M} стремится к постоянной матрице $\eta = \text{diag}(-1, 1, -1)$, а зарядовая матрица A будет параметризована шестью независимыми зарядами (см. работы [22; 307]):

$$A = \begin{pmatrix} -M + D & -Q & N \\ Q & -2D & P \\ N & -P & M + D \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Изометрии таргет пространства, сохраняющие условия (2.16b) на асимптотике, приводят к преобразованиям матрицы A в следующем виде:

$$A \rightarrow A' = P^{-1}AP, \quad P^T \eta P = \eta. \quad (2.36)$$

Новая косетная матрица $\mathcal{M}' = \eta e^{gA'}$ будет приводить к новым решениям с той же асимптотикой. Очевидно, чтобы асимптотические условия оставались верными, матрица преобразований P должна принадлежать подгруппе изотропии $H = SO(2,1)$ группы изометрий. Данный подход удобен для представления преобразований, сохраняющих асимптотику.

2.2.4 Параметризация зарядов

Связь (2.18) можно понимать как условие вырождения зарядовой матрицы $\det A = 0$. Знак выражения

$$\mathfrak{t}^2 = \text{Tr}(A^2) = M^2 + N^2 + 3D^2 - Q^2 - P^2 \quad (2.37)$$

позволяет провести классификацию решений на основе линейного элемента таргет-пространства (2.8). Решение с $\mathfrak{t}^2 = 0$ соответствует изотропным геодезическим таргет-пространства, тогда как $\mathfrak{t}^2 > 0$ ($\mathfrak{t}^2 < 0$) являются пространственноподобными (времениподобными) геодезическими. Более подробную информацию о представлении смежных классов и матрице зарядов можно найти в работах [22; 69; 307].

Симметричная форма выражения (2.18) между электромагнитными зарядами Q, P и между гравитационными зарядами M, N указывает на удобство следующей параметризации:

$$P = e \cos \alpha, \quad Q = e \sin \alpha, \quad N = \mu \cos \beta, \quad M = \mu \sin \beta, \quad (2.38)$$

где $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ и $e, \mu \geq 0$. Эта параметризация помогает упростить ограничение (2.18)

$$D^3 - \frac{e^2 + 2\mu^2}{2}D + \frac{1}{2}e^2\mu \sin(2\alpha + \beta) = 0 \quad (2.39)$$

и представить ее решение относительно скалярного заряда D простым способом (подробности см. в [69])

$$D_k = \sqrt{\frac{2}{3}} h \cos \frac{\gamma - (2k - 1)\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}_3, \quad (2.40)$$

где

$$h = \sqrt{e^2 + 2\mu^2}, \quad f^3 = e^2 \mu \sin(2\alpha + \beta), \quad \gamma = \arccos \frac{3^{3/2} f^3}{2^{1/2} h^3}, \quad (2.41)$$

Переобозначим $D_{\pm 1}$ как D_{\pm} . Все три корня D_k действительны и подчиняются неравенствам

$$D_- \leq -\mu, \quad |D_0| \leq \mu, \quad D_+ \geq \mu. \quad (2.42)$$

Ветви D_{\pm} касаются D_0 в точке $e = 2\mu$, $2\alpha + \beta = (2 \mp 1)\pi/2$ соответственно. Эти точки составляют подкласс зарядовых матриц с $\text{rank} A = 1$.

2.3 Преобразования для модели скалярно тензорной теории гравитации

2.3.1 Скрытые симметрии сигма-модели

Стационарный сектор модели (1.22) допускает трехмерное представление σ -модели, с помощью анзаца (2.1). Предполагается, что индексы 3-метрики понижаются и повышаются с помощью h_{ij} и обратной метрикой h^{ij} . 1-форма $\omega_i dx^i$ может быть выражена через твист-потенциал χ

$$\partial_i \chi = -\frac{f^2}{\sqrt{h}} h_{ij} \epsilon^{jkl} \partial_k \omega_l, \quad (2.43)$$

Набор потенциалов сигма-модели составляют три скаляра $\Phi^A = \{\psi, \chi, \phi\}$ (где $\psi = \frac{1}{2} \ln f$)

$$\mathcal{G}_{AB} d\Phi^A d\Phi^B = 2(d\phi^2 + d\psi^2) + \frac{1}{2} e^{-4\psi} d\chi^2, \quad (2.44)$$

Отметим, что теорию МЭС можно рассматривать как усечение ЭМД с тривиальным электромагнитным полем [56].

Метрика таргет-пространства \mathcal{G}_{AB} допускает три калибровочные изометрии

$$I : \quad \phi \rightarrow \phi + \lambda_\phi \quad (2.45a)$$

$$II : \quad \chi \rightarrow \chi + \lambda_\chi \quad (2.45b)$$

$$III : \quad \psi \rightarrow \psi + \lambda_\psi, \quad \chi \rightarrow e^{2\lambda_\psi} \chi \quad (2.45c)$$

с постоянными параметрами $\lambda_\phi, \lambda_\chi, \lambda_\psi$ и нетривиальным преобразованием Элерса [308]

$$\frac{1}{z} \rightarrow \frac{1}{z'} = \frac{1}{z} + i\lambda_E, \quad z = f + i\chi \quad (2.46)$$

с параметром λ_E .

Для статического усечения $\chi = 0$, имеется также $SO(2)$ -симметрия в плоскости (ψ, ϕ) :

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \psi' \\ \phi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

которая параметризуется углом β . Преобразование (2.47) является σ -модельным эквивалентом преобразования, найденного Бухдалом [76], которое также было заново открыто в [67].

2.3.2 Преобразования Клемана

Применим другую технику генерации, предложенную Клеманом и разработанную в рамках теории Эйнштейна-Максвелла [110] (преобразование Клемана). В исходной статье это двухшаговая процедура, где начальное и конечное решения являются вакуумными, но поле Максвелла является вспомогательным. Поскольку поле Максвелла играет важную роль в ПК, мы должны расширить нашу модель на модель Эйнштейна-Максвелла со скаляром, действие которой можно получить из (1.15), положив $\alpha = 0$. В [110] показано, что применение ПК к решению ЗВ с параметром деформации δ не приводит к какой-либо вакуумной метрике в конце процедуры из-за недостаточного количества свободных параметров. Но можно надеяться получить желаемый результат,

применяя ПК к комбинированной метрике ФЗВ с заменой $\delta \rightarrow S\delta$, что дает новый параметр. Можно надеяться получить вращающееся обобщение метрики ФЗВ с ограничением $S\delta = 1$.

Сначала, обобщим сигма-модель на модель с полем Максвелла, в виде в виде (2.8) и потенциалами (2.7a), (2.7b), где $\alpha = 0$

$$dl^2 = \frac{1}{2f^2} (df^2 + (d\chi + vdu - udv)^2) - \frac{1}{f} (du^2 + dv^2) + 2d\phi^2. \quad (2.48)$$

Здесь, скалярное поле отделено от других потенциалов, поэтому все симметрии модели Эйнштейна-Максвелла сохраняются, что позволяет применять методы генерации, описанные в [309; 310]. Следуя [110], переходим к комплексным потенциалам Эрнста (\mathcal{E}, Q) и Киннерсли (U, V, W) ,

$$\mathcal{E} = f + i\chi - \bar{Q}Q = \frac{U - W}{U + W}, \quad Q = \frac{v + iu}{\sqrt{2}} = \frac{V}{U + W}, \quad (2.49)$$

при этом один из потенциалов Киннерсли является избыточным. Бесскалярный сектор σ -модели (2.48) обладает группой изометрий $SU(2,1)$, действующей на комплексном векторном пространстве (U, V, W) , оставляя инвариантной норму $\bar{U}U + \bar{V}V - \bar{W}W$.

Кратко напомним преобразование ПК, представляющее собой три последовательных преобразования $\mathcal{R} = \Pi^{-1}R\Pi$ с дискретным отображением таргет-пространства

$$\Pi : U \leftrightarrow V, \quad (2.50)$$

с последующим преобразованием координат

$$R : \varphi \rightarrow \varphi + \Omega t \quad (2.51)$$

и еще одним преобразованием в таргет-пространстве. Преобразования таргет-пространства и координат не меняют скалярное поле ϕ .

Начиная со статического вакуумного затравочного решения $\mathcal{E}_1 \in \mathbb{R}$, $Q_1 = 0$, мы можем положить

$$V_1 = 0, \quad U_1 = -1 - \mathcal{E}_1, \quad W_1 = -1 + \mathcal{E}_1, \quad (2.52)$$

где индексы нумеруют шаги процедуры. После первого Π -преобразования $U \leftrightarrow V$ потенциалы Эрнста принимают вид

$$\mathcal{E}_2 = -1, \quad Q_2 = \frac{1 + \mathcal{E}_1}{1 - \mathcal{E}_1} \quad (2.53)$$

а новые функции f, χ, u, v считаются из (2.49)

$$f_2 = \frac{4\mathcal{E}_1}{(\mathcal{E}_1 - 1)^2}, \quad \chi_2 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad v_2 = \sqrt{2} \frac{1 + \mathcal{E}_1}{1 - \mathcal{E}_1}, \quad u_2 = 0. \quad (2.54)$$

Соответствующее пространство-время не является асимптотически плоским. Выполним глобальное преобразование координат (2.51) для равномерно вращающейся системы отсчета $\varphi = \tilde{\varphi} + \Omega t$. Действие преобразования (2.51) на метрику в параметризации Вейля-Папапетру

$$ds^2 = -f(dt - \omega d\varphi)^2 + f^{-1} (\gamma_{mn} dx^m dx^n + \rho^2 d\varphi^2) \quad (2.55)$$

имеет вид

$$f' = f[1 - 2\Omega\omega + \Omega^2(\omega^2 - f^{-2}\rho^2)], \quad \omega' = \frac{\omega - \Omega(\omega^2 - f^{-2}\rho^2)}{1 - 2\Omega\omega + \Omega^2(\omega^2 - f^{-2}\rho^2)}, \quad (2.56a)$$

$$\gamma'_{mn} = \frac{f'}{f} \gamma_{mn}, \quad \rho' = \rho, \quad (2.56b)$$

$$\partial_m v' = (1 - \Omega\omega) \partial_m v - \Omega f^{-1} \rho \tilde{\partial}_m u, \quad \partial_m u' = (1 - \Omega\omega) \partial_m u + \Omega f^{-1} \rho \tilde{\partial}_m v, \quad (2.56c)$$

где $\tilde{\partial}_m = \gamma^{-1/2} \gamma_{mn} \epsilon^{np} \partial_p$. Применяя эти преобразования к (2.54), преобразованные функции упрощаются до вида

$$f_3 = f_2(1 - w^2), \quad \omega_3 = \frac{\Omega^{-1} w^2}{1 - w^2}, \quad \gamma_{3mn} = (1 - w^2) \gamma_{2mn}, \quad \rho_3 = \rho_2, \quad (2.57)$$

$$v_3 = v_2, \quad \partial_m u_3 = w \tilde{\partial}_m v_2, \quad w = \Omega \rho / f_2.$$

Затем потенциалы Эрнста масштабируются константой $\mathcal{E} \rightarrow p^2 \mathcal{E}$, $Q \rightarrow pQ$, что соответствует инвариантности решения относительно следующих преобразований: $t \rightarrow pt$, $f \rightarrow p^{-2} f$, $\omega \rightarrow p\omega$, $h_{ij} \rightarrow p^{-2} h_{ij}$, $u \in p^{-1} u$, $v \rightarrow p^{-1} v$. Необходимость такого преобразования будет раскрыта ниже.

Последнее преобразование Π^{-1} приводит к окончательному решению с потенциалами Эрнста \mathcal{E}_4 , Q_4 в виде

$$\mathcal{E}_4 = \frac{2Q_3 + \mathcal{E}_3 - 1}{2Q_3 - \mathcal{E}_3 + 1}, \quad Q_4 = \frac{1 + \mathcal{E}_3}{2Q_3 - \mathcal{E}_3 + 1}. \quad (2.58)$$

Для получения окончательного решения с тривиальным электромагнитным полем необходимо найти такие параметры, при которых Q_4 равняется нулю, что достигается при $\mathcal{E}_3 = -1$.

2.3.3 Преобразования Эриша-Гюрсеса

Дальнейшее упрощение уравнений движения может быть достигнуто в предположении об аксиальной симметрии. Далее для метрики используется анзац Вейля-Папапетру:

$$ds^2 = -\exp(2\psi)(dt - \omega d\varphi)^2 + \exp(-2\psi) [\exp(2\gamma)(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2], \quad (2.59)$$

где ψ , ω и γ – функции координат $\rho = k\sqrt{(x^2 - 1)(1 - y^2)}$ и $r = kxy$. Уравнения движения имеют вид

$$\Delta\psi = -\frac{1}{2}e^{4\psi}\rho^{-2}(\nabla\omega)^2, \quad (2.60a)$$

$$\nabla(e^{4\psi}\rho^{-2}\nabla\omega) = 0, \quad (2.60b)$$

$$\gamma_{,\rho} = \rho \left(\psi_{,\rho}^2 - \psi_{,z}^2 + \phi_{,\rho}^2 - \phi_{,z}^2 - \frac{1}{4}e^{4\psi}\rho^{-2}(\omega_{,\rho}^2 - \omega_{,z}^2) \right), \quad (2.60c)$$

$$\gamma_{,z} = 2\rho \left(\psi_{,\rho}\psi_{,z} + \phi_{,\rho}\phi_{,z} - \frac{1}{4}e^{4\psi}\rho^{-2}(\omega_{,\rho}\omega_{,z}) \right), \quad (2.60d)$$

$$\Delta\phi = 0, \quad (2.60e)$$

где векторные операторы действуют так же, как и в цилиндрических координатах плоского пространства (ρ, z, φ) . Эриш и Гюрсес [113] предложили разделить уравнения на вакуумную и скалярную части. Для этого нужно представить функцию γ в виде суммы двух слагаемых $\gamma = \gamma^\psi + \gamma^\phi$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. Если функции ψ , ω и $\gamma = \gamma^\psi$ удовлетворяют вакуумным уравнениям, то функции ψ , ω и $\gamma = \gamma^\psi + \gamma^\phi$ удовлетворяют уравнениям (2.60), если скалярное поле удовлетворяет уравнению (2.60e) и

$$\gamma_{,\rho}^\phi = \rho(\phi_{,\rho}^2 - \phi_{,z}^2), \quad \gamma_{,z}^\phi = 2\rho\phi_{,\rho}\phi_{,z}. \quad (2.61)$$

Условием интегрируемости уравнений (2.61) является (2.60e).

Эта теорема позволяет нам генерировать решение с нетривиальным скалярным полем из вакуумного решения. Мы будем сокращать эту процедуру как ЭГ-преобразование. Кроме того, ЭГ-дуальность может применяться также в обратном направлении, чтобы избавиться от скалярного поля. Для статического случая композиция $SO(2)$ -преобразования (2.47) и ЭГ-преобразования при

соответствующем выборе параметров преобразуют одно вакуумное решение в другое. Это комбинированное преобразование совпадает с преобразованием Зипоя-Вурхиса $\psi \rightarrow s\psi$, $\gamma^\psi \rightarrow s^2\gamma^\psi$.

В силу $SO(2)$ -симметрии (2.47) в статическом случае $\omega = 0$ уравнения движения для γ^ψ и ψ имеют вид (2.61), (2.63) аналогичные уравнениям γ^ϕ и ϕ :

$$\gamma_{,\rho}^\psi = \rho (\psi_{,\rho}^2 - \psi_{,z}^2), \quad \gamma_{,z}^\psi = 2\rho\psi_{,\rho}\psi_{,z}, \quad (2.62a)$$

$$\partial_\rho\rho\partial\rho\psi + \rho\partial_z^2\psi = 0. \quad (2.62b)$$

2.3.4 Генерация высших скалярных мультиполей

Уравнение скалярного поля (2.60e) не содержит явно координату z :

$$\partial_\rho\rho\partial\rho\phi + \rho\partial_z^2\phi = 0. \quad (2.63)$$

Следовательно, если $\phi_0(\rho, z)$ – решение уравнения (2.63), то $\phi_n = \partial_z^n\phi_0$ – тоже решение, и функция γ^ϕ имеет новую форму, определяемую уравнением (2.61). Такие преобразования обсуждались в [99] в контексте керро-подобных решений со скалярным полем.

2.4 Сигма-модель для гравитации Эйнштейна с антисимметричной формой и дилатоном в произвольной размерности

Кратко опишем технику генерации для p -бран в соответствии с [131]. Мы предполагаем, что брана трансляционно-инвариантна в пространстве и времени, что подразумевает существование d коммутирующих векторов Киллинга, один из которых времениподобен. В адаптированных для этого случая координатах, метрику D -мерного пространства-времени можно записать в виде

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dy^\mu dy^\nu + (\sqrt{-g})^{-2/s} h_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta, \quad (2.64)$$

где $g_{\mu\nu}$ и $h_{\alpha\beta}$ – метрики на d -мерном мировом объеме браны и $s + 2$ -мерном поперечном пространстве соответственно, т.е. $D = d + s + 2$. Обе метрики

зависят только от поперечных координат, а их индексы пробегает значения $\mu, \nu = 0, \dots, d-1$ и $\alpha, \beta = 1, \dots, s+2$. Мы рассматриваем отдельно электрические и магнитные браны. В первом случае $n = d$ и поле формы $F_{(n+1)} = dA_{(n)}$ порождается потенциалом

$$A_{01\dots d-1} = v(x). \quad (2.65)$$

В магнитном случае $n = s$ и поле формы имеет вид:

$$F^{\alpha_1 \dots \alpha_{s+1}} = \frac{e^{\alpha\phi}}{\sqrt{-G}} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_{s+1} \beta} \partial_\beta u(x). \quad (2.66)$$

При этом как электрический $v(x)$, так и магнитный $u(x)$ потенциалы также зависят от поперечных координат.

Удобно перемасштабировать метрику мирового объема как $g_{\mu\nu} = f^{2/d} \tilde{g}_{\mu\nu}$, где $f = \sqrt{-g}$, $\det \tilde{g}_{\mu\nu} = -1$. В терминах новых переменных уравнения движения сводятся к уравнениям $s+2$ -мерной сигма-модели:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{s+2}x \sqrt{h} \left[R(h) - h^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + \frac{s+d}{sd} \partial_\alpha (\ln f) \partial_\beta (\ln f) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} \tilde{g}^{\mu\lambda} \partial_\alpha \tilde{g}_{\lambda\nu} \tilde{g}^{\nu\sigma} \partial_\beta \tilde{g}_{\sigma\mu} - \frac{1}{2} e^{-\psi} \partial_\alpha v \partial_\beta v \right) \right]. \quad (2.67)$$

где $R(h)$ – скаляр Риччи метрики $h_{\alpha\beta}$ и $\psi = \alpha\phi + 2 \ln f$. Матрица $\tilde{g}_{\mu\nu}$ отделяется от остальных переменных, взаимодействуя с ними только через гравитационное поле $h_{\alpha\beta}$. Поскольку $\tilde{g}_{\mu\nu}$ – симметричная матрица с (отрицательным) единичным определителем, эта часть переменных параметризует косет $SL(d, R)/SO(1, d-1)$. Поэтому метрика мирового объема p -браны в значительной степени независима от других переменных σ -модели, которые влияют только на ее определитель. В магнитном случае необходимо заменить v на u и изменить знак дилатона.

В результате мы получим $s+2$ -мерные сигма-модели на поперечном пространстве с метрикой $h_{\alpha\beta}$, и потенциалами таргет-пространства $f, \phi, \tilde{g}^{\mu\nu}$ и v или u соответственно для электрического (+) и магнитного (–) случаев [131]. Элементы длины соответствующих таргет-пространств имеют вид

$$dl_e^2 = Ad\xi_+^2 + Bd\psi_+^2 - \frac{1}{2} e^{-\psi_+} dv^2 + \frac{1}{4} \text{tr} [\tilde{g}^{-1} d\tilde{g} \tilde{g}^{-1} d\tilde{g}], \quad (2.68a)$$

$$dl_m^2 = Ad\xi_-^2 + Bd\psi_-^2 - \frac{1}{2} e^{-\psi_-} du^2 + \frac{1}{4} \text{tr} [\tilde{g}^{-1} d\tilde{g} \tilde{g}^{-1} d\tilde{g}], \quad (2.68b)$$

где ξ_{\pm}, ψ_{\pm} – следующие функции от ϕ и f

$$\xi_{\pm} = \pm sd\phi - \alpha(s+d) \ln f, \quad \psi_{\pm} = \pm \alpha\phi + 2 \ln f, \quad (2.69)$$

и A, B – константы

$$A = \frac{1}{sd\Delta}, \quad B = \frac{s+d}{2\Delta}, \quad \Delta = \alpha^2(s+d) + 2sd.$$

Между электрической (2.68a) и магнитной (2.68b) сигма-моделями существует электромагнитная дуальность

$$\phi \rightarrow -\phi, \quad u \leftrightarrow v, \quad (2.70)$$

которая переводит электрическое решение в магнитное и наоборот. Имея это в виду, рассмотрим электрический случай (2.68a).

2.4.1 Преобразования Харрисона для гипербран

Группа изометрий таргет-пространства $SL(d, R)/SO(1, d-1) \times SL(2, R)/SO(1, 1) \times R$ состоит из преобразований матрицы \tilde{g} , трансляции вдоль ξ_+ и нетривиальные преобразования в подпространстве (ψ_+, v) , относящиеся к технике генерации. Аналогично четырехмерной модели Эйнштейна-Максвелла можно определить потенциалы Эрнста

$$\Phi = \frac{v}{2\sqrt{2B}}, \quad \mathcal{E} = \exp \psi_+ - \frac{v^2}{8B}. \quad (2.71)$$

Нетривиальное преобразование изометрии, сохраняющее асимптотику потенциалов Эрнста $\mathcal{E} \rightarrow 1, \Phi \rightarrow 0$, имеет вид

$$\Phi = \frac{\Phi^{(0)} + c(c\Phi^{(0)} + \mathcal{E}^{(0)} - 1)}{1 - 2c\Phi^{(0)} - c^2\mathcal{E}^{(0)}}, \quad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}^{(0)} + 2c\Phi^{(0)} - c^2}{1 - 2c\Phi^{(0)} - c^2\mathcal{E}^{(0)}}, \quad (2.72)$$

где индекс $^{(0)}$ обозначает исходное решение, а c – действительный параметр преобразования. Если начальное решение не заряжено $v_0 = 0$, преобразование (2.72) можно упростить

$$\Phi = c \frac{\mathcal{E}^{(0)} - 1}{1 - c^2\mathcal{E}^{(0)}}, \quad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}^{(0)} - c^2}{1 - c^2\mathcal{E}^{(0)}}. \quad (2.73)$$

Преобразования магнитной изометрии таргет-пространства (2.68b) можно получить, заменив v и ψ_+ на u и ψ_- в (2.71) в соответствии с ЭМ-дуальностью. Эти преобразования представляют собой обобщенное отображение Харрисона для модели (1.12).

Глава 3. Генерация и анализ решений

3.1 Статичные дионы с НУТ и независмым дилатонным зарядом в КК ЭМД

Следуя подходу, изложенному в работе [20], воспользуемся формулой (2.32) и классифицируем решения в соответствии с рангом зарядовой матрицы A . Решения с независмым дилатонным зарядом соответствуют рангу 3, т.е. невырожденным матрицам $\det A \neq 0$. Для экспоненцирования матрицы, воспользуемся интерполяционной формулой Лагранжа

$$e^{gA} = \sum_{i=-1}^{+1} e^{g\lambda_i} \prod_{i \neq j} \frac{A - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad (3.1)$$

где λ_k – собственные значения матрицы A , удовлетворяющие уравнению

$$\lambda_k^3 - \delta^2 \lambda_k - c = 0 \quad (3.2)$$

в силу $\text{tr} A = 0$, и были введены константы

$$\delta^2 = \frac{1}{2} \text{tr} A^2 = M^2 + N^2 + 3D^2 - P^2 - Q^2, \quad (3.3)$$

$$c = \det A = 2D(M^2 + N^2 - D^2) + P^2(D - M) + Q^2(D + M) - 2NPQ. \quad (3.4)$$

В общем случае, набор собственных значений с индексами $k = \pm 1, 0$ имеют вид:

$$\lambda_k = \frac{2\delta}{\sqrt{3}} \cos \phi_k, \quad \phi_k = \frac{1}{3} \arccos(z) + \frac{2\pi}{3} k, \quad z = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{c}{\delta^3}. \quad (3.5)$$

Поскольку матрица A имеет нулевой след, следующее произведение можно упростить

$$\prod_{i \neq j} \frac{A - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{A - \lambda_{j_1}}{\lambda_i - \lambda_{j_1}} \frac{A - \lambda_{j_2}}{\lambda_i - \lambda_{j_2}} = \frac{A^2 - (\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2})A + \lambda_{j_1} \lambda_{j_2}}{\lambda_i^2 - (\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2})\lambda_i + \lambda_{j_1} \lambda_{j_2}}. \quad (3.6)$$

Тогда, используя связь между собственными значениями

$$\lambda_{-1} + \lambda_0 + \lambda_{+1} = 0, \quad \lambda_{-1}^2 + \lambda_0^2 + \lambda_{+1}^2 = 2\delta^2, \quad \lambda_{-1} \lambda_0 \lambda_{+1} = c \quad (3.7)$$

получим

$$\prod_{i \neq j} \frac{A - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{A^2 + \lambda_i A + c/\lambda_i}{2\lambda_i^2 + c/\lambda_i} = 1 + \frac{\lambda_i}{2\lambda_i^3 + c} (A^2 + \lambda_i A - 2\lambda_i^2). \quad (3.8)$$

Также, можно обнаружить следующее соотношение

$$\frac{\lambda_i}{2\lambda_i^3 + c} - \frac{1}{3\lambda_i^2 - \delta^2} = \frac{\lambda_i^3 - \delta^2 \lambda_i - c}{(2\lambda_i^3 + c)(3\lambda_i^2 - \delta^2)}, \quad (3.9)$$

где числитель равен нулю в силу уравнений на собственные значения для λ_i . Знаменатель может быть равным нулю только если спектр λ_k вырожден (и вторая скобка $3\lambda_i^2 - \delta^2$ равна нулю), или в случае $c = 0$ (это условие приводит к равенству нулю первой скобки $2\lambda_i^3 + c$). Эти оба случая будут рассмотрены позже. Поэтому, имеем:

$$\prod_{i \neq j} \frac{A - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 1 + \frac{A^2 + \lambda_i A - 2\lambda_i^2}{3\lambda_i^2 - \delta^2} = \frac{A^2 + \lambda_i A + \lambda_i^2 - \delta^2}{3\lambda_i^2 - \delta^2}. \quad (3.10)$$

Матрица \mathcal{M} тогда может быть переписана в виде

$$\mathcal{M} = \eta e^{Ag} = \eta g_2 + \eta A g_1 + \eta (A^2 - \delta^2) g_0, \quad (3.11)$$

где мы ввели обозначения

$$g_n = \sum_{i=-1}^{+1} \frac{\lambda_i^n e^{g\lambda_i}}{3\lambda_i^2 - \delta^2}, \quad (3.12)$$

и два матричных слагаемых в разложении имеют вид

$$\eta A = \begin{pmatrix} M - D & Q & -N \\ Q & -2D & P \\ -N & P & -D - M \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

$$\eta (A^2 - \delta^2) = \begin{pmatrix} 2D^2 + 2MD - P^2 & NP - (D + M)Q & PQ - 2DN \\ NP - (D + M)Q & D^2 - M^2 - N^2 & -DP + MP + NQ \\ PQ - 2DN & -DP + MP + NQ & 2D^2 - 2MD - Q^2 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Это решение приводит к дионным обобщениям с НУТ-разрядом решений ФЯНВ в КК ЭМД, если мы выберем следующую 3-метрику

$$ds_{(3)}^2 = dr^2 + r(r - 2\delta)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.15)$$

с гармонической функцией

$$g = -\frac{1}{\delta} \ln F, \quad F = 1 - \frac{2\delta}{r}. \quad (3.16)$$

Тогда 2×2 -матрица $\lambda_{ab} = \mathcal{M}_{ab} + V_a V_b / \tau = \mathcal{M}_{ab} - \mathcal{M}_{3a} \mathcal{M}_{b3} / \mathcal{M}_{33}$ и $\tau = -\det \lambda_{ab}$ имеют явный вид:

$$\begin{aligned} \lambda_{00} &= -g_2 + (M - D)g_1 + (2D(D + M) - P^2)g_0 \\ &\quad + \tau(-Ng_1 + (-2DN + PQ)g_0)^2, \\ \lambda_{05} &= Qg_1 + (-(M + D)Q + NP)g_0 + \\ &\quad + \tau(-Ng_1 + (-2DN + PQ)g_0)(Pg_1 + ((M - D)P + NQ)g_0), \\ \lambda_{55} &= g_2 - 2Dg_1 + (D^2 - M^2 - N^2)g_0 + \tau(Pg_1 + ((M - D)P + NQ)g_0)^2, \\ \tau^{-1} &= g_2 + (M + D)g_1 - (2D(D - M) - Q^2)g_0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Эти выражения могут быть упрощены, если представить в виде

$$\lambda_{ab} = \tau \sum_{i,j=-1}^{+1} \frac{e^{g(\lambda_i + \lambda_j)} P_{ab}^{ij}}{(3\lambda_i^2 - \delta^2)(3\lambda_j^2 - \delta^2)}, \quad (3.18)$$

где P_{ab}^{ij} являются некоторыми полиномами λ_i , λ_j и зарядов. Тогда диагональная часть $i = j$ оказывается пропорциональной уравнению на собственные значения

$$P_{00}^{ii} = (2D + \lambda_i)(c + \delta^2 \lambda_i - \lambda_i^3), \quad (3.19a)$$

$$P_{05}^{ii} = -Q(c + \delta^2 \lambda_i - \lambda_i^3), \quad (3.19b)$$

$$P_{55}^{ii} = (D - M - \lambda_i)(c + \delta^2 \lambda_i - \lambda_i^3), \quad (3.19c)$$

а значит равна нулю, в то время как недиагональная часть не равна нулю. Недиagonальные слагаемые $i \neq j$ не могут быть как-либо упрощены, но можно заметить, что $e^{g(\lambda_i + \lambda_j)} = e^{-g\lambda_k}$, где $k \neq i, j$. Т.о., функции $\tau^{-1} \lambda_{ab}$ линейны относительно $e^{-g\lambda_k}$.

Когда оба топологических заряда равны нулю, $N = P = 0$, имеем $\lambda_{ab} = \mathcal{M}_{ab}$, а константа c может быть факторизована

$$c = (D + M)(D + M + \delta)(D + M - \delta), \quad (3.20)$$

и уравнения на λ могут быть разрешены в терминах зарядов

$$\lambda_0 = D + M, \quad \lambda_{\pm 1} = \frac{-D - M \pm \sqrt{(M - 3D)^2 - 4Q^2}}{2}. \quad (3.21)$$

Случай вырожденных корней с $z = \pm 1$

В случае, если кубическое уравнение имеет вырожденные корни λ_i , формула Лагранжа работает лишь в пределе. Раскладывая собственные значения вблизи $z = s$, где $s = \pm 1$, относительно малых отклонений ϵ , получим (меняя нумерацию для удобства):

$$\lambda_0 = \frac{2s\delta}{\sqrt{3}}(1 - 2\epsilon^2/3 + \dots), \quad \lambda_{\pm} = \frac{2s\delta}{\sqrt{3}}(-1/2 \pm \epsilon + \epsilon^2/3 + \dots). \quad (3.22)$$

Тогда, предел формулы Лагранжа имеет вид:

$$e^{Ag} = \frac{(A - \lambda)^2}{3\delta^2} e^{-2g\lambda} - \frac{(A + 2\lambda)(A - 4\lambda)}{3\delta^2} e^{g\lambda} + \frac{(A + 2\lambda)(A - \lambda)}{3\lambda} e^{g\lambda} g, \quad (3.23)$$

$$\lambda = -\frac{s\delta}{\sqrt{3}}.$$

Случай $\text{tr}A^2 = 0$

В случае если $\delta = 0$, одно собственное значение действительно, а другие комплексно сопряжены:

$$\lambda_k = c^{1/3} e^{i2\pi k/3}, \quad (3.24)$$

в то время как комбинации (3.12) остаются действительными:

$$g_n = \frac{1}{3} \sum_{i=-1}^{+1} \lambda_i^{n-2} e^{g\lambda_i} = \quad (3.25)$$

$$= \frac{c^{(n-2)/3}}{3} \left(e^{gc^{1/3}} + 2e^{-gc^{1/3}/2} \cos \left(\sqrt{3}gc^{1/3}/2 + 2\pi(n-2)/3 \right) \right),$$

а гармоническая функция равна

$$g = \frac{2}{r}. \quad (3.26)$$

Случай комплексных собственных значений

Если $|z| > 1$, то арккосинусы имеют мнимое значение и λ_0 действительна (заменяя тригонометрический функции на гиперболические), а значения $\lambda_{\pm 1}$ комплексно сопряжены друг с другом. Сумма тех же выражений в формуле Лагранжа дает действительное значение, а значит решение остается физическим.

Сверхэкстремальные решения с мнимой δ так же соответствуют одному действительному и двум комплексным собственным значениям, сопряженным друг с другом. Все выражения в формуле Лагранжа содержат квадрат δ^2 , который остался действительным. Аналогично, слагаемые с комплексно сопряженными собственными значениями приводят к действительному результату. Чтобы привести функцию g к действительной области значений, необходимо выполнить комплексный сдвиг координаты $r \rightarrow r + \delta$:

$$g \rightarrow \frac{-1}{\delta} \ln \left(\frac{r - \delta}{r + \delta} \right) = \frac{2}{|\delta|} \left(\operatorname{arccot} \frac{r}{|\delta|} + \pi \theta(-r/|\delta|) \right). \quad (3.27)$$

Тогда, как и ожидалось, сверхэкстремальные решения останутся физическими. Арккотангенс по своему определению имеет разрыв в точке $r = 0$, который может быть устранен выбором правильного листа функции, используя функцию Хэвисайда θ .

Сингулярности

4-метрика представляет регулярную черную дыру если поверхность $f = 0$ является регулярным горизонтом. Для начала покажем, что функция f может обращаться в нуль только если функция F равна нулю, т.е. при $r = 2\delta$ в не сверхэкстремальном случае. Далее, покажем, что соответствующий горизонт Киллинга сингулярен в четырехмерной интерпретации.

Функция f имеет вид

$$f = (\tau^{-1} \Lambda_{55})^{-1/2} \quad (3.28)$$

где, в соответствии с последним уравнением (3.17) и (3.18), функция τ^{-1} является линейной комбинацией функций $e^{g\lambda_i}$, и $\Lambda_{55} = \tau^{-1} \lambda_{55}$ является линейной

комбинацией функции $e^{-g\lambda_i}$. Следовательно, f может быть нулем если и только если τ^{-1} или Λ_{55} расходятся. В свою очередь, эти функции расходятся только если g стремится к $\pm\infty$. Для субэкстремального случая $g = -\delta^{-1} \ln F$, и самая внешняя расходимость (с наибольшим r) функции g возникает для $F = 0$ ($r = 2\delta$). Для экстремального случая $g = 2/r$, расходимость возникает при $r = 0$. В сверхэкстремальном случае, функция не может расходиться. Поэтому, условие $f = 0$ может быть удовлетворено только если $F = 0$.

В то время как 5-метрика обладает сингулярностью если $\tau^{-1} = 0$, 4-метрика сингулярна, если 4-мерный скаляр Риччи

$$R = 2f(\partial_r\phi)^2 = \frac{3}{8} \frac{\tau\lambda'_{55}}{\lambda_{55}^{5/2}} = \frac{3}{8} f \left(\frac{\lambda'_{55}}{\lambda_{55}} \right)^2 \quad (3.29)$$

расходится.

$\delta^2 > 0, |z| < 1$. В этом случае, все λ_k действительны и их спектр содержит как положительные, так и отрицательные λ_k . Функции $e^{g\lambda_k}$ для $x \rightarrow 0$ ($x = r - 2\delta$) ведут себя как x^{S_k} , где

$$S_k = -\lambda_k/\delta. \quad (3.30)$$

Полагая, что S_k отсортированы в следующем порядке $S_{-1} < S_0 < S_{+1}$, ведущие слагаемые асимптотики ведут себя как $\tau^{-1} \sim x^{S_{-1}}$, $\Lambda_{55} \sim x^{-S_1}$, $\lambda_{55} \sim x^{S_0}$, приводя к следующему результату

$$R \sim S_0^2 x^{\frac{S_{+1}-S_{-1}}{2}-2}. \quad (3.31)$$

Поскольку $|S_k| \leq 2/\sqrt{3}$ из (3.5), степени x всегда отрицательны. Коэффициент S_0 отличен от нуля в невырожденном случае, поэтому скаляр Риччи расходуется на горизонте.

Случай выполнения равенства $|z| = 1$ похож на только что проанализированный, с тем лишь отличием, что выражения для τ^{-1} и λ_{ab} имеют слагаемые с логарифмами от F .

$\delta^2 > 0, |z| > 1$. Введем обозначения

$$y = \frac{1}{6} \ln \left(2z \left(\sqrt{z^2 - 1} + z \right) - 1 \right), \quad s_z = \text{sign}(z), \quad (3.32)$$

и перепишем S_k как

$$S_k = -\frac{s_z}{2} \left(\cosh y \pm i\sqrt{3} \sinh y \right), \quad s_z \cosh y. \quad (3.33)$$

Если $s_z = -1$, можно провести аналогичные выражения из прошлого случая. Удерживая лишь действительную часть, можно показать, что $R \sim x^{-\frac{1}{4} \cosh y - 2}$ расходится для любых y . Для случая $s_z = +1$ необходимо проанализировать выражение τ^{-1} , которое при малых x ведет себя как

$$\tau^{-1} \sim F^{-\frac{1}{2} \cosh y} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sinh y \ln F + \text{const} \right). \quad (3.34)$$

Эта функция бесконечно быстро осциллирует когда F приближается к нулю, благодаря чему появляется бесконечно много нулей (а значит и сингулярностей в пятимерной интерпретации). Вблизи такого нуля имеем $\tau^{-1} \sim u$ ($u \rightarrow 0$), $f \sim u^{-1/2}$ и $R \sim u^{-5/2}$, поэтому появляется бесконечно много сингулярностей вне горизонта.

Экстремальный случай $\underline{\delta} = 0$ с $c \neq 0$ может быть представлен как предел $|z| \rightarrow \infty$. В работе [20] были даны некоторые 5-регулярные решения, принадлежащие этому случаю; они не могут быть 4-регулярными в силу осцилляций функции λ_{55} . Можно предположить, что эти 5-регулярные метрики являются особенными среди класса экстремальных решений, в то время как в общем случае они являются 5-сингулярными в силу осцилляций функции τ^{-1} .

В сверхэкстремальном случае, решения $\underline{\delta}^2 < 0$ могут быть регулярными, если они представляют из себя кротовые норы. Хотя, естественно ожидать, что все невырожденные $\det A \neq 0$ случаи являются 4-сингулярными, проверка отсутствия регулярных кротовых нор является сложной задачей в общем случае. В следующем параграфе будут даны примеры сингулярных сверхэкстремальных решений. Примеры регулярных кротовых нор найдены не были. В работе [69] приведено доказательство несуществования четырехмерных кротовых нор среди вырожденных решений $\det A = 0$. Можно предположить, что четырехмерные кротовые норы не существуют для всех значений $\det A$.

Примеры

Рассмотрим скаляр Риччи для нескольких невырожденных примеров, данных в Таблице 1. Для субэкстремальных решений можно рассмотреть величину $r^4 R$ как функцию $F \in [0, 1)$. Множитель r^4 не может устранить сингулярность,

Пример	M	N	D	Q	P	c	δ^2	z^2
Субэкстремальный								
А.І	1	0	2	0	1	-11	12	121/256
А.ІІ	1	2	1/2	0	1	17/4	19/4	7803/6859
А.ІІІ	1	0	1/2	1	0	9/4	3/4	81
Экстремальный								
Е.І	1	1	$-\sqrt{2}$	2	2	$-8(1 + \sqrt{3})$	0	∞
Сверхэкстремальный								
В.І	1	1	1/2	2	2	-9/4	-21/4	-81/343
В.ІІ	1	0	-1	0	3	-18	-5	-2187/125

Таблица 1 — Примеры невырожденных субэкстремальных, экстремальных и сверхэкстремальных решений.

т.к. функция F обращается в нуль при положительных r . Аналогично, для сверхэкстремальных решений, можно рассмотреть величину $(r^2 + |\delta|^2)^2 R$ как функцию от $g \in (0, \pi)$, где 0 соответствует $r \rightarrow +\infty$ и π соответствует $r \rightarrow -\infty$.

Ожидаемо, все примеры сингулярны (Рис. 3.1). Субэкстремальные решения А.І и А.ІІ сингулярны в точке $F = 0$ (Рис. 3.1а). Решения А.ІІІ (Рис. 3.1а) и Е.І (Рис. 3.1б) обладают бесконечным набором сингулярностей в окрестности $F = 0$ и $r = 0$ соответственно. Ось абсцисс имеет логарифмическую шкалу, поэтому изображено лишь несколько сингулярностей. Каждая кривая, похожая на камертон, соответствует компактному пространственному сечению между двумя сингулярностями. Решения с бесконечным набором сингулярных точек удовлетворяет неравенству $|z| > 1$. Сверхэкстремальные решения представлены примерами В.І и В.ІІ и содержат конечный набор сингулярных точек.

3.2 Статичные дионы с НУТ и вырожденной зарядовой матрицей в КК ЭМД

Известно [19], что регулярные черные дыры соответствуют вырожденным зарядовым матрицам $\det A = 0$, откуда следует связь (2.18). В этом случае

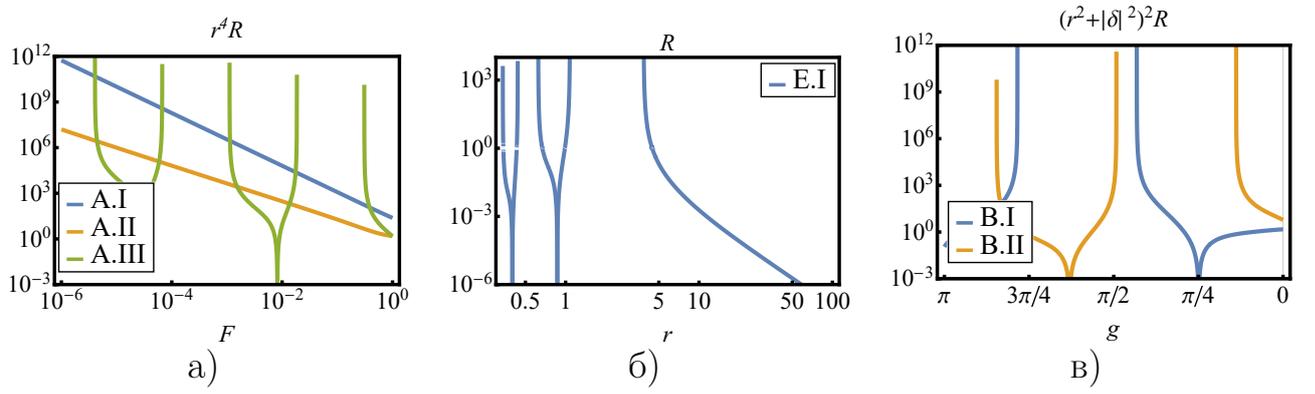


Рисунок 3.1 — Кривизна Риччи R для решений из Таблицы 1. (3.1a) $r^4 R$ как функция от F для субэкстремальных решений А.І, А.ІІ and А.ІІІ; (3.1б) R как функция r для экстремальных решений Е.І; (3.1в) $(r^2 + |\delta|^2)R$ как функция от g для сверхэкстремальных решений В.І и В.ІІ. Оси имеют логарифмическую шкалу (за исключением оси абсцисс Рис. (3.1в)). Пики в направлении вниз соответствуют $R = 0$ и не являются сингулярностями.

общие выражения (3.17) остаются справедливыми, в то время как собственными значениями являются $\lambda = -\delta, 0, +\delta$, поэтому

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{-2 + e^{g\delta} + e^{-g\delta}}{2\delta^2} = \frac{(F-1)^2}{2\delta^2 F}, \\ g_1 &= \frac{e^{g\delta} - e^{-g\delta}}{2\delta} = \frac{1 - F^2}{2\delta F}, \\ g_2 &= \frac{e^{g\delta} + e^{-g\delta}}{2} = \frac{1 + F^2}{2F}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

Подставляя λ_{ab} , τ^{-1} , g_n , и δ в f , \mathcal{A}_t и $e^{-4\alpha\phi/3}$, и выполняя сдвиг $r \rightarrow r + \delta - M$, получим:

$$f = \frac{\Delta}{\sqrt{AB}}, \quad \mathcal{A}_t = \frac{C}{B}, \quad e^{-4\alpha\phi/3} = \frac{B}{A}, \quad (3.36)$$

где

$$\Delta = r(r - 2M) - 3D^2 - N^2 + P^2 + Q^2, \quad (3.37a)$$

$$A = (r + D)^2 - 2D(D - M) + N^2 - P^2 + Q^2, \quad (3.37b)$$

$$B = (r - D)^2 - 2D(D + M) + N^2 + P^2 - Q^2, \quad (3.37c)$$

$$C = Qr + DQ - NP \quad (3.37d)$$

и наложено условие (2.18). В терминах этих функций, решение будет иметь вид:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f(dt - \omega d\varphi)^2 + f^{-1} (dr^2 + \Delta (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)), \\ \mathcal{A} &= \frac{C}{B}(dt - \omega d\varphi) + \omega_5 d\varphi, \quad e^{2\alpha\phi/3} = \sqrt{\frac{A}{B}}, \\ f &= \frac{\Delta}{\Sigma}, \quad \Sigma = \sqrt{AB}, \quad \omega = -2N \cos \theta, \quad \omega_5 = P \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Это решение обобщает результат из работы [21], включая в него НУТ-заряд. Впервые это решение было получено Торбуновым [69; 70]. Решение обладает внешним и внутренним горизонтами событий, которые могут быть найдены из уравнения $\Delta = 0$, определяя две сферы с радиусами r_H^\pm

$$r_H^\pm = M \pm \sqrt{M^2 + N^2 + 3D^2 - P^2 - Q^2} \equiv M \pm \delta_H. \quad (3.39)$$

Экстремальные решения ($\delta_H = 0$) будут рассмотрены более подробно в секции 3.2.2.

Уравнения $A = 0$ и $B = 0$ могут определить до 4 поверхностей, на которых поле дилатона стремится к $-\infty$ и $+\infty$ соответственно. Эти сингулярные поверхности являются сферами с радиусами

$$r_A^\pm = -D \pm \sqrt{2D(D - M) - N^2 + P^2 - Q^2} \equiv -D \pm \delta_A, \quad (3.40a)$$

$$r_B^\pm = D \pm \sqrt{2D(D + M) - N^2 - P^2 + Q^2} \equiv D \pm \delta_B. \quad (3.40b)$$

Сингулярность этих поверхностей подтверждается прямым вычислением скалярной кривизны

$$R = -\frac{8\Delta (4N^2 - 2\Sigma\Sigma'' + \Sigma'^2)}{\Sigma^3}, \quad (3.41)$$

где штрих означает производные относительно r . Скаляр Риччи (3.41) расходуется при $\Sigma = 0$ для любого набора параметров, включая случай совпадающих корней для Δ и Σ . Прямые вычисления других скаляров кривизны показывают, что $r_{A,B}^\pm$ являются единственными сингулярностями.

Новым свойством таких решений с НУТ зарядом является хронологическая граница, заданная уравнением $g_{\varphi\varphi} = 0$, за которой координатные линии φ становятся замкнутыми времениподобными кривыми. Эти уравнения могут быть решены относительно θ :

$$\text{tg}^2 \theta = 4N^2 \frac{\Delta}{AB}. \quad (3.42)$$

Некоторые примеры относительного расположения поверхностей описанных выше показаны¹ на Рис. 3.2. В зависимости от асимптотики выражения Δ/AB , граница хронологии может касаться соответствующих поверхностей на полярных осях (Рис. 3.2в) или на экваторе (Рис. 3.2а), либо пересекать их (Рис. 3.2б).

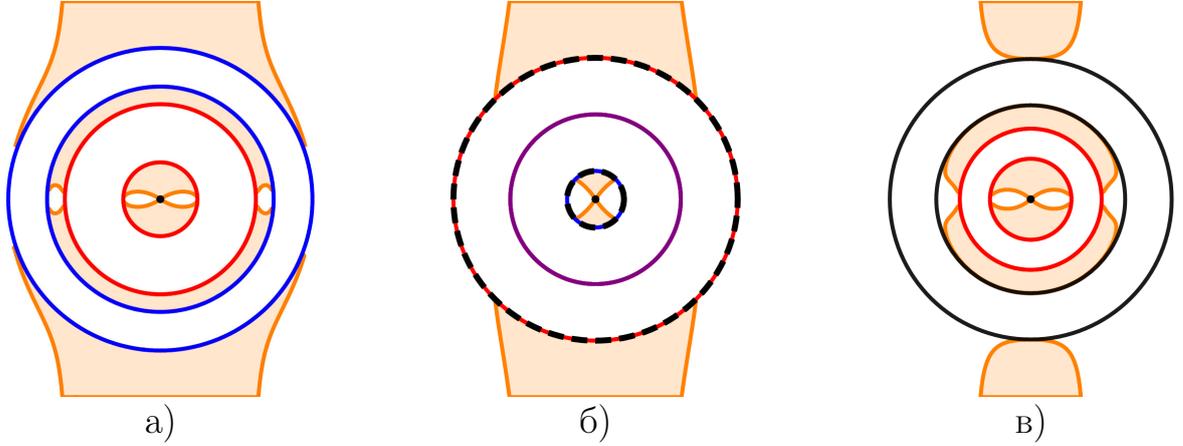


Рисунок 3.2 — Характерные поверхности статических решений. Параметры решений отображены в таблице 2.

Таблица 2 — Параметры решений, отображенных на Рис. 3.2.

Рис.	M	N	Q	P	D	Δr
3.2а	0.665	-0.6	1.1	0.7	-0.5	1.5
3.2б	0	1	0	0	1	3
3.2в	$\sqrt{3}$	1	1.96	-1	-0.76	3

Перед тем как перейти к общей классификации вырожденного класса решений, рассмотрим два хорошо известных частных случая.

Решения FNJW

¹Схемы были получены исходя из преобразований $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arccos(y/r)$ после некоторого сдвига $r \rightarrow r - \Delta r$, где Δr указано для каждого рисунка. Сдвиг Δr был выполнен с целью отразить полную структуру поверхностей. Черные точки указывают на центр схемы. Черные окружности – горизонт событий. Если черные окружности отображены пунктирными линиями, тогда они совпадают с другими поверхностями. Красные и синие кривые представляют поверхности $\phi = +\infty$ и $\phi = -\infty$ соответственно. Фиолетовые кривые означают точки, где A и B одновременно имеют нули, и поэтому поле дилатона не расходится. Оранжевые кривые представляют границы хронологии.

Решение (3.38) без заряда НУТ и с тривиальным полем Максвелла ($N = P = Q = 0$) принадлежит частному случаю решений FNJW [63; 67]

$$ds^2 = F^S dt^2 - F^{-S} dr^2 - r^2 F^{1-S} d\Omega_{(2)}^2, \quad \phi = \frac{\sqrt{3}DS}{2M} \ln |F|, \quad (3.43)$$

$$F = 1 - \frac{2M}{Sr}, \quad S = \frac{M}{(M^2 + 3D^2)^{1/2}},$$

где $|S| = 1/2, 1$, соответствуя дилатонному заряду $D = \pm M$ или 0 соответственно. Случаи $|S| = 1/2$ обладают только сингулярностями в виде квадратных корней.

Однозарядные решения

Однозарядные решения без НУТ-заряда всегда имеют горизонт [21; 311] в силу того, что $\delta_H = M \pm D$ всегда действителен. Тем не менее, такие решения могут быть как черными дырами, так и голыми сингулярностями, в зависимости от того, какой из корней наибольший – функции Δ либо функций A, B . Рассмотрим случай электрического решения с НУТ зарядом ($Q \neq 0, P = 0$). Из условия (2.18) электрический заряд равен

$$Q^2 = -2 \frac{M^2 + N^2 - D^2}{M/D + 1}. \quad (3.44)$$

Учитывая (3.44), внешние корни функций Δ, A, B для электрических решений имеют вид (3.39), (3.40) с константами

$$\delta_H^2 = (M + D)^2 + N^2 \frac{M + 3D}{M + D}, \quad (3.45a)$$

$$\delta_A^2 = N^2 \frac{D - M}{D + M}, \quad (3.45b)$$

$$\delta_B^2 = 4D^2 - N^2 \frac{3D + M}{D + M}. \quad (3.45c)$$

Решение физично и функция $\Delta(r)$ не имеет корней если выполняются оба условия: (i) $Q^2 > 0$ и (ii) $\delta_H^2 < 0$. Из (3.45a) условие (ii) выполняется для $N^2 > -(M + D)^3 / (M + 3D) > 0$, что приводит к необходимости ненулевого НУТ-заряда. Дробь отрицательна, если

$$1 < -M/D < 3, \quad (3.46)$$

следовательно знаменатель в (3.44) отрицателен и нам необходимо потребовать $M^2 + N^2 - D^2 > 0$, чтобы выполнялось условие (i). Подставляя нижнюю границу N^2 в выражение (3.44) для Q^2 , можно получить нижнюю границу $(Q^2)_{\min} = 8D^3(M + 3D)$, которая всегда положительна при условии (3.46). Следовательно, для интервала (3.46) и достаточно большого N^2 , электрические решения обладают положительно определенной функцией $\Delta(r)$. Это может приводить к существованию кротовых нор, но в [69] показана невозможность их существования среди статичных 4D решений (3.38), которые представляют голые сингулярности на самом деле (в отличие от случая решения Брилла [55]).

Используя дискретную симметрию $N \rightarrow -N$, $D \rightarrow -D$ и $Q \rightarrow P$, схожие результаты справедливы и для магнитного решения.

3.2.1 Три дилатонных ветви

Рассмотрим характерную особенность кубической природы условия (2.18), которая не обсуждалась достаточно в предыдущих работах. В первую очередь заметим, что электромагнитная и гравитационная дуальности подталкивают к следующей параметризации зарядов:

$$P = e \cos \alpha, \quad Q = e \sin \alpha, \quad N = \mu \cos \beta, \quad M = \mu \sin \beta, \quad (3.47)$$

где $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ и $e, \mu \geq 0$. Кубическое условие (2.18) в новой параметризации имеет вид

$$D^3 - \frac{e^2 + 2\mu^2}{2}D + \frac{1}{2}e^2\mu \sin(2\alpha + \beta) = 0. \quad (3.48)$$

Условие (3.48) может быть решено относительно заряда D . Все корни кубического уравнения вида $x^3 + px + q = 0$ действительны тогда и только тогда, когда его дискриминант $\Delta_x(p, q) = -4p^3 - 27q^2$ не отрицательный. Дискриминантом условия (3.48) является следующее выражение

$$\Delta_D = \frac{1}{4} (e^2 - 4\mu^2)^2 (2e^2 + \mu^2) + \frac{27}{4} e^4 \mu^2 \cos^2(2\alpha + \beta), \quad (3.49)$$

которое всегда неотрицательно. Таким образом, D всегда имеет три действительных корня (два из которых может совпадать при $\Delta_D = 0$). Введем

параметры

$$h^2 = e^2 + 2\mu^2, \quad f^3 = e^2\mu \sin(2\alpha + \beta), \quad \gamma = \arccos \frac{3^{3/2} f^3}{2^{1/2} h^3}. \quad (3.50)$$

Тогда решения D_k можно представить в виде

$$D_k = \sqrt{\frac{2}{3}} h \cos \frac{\gamma - (2k - 1)\pi}{3}, \quad (3.51)$$

где $k = -1, 0, +1$. Электромагнитная дуальность ($\alpha \rightarrow \pi/2 - \alpha$, $\beta \rightarrow \pi - \beta$, $D \rightarrow -D$) преобразует две ветви $D_{-1} \leftrightarrow D_{+1}$ друг в друга и D_0 в саму себя. Поскольку условие (3.48) не содержит квадратичного по D слагаемого, сумма всех корней равна нулю $D_{-1} + D_0 + D_{+1} = 0$.

Чтобы классифицировать решения на черные дыры, “сингулярные черные дыры” (получаемые в пределе совпадающего горизонта событий и голой сингулярности) и голые времениподобные сингулярности, необходимо рассмотреть корни уравнений $\delta_H = 0$ и $\delta_{A,B} = 0$, и найти наиболее внешний корень среди $r_{H,A,B}^\pm$.

Области ветвей дилатонного заряда D_k

Решения D_k условия (3.48) полностью принадлежат трем интервалам, которые разделены границами $\mu^2 = D^2$ (Рис. 3.3). Ветвь D_0 удовлетворяет условию $D_0^2 \leq \mu^2$, в то время как две другие ветви удовлетворяют неравенству $\pm D_{\pm 1} \geq \mu$. Будет показано, что ветви D_0 и $D_{\pm 1}$ обладают абсолютно различными свойствами в рамках нашей классификации.

Ветвь D_0 касается двух других $D_{\pm 1}$ в точках $2\alpha + \beta = (2 \mp 1)\pi/2$ для $e = 2\mu$, что позволяет найти непрерывный путь в пространстве зарядов, соединяющий решения из разных ветвей. При $e = 2\mu$ ветви D_k не являются гладкими, но могут быть переклеены (кусочно друг с другом) в гладкие функции:

$$\tilde{D}_k = 2\mu \sin \left(\frac{2\alpha + \beta + 2\pi k}{3} \right), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.52)$$

что прямо следует из условия (3.48).

Согласно границам каждой ветви, можно предложить дальнейшее развитие параметризации зарядов для упрощения вычислений. Например, ветвь D_0

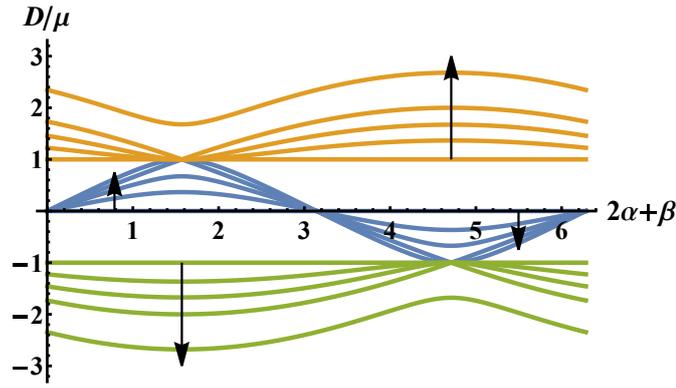


Рисунок 3.3 — Значения корней D_0/μ (синий), D_{+1}/μ (коричневый), D_{-1}/μ (зеленый) для различных значений $e/\mu = 0, 1, 1.5, 2, 3$ как функция $2\alpha + \beta$.

Стрелки указывают направление роста параметра e/μ .

позволяет ввести следующую параметризацию

$$\mu = \sigma \cosh \gamma, \quad D = \sigma \sinh \gamma, \quad \sigma \geq 0, \quad \gamma \in \mathbb{R}. \quad (3.53)$$

Тогда условие (3.48) примет вид

$$\sigma (e^2 \cosh \gamma \sin(2\alpha + \beta) - \sinh \gamma (e^2 + 2\sigma^2)) = 0. \quad (3.54)$$

Схожие параметризации могут быть введены для ветвей $D_{\pm 1}$. Условие (3.54) может быть легко разрешено относительно параметра γ в терминах обратных гиперболических функций, что позволяет записать функции метрики лишь через независимые параметры, но более длинным образом.

Вырожденные сингулярности

Если решение представляет из себя голую сингулярность, сама сингулярность математически может появиться из функции A , B или сразу из обеих. Когда функции A и B имеют один и тот же внешний корень $r_A^+ = r_B^+$, который не совпадает с их внутренними $r_{A,B}^-$, значение дилатона на поверхности внешнего корня конечно, а вектор-потенциал A_μ расходится. Будем называть данный случай “вырожденной” голой сингулярностью. Уравнение $r_A^+ = r_B^+$ для таких вырожденных сингулярностей можно записать явно

$$2D = \delta_A - \delta_B. \quad (3.55)$$

Возводя в квадрат уравнение (3.55) и используя определения (3.40), можно получить условие

$$N^2 + \delta_A \delta_B = 0, \quad (3.56)$$

которое выполняется для $N = 0$ и $\delta_A \delta_B = 0$ в силу неотрицательности каждого слагаемого. Подставляя это обратно в (3.55), получим $\delta_A = 2D, \delta_B = 0$ для положительных D и $\delta_B = 2D, \delta_A = 0$ для отрицательных D . Каждая из этих пар уравнений может быть переписана в более простой форме

$$-2DM + P^2 - Q^2 = 2D|D|. \quad (3.57)$$

Рассматривая условие (2.18), можно найти 3 различных случая для $N = 0$: $D > 0, Q = 0$; $D = 0, Q^2 = P^2$; $D < 0, P = 0$.

В случае ненулевого дилатонного заряда $D \neq 0$, внешняя сингулярность $r_A^+ = r_B^+$ в обязательном порядке совпадает с одной из внутренних сингулярностей r_A^- или r_B^- , и поэтому, на самом деле, дилатон не является регулярным в этой точке. Поэтому определенные выше вырожденные сингулярности с ненулевым дилатонным зарядом отсутствуют. С другой стороны, в случае $D = 0$ получаем регулярную черную дыру, соответствующую экстремальному дионному решению Райсснера-Нордстрема.

$$D_0\text{-ветвь } \mu^2 \geq D^2$$

Существование горизонта событий. Необходимым условием существования горизонта событий является $\delta_H^2 \geq 0$. Горизонт Киллинга становится экстремальным ($\delta_H = 0$) при

$$2\alpha + \beta = n\pi \pm l, \quad l = \arcsin \left(\frac{\sqrt{e^2 - \mu^2} (e^2 + 8\mu^2)}{3\sqrt{3}e^2\mu} \right), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.58)$$

Параметр l не является действительным при $e/\mu < 1$, либо $e/\mu > 2$. Можно убедиться, что величина δ_H^2 строго положительна для $e/\mu < 1$ и строго отрицательна для $e/\mu > 2$. Поэтому, горизонт Киллинга не существует в интервале $2\alpha + \beta \in (n\pi - l, n\pi + l)$ для любого целого n когда $1 \leq e/\mu \leq 2$.

Сингулярности. Преобразования $\alpha \rightarrow \pi/2 - \alpha$ ($P \leftrightarrow Q$) и $\beta \rightarrow \pi - \beta$ ($N \rightarrow -N$) приводят к изменению знака заряда дилатона $D_0 \rightarrow -D_0$ и переводят функцию A в B и наоборот. Таким образом, результат для δ_B^2 может быть получен из результата для δ_A^2 после таких преобразований. Функции $\delta_{A,B}^2$ в терминах параметров (3.47) имеют вид

$$\delta_A^2 = -\mu^2 \cos^2 \beta + 2D_0(D_0 - \mu \sin \beta) + e^2 \cos(2\alpha), \quad (3.59a)$$

$$\delta_B^2 = -\mu^2 \cos^2 \beta + 2D_0(D_0 + \mu \sin \beta) - e^2 \cos(2\alpha). \quad (3.59b)$$

Для ветви $D = D_0$, функции $\delta_{A,B}^2$ инвариантны относительно преобразования $\alpha \rightarrow \alpha + \pi$ или другого преобразования $\beta \rightarrow \beta + \pi$, что можно обнаружить как симметрию на Рис. 3.4. Для случая $e/\mu = 0$ дилатонный заряд равен нулю $D_0 = 0$, и сингулярности существуют (т.е. $\delta_A^2 \geq 0$ или $\delta_B^2 \geq 0$) только если $\beta = \pi/2, 3\pi/2$, что соответствует случаю без НУТ-заряда $N = 0$. Увеличивая отношение e/μ , эти линии раздуваются (Рис. 3.4 а и b). В точке $e/\mu = 1$ раздувшиеся области касаются друг друга и сливаются (Рис. 3.4 с и d). Область значений $1 < e/\mu \leq 2$, где A - или B -сингулярность отсутствует, имеет вид эллипса, при этом эллипсы касаются друг друга при $\beta = \pi/2, 3\pi/2$ (Рис. 3.4 d, e, f). Для значения $e/\mu = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$, вся плоскость (α, β) покрыта регионами, где по меньшей мере одна сингулярность существует. Это значение может быть найдено из уравнения $\delta_A = \delta_B = 0$ для $\beta = 0$, где A -сингулярность касается B -сингулярности (Рис. 3.4 e). Для значений $e/\mu > 2$ эллипсоидные регионы сливаются в вертикальные полосы (Рис. 3.4 g, h). Границы полос стремятся к решению при $\mu = 0$, для которых $\delta_{A,B}^2 = 0$ решается как $\alpha = (2n + 1)\pi/4$ для $n \in \mathbb{Z}$.

Случай сингулярных горизонтов. Будем считать, что сингулярный горизонт появляется тогда, когда выполняется уравнение $r_A^+ = r_H^+$ или $r_B^+ = r_H^+$, при котором величины с обеих сторон уравнения должны быть действительными. На самом деле, такие решения не являются “сингулярными черными дырами”, поскольку такой сингулярный горизонт накрывается другой сингулярностью. Так как эти уравнения довольно сложные для их аналитического решения, они могут быть изучены численно. Простейшим примером является случай $e = 0, \beta = 3\pi/2$ который представляет решение Шварцшильда с отрицательной массой M . Все другие “сингулярные черные дыры” являются экстремальными, для которых $r_H^+ = r_A^+, \delta_A = 0$ или $r_H^+ = r_B^+, \delta_B = 0$, т.е.

$$M = -D, \quad Q = \pm 2M, \quad P = \mp N \quad (3.60)$$

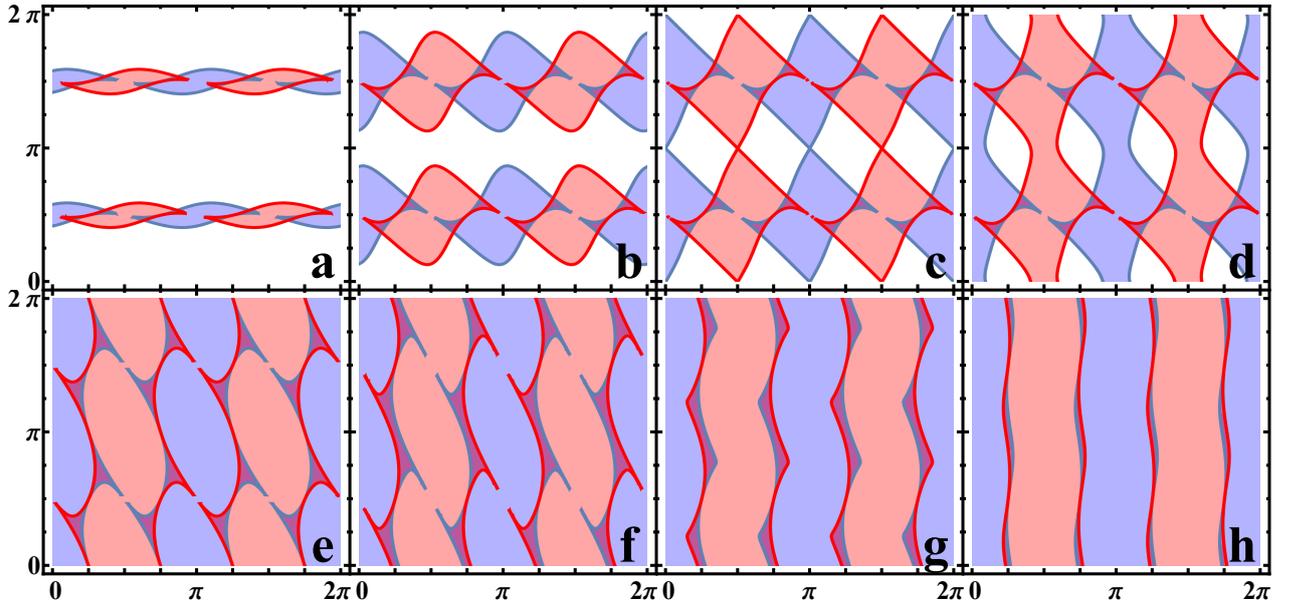


Рисунок 3.4 — Области существования сингулярностей (красный для $\delta_B^2 > 0$ и синий для $\delta_A^2 > 0$, фиолетовый при существовании обоих) для различных значений e/μ : (a) 0.5, (b) 0.95, (c) 1.0, (d) 1.05, (e) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$, (f) 2.0, (g) 2.1, (h) 3.0. Абсцисса и ордината отвечают за углы α и β соответственно.

или

$$M = D, \quad P = \pm 2M, \quad Q = \pm N. \quad (3.61)$$

Тем не менее, не все экстремальные решения являются сингулярными (черные линии на Рис. 3.5). При $1 < e/\mu < \sqrt{2}$ на подпространстве параметров (α, β) можно обнаружить в два раза больше “сингулярных черных дыр”, чем при $\sqrt{2} < e/\mu < 2$. Половина “сингулярных черных дыр” исчезает при $e/\mu = \sqrt{2}$ в силу того, что появляется новая сингулярность, покрывающая такой сингулярный горизонт.

Классификация. Полная классификация дана на Рис. 3.5. При $e/\mu = 0$ вся параметрическая плоскость (α, β) представляет регулярные черные дыры, за исключением случая $\beta = 3\pi/2$, где возникают “сингулярные черные дыры”. Увеличивая отношение e/μ , появляются голые сингулярности в окрестности прямой $\beta = 3\pi/2$. Для положительной массы M при $0 \leq e/\mu \leq 1$ существуют лишь регулярные черные дыры. При $1 \leq e/\mu \leq 2$, голые сингулярности появляются также и в области положительной массы $M > 0$ ($0 < \beta < \pi$). При $e/\mu \geq 2$ (включая $\mu = 0$) существуют лишь голые сингулярности. “Сингулярные черные дыры” появляющиеся в области $1 \leq e/\mu \leq 2$ экстремальны.

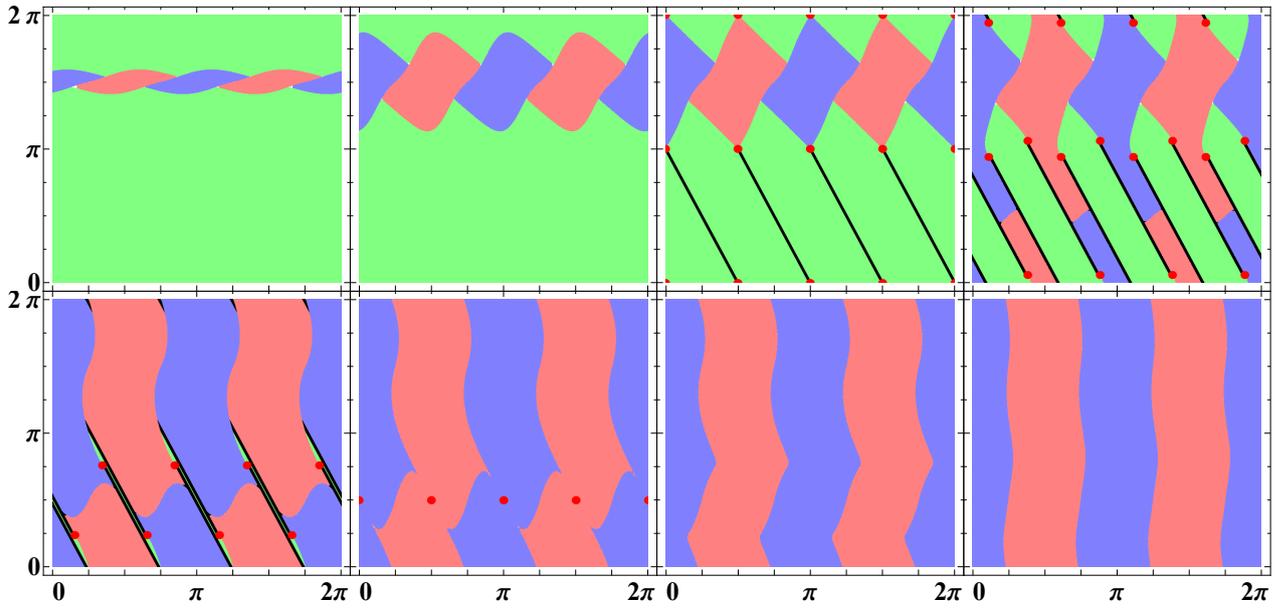


Рисунок 3.5 — Классификация решений (красный для голых сингулярностей, возникающих из r_B , синий для голых сингулярностей, возникающих из r_A , зеленый для регулярных черных дыр, черные прямые для экстремальных черных дыр, красные точки для “сингулярных черных дыр”) при различных значениях e/μ : (a) 0.5, (b) 0.95, (c) 1.0, (d) 1.05, (e) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$, (f) 2.0, (g) 2.1, (h) 3.0. Абсцисса и ордината отвечают за углы α и β соответственно.

$$D_{\pm 1}\text{-ветвь } \mu^2 \leq D^2$$

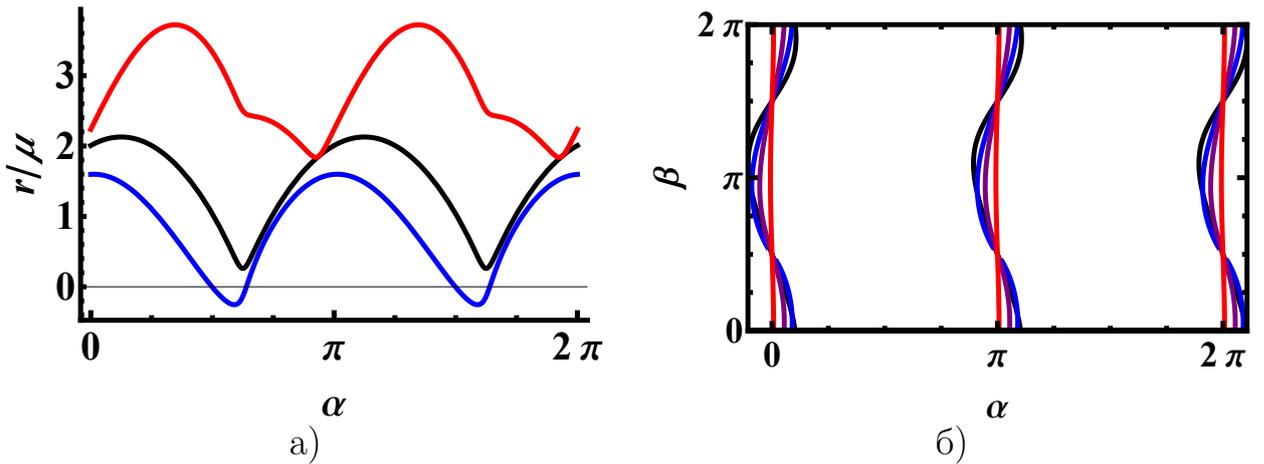


Рисунок 3.6 — 3.6а: r_H/μ (черный), r_A/μ (синий), r_B/μ (красный) для $e = 1.75, \beta = 5\pi/4$ как функции α ; 3.6б: $r_B = r_H$ для $e = 0.5$ (черный), 2 (синий), 4 (фиолетовый), 32 (красный).

Рассмотрим лишь положительную ветвь D_{+1} . Чтобы получить результаты для ветви D_{-1} , можно выполнить электромагнитное преобразование и в выво-

дах поменять функции A и B местами. С помощью численного анализа, можно обнаружить, что функции $\delta_{H,A,B}^2$ всегда неотрицательны для этой ветви, а также всегда выполняется неравенство $r_A^+ \leq r_H^+ \leq r_B^+$ (Рис. 3.6а). В общем, эти решения представляют голые сингулярности, за исключением частных “сингулярных черных дыр” в окрестности $\alpha = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ (Рис. 3.6б). Этот вывод согласуется с теоремой о единственности. В работе [61] Язаджиев доказал теорему о единственности для асимптотически плоских регулярных черных дыр (без НУТ-заряда) относительно зарядов M, Q, P и вращения J . Можно ожидать, что геометрия статичных черных дыр с НУТ-зарядом так же должна единственным способом определяться параметрами M, N, P, Q . Несмотря на существование трех различных корней D_k условия на заряды (2.18), лишь один из них D_0 содержит регулярные черные дыры, в то время как $D_{\pm 1}$ представляет либо “сингулярную черную дыру”, либо голую сингулярность.

3.2.2 Экстремальные решения

Условие экстремальности $\delta_H = 0$ записывается явно в виде

$$3D^2 = P^2 + Q^2 - M^2 - N^2. \quad (3.62)$$

Подставляя D из (3.62) в условие на заряды (2.18), получим

$$\begin{aligned} 27 [M (P^2 - Q^2) + 2NPQ]^2 = \\ = (-M^2 - N^2 + P^2 + Q^2) (8M^2 + 8N^2 + P^2 + Q^2)^2. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Уравнение (3.63) принимает более компактный вид в терминах параметризации (3.47)

$$(e^2 - 4\mu^2)^3 + 27e^4\mu^2 \cos^2(2\alpha + \beta) = 0. \quad (3.64)$$

В дополнение к этому, необходимо наложить дополнительное условие действительности дилатонного заряда $D^2 \geq 0$. Из условия экстремальности (3.62), это соответствует $3D^2 = P^2 + Q^2 - M^2 - N^2 \geq 0$, т.е. $e \geq \mu$. В то же время, уравнение (3.64) не имеет действительных решений при $e < \mu$ и $e > 2\mu$. Таким образом, любое решение уравнения (3.64) приводит к действительному значению дилатонного заряда D .

Можно проверить, что решением этого уравнения является следующее выражение

$$\left(\frac{2\mu}{e}\right)^{2/3} = \sin^{2/3}\left(\alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) + \cos^{2/3}\left(\alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) \quad (3.65)$$

Умножая его на $(2\mu e^2)^{1/3}$ и переписывая тригонометрические функции в терминах физических зарядов, получим

$$\begin{aligned} 2\sqrt{M^2 + N^2} &= \\ &= [(P^2 + Q^2)\sqrt{M^2 + N^2} + (P^2 - Q^2)M + 2PQN]^{1/3} + \\ &+ [(P^2 + Q^2)\sqrt{M^2 + N^2} + (Q^2 - P^2)M - 2PQN]^{1/3} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Это решение может быть представлено в виде поверхности в пространстве параметров на Рис. 3.7. Следует обратить внимание, что экстремальные решения не всегда обязательно являются экстремальными черными дырами, поскольку экстремальный горизонт может быть накрыт голой сингулярностью или совпадать с ней.

При $N = 0$ (Рис. 3.7б) уравнение (3.66) имеет вид $(2M)^{2/3} = P^{2/3} + Q^{2/3}$, что согласуется с результатами Рашида [22].

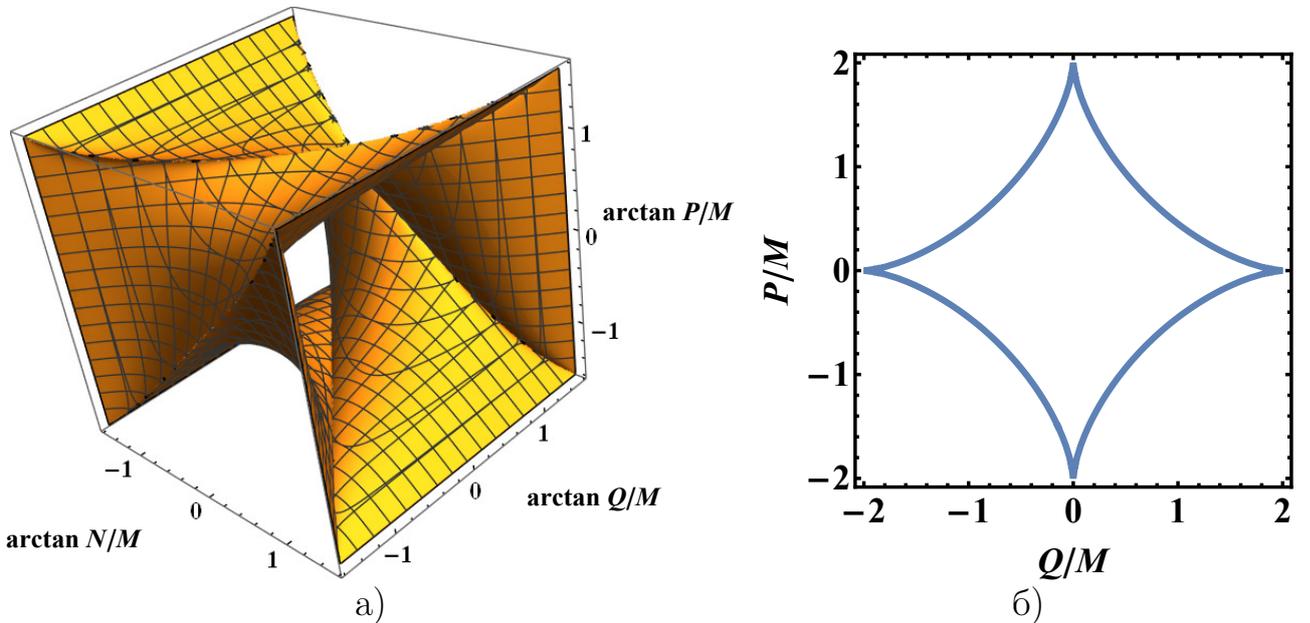


Рисунок 3.7 — Экстремальные статические решения в пространстве зарядов (3.7а) и экстремальные статические решения без НУТ-заряда (3.7б).

3.2.3 Окисление до пятимерных решений и пятимерные кротовые норы

Как было упомянуто, решения КК ЭМД могут быть “окислены” с помощью (1.20) до решений пятимерной вакуумной гравитации Эйнштейна с компактифицированной пятой координатой, т.е. до теории Калуцы-Клейна. Рассмотрим лишь вырожденный случай $\det A = 0$. В случае невращающейся стационарной пятимерной метрики, такой что $\det g = A^2 \sin^2 \theta$, компоненты метрического тензора имеют вид ($x^0 = t$)

$$g_{55} = \frac{B}{A}, \quad g_{05} = \frac{2C}{A}, \quad g_{00} = -\frac{F}{A}, \quad (3.67a)$$

$$g_{5\varphi} = \frac{2B}{A}\omega_5 - \frac{2C}{A}\omega_t, \quad g_{0\varphi} = \frac{4C}{A}\omega_5 + \frac{F}{A}\omega_t, \quad (3.67b)$$

$$g_{\varphi\varphi} = \frac{4B}{A}\omega_5^2 - \frac{8C}{A}\omega_5\omega_t - \frac{F}{A}\omega_t^2 + A \sin^2 \theta, \quad (3.67c)$$

где

$$F = \frac{A\Delta - 4C^2}{B}, \quad (3.68)$$

и поверхность $B = 0$ является кажущейся сингулярностью. Тем не менее, после учета условия на заряды (2.18), для решения (3.38) получим полиномиальный вид функции F

$$F = (r + 2D - M)^2 - M^2 - N^2 + D^2 - Q^2 - P^2, \quad (3.69)$$

поэтому (как предполагалось в работе Чена [312]), пятимерная метрика несингулярна, если $A > 0$ при действительных r .

Кротовые норы

Если в дополнение к условию $A > 0$ наложить условие $\Delta > 0$ при всех действительных r , рассматриваемая пятимерная метрика будет представлять из себя кротовую нору. Два этих условия для существования невращающейся пятимерной кротовой норы в явном виде записываются как

$$-\delta_A^2 = Q^2 - P^2 + N^2 + 2MD - 2D^2 > 0, \quad (3.70)$$

$$-\delta_H^2 = Q^2 + P^2 - N^2 - M^2 - 3D^2 > 0. \quad (3.71)$$

Складывая оба условия, получим $2Q^2 > (M - D)^2 + 4D^2$, поэтому условие $Q \neq 0$ необходимо для существования пятимерных кротовых нор. Кротовая нора Ходоса-Детвейлера [16] обладает лишь электрическим зарядом Q , однако она не является проходимой [313]. Она была обобщена Ченом [312] до дионной кротовой норы ($M = N = D = 0$) при $Q^2 > P^2$ учитывая неравенство (3.70).

Используя параметризацию (3.47), условие (3.48) может быть использовано для того, чтобы избавиться от $\sin(2\alpha + \beta)$ в терминах трех зарядов e, μ, D , в то время как условия (3.70) и (3.71) примут вид

$$-e^2 \cos 2\alpha + \mu^2 \cos^2 \beta + 2D\mu \sin \beta - 2D^2 > 0, \quad (3.72)$$

$$e^2 - \mu^2 - 3D^2 > 0. \quad (3.73)$$

Тогда, условие $\sin^2(2\alpha + \beta) \leq 1$ эквивалентно следующему

$$(\mu^2 - D^2)[(e^2 - 2D^2)^2 - 4\mu^2 D^2] \geq 0. \quad (3.74)$$

Выражение в квадратных скобках строго положительно в силу

$$2D(D \pm \mu) \leq \mu^2 + 3D^2 < e^2 \quad (3.75)$$

и неравенства (3.73). Поэтому второе условие (3.74) эквивалентно

$$\mu^2 \geq D^2. \quad (3.76)$$

Это условие выполняется ветвью решений D_0 .

Общий анализ системы (3.48), (3.72), (3.73) усложняется кубической природой условия на заряды (2.18). Тем не менее, численное исследование D_0 -ветви решения позволяет построить классификацию пятимерных решений на Рис. 3.8. Для $e < \mu$, решения с положительной массой $M > 0$ ($0 < \beta < \pi$) представляют регулярные черные дыры, в то время как для отрицательной массы они могут быть как черными дырами, так и голыми сингулярностями. Для $\mu \leq e \leq 2\mu$ решения могут представлять кротовые норы, черные дыры (как с регулярным горизонтом, так и сингулярным) или голые сингулярности. Решения с параметром $e > 2\mu$ представляют либо голые сингулярности, либо кротовые норы, в зависимости от обоих углов α, β , однако чисто электрические решения являются кротовыми норыми, а чисто магнитные решения – голыми сингулярностями.

Из анализа четырехмерных решений, неравенство $r_B \geq r_\Delta \geq r_A$ всегда выполняется для ветви D_{+1} , и неравенство $r_A \geq r_\Delta \geq r_B$ для D_{-1} . Т.о., D_{+1} и D_{-1} являются черными дырами и голыми сингулярностями в 5D соответственно, что согласуется с (3.76).

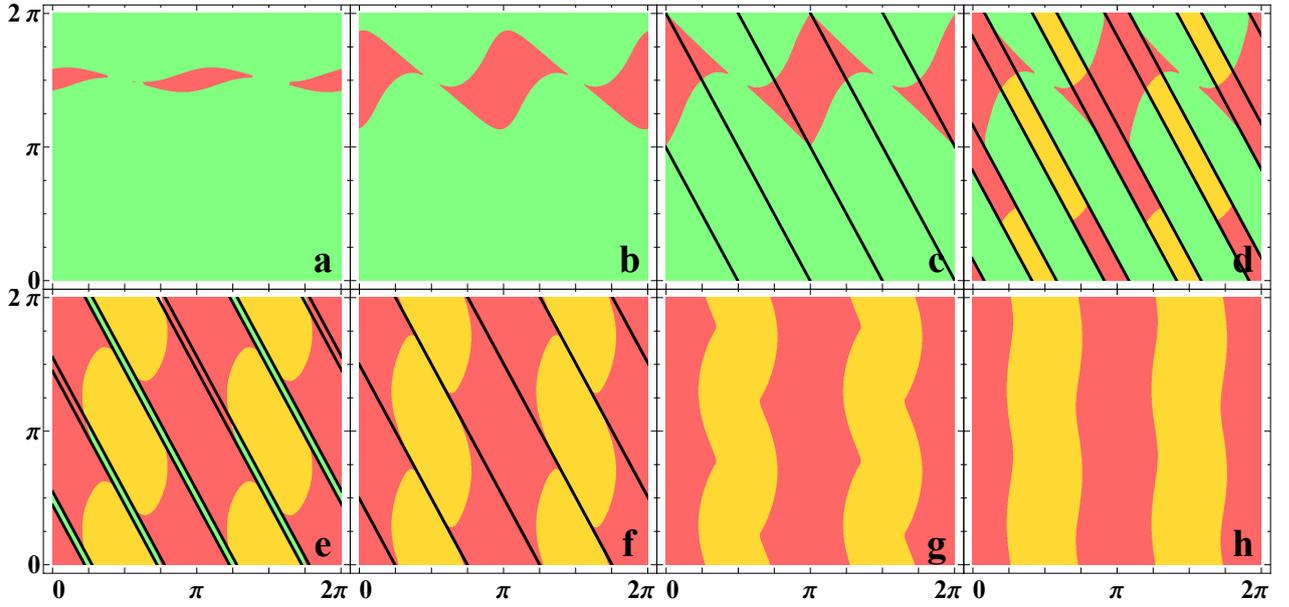


Рисунок 3.8 — Классификация пятимерных решения для различных значений e/μ : (a) 0.5, (b) 0.95, (c) 1.0, (d) 1.05, (e) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$, (f) 2.0, (g) 2.1, (h) 3.0. Зеленый – черные дыры, красный – голые сингулярности, желтый – кротовые норы. Черные линии удовлетворяют условию $\delta_H^2 = 0$. Абсцисса и ордината отвечают за углы α и β соответственно.

Частные случаи

Два частных случая наиболее просты:

1) $D = 0$. Тогда, если $\mu \neq 0$ условие (3.48) решается $\beta = -2\alpha \pmod{\pi}$, при этом $\cos 2\alpha < 0$ следует из (3.72) (используя $\mu^2 < e^2$ из (3.73)). В терминах пяти зарядов M, N, D, Q, P , это решение удовлетворяет следующим условиям

$$Q^2 > P^2, \quad M = 2\lambda QP, \quad N = \lambda(Q^2 - P^2), \quad D = 0, \quad (3.77)$$

где λ действительна, и при дополнительном ограничении

$$\lambda^2(Q^2 + P^2) < 1, \quad (3.78)$$

представляет из себя обобщение дионной кротовой норы Чена.

2) $D^2 = \mu^2$ ($D = \pm\mu$), насыщает ограничение (3.76). Тогда (3.48) решается $\beta = -2\alpha \pm \pi/2$. В терминах зарядов, имеем

$$M = \lambda(Q^2 - P^2), \quad N = -2\lambda QP, \quad D = -\lambda(Q^2 + P^2). \quad (3.79)$$

Ограничения (3.70) и (3.71) приводят к простым уравнения в терминах M и D

$$x = \lambda M = -\frac{MD}{Q^2 + P^2}, \quad y = -\lambda D = \frac{D^2}{Q^2 + P^2}, \quad (3.80)$$

а именно

$$x - (x + y)^2 > 0, \quad (3.81)$$

$$y - 4y^2 > 0, \quad (3.82)$$

и могут быть решены как

$$0 < \frac{1 - 2y - \sqrt{1 - 4y}}{2} < x < \frac{1 - 2y + \sqrt{1 - 4y}}{2}, \quad 0 < y < \frac{1}{4}. \quad (3.83)$$

Заметим, что ограничение $x > 0$ приводит к ограничению $Q^2 > P^2$. А простой подкласс $x = y$, приводит к зарядам

$$P = 0, \quad N = 0, \quad M = -D, \quad Q^2 > 4M^2. \quad (3.84)$$

Можно проверить, что эти два случая являются единственными решениями системы (3.48), (3.70), (3.71) для $P = N = 0$. Они представляют массивное обобщение кротовой норы Ходоса-Детвейлера (к которому сводится случай $M = 0$). Ранее они были предложены в [313], где была показана их непересекаемость как семейств решений. Было показано, что кротовая нора Ходоса-Детвейлера нестабильна при малых радиальных возмущениях [314], а стабильность массивного обобщения пока остается невыясненной.

Граница хронологии и эрго-регион

Граница хронологии описывается уравнением $g_{\varphi\varphi} = 0$, чье решение относительно угла θ имеет вид

$$\operatorname{tg}^2 \theta = -4 \frac{P^2 B + 4PNC - N^2 F}{A^2}. \quad (3.85)$$

Это решение обладает занятной асимптотикой $r \rightarrow \infty$

$$\operatorname{tg}^2 \theta \approx \frac{4(N^2 - P^2)}{r^2} - \frac{8(P(2NQ - 3DP) + MN^2)}{r^3} + \mathcal{O}(r^{-4}). \quad (3.86)$$

Если $N^2 > P^2$, тогда граница хронологии окружает полярную ось на асимптотике с радиусом $\rho_s = r \sin \theta \approx 2\sqrt{N^2 - P^2}$. Если же $N^2 < P^2$, тогда уравнение (3.86) не имеет действительных корней для больших r , и поэтому граница хронологии компактна. Также можно обнаружить интересный случай $N^2 = P^2$,

для которого радиус границы хронологии стремится к нулю на бесконечности. Более того, если мы дополнительно наложим условие экстремальности (3.62), а именно $P = \pm N$, $Q = \mp 2M$, $D = -M$, тогда после преобразований $r \rightarrow r + M$ и $t \rightarrow t \pm x^5$, решение имеет вид

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{4M}{r} - \frac{2N^2}{r^2} \right) dt^2 \mp 2dt(dx^5 \mp 2N \cos \theta d\varphi)dt + dr^2 + \quad (3.87)$$

$$+ r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Это решение представляет одноцентровый случай многоцентрового пятимерного решения, построенного в [20] (уравнение (49)). Оно представляет из себя электрический монополю, снабженный НУТ-зарядом. Примечательно, что хотя две струны Мизнера-Дирака распространяются от самого источника $r = 0$ до бесконечности $\pm\infty$, оно не содержит замкнутых времениподобных кривых.

Другая граница хронологии появляется для другой циклической координаты $g_{55} = 0$, а именно $B = 0$. Такой эрго-регион появляется при $F = 0$ вследствие вращения в подпространстве (t, x_5) с радиусом

$$r_F^\pm = M - 2D \pm \sqrt{M^2 + N^2 + P^2 + Q^2 - D^2}. \quad (3.88)$$

Ветвь D_0 всегда обладает действительными корнями (3.88), т.к. $D_0^2 \leq M^2 + N^2$.

3.3 Общее стационарное решение сгенерированное из решения Керр-НУТ в КК ЭМД

Вакуумные решения общей теории относительности удовлетворяют уравнениям движения (1.16). Мы будем использовать вакуумную метрику Керр-НУТ в виде анзаца (2.1) в качестве затравочного

$$f_0 = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho_0^2}, \quad (3.89a)$$

$$\omega_0 = \frac{-2}{\Delta - a^2 \sin^2 \theta} (N_0 \Delta \cos \theta + a \sin^2 \theta (M_0 r + N_0^2)), \quad (3.89b)$$

$$\Delta = r(r - 2M_0) + a^2 - N_0^2, \quad (3.89c)$$

$$\rho_0^2 = r^2 + (N_0 + a \cos \theta)^2 \quad (3.89d)$$

с 3-метрикой

$$h_{ij}dx^i dx^j = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Delta} (dr^2 + \Delta d\theta^2) + \Delta \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (3.90)$$

Твист-потенциал χ_0 исходного решения равен

$$\chi_0 = \frac{2N_0(r - M_0) - 2M_0 a \cos \theta}{\rho_0^2}. \quad (3.91)$$

Применяя преобразования изометрии целевого пространства к начальному решению (3.89), можно получить новое дионное решение Керр-НУТ с дилатонным зарядом в терминах параметра преобразования изометрии таргет-пространства. После преобразования сдвига $r \rightarrow r + M_0 - M$, используя тождества (2.17), новые сгенерированные потенциалы можно записать через физические заряды

$$f = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}, \quad \phi = \frac{\sqrt{3}}{4} \ln \frac{A}{B}, \quad (3.92a)$$

$$v = \sqrt{2} \frac{C}{B}, \quad u = \sqrt{2} \frac{\tilde{C}}{A}, \quad \chi = \frac{A\chi_A + B\chi_B + \chi_1 - 4\chi_2 J \cos \theta}{3AB}, \quad (3.92b)$$

или явно в виде соответствующих полей

$$\omega = \frac{-2N \cos \theta \Delta - 2J \sin^2 \theta \left(r - M + \frac{W a^2}{2J^2} \right)}{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}, \quad (3.93a)$$

$$\mathcal{A} = \frac{C}{B} (dt - \omega d\varphi) + \omega_5 d\varphi, \quad \omega_5 = \frac{P \cos \theta \Delta - JV \sin^2 \theta}{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}, \quad (3.93b)$$

где

$$\rho^2 = \sqrt{AB}, \quad (3.94a)$$

$$\Delta = r(r - 2M) + P^2 + Q^2 - 3D^2 - N^2 + a^2, \quad (3.94b)$$

$$A = (r + D)^2 - 2D(D - M) + N^2 - P^2 + Q^2 - 2JR_A \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta, \quad (3.94c)$$

$$B = (r - D)^2 - 2D(D + M) + N^2 + P^2 - Q^2 + 2JR_B \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta, \quad (3.94d)$$

$$C = Q(r + D) - NP - 2JUW^{-1} \cos \theta, \quad (3.94e)$$

$$\tilde{C} = P(r - D) + NQ + 2J\tilde{U}W^{-1} \cos \theta. \quad (3.94f)$$

Также, определены следующие функции

$$V = (r - M)\frac{V_1}{V_0} + PQ\frac{V_2}{V_0} - N\frac{V_3}{V_0}, \quad (3.95a)$$

$$\chi_A = -9DN - 3MN + 3PQ + 4Nr - 3J \cos \theta, \quad (3.95b)$$

$$\chi_B = 9DN - 3MN - 3PQ + 4Nr - 3J \cos \theta, \quad (3.95c)$$

$$\chi_1 = -2Nr(-D^2 + N^2 + r^2 + a^2 \cos^2 \theta) + 6DN(-P^2 + Q^2 + 2D(M + r)) \quad (3.95d)$$

$$\chi_2 = \frac{3DN(N(P^2 - Q^2) - 2PQM)}{W} + r \left(-M + \frac{a^2 W}{2J^2} + \frac{UP + \tilde{U}Q}{W} \right) \quad (3.95e)$$

и константы

$$W = 2M(M^2 + N^2 - D^2) - P^2(M - D) - Q^2(M + D), \quad (3.96a)$$

$$U = P(M - D)^2 + N(NP - 2DQ), \quad (3.96b)$$

$$\tilde{U} = Q(M + D)^2 + N(NQ - 2DP), \quad (3.96c)$$

$$V_0 = NQ(D + M) + P[(M - D)^2 - Q^2], \quad (3.96d)$$

$$V_1 = N(Q^2 - 4D^2) + PQ(D + M), \quad (3.96e)$$

$$V_2 = M^2 + 7N^2 + 3D^2 - P^2 - Q^2, \quad (3.96f)$$

$$V_3 = 3M(Q^2 - P^2) + D(8(M^2 + N^2) + P^2 + Q^2), \quad (3.96g)$$

$$R_A = \frac{N(P(M - 3D) + NQ) + P^2Q}{PQ^2 - NQ(D + M) - P(M - D)^2}, \quad (3.96h)$$

$$R_B = \frac{N(NP - Q(3D + M)) + PQ^2}{P^2Q + NP(M - D) - Q(D + M)^2}. \quad (3.96i)$$

Параметр Керра a и трехмерная метрика h_{ij} унаследованы от исходной метрики (с новым определением Δ из (3.94b)). Угловой момент J равен

$$J^2/a^2 = \frac{((M - D)^2 - Q^2 + N^2)((M + D)^2 - P^2 + N^2)}{M^2 + N^2 + 3D^2 - P^2 - Q^2} - N^2. \quad (3.97)$$

Из (3.97) и (2.18) следует, что порожденные решения без электрических и магнитных зарядов $P = Q = 0$ и ненулевого дилатонного заряда не имеют углового импульса даже при ненулевом керровском параметре a . Правая часть (3.97) может быть отрицательной, что кажется нефизическим. Тем не менее, решение позволяет сделать переопределение $a \rightarrow ia$, возвращающее решение к физическому. Численно было найдено, что выражение $J^2 t^2 / a^2$ неотрицательно при D_0 и неположительно при D_{\pm} для всех свободных параметров (см. рис. 3.9 для

примера $e/\mu = 11/8$). В частности, это означает, что пространственноподобные решения с D_0 являются физическими для вещественного a , а времениподобные решения D_0 являются физическими для мнимого a (и наоборот для D_{\pm}). Позже мы покажем, что J можно рассматривать как независимый параметр для нулевых геодезических решений (см. раздел 3.3 и раздел 5.1.4).

Полученный класс решений инвариантен относительно электромагнитной дуальности, т.е. преобразование (2.10) приводит к следующей замене параметров решения

$$N \rightarrow -N, \quad D \rightarrow -D, \quad J \rightarrow -J, \quad Q \leftrightarrow P. \quad (3.98)$$

В частности, замена (3.98) приводит к $v \leftrightarrow u$ и $A \leftrightarrow B$.

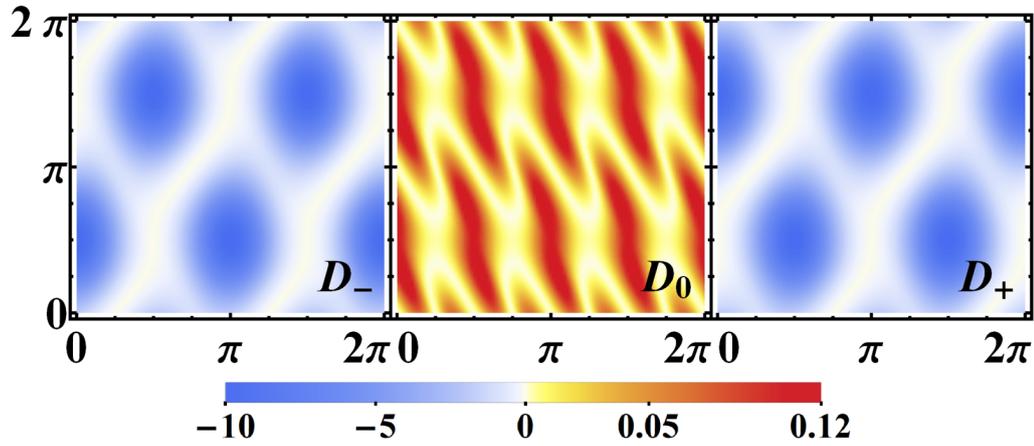


Рисунок 3.9 — Выражение $J^2 t^2 / a^2$ как функция (α, β) при $e = 11/8$, $\mu = 1$.

Кривизна Риччи этого решения может быть найдена из уравнения (1.18)

$$R = \frac{3/8}{(AB)^{5/2}} (\Delta(B\partial_r A - A\partial_r B)^2 + (B\partial_\theta A - A\partial_\theta B)^2). \quad (3.99)$$

Поверхности, заданные уравнением $A = 0$ или $B = 0$, являются сингулярными, и поле дилатона на них стремится к $\mp\infty$. Другие инварианты кривизны ($R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\lambda\tau}R^{\mu\nu\lambda\tau}$) не расходятся в других точках, кроме этих сингулярностей. Особенности могут быть кольцеобразными (рис. 3.10а), дипольными (рис. 3.10б), точечными (рис. 3.10в). Пятимерная интерпретация решения не является сингулярной при $B = 0$ (см. Приложение 3.3).

Горизонт событий ($\Delta = 0$), эргосфера ($f = 0$) и сингулярности ($A = 0$, $B = 0$) могут быть разрешены относительно r

$$r_H^\pm = M \pm \delta_H, \quad \delta_H = \sqrt{M^2 + N^2 + 3D^2 - P^2 - Q^2 - a^2}, \quad (3.100a)$$

Таблица 3 — Заряды и параметры решений, представленных на рис.3.10.

Рис.	M	N	D	Q	P	a	J	k	δr
3.10а	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	0.097	$1/4$	$\sqrt{3}/4$	1	0.86	D_0	2
3.10б	1	0	0.35	1	$\sqrt{3}$	i	-0.51	D_0	5
3.10в	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1.68	$5\sqrt{2}/4$	$5\sqrt{2}/4$	i	-1.46	D_1	6
3.10г	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	0.11	$\sqrt{2 - \sqrt{2}}/4$	$\sqrt{2 + \sqrt{2}}/4$	$3/4$	0.53	D_0	5

$$r_E^\pm = M \pm \delta_E, \quad \delta_E = \sqrt{M^2 + N^2 + 3D^2 - P^2 - Q^2 - a^2 \cos^2 \theta}, \quad (3.100b)$$

$$r_A^\pm = -D \pm \delta_A, \quad \delta_A = \sqrt{2D(D - M) - N^2 + P^2 - Q^2 + 2JR_A \cos \theta - a^2 \cos^2 \theta}, \quad (3.100c)$$

$$r_B^\pm = D \pm \delta_B, \quad \delta_B = \sqrt{2D(D + M) - N^2 - P^2 + Q^2 - 2JR_B \cos \theta - a^2 \cos^2 \theta}, \quad (3.100d)$$

и границу хронологии ($g_{\varphi\varphi} = 0$) можно найти из уравнения

$$\frac{(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)^2}{AB} \omega^2 = \Delta \sin^2 \theta. \quad (3.101)$$

Различные геометрические конфигурации границы хронологии представлены на рис. 3.10. В частности, граница хронологии появляется вблизи голых особенностей даже при $N = 0$ (рис. 3.10б). Решение является регулярным, если особенности отсутствуют или полностью закрыты горизонтом (рис. 3.10г).

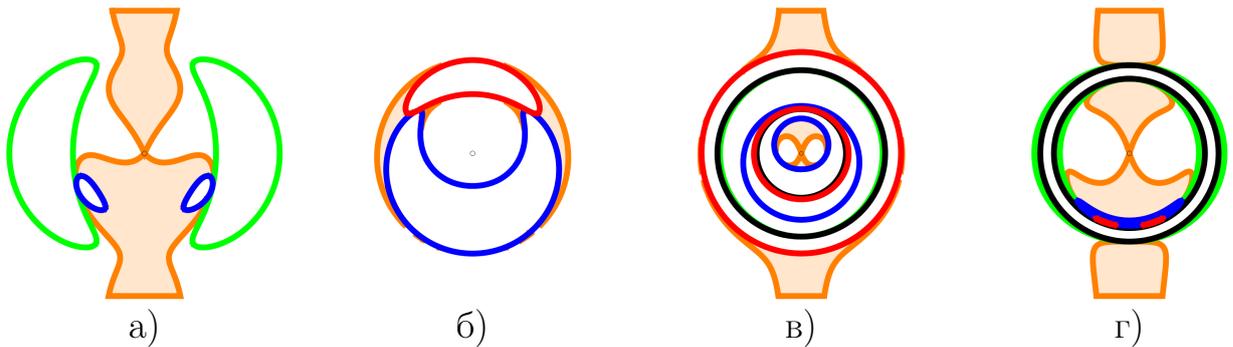


Рисунок 3.10 — Примеры сгенерированных решений и их горизонты (черные), сингулярности (синие r_A^\pm и красные r_B^\pm), эрго-регион (зеленая) и область нарушения причинности с границами хронологии (оранжевая). Фигуры строятся после преобразования $r \rightarrow r + \delta r$, рассматривая (r, θ) как обычные сферические координаты, которые могут исказить его реальную геометрию, но не “топологию” кривых.

Решения изотропных геодезических таргет-пространства

Условие изотропных геодезических решений $\mathfrak{t}^2 = 0$ можно записать, исключив D [69]

$$\left(\frac{2\mu}{e}\right)^{2/3} = \sin^{2/3} \left(\alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) + \cos^{2/3} \left(\alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{3\pi}{4}\right). \quad (3.102)$$

В этом случае угловой момент J обычно расходится. Тем не менее, Рашид нашел класс экстремальных решений с ненулевым угловым моментом J , но нулевым параметром Керра a [22] (пятимерная интерпретация нулевых геодезических решений рассмотрена в работе [307]). Если оба параметра a и \mathfrak{t}^2 стремятся к нулю, их отношение может быть конечным, а угловой момент J можно рассматривать как новый независимый параметр. После преобразования $r \rightarrow r + M$ функции Δ , ω и ω_5 приобретают вид

$$\Delta = r^2, \quad \omega = -2N \cos \theta - \frac{2J \sin^2 \theta}{r}. \quad (3.103)$$

Поскольку решение принадлежит изотропному геодезическому классу таргет-пространства $\mathfrak{t}^2 = 0$, 3-метрика является плоской (см. уравнение (3.11) в [307]). Поверхность $\Delta = 0$ больше не является горизонтом событий. Чтобы убедиться в этом, выполним преобразование координат $r = x^{-1}$

$$ds^2 = \frac{1}{x^2} \left[\rho^{-2} (dt + 2(N \cos \theta + Jx \sin^2 \theta) d\varphi)^2 + \rho^2 dx^2 \right] + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.104)$$

С учетом предела $r \rightarrow 0$ функция ρ^2 зависит только от θ и является ограниченной. Метрика (3.104) локально описывает вращение пространства-времени $AdS_2 \times S^2$ с зарядом НУТ. Пространство-время интерполирует между Минковским и $AdS_2 \times S^2$, только если $\Delta = 0$ не накрыто сингулярностями $r_{A,B}^+$.

Также, есть другой способ получить изотропное решение с конечным угловым моментом J , наложив одно из следующих ограничений

$$Q^2 = (M - D)^2 + N^2 \quad \text{or} \quad P^2 = (M + D)^2 + N^2. \quad (3.105)$$

Рассмотрим первое условие. Вместе с условием изотропности $\mathfrak{t}^2 = 0$ это дает еще одно тождество $P^2 = 2D(D + M)$. Подставляя P и Q в связь (2.18), получаем условие

$$(D - M)(D^2 - M^2 - N^2) = 0. \quad (3.106)$$

Корень $D = M$ не является физическим, так как в этом пределе расходится одна из констант $R_{A,B}$. Остальные корни $D = \pm\sqrt{M^2 + N^2}$ представляют четырехпараметрические семейства (a, J, M, N) , удовлетворяющие условию $D^2 = M^2 + N^2 = (Q^2 + P^2)/4$. В разд. 5.1 мы обнаружим, что такие решения являются суперсимметричными и будут подробно обсуждаться.

Решение с тривиальной формой Максвелла

Чтобы получить электрические и магнитные диполи, найдем коэффициент перед $\cos\theta/r^2$ в разложении Тейлора потенциалов v и u

$$d_e = -\frac{2^{3/2}JU}{W}, \quad d_m = \frac{2^{3/2}J\tilde{U}}{W}. \quad (3.107)$$

Необходимым условием тождественного равенства нулю 1-формы \mathcal{A} является $Q = P = 0$. Для невращающегося случая $a = J = 0$ легко найти, что все три ветви $D_0, D_{\pm 1}$ соответствуют решениям Шварцшильда-НУТ и ФЯНВ-НУТ² ($S = 1/2$) решений, обладающих тривиальным электромагнитным полем. В случае вращения с D_0 мы вернемся к решению Керра-НУТ и с тривиальным полем Максвелла. Однако для ветвей D_{\pm} это не так. Можно убедиться, что дипольные моменты отличны от нуля для D_{\pm} , подставив J и D_{\pm} в терминах параметризации (3.47) и взяв предел $e \rightarrow 0$

$$d_e^2 = -4a^2\mu^2(1 \pm \sin\beta), \quad d_m^2 = -4a^2\mu^2(1 \mp \sin\beta), \quad (3.108)$$

где верхний (нижний) знак означает D_- (D_+). Невозможно одновременно сделать равными нулю оба дипольных момента при $a \neq 0$. Следовательно, единственные электромагнитно нейтральные решения среди сгенерированного класса относятся к ветви D_0 , т.е. к решению Керр-НУТ. Однако известно, что решение ФЯНВ $S = 1/2$ имеет вращающиеся обобщения в моделях гравитации с минимально связанным скалярным полем [130]. Если бы мы применили преобразования Харрисона к ним, то получили бы класс вращающихся решений, не совпадающих с (3.93), хотя его невращающийся предел должен быть таким же.

²ФЯНВ-НУТ зависит от параметра $S = \sqrt{M^2 + N^2}/\sqrt{M^2 + N^2 + 3D^2}$, который в некоторых источниках также обозначается как γ .

Решения с тривиальным полем дилатона

Чтобы получить тривиальное дилатонное поле, недостаточно положить $D = 0$. В силу дилатонного уравнения движения (1.16с) оно может быть константой тогда и только тогда, когда квадратичная свертка тензора поля Максвелла равна нулю $F^2 = 0$. Подставляя потенциалы σ -модели, тензор F равен нулю, если $e^{2\alpha\phi}(\partial u)^2 = e^{-2\alpha\phi}(\partial v)^2$. В невращающемся случае достаточно было бы наложить дополнительное условие $P^2 = Q^2$ (и $N = 0$, вытекающее из ограничения заряда (2.18)), чтобы получить нулевое поле Максвелла. В этом случае электрический v и магнитный u потенциалы равны друг другу с точностью до знака. Тем не менее, во вращающемся случае с этим дополнительным ограничением имеем

$$e^{2\alpha\phi}(\partial u)^2 - e^{-2\alpha\phi}(\partial v)^2 \approx \pm \frac{16aMe^2 \cos\theta}{\sqrt{M^2 - 2e^2} r^5} + \mathcal{O}(r^{-6}), \quad (3.109)$$

где $e^2 = Q^2 + P^2$. Это выражение не может быть положено равным нулю при $a \neq 0$. Таким образом, единственным интересным решением ЭМД с тривиальным дилатонным полем является статическое решение $P^2 = Q^2$ Рейснера-Нордстрема без заряда НУТ.

Экстремальные решения

Условие экстремальных решений для каждой ветви имеет вид

$$a_k^2 = M^2 + N^2 + 3D_k^2 - P^2 - Q^2 \quad (3.110)$$

Подставив a_k^2 в выражение для J^2 (3.97), получим значение углового момента для экстремальных решений

$$J_k^2 = ((M - D_k)^2 - Q^2 + N^2)((M + D_k)^2 - P^2 + N^2) - N^2 a_k^2. \quad (3.111)$$

Мы показали, что $J^2 \mathfrak{t}^2 / a^2$ всегда неотрицательно для D_0 . Поскольку экстремальные вращающиеся решения накладывают условие $a^2 = \mathfrak{t}^2$, угловой момент для D_0 является физическим для любых параметров (рис. 3.11). Для остальных

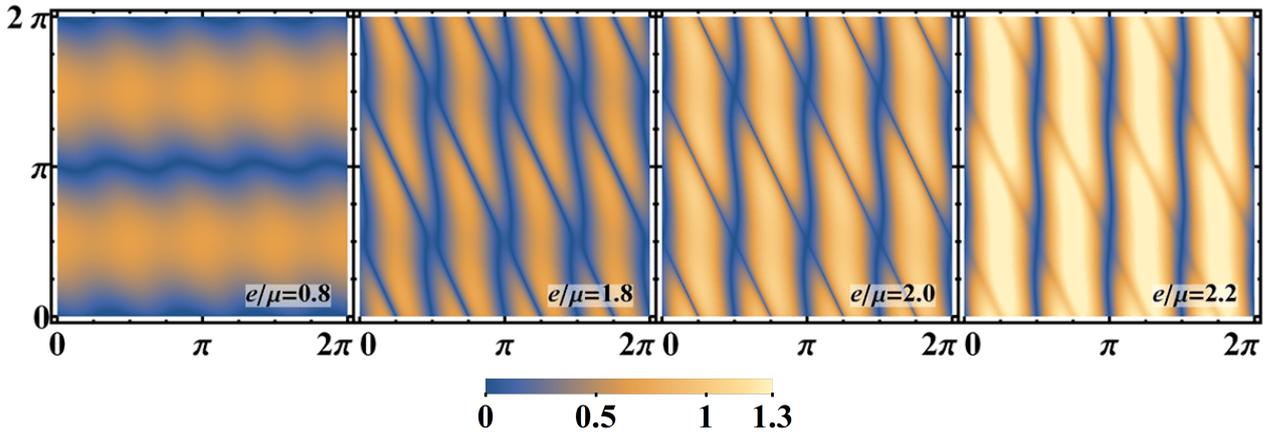


Рисунок 3.11 — Отношение углового момента J к μ^2 ($|J/\mu^2|$) для разных значений e/μ и ветви D_0 . Абсцисса обозначает α , а ордината обозначает β .

ветвей D_{\pm} экстремальный угловой момент неположителен $J_{\pm}^2 \leq 0$, и поэтому они нефизичны, за исключением случая $J_{\pm} = 0$, что накладывает дополнительное условие (рис. 3.12).

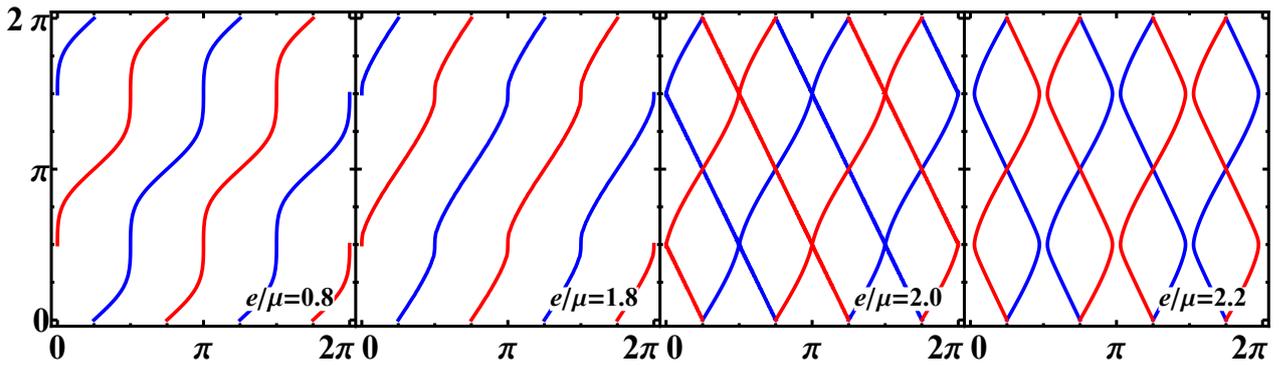


Рисунок 3.12 — Кривые нулевого углового момента J . Синие и красные кривые обозначают D_- и D_+ соответственно. Абсцисса обозначает α , а ордината обозначает β .

Регулярные решения и кротовые норы

Полная классификация данных решений в невращающемся пределе дана в [69] и прошлом разделе. Регулярные невращающиеся решения существуют лишь в ветви D_0 , а остальные ветви представляют собой голые сингулярности. Четырехмерных невращающихся червоточин не существует. Мы предполагаем, что увеличение параметра Керра $|a|$ превращает регулярное решение в

сингулярное, а не наоборот. Поэтому, если невращающееся решение было сингулярным, то оно останется сингулярным при любом a . С другой стороны, если невращающееся решение было регулярным, оно станет сингулярным при a больше некоторого значения.

Эту гипотезу легко доказать для положительных $a^2 > 0$ с особенностями под или над горизонтом. Этот случай обеспечивает действительность радиуса горизонта r_H и действительность радиуса сингулярностей $r_{A,B}$. Положительные значения a^2 гарантируют, что радиус горизонта r_H будет уменьшаться при увеличении a^2 , а особенности останутся прежними на экваторе (функции A и B совпадают с невращающимся случаем для $\theta = \pi/2$). Следовательно, увеличение a^2 может привести только к переходу регулярного к сингулярному случаю.

Другие случаи достаточно сложны и не могут предоставить такого простого доказательства этой гипотезы. Мы проверили ее численно для пространственноподобных и времениподобных решений. Для этого мы вычислили радиус горизонта r_H и наибольшее значение радиуса сингулярности r_S^{\max} для каждой точки параметрической сетки: $e \in [0.1, 3]$ с шагом 0.1; $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ с шагом $2\pi/50$; $|a|$ принадлежит неоднородной сетке от 0 до 3 с шагом 0.1, от 3 до 10 с шагом 1 и от 10 до 100 с шагом 10; $\mu = 1$ фиксировано. Также мы сместили сетку α и β на случайную величину $|\epsilon| < 10^{-3}$, чтобы избавиться от случаев с неопределенными пределами в числовых выражениях. В некоторых случаях требовались расчеты с повышенной машинной точностью. Аналитически рассчитано максимальное значение радиуса сингулярностей r_S^{\max} . Решение сингулярно, если r_S^{\max} существует (т. е. не является комплексным) и его значение больше, чем r_H , или r_H не принадлежит действительным числам. В противном случае решение регулярно. Численные расчеты подтверждают правильность нашего предположения. В частности, это означает, что ветви D_{\pm} всегда сингулярны как для невращающегося, так и для вращающегося случая.

Существует два подкласса нулевых решений: (i) “суперсимметричные” решения (будут рассмотрены в разделе 5.1), (ii) и решения $AdS_2 \times S^2$ (раздел 3.3). Как мы увидим в гл. 5.1 суперсимметричные решения всегда сингулярны.

Изотропные невращающиеся решения (ii), интерполирующие асимптотику Минковского и $AdS_2 \times S^2$, могут быть как регулярными, так и сингулярными. Из выражений для функций A и B следует, что рассматриваемая гипотеза справедлива, так как при $J > J_{\text{crit}}$ будет получена сингулярность над асимптотикой $AdS_2 \times S^2$ по меньшей мере на южном или северном полюсе.

В [69] было строго доказано, что неврацающихся кротовых нор в четырехмерной интерпретации не существует. Используя вышеупомянутый численный алгоритм, мы не обнаружили вращающихся четырехмерных регулярных кротовых нор. Тем не менее, существуют кротовые норы с сингулярностью, которая не перекрывает полностью горловину кротовой норы (например, см. рис. 3.10а). Такие сингулярные кротовые норы позволяют строить времениподобные кривые между двумя асимптотиками в обход сингулярности.

Окисление до 5D

Используя анзац для пятимерной метрики

$$ds_5^2 = e^{2\alpha\phi/3} ds_4^2 + e^{-4\alpha\phi/3} (dx_5 + 2\mathcal{A}_\mu dx^\mu)^2, \quad (3.112)$$

получим элементы метрического тензора

$$\begin{aligned} g_{55} &= -\frac{B}{A}, & g_{05} &= -\frac{2C}{A}, & g_{00} &= \frac{F}{A}, \\ g_{5\varphi} &= -\frac{2B}{A}\omega_5 + \frac{2C}{A}\omega, & g_{0\varphi} &= -\frac{4C}{A}\omega_5 - \frac{F}{A}\omega, \\ g_{\varphi\varphi} &= -\frac{4B}{A}\omega_5^2 + \frac{8C}{A}\omega_5\omega + \frac{F}{A}\omega^2 - A\sin^2\theta, \end{aligned} \quad (3.113)$$

где функция F имеет вид

$$F = \frac{A(\Delta - a^2 \sin^2\theta) - 4C^2}{B}. \quad (3.114)$$

и с помощью связи (2.18), функция F может быть представлена в виде полинома от r и $\cos\theta$

$$F = (r+2D-M)^2 - M^2 - N^2 + D^2 - Q^2 - P^2 - 2J(R_A + R_B) \cos\theta + a^2 \cos^2\theta. \quad (3.115)$$

Как следствие, пятимерная метрика регулярна при $B = 0$.

3.4 Статические реинкарнации решений в ЭМС

Генерация ФЯНВ

Любое вакуумное решение общей теории относительности удовлетворяет уравнениям движения (1.23) с постоянным скалярным полем. Рассматривая решение Шварцшильда как затравочное и применяя преобразование (2.47) с $\cos \beta = S$, мы можем восстановить решение ФЯНВ в виде (2.1) с

$$h_{ij}dx^i dx^j = dr^2 + r^2 F (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.116a)$$

$$\psi = \frac{S}{2} \ln F, \quad \phi = \phi_\infty - \frac{\Sigma S}{2M} \ln F, \quad \omega_i = 0, \quad S = \frac{M}{\sqrt{M^2 + \Sigma^2}}, \quad (3.116b)$$

где M, Σ – АДМ-масса и скалярный заряд, функция F имеет вид

$$F(r) = 1 - \frac{2M}{rS}. \quad (3.117)$$

Если положить скалярный заряд равным нулю $\Sigma \rightarrow 0$, мы вернемся к решению Шварцшильда.

Для дальнейших целей этой главы удобно использовать вытянутые сфероидальные координаты x и y , определяемые как

$$x = \frac{r}{k} - \tilde{k}, \quad y = \cos \theta, \quad (3.118)$$

где k и \tilde{k} – константы, выбранные так, что $g_{\varphi\varphi} = k^2(x^2 - 1)(1 - y^2)$. Функция F и 3-метрика решения (3.116) в вытянутых сфероидальных координатах с $k = M/S$, $\tilde{k} = 1$ имеют вид:

$$h_{ij}dx^i dx^j = k^2 \left(dx^2 + \frac{x^2 - 1}{1 - y^2} dy^2 + (x^2 - 1)(1 - y^2) d\varphi^2 \right), \quad (3.119)$$

$$F(x) = \frac{x - 1}{x + 1}. \quad (3.120)$$

Это определение F будет использоваться в дальнейших расчетах.

Генерация ЗВ со скалярным зарядом

Решение ЗВ в форме (2.1) имеет вид

$$\psi = \frac{\delta}{2} \ln F, \quad \phi = 0, \quad \omega_i = 0, \quad (3.121a)$$

$$h_{ij}dx^i dx^j = k^2 \left(H_{ZV}(x, y) \left(dx^2 + \frac{x^2 - 1}{1 - y^2} dy^2 \right) + (x^2 - 1)(1 - y^2) d\varphi^2 \right), \quad (3.121b)$$

$$H_{ZV}(x, y) = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} \right)^{\delta^2 - 1}, \quad (3.121c)$$

где $k = M/\delta$.

Гравитационный потенциал ψ решения ФЯНВ (3.116b) можно представить в том же виде, что и ЗВ (3.121a), с точностью до замены констант S и δ друг на друга. Это говорит о том, что ФЯНВ и ЗВ можно естественным образом объединить в одно решение с помощью преобразований (2.47). Применение $SO(2)$ -преобразования к решению (3.121a) приводит к ЗВ-метрике со скалярным зарядом, которую мы обозначаем через ФЗВ. Соответствующие потенциалы имеют вид

$$\psi = \frac{S\delta}{2} \ln F, \quad (3.122a)$$

$$\phi = \phi_\infty - \frac{\Sigma S\delta}{2M} \ln F, \quad (3.122b)$$

где 3-метрика та же самая (3.121b) и константа $k = M/S\delta$, где M – АДМ-масса. Единственная разница между решениями ЗВ и ФЗВ состоит в замене параметров $\delta \rightarrow S\delta$ в гравитационном потенциале ψ и константе k . Эта модификация решения будет использоваться для создания углового момента в следующем разделе.

Генерация НУТ

Для полноты добавим в решение параметр НУТ (3.122). Для этого мы последовательно применяем преобразование Элерса (2.46) и калибровочное преобразование (2.45c), чтобы обеспечить $g_{tt} \rightarrow -1$ для $r \rightarrow \infty$:

$$\psi = \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + \lambda^2) F^{S\delta}}{1 + \lambda^2 F^{2S\delta}}, \quad (3.123a)$$

$$\omega_i dx^i = 2N y d\varphi, \quad (3.123b)$$

$$\phi = \phi_\infty - \frac{\Sigma}{2k} \ln F, \quad (3.123c)$$

где λ – параметр преобразования Элерса (2.46). 3-метрика решения с НУТ-параметром имеет вид (3.121b). АДМ-масса M , скалярный заряд Σ и параметр НУТ N равны

$$M = kS\delta \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}, \quad \Sigma^2 = k^2 \delta^2 (1 - S^2), \quad N = \frac{2\delta k \lambda S}{\lambda^2 + 1}, \quad (3.124)$$

которое можно разрешить в следующем виде

$$k = \frac{\sqrt{M^2(1+\lambda^2)^2 + \Sigma^2(1-\lambda^2)^2}}{\delta(1-\lambda^2)}, \quad S = \frac{M(1+\lambda^2)}{\sqrt{M^2(1+\lambda^2)^2 + \Sigma^2(1-\lambda^2)^2}}. \quad (3.125)$$

Решение (3.123) с $\Sigma = 0$ представляет собой вакуумное ЗВ-решение с НУТ-параметром, приведенное в [315]. Для $\delta = 1$ мы получаем решение ФЯНВ с НУТ, найденное в [316].

Сингулярности

Решение (3.123) является наиболее общим из всех полученных ранее. Скалярная кривизна R этого решения может быть найдена из уравнения движения (1.23а) простым образом:

$$R = 2g^{xx}(\partial_x\phi)^2 = \frac{2\Sigma^2}{k^4} \frac{(1+\lambda^2)}{1+\lambda^2 F^{2S\delta}} (x-1)^{S\delta-1-\delta^2} (x+1)^{-S\delta-1-\delta^2} (x^2-y^2)^{\delta^2-1}. \quad (3.126)$$

Видно, что параметр λ не влияет на расходимость показателя степени $(x-1)$ и (x^2-y^2) , которая зависит только от S и δ . В точках $y \neq \pm 1$ метрика сингулярна при $S\delta - 1 - \delta^2 < 0$, а на полярной оси $y = \pm 1$ она сингулярна при $S\delta < 2$. “Горизонт” регулярен только тогда, когда выполняются условия $S\delta \geq 2$ и $S\delta \geq 1 + \delta^2$. Для $|S| < 1$ условие регулярности не может быть достигнуто ни для какого δ .

Предел Чейзи-Керзона

Решение ЗВ допускает предел $\delta \rightarrow \infty$, ведущий к решению Чейзи-Керзона [317; 318]. Решения (3.122) и (3.123) имеют одинаковую предельную форму. З-метрика, скалярное поле и функция $F^{S\delta}$ будут иметь вид

$$h_{ij}dx^i dx^j = \exp\left\{-\frac{M^2 \sin^2 \theta}{S^2 r^2}\right\} (dr^2 + r^2 d\theta^2) + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (3.127a)$$

$$F^{S\delta} \rightarrow e^{-2M/r}, \quad \phi \rightarrow \phi_\infty + \Sigma/r. \quad (3.127b)$$

3.5 Генерация стационарных решений в ЭМС

3.5.1 Применение преобразований Клемана к деформированному решению Фишера

Выполняя шаги преобразований Клемана вплоть до получения \mathcal{E}_3, Q_3 к решению (3.122) ($\mathcal{E}_1 = F^{S\delta}$), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3 = p^2 & \left[-1 - (ky\Omega S\delta)^2 - \frac{k^2\Omega^2(x^2 - 1)(1 - y^2)(F^{S\delta} - 1)^2}{4F^{S\delta}} \right. \\ & \left. + 2iky\Omega \left(S\delta \frac{F^{S\delta} + 1}{F^{S\delta} - 1} + x \right) \right], \\ Q_3 = p & \left(\frac{1 + F^{S\delta}}{1 - F^{S\delta}} + ikyS\delta\Omega \right). \end{aligned} \quad (3.128)$$

Учитывая (2.58), для получения окончательного решения с нулевым электромагнитным полем необходимо найти такие параметры, при которых $\mathcal{E}_3 = -1$. Это возможно только для $S\delta = 1$ и $p = (1 + k^2\Omega^2)^{-1/2}$, что приводит нас к окончательному выражению для потенциалов Эрнста:

$$\mathcal{E}_4 = \frac{px + iqy - 1}{px + iqy + 1}, \quad Q_4 = 0, \quad (3.129)$$

где $q = k\Omega p$ – константа ($p^2 + q^2 = 1$). С помощью преобразования сфероидальных координат в сферические $x \rightarrow (r - M)/Mp$ и $y \rightarrow \cos\theta$ с переопределенными константами

$$\Omega = aM/(M^2 - a^2)^{3/2}, \quad k = (M^2 - a^2)/M, \quad (3.130)$$

и соответствующим образом масштабируя новый скалярный заряд Σ , решение запишется в керровском виде:

$$\begin{aligned} f(r, \theta) &= \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}, \quad \omega(r, \theta) = -\frac{2aMr \sin^2 \theta}{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}, \\ h_{ij} dx^i dx^j &= H(r, \theta) (dr^2 + \Delta d\theta^2) + \Delta \sin^2 \theta d\varphi^2, \\ \Delta(r) &= (r - M)^2 - b^2, \end{aligned} \quad (3.131)$$

со следующим скалярным полем ϕ и функцией H :

$$\phi(r) = \phi_\infty + \frac{\Sigma}{2b} \log \frac{r - M + b}{r - M - b}, \quad (3.132a)$$

$$H(r, \theta) = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Delta} \left(1 + \frac{b^2}{\Delta} \sin^2 \theta \right)^{-\Sigma^2/b^2}, \quad (3.132b)$$

где $b = \sqrt{M^2 - a^2}$. Естественно, что при $\Sigma = 0$ решение совпадает с вакуумным решением Керра. Можно также предположить обобщение с параметром НУТ, взяв решение Керр-НУТ поставив ϕ и H из (3.132) с константой $b = \sqrt{M^2 + N^2 - a^2}$. Правильность этой догадки была проверена с помощью уравнений движения. Далее будем рассматривать такие решения без НУТ-заряда.

Скаляр Риччи, следующий из уравнений движения (1.23a), имеет вид

$$R = 2(\partial_r \phi)^2 g^{rr} = \frac{2\Sigma^2}{\Delta(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)} \left(1 + \frac{b^2}{\Delta} \sin^2 \theta \right)^{\Sigma^2/b^2}. \quad (3.133)$$

Скаляр кривизны R расходится при $\Delta = 0, b^2 \geq 0$. Решение также обладает кольцевыми особенностями в экваториальной плоскости при $r = 0$ для любого b и $r = M$ при $b^2 < 0$.

Недавно Шовино [99] дал несколько новых вращающихся решений. Одно из них асимптотически плоское, обобщающее решение Пенни [65]. Оно также имеет форму (3.131) со следующими ϕ и H :

$$\phi_N = \frac{\Lambda}{\sqrt{\Delta + (M^2 - a^2) \cos^2 \theta}}, \quad (3.134a)$$

$$H_N = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Delta} \exp \left\{ -\frac{\Lambda^2 \Delta \sin^2 \theta}{(\Delta + (M^2 - a^2) \cos^2 \theta)^2} \right\}, \quad (3.134b)$$

где $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ такое же, как в (3.131). Здесь индекс N означает “ньютоновский”, как в [99], и мы изменили определение константы Λ , которая была $\Lambda\sqrt{M^2 - a^2}$ в [99]. Скалярная кривизна для этого решения расходится на экваторе горизонта Киллинга.

Чтобы найти связь с результатами Шовино, рассмотрим предел $M^2 - a^2 \rightarrow 0$ в нашем решении (3.131). Получаются следующие выражения для метрической функции H и скалярного поля:

$$H = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Delta} \exp \left\{ -\frac{\Sigma^2 \sin^2 \theta}{\Delta} \right\}, \quad (3.135a)$$

$$\phi = \phi_\infty + \frac{\Sigma}{\sqrt{\Delta}}, \quad (3.135b)$$

которые совпадают с тем же пределом $M^2 - a^2 \rightarrow 0$ функций (3.134). За рамками этого предела решения (3.134) и (3.131) различны.

Высшие скалярные мультиполи

Воспользовавшись идеей разд. 2.3.4, подействуем $\partial_z = r_{,z}\partial_r + \theta_{,z}\partial_\theta$ на (3.132a), и используя преобразования координат $\rho = \sqrt{\Delta} \sin \theta$, $z = (rM) \cos \theta$, после объемных вычислений можно получить

$$\phi_{(1)} = \frac{\Lambda_{(1)} \cos \theta}{\Delta + b^2 \sin^2 \theta}, \quad (3.136a)$$

$$\gamma_{(1)}^\phi = \frac{-\Lambda_{(1)}^2}{8b^4 (\Delta + b^2 \sin^2 \theta)^2} \left[\Delta^2 + 2b^2 \Delta \sin^2 \theta - b^4 \sin^4 \theta \right. \\ \left. + \frac{4b^4 \sin^2(2\theta)(r - M)^2 \Delta}{(\Delta + b^2 \sin^2 \theta)^2} \right], \quad (3.136b)$$

где $\Lambda_{(1)}$ – константа. Асимптотическое поведение скалярного поля $\phi \approx \Lambda_{(1)} \cos \theta / r^2$ предполагает, что решение описывает вращающийся источник со скалярным дипольным моментом.

3.5.2 Фантомные вращающиеся обобщения решений Фишера

Рассмотрим стационарное обобщение решения ЗВ с произвольными δ , угловым моментом J и потенциалами ψ , γ^ψ , ω . Разделим γ^ψ и ψ на две части: статическую часть γ^s , ψ^s и вращающуюся часть γ^ω , ψ^ω

$$\gamma^s = \lim_{J \rightarrow 0} \gamma^\psi = \delta^2 \gamma_{Sch}, \quad \psi^s = \lim_{J \rightarrow 0} \psi = \delta \psi_{Sch}, \quad (3.137) \\ \gamma^\omega = \gamma^\psi - \gamma^s, \quad \psi^\omega = \psi - \psi^s,$$

где $\gamma_{Sch} = \frac{1}{2} \ln \frac{L^2 - k^2}{l_+ l_-}$, $\psi_{Sch} = \frac{1}{2} \ln \frac{Lk}{L+k}$ – потенциалы решения Шварцшильда (обратите внимание, что γ_{Sch} также соответствует решению ФЯНВ), $L = \frac{1}{2}(l_+ + l_-)$, $l_\pm = \sqrt{\rho^2 + (z \pm k)^2}$, где k – константа, входящая в определение сфероидальных

координат. Поскольку ψ^s, γ^s и ϕ, γ^ϕ удовлетворяют одним и тем же уравнениям, мы можем ввести в наше решение скалярное поле в виде

$$\gamma^\phi = c^2 \gamma_{Sch}, \quad \phi = c \psi_{Sch}. \quad (3.138)$$

Итоговая метрика описывается функциями $\psi = \delta \psi_{Sch} + \psi^\omega$, $\phi = c \psi_{Sch}$, ω , $\gamma = (\delta^2 + c^2) \psi_{Sch} + \gamma^\omega$. Полагая $\delta^2 + c^2 = 1$, мы избавляемся от деформации типа ЗВ в 3-метрике. Таким образом, с одной стороны, в статическом пределе $\omega, \psi^\omega, \gamma^\omega \rightarrow 0$ такое решение в точности соответствует ФЯНВ (это заметили еще Эриш и Гюрсес [113]). Для нулевого скаляра $c = 0$ ограничение дает $\delta = 1$, а решение представляет собой вращающееся решение Шварцшильда, т.е. метрику Керра. Такое решение можно рассматривать как полноценное вращающееся обобщение ФЯНВ. С другой стороны, скалярное поле можно взять в виде $\phi = c \psi_{Sch} + \mathcal{Q}(J) \tilde{\phi}$, где $\mathcal{Q}(0) = 0$ – некоторая функция углового момента J , а $\tilde{\phi}$ – произвольное решение уравнения (2.63). Такое решение будет иметь одинаковые свойства для статических и вакуумных пределов, но здесь мы не будем рассматривать этот случай.

Общее решение вращающегося аксиально симметричного вакуумного решения рассмотрено в [319]. О нахождении решений ЗВ с вращением также сообщал Хори в [320] без каких-либо доказательств их правильности. Эриш и Гюрсес упомянули без подробностей возможность применения их преобразования к решениям Томимацу-Сато (ТС). Напомним, что в оригинальной статье ТС [321] вращающееся вакуумное обобщение ЗВ было найдено для целочисленных значений параметра деформации $\delta = 1, 2, 3, 4$. Обобщение на произвольное целое число $\delta \in \mathbb{Z}_+$ было дано Хори [322].

Из ограничения на δ и c следует, что $c^2 < 0$ при $\delta > 1$, поэтому мы можем построить вращающийся ФЯНВ из решений Томимацу-Сато только для фантомного скалярного поле. Рассмотрим случай $\delta = 2$ с

$$\begin{aligned} e^{2\psi} &= \frac{A}{B}, & e^{2\gamma^\psi} &= \frac{A}{p^4(x^2 - y^2)^4}, \\ e^{2\gamma^\phi} &= \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 - 1} \right)^3, & \omega &= \frac{2qM(1 - y^2)C}{A}, \end{aligned} \quad (3.139)$$

где константы удовлетворяют ограничению $p^2 + q^2 = 1$, а функции A , B , C равны

$$A = p^4(x^2 - 1)^4 + q^4(1 - y^2)^4 - 2p^2q^2(x^2 - 1)(1 - y^2) [2(x^2 - 1)^2 + 2(1 - y^2)^2 + 3(x^2 - 1)(1 - y^2)], \quad (3.140)$$

$$B = [p^2(x^2 + 1)(x^2 - 1) - q^2(y^2 + 1)(1 - y^2) + 2px(x^2 - 1)]^2 + 4q^2y^2 [px(x^2 - 1) + (px + 1)(1 - y^2)]^2, \quad (3.141)$$

$$C = -p^3x(x^2 - 1) [2(x^2 + 1)(x^2 - 1) + (x^2 + 3)(1 - y^2)] - p^2(x^2 - 1) [4x^2(x^2 - 1) + (3x^2 + 1)(1 - y^2)] + q^2(px + 1)(1 - y^2)^3. \quad (3.142)$$

Окончательное решение имеет вид:

$$ds^2 = -\frac{A}{B} (dt - \omega d\varphi)^2 + \frac{B}{A} k^2 (H(dx^2 + h^{-1}dy^2) + (x^2 - 1)(1 - y^2)d\varphi^2), \quad (3.143)$$

$$H = \frac{A}{p^4(x^2 - 1)^4} = \left(1 + \frac{q^2}{p^2}h^2\right)^2 - 4\frac{q^2}{p^2}h(h + 1)^2,$$

$$\phi = \pm \frac{i}{2} \sqrt{3} \ln \frac{x - 1}{x + 1}, \quad h = \frac{1 - y^2}{x^2 - 1}, \quad k = Mp/2, \quad q = J/M^2,$$

где J – угловой момент, а M – масса. Стоит обратить внимание, что $H = e^{2\gamma}(x^2 - y^2)/(x^2 - 1)$, где мы учли преобразования координат из ρ, z в x, y . Из определения скалярного заряда $\phi \approx \phi_\infty + \Sigma/r$ на бесконечности можно найти $\Sigma = \mp i\sqrt{3}Mp$.

Решение (3.143) имеет горизонт в точке $x = \pm 1$. Его эрго-регион определяется уравнением $H = 0$, которое можно решить как $h = \tilde{h}(q/p)$, где \tilde{h} – некоторая функция p/q . Расположение сингулярностей соответствует точкам, где скалярная кривизна расходится:

$$R = 2g^{xx}(\partial_x\phi)^2 = \frac{-6A}{Bhk^2(x^2 - 1)^2} = \frac{-24p^2(x^2 - 1)^2}{M^2 B}. \quad (3.144)$$

Из этого выражения следует, что сингулярности соответствуют $B = 0$, где B представляет сумму двух квадратов. Следовательно, оба квадрата выражения должны быть равны нулю в сингулярности:

$$y (px(x^2 - 1) + (px + 1)(1 - y^2)) = 0, \quad (3.145a)$$

$$p^2(x^2 + 1)(x^2 - 1) - q^2(y^2 + 1)(1 - y^2) + 2px(x^2 - 1) = 0. \quad (3.145b)$$

Уравнение (3.145a) выполняется, если выполняется одно из следующих условий:

1. (i) $y^2 = (1 + px^3)/(1 + px)$
2. (ii) $y = 0$

Подставляя решение (i) в уравнение (3.145b), получаем условие

$$\frac{p(x^2 - 1)(4p^2x^3 + p(x^4 + 6x^2 + 1) + 4x)}{(px + 1)^2} = 0.$$

Первый корень $x^2 = 1$ не приводит к расходимости из-за наличия $(x^2 - 1)^2$ в числителе скаляра Риччи (3.144). Вторая скобка положительна при $p > 0$, $x > 0$. Следовательно, в этом случае сингулярность может располагаться только под горизонтом $x = 1$.

Решение (ii), подставленное в уравнение (3.145b), дает условие

$$p^2x^4 + 2px(x^2 - 1) - 1 = 0.$$

Для $x = 1$ левая часть выражения отрицательна $p^2 - 1 < 0$, а в пределе больших $x \rightarrow \infty$ левая часть стремится к $p^2x^4 > 0$, поэтому имеет хотя бы один корень во внешней области $x > 1$. Численно можно показать, что в области $x > 1$ всегда есть ровно один корень. Таким образом, решение представляет собой черную дыру с регулярным горизонтом событий и сингулярным кольцом в экваториальной плоскости. Скалярное поле на горизонте расходится, поэтому горизонт имеет скалярный заряд, что характерно для статического решения ФЯНВ с $S > 1$. Более того, скалярное поле регулярно в особенности кольца, поэтому кольцо не несет скалярного заряда.

Геометрия вблизи горизонта нетипична для стандартных черных дыр

$$ds^2 = -f_1(dt - f_5d\phi)^2 + f_2(\delta r)^{-4}d(\delta r)^2 + f_3(\delta r)^{-3}d\theta^2 + f_4(\delta r)d\phi^2, \quad (3.146)$$

где f_i – некоторые функции от θ , δr – малое отклонение от “горизонта” $r - r_H = \delta r$. Линейный элемент вдоль радиального направления равен $ds = \sqrt{g_{rr}}dr \sim (\delta r)^{-2}dr$, что не является интегрируемой функцией, поэтому “горизонт” находится бесконечно далеко. В статическом пределе геометрия вблизи “горизонта” имеет другое асимптотическое поведение

$$ds^2 = -(\delta r)^2dt^2 + (\delta r)^{-2}d(\delta r)^2 + (\delta r)^{-1}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.147)$$

Граница хронологии, определяемая $g_{\phi\phi} = 0$, компактна и покрывает горизонт. Граница на экваторе определяется одним из следующих уравнений

$$16(r - M)^3 r - Ma^2(4r - 3M) = 0, \quad (3.148a)$$

$$16(r - M)r^3 + Ma^2(4r - M) = 0, \quad (3.148b)$$

$$64r^6 + 3Ma^4(4r - 7M) + 4a^2r(r - M)(4r^2 + 20rM - 25M^2) = 0, \quad (3.148c)$$

где второе уравнение определяет корень кратности два (но вне экватора оно распадается на два корня кратности один). Тем не менее, $g_{\phi\phi} \rightarrow 0$ для $\cos \theta \rightarrow \pm 1$, поэтому струна Мизнера отсутствует.

Комплексификация полученного решения: вращающиеся диски и кротовые норы

Метрические функции зависят от p^2, q^2, x^2, y^2, px и допускают аналитическое продолжение $x \rightarrow ix, p \rightarrow ip$, (т.е. $a > M$), в котором метрика остается физической с той же сигнатурой, но скалярное поле становится вещественным $\phi = \pm\sqrt{3} \arctan x$ (с точностью до аддитивной константы). В этом случае $x \geq 0$ и $-1 \leq y \leq +1$ будут представлять сплюснутую сфероидальную систему координат, а скалярное поле будет иметь точку излома в диске $x = 0$. Поэтому это решение нельзя рассматривать как желаемое вращающееся обобщение ФЯНВ. Но оно интересно тем, что аналитически продолжая координату x на всю вещественную прямую $x \in \mathbb{R}$, получается червоточина без излома скалярного поля. Такие объекты с интерпретацией червоточин были описаны Гиббонсом и Волковым в [323; 324].

3.6 Ложные вращающиеся решения скалярно-тензорных теорий

Ложное вращающееся решение Фишера

Рассмотрим метрику, полученную в [80] с помощью трюка JN к ФЯНВ. В рамках анзаца (2.1), метрика имеет вид

$$f = \frac{R^2}{\sigma^2} (\Delta - \tilde{\omega}^2 \sin^2 \theta), \quad \omega_i dx^i = -f^{-1} \tilde{\omega} \sin^2 \theta d\varphi, \quad (3.149a)$$

$$h_{ij} dx^i dx^j = \frac{f R^2}{\Delta} (dr^2 + \Delta d\theta^2) + \Delta \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (3.149b)$$

а скалярный заряд записывается в виде

$$\phi(r) = \frac{\Sigma}{2\sqrt{\eta^2 - a^2}} \ln \left(1 - \frac{\eta + \sqrt{\eta^2 - a^2}}{r} \right), \quad \eta = \sqrt{M^2 + \Sigma^2}, \quad (3.150)$$

где

$$\tilde{\omega} = \frac{a(R^2 + a^2 \sin^2 \theta - \Delta)}{R^2}, \quad R^2 = (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \left(1 - \frac{2\eta r}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right)^{1-M/\eta},$$

$$\Delta = r^2 - 2\eta r + a^2, \quad \sigma^2 = (R^2 + a^2 \sin^2 \theta)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta.$$

Для $\Sigma = 0$, $\eta = M$ восстанавливаем решение Керра. Эта метрика выглядит просто и стала популярной моделью для описания возможных отклонений от общей теории относительности в астрофизических наблюдениях [51; 83–85]. Пирогов [86] проверил часть уравнений Эйнштейна и обнаружил, что они не выполняются. Это утверждение было подтверждено в [87]. Здесь мы проверяем справедливость уравнений сигма-модели. Рассматривая уравнение $\square\phi = 0$ при ϕ , зависящем только от r , с учетом $\sqrt{-g} = R^2 \sin \theta$ можно вывести уравнение

$$\partial_r (\Delta \partial_r \phi) = 0, \quad (3.151)$$

которое можно решить с помощью $\phi = \text{const} \ln(r - \eta + \sqrt{\eta^2 - a^2}) / (r - \eta - \sqrt{\eta^2 - a^2})$, но не (3.150). Тем не менее это не означает, что метрика (3.149) неверна.

Модель σ (2.44) подразумевает следующее уравнение для ψ

$$\Delta\psi + \frac{1}{2} e^{-4\psi} (\partial\chi)^2 = 0, \quad (3.152)$$

где Δ и свертка по индексам относятся к 3-метрике:

$$(\partial\chi)^2 = e^{8\psi} \left((\partial_i\omega_j)(\partial^i\omega^j) - (\partial_i\omega_j)(\partial^j\omega^i) \right), \quad (3.153)$$

где для $\omega_i dx^i = \omega(r, \theta) d\varphi$ и диагональной 3-метрики второе слагаемое $(\partial_i\omega_j)(\partial^j\omega^i)$ равно нулю. Первое слагаемое запишем как $(\partial\omega)^2$. Тогда уравнение примет вид

$$\Delta\psi + \frac{1}{2}e^{4\psi}(\partial\omega)^2 = 0. \quad (3.154)$$

Его можно разложить как

$$\partial_r(\Delta\partial_r\psi) + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta\psi) + \frac{e^{4\psi}}{2\sin^2\theta} \left((\partial_r\omega)^2 + (\partial_r\omega)^2/\Delta \right) = 0 \quad (3.155)$$

Подставляя функции f и ω и раскладывая по $r \rightarrow \infty$, находим ненулевое слагаемое

$$\frac{a^2 M(3\cos(2\theta) + 5)(M - \eta)}{r^4} + \mathcal{O}(r^{-5}) = 0. \quad (3.156)$$

Это уравнение может быть выполнено для $a = 0$ (статическое решение ФЯНВ) или $\eta = M$ (Керр). Таким образом, мы подтверждаем результаты [86] и [87].

Ложное вращающееся решение Бранса-Дикке

Другое вращающееся решение со скалярным полем, сгенерированным алгоритмом JN, было получено в рамках теории Бранса-Дикке [108]. Уравнения движения Бранса-Дикке имеют вид

$$\square\Phi = 0, \quad (3.157a)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{\omega}{\Phi^2} \left(\Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Phi_{;\lambda}\Phi^{;\lambda} \right) + \frac{1}{\Phi} (\Phi_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu}\square\Phi). \quad (3.157b)$$

Учитывая (3.157a), можно найти тензор Риччи

$$R_{\mu\nu} = \frac{\omega}{\Phi^2} \partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi + \frac{1}{\Phi}\Phi_{;\mu\nu}. \quad (3.158)$$

Теория может быть сформулирована в Джордановском и Эйнштейновском фрейме, при этом последняя соответствует МЭС. Явное преобразование в Эйнштейновский фрейм осуществляется в виде

$$g_{\mu\nu}^E = \Phi g_{\mu\nu}^J, \quad \phi = \frac{1}{2}\sqrt{2\omega + 3} \ln \Phi. \quad (3.159)$$

Решение ФЯНВ в Джордановском фрейме записывается в виде

$$ds^2 = -F^{-\sigma+S} dt^2 + F^{-\sigma-S} (dr^2 + r^2 F (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)), \quad \Phi = \Phi_0 F^\sigma \quad (3.160)$$

$$F = 1 - \frac{2M}{Sr}, \quad S = \frac{M}{\sqrt{M^2 + \Sigma^2}}, \quad \sigma = -\frac{\Sigma S}{M\sqrt{2\omega + 3}}. \quad (3.161)$$

Применение трюка JN [108] приводит к

$$ds^2 = f_K^\eta (dt - \omega_K d\varphi)^2 - f_K^\xi \rho (dr^2 / \Delta + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + 2f_K^\sigma \omega_K (dt - \omega_K d\varphi) d\varphi, \quad (3.162a)$$

$$\Phi = \Phi_0 f_K^\sigma, \quad (3.162b)$$

где

$$f_K = 1 - 2r_0 r / \rho, \quad \rho = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \omega_K = a \sin^2 \theta, \quad \Delta = r(r - 2r_0) + a^2 \quad (3.163)$$

и

$$\sigma = (\eta + \xi - 1)/2 = -c/2\lambda, \quad \eta = 1/\lambda, \quad \xi = (\lambda - c - 1)/\lambda \quad (3.164)$$

со свободными параметрами λ и c . Статический предел решения (3.162b) должен совпадать с (3.160) с точностью до определения констант. Решение (3.160) обладает тем свойством, что $\ln |g_{tt}g_{rr}| = -2 \ln \Phi + \text{const}$. Для решения (3.162) находим

$$\ln |g_{tt}g_{rr}| = (\eta + \xi - 1) \ln f_K = 2 \ln \Phi + \text{const},$$

таким образом, скалярное поле неверно, а правильным является $\Phi = \Phi_0 f_K^{-\sigma}$.

Для tt -компоненты уравнение Эйнштейна имеет вид

$$R_{tt} = \frac{1}{\Phi} \Phi_{;tt} = -\Gamma_{tt}^r \partial_r \ln \Phi. \quad (3.165)$$

Вычислим асимптотику величины $X = R_{tt} - \Phi_{;tt} / \Phi$ до 7-го порядка для решения (3.162). Первое ненулевое слагаемое ряда Тейлора начинается с 4-го порядка. 4-е и 5-е слагаемые равны нулю, если мы используем исправленное определение скалярного поля. Тогда слагаемое 6-го порядка имеет вид

$$X \approx \frac{a^2 r_0^2 ((c+2)^2 - 4\lambda) (5 + 3 \cos 2\theta)}{4\lambda^2 r^6} + \mathcal{O}(r^{-7}), \quad (3.166)$$

которое равно нулю при $a = 0$ или $\lambda = (c+2)^2/4$. Первый случай возвращает нас к статическому решению и точно удовлетворяет уравнению (3.165). Подстановка второго случая в 7-й порядок дает

$$X \approx \frac{64a^2 c r_0^3 \cos^2 \theta}{(c+2)^3 r^7} + \mathcal{O}(r^{-8}) \quad (3.167)$$

и требует, чтобы либо c , либо r_0 были равны нулю, что гарантирует тривиальную форму скалярного поля. Следовательно, решение, найденное с помощью алгоритма JN в [108], также неверно.

3.7 Браны с независимым скалярным зарядом в α -ЭМД

Чтобы сгенерировать заряженную брану с независимым скалярным зарядом, начнем с затравочного решения модели (1.12) с тривиальной антисимметричной формой. Оно связано с решением ФЯНВ в более высоких измерениях.

3.7.1 Получение заряженной ФЯНВ-браны

Затравочное решение ФЯНВ в D -мерном пространстве-времени

Четырехмерное решение ФЯНВ было обобщено на произвольные размерности Ксантопулосом и Заниасом (XZ) в [114]. Для теории с действием

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa_D^2} \int d^q x \sqrt{-g} \left(R - \frac{q-2}{q-3} (\nabla\varphi)^2 \right), \quad (3.168)$$

решение имеет вид

$$ds^2 = -f_1^\sigma dt^2 + f_1^{\frac{1-\sigma}{q-3}-1} dr^2 + r^2 f_1^{\frac{1-\sigma}{q-3}} d\Omega_{(q-2)}^2, \quad \varphi = \frac{\Sigma\sigma}{2M} \ln f_1, \quad (3.169)$$

$$f_1 = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{q-3}, \quad r_0^{q-3} = \frac{2\kappa_D^2 M}{(q-2)\sigma S_{q-2}}, \quad \sigma = \frac{M}{\sqrt{M^2 + \Sigma^2}},$$

где масса M и скалярный заряд Σ – независимые параметры, $S_n = 2\pi^{(n+1)/2}/\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ – площадь единичной n -сферы, $d\Omega_{(n)}^2$ – линейный элемент единичной n -сферы. Заменив $\varphi = \sqrt{(q-3)/(2q-4)} \phi$, можно непосредственно проверить соответствие уравнений движения модели (3.168) уравнениям движения (1.13а)-(1.13с) с тривиальной антисимметричной формой $F_{(n+1)} = 0$. Таким образом, решение ФЯНВ удовлетворяет уравнениям движения для модели (1.12).

Горизонт при $r = r_0$ всегда сингулярен для $\Sigma \neq 0$ [67]. Нулевой скалярный заряд $\Sigma = 0$ возвращает нас к стандартному решению Шварцшильда в q размерностях.

Чтобы получить заряженные ФЯНВ-браны, построим затравочное решение, дополняющее метрику ФЯНВ (3.169) с плоским подпространством, параметризованным координатами y_1, \dots, y_{d-1} . Метрика подпространства в секторе t, y_1, \dots, y_{d-1} и пространственноподобная часть метрики (3.169) отождествляются с $g_{\mu\nu}^{(0)}$ и $h_{\alpha\beta}^{(0)}$ предыдущего раздела соответственно. Это дает нам начальные потенциалы в виде $\psi_+^{(0)} = \sigma U \ln f_1$ и $\xi_+^{(0)} = \xi_+ = \sigma V \ln f_1$, где

$$U = \sqrt{\frac{s+1}{2s}} \frac{\alpha \Sigma_0}{M_0} + 1, \quad V = sd \sqrt{\frac{s+1}{2s}} \frac{\Sigma_0}{M_0} - \frac{1}{2} \alpha (s+d). \quad (3.170)$$

Подставив $\psi_+^{(0)}$ и $\xi_+^{(0)}$ в (2.71), мы получим затравочные потенциалы Эрнста $\mathcal{E}^{(0)} = f_1^{\sigma U}$, $\Phi^{(0)} = 0$. Затем, преобразование (2.73) приводит к новым потенциалам Эрнста

$$\mathcal{E} = \frac{f_1^{\sigma U} - c^2}{1 - c^2 f_1^{\sigma U}}, \quad \Phi = c \frac{f_1^{\sigma U} - 1}{1 - c^2 f_1^{\sigma U}}. \quad (3.171)$$

Используя (2.69) и (2.71), можно найти новые потенциалы v , ϕ и f для сгенерированного решения. В итоге, это приводит к метрике электрической p -браны

$$ds^2 = f_2^{4s/\Delta} (-f_1^\sigma dt^2 + dy_1^2 + \dots + dy_{d-1}^2) + f_2^{-4d/\Delta} f_1^{(1-\sigma)/s} (dr^2/f_1 + r^2 d\Omega_{s+1}^2),$$

$$\phi = \frac{\sigma(U-1)}{\alpha} \ln f_1 + 4B\alpha \ln f_2, \quad A_{01\dots d-1} = 2c\sqrt{2B} (f_1^{\sigma U} f_2 - 1), \quad (3.172)$$

где

$$f_1 = 1 - \frac{r_0^s}{r^s}, \quad f_2 = \frac{1 - c^2}{1 - c^2 f_1^{\sigma U}}, \quad r_0^s = \frac{16M_0\pi}{\sigma(s+1)S_{s+1}}, \quad \sigma = \frac{M_0}{\sqrt{M_0^2 + \Sigma_0^2}}.$$

Это новое решение имеет физический смысл только для целых чисел $s, d \geq 1$. Независимыми параметрами являются затравочная масса и скалярный заряд M_0, Σ_0 , а также параметр преобразования Харрисона c . Решение (3.169) можно восстановить, положив $c = 0, d = 1$.

Магнитная брана может быть получена с помощью электромагнитной дуальности (2.70). Согласно (2.66), антисимметричная форма имеет вид

$$F_{\alpha_1 \dots \alpha_{s+1}} = \frac{c}{1 - c^2} \frac{s}{s+1} \frac{32M_0 U \pi \sqrt{2B}}{S_{s+1}} \sqrt{\Omega_{(s+1)}} \epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{s+1}}, \quad (3.173)$$

где $\Omega_{(n)}$ – определитель метрического тензора единичной n -сферы, $\epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{s+1}} = \pm 1$.

Важными примерами образовавшегося семейства являются браны F1 и NS5 в супергравитациях типа II. Фундаментальная струна F1 представляет собой решение с электрически заряженной 3-формой с $d = 2, s = 6, \alpha = 1$. Дуальная ей – солитонная 5-брана NS5 с магнитным зарядом и $d = 6, s = 2, \alpha = 1$.

Заряды

Масса АДМ \mathcal{M} и электрический заряд Пейджа \mathcal{Q} , приходящиеся на единицу площади ФЯНВ-браны, могут быть представлены в виде поверхностных интегралов согласно уравнениям (2.8) и (4.3) в [325]³

$$\mathcal{M} = M_0 (1 + \delta_M), \quad \delta_M \equiv \frac{4sU}{\Delta} \frac{c^2}{1 - c^2} \left(d - \frac{s(s-1)}{s+1} \right), \quad (3.174a)$$

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{\kappa_D^2} \int_{S_\infty} e^{-\alpha\phi} * F^{(e)} = (-1)^d \frac{s}{s+1} \frac{c}{1 - c^2} 4\sqrt{2B} M_0 U \quad (3.174b)$$

где S_∞ – гиперповерхность бесконечно удаленной $s + 1$ -сферы. В магнитном случае заряд, соответствующий интегралу недуализованной формы

$$P = \kappa_D \int_{S_\infty} F^{(m)}, \quad (3.175)$$

формально совпадает с выражением для электрического заряда (3.174b) с точностью до знака.

В соответствии с асимптотикой дилатона при $r \rightarrow \infty$,

$$\phi \approx -\frac{1}{r^s} \frac{2\kappa_D^2}{(s+1)S_{s+1}} \sqrt{\frac{s+1}{2s}} \Sigma_0 (1 + \delta_\Sigma), \quad \delta_\Sigma = 4B\alpha^2 \frac{U}{U-1} \cdot \frac{c^2}{1 - c^2}, \quad (3.176)$$

разумно определить дилатонный заряд \mathcal{D} браны следующим образом

$$\mathcal{D} = -\sqrt{\frac{2s}{s+1}} \frac{\Sigma_0 (1 + \delta_\Sigma)}{\alpha} = -\left(1 + \frac{4B\alpha^2 c^2}{1 - c^2} \right) \sqrt{\frac{2s}{s+1}} \frac{\Sigma_0}{\alpha} - \frac{8Bc^2}{1 - c^2} \frac{s}{s+1} M_0. \quad (3.177)$$

³Мы переопределили заряд Пейджа с точностью до мультипликативной константой, чтобы избавиться от лишнего κ_D в следующих выражениях и из-за разного веса формы Максвелла в действии ЭАД и в [325].

В главе 3.7.1 будет показано, что необходимым условием регулярности горизонта является нулевой затравочный скалярный заряд: $\Sigma_0 = 0$. Это условие не означает нулевой дилатонный заряд $D = 0$, так как в этом случае $U = 1$, а произведение $\Sigma_0 \delta_\Sigma$ конечно. А именно, в этом пределе мы получаем ограничение

$$Q^2 = \mathcal{D} \left(\mathfrak{B} \mathcal{D} - \frac{4s}{1+s} \mathcal{M} \right) \quad (3.178)$$

для электрической браны, и

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{D} \left(\mathfrak{B} \mathcal{D} + \frac{4s}{1+s} \mathcal{M} \right) \quad (3.179)$$

для магнитной браны (которую можно получить, заменив $D \rightarrow -D$, $Q \rightarrow P$), где

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2B} - \frac{4s(ds + d - s^2 + s)}{(s+1)(d+s)}. \quad (3.180)$$

Для значений параметров $d = s = 1$, $\alpha = \sqrt{3}$, ($\mathfrak{B} = 2$) модель представляет собой четырехмерную $\alpha = \sqrt{3}$ теорию ЭМД, а условия (3.178), (3.179) совпадают с ограничением заряда, найденным Рашидом [22]. Уравнение (3.178) имеет два корня относительно D :

$$D_{\pm} = \frac{2\mathcal{M}s \pm \sqrt{4\mathcal{M}^2 s^2 + \mathfrak{B}(s+1)^2 Q^2}}{\mathfrak{B}(s+1)}. \quad (3.181)$$

Если $Q = 0$, условие регулярности (3.178) должно совпадать с условием регулярности затравочного решения, а именно $\Sigma_0 = D = 0$. Следовательно, корень D_+ нефизичен и не соответствует ограничению $\Sigma_0 = 0$. Точно так же знак плюс в решении уравнения (3.179) не соответствует регулярным магнитным решениям.

Среди данного класса решений можно обнаружить нетривиальные предельные случаи. Одним из них является следующий: $U \rightarrow 0$, $c^2 \rightarrow 1$. В этом случае выражения для зарядов (3.174a), (3.174b), (3.177) и само решение (3.172) имеют нетривиальный предел с новой функцией в метрике

$$f_2 = (\zeta \ln f_1 + 1)^{-1}, \quad (3.182)$$

где ζ – новый независимый параметр. При $\zeta > 0$ функция f_2 расходится при $r_\zeta = r_0 (1 - e^{-1/\zeta})^{-1/s} > r_0$ как $1/(r - r_\zeta)$. При $\zeta < 0$ функция f_2 не имеет корней и стремится к нулю в точке r_0 как $1/\ln f_1$.

Точно так же предел $M_0, \Sigma_0 \rightarrow 0, c^2 \rightarrow 1$ оставляет заряды конечными. Введем бесконечно малый параметр ϵ , такой, что величины M_0, Σ_0, c зависят от

него как $M_0 = \xi\epsilon$, $\Sigma_0 = \zeta\epsilon$, $c = \pm(1 - \epsilon)$, где ζ и ξ — некоторые константы. Тогда предел $\epsilon \rightarrow 0$ приводит к переопределению

$$f_1 = 1, \quad f_2 = \frac{r^s}{\rho^s + r^s}, \quad (3.183)$$

и новые заряды имеют вид

$$\mathcal{M} = \Phi \left(2B + \frac{s(d-s)}{\Delta} \right), \quad \mathcal{D} = -2B\Phi, \quad \mathcal{Q} = \pm\Phi\sqrt{2B}, \quad (3.184)$$

где

$$\rho^s = \frac{\kappa_D^2 \Phi}{sS_{s+1}}, \quad \Phi = \frac{2s}{s+1}\xi + \sqrt{\frac{2s}{s+1}}\alpha\zeta.$$

В магнитном случае решение можно найти из (3.184), снова заменив $D \rightarrow -D$, $Q \rightarrow P$. Можно проверить, что выражения для заряда тождественно удовлетворяют условию (3.181). Эти решения были найдены ранее в [326]. Заряды (3.184) удовлетворяют следующим ограничениям

$$\mathcal{M}^2 = \mathcal{Q}^2 \frac{(s+d+sd-s^2)^2}{(s+d)\Delta}, \quad (3.185a)$$

$$\mathcal{D}^2 = 2B\mathcal{Q}^2, \quad (3.185b)$$

которые можно скомбинировать в виде

$$\mathcal{M}^2 + \left(\frac{1}{2B} - \left(\frac{s+d+sd-s^2}{s+d} \right)^2 \right) \mathcal{D}^2 - \mathcal{Q}^2 = 0, \quad (3.186)$$

напоминающее по-форсе условие [327; 328]. При $d = s = 1$ ограничение по массе (3.185a) совпадает с известным результатом $M^2 = Q^2/(1 + \alpha^2)$ для БПС-решений в ЭМД модели [22; 29; 329; 330].

Предел $c \rightarrow \infty$ приводит к переопределению функции

$$f_2 = f_1^{-\sigma U}, \quad (3.187)$$

а антисимметричная форма становится тривиальной. Это решение является частным случаем более широкого семейства, которое может быть получено из затравочного решения с помощью $SO(2)$ -преобразования, рассмотренного в разд. 3.7.2.

Первое предельное решение (3.182) качественно не отличается от общего семейства, тогда как второе предельное решение (3.187) является частным случаем другого более широкого семейства незаряженных решений, для которое

требует отдельных изысканий. Далее мы обсудим физические свойства общего решения (3.172) и второго предельного решения (3.183), обозначая их как S_G и S_E соответственно.

Сингулярности

Чтобы выполнить анализ структуры пространства-времени, вычислим скаляр Риччи, сворачивая индексы в уравнении (1.13а) и подставив общее решение для электрических/магнитных форм и скалярного поля в тензор энергии-импульса

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \sigma^2 f_2^{4d/\Delta} f_1^{(\sigma-s-1)/s} f_1'^2 (R_F + R_\phi), \\ R_F &= \frac{4c^2 U^2 (d-s) f_2^2 f_1^{\sigma U}}{(1-c^2)^2 \Delta}, \\ R_\phi &= \left(\frac{\Sigma_0}{M_0} \sqrt{\frac{s+1}{2s}} + \frac{2\alpha c^2 U (d+s) f_2 f_1^{\sigma U}}{(1-c^2) \Delta} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.188)$$

Для общего семейства S_G функция f_2 регулярна при $r = r_0$, поэтому этот множитель не приводит к сингулярности кривизны. Но для $\Sigma_0 \neq 0$ скаляр Риччи (3.188) содержит расходящийся множитель, пропорциональный $f_1^{(\sigma-s-1)/s}$ из-за отрицательного показателя степени. При $\Sigma_0 = 0$, $M_0 > 0$ поверхность $r = r_0$ регулярна и представляет собой горизонт событий, если $|c| < 1$.

Функция f_2 расходится, когда ее знаменатель равен нулю: $f_1^{\sigma U} = c^{-2}$. Функция f_1 ограничена сверху значением 1, поэтому это возможно только при $c^2 > 1$. Из уравнения (3.188) следует, что это приводит к существованию еще одной особенности при $r_0(1 - c^{-2/\sigma U})^{-s} > r_0$.

В предельном случае S_E скалярная кривизна принимает вид

$$R = \left(\frac{2s\rho^s}{r^{s+1}\Delta} \right)^2 f_2^{4d/\Delta+2} d(\Delta - s(d+s)) \sim r^{4ds/\Delta-2}. \quad (3.189)$$

Чтобы узнать, является ли точка $r = 0$ сингулярной, рассмотрим экстремумы показателя степени $-2 + 4ds/\Delta$ относительно α^2 . Это выражение принимает наименьшее значение -2 при $\alpha^2 \rightarrow \infty$ и наибольшее значение 0 при $\alpha^2 = 0$. Таким образом, семейство S_E сингулярно при $\alpha \neq 0$. Для $\Delta - s(d+s) = 0$

(т.е. $\alpha^2 = s(s-d)/(s+d)$, $s \geq d$) метрический тензор является Риччи-плоским. Однако прямое вычисление скаляров $R_{MN}R^{MN}$ и $R_{MNLK}R^{MNLK}$ приводит к асимптотическому поведению $\sim r^{4(ds)/(d+s)}$ при $r \rightarrow 0$, поэтому они расходятся, если $s \neq d$ (случай $s = d$ возвращает нас к $\alpha = 0$).

Наиболее внешняя сингулярность или поверхность горизонта для S_G , $c^2 < 1$, находится при $r = r_0$. Решения с положительной (отрицательной) затравочной массой M_0 имеют бесконечное красное смещение $g_{tt} \rightarrow 0$ (синее смещение $g_{tt} \rightarrow \infty$) при $r = r_0$. В разд. 6.1.1 будет показано, что радиальная геодезическая приближается к точке $r = r_0$ за конечное время удалённого наблюдателя для любого $\sigma \neq 1$. Самая внешняя сингулярность или поверхность горизонта для S_G , $c^2 > 1$ – это поверхность $f_2^{-1} = 0$. При $g_{tt} \rightarrow \infty$ такие решения представляют собой голые сингулярности с бесконечным синим смещением. Семейство S_G не может быть экстремальным в смысле $g'_{tt}(r_0) \neq 0$ или $g^{rr'}(r_0) \neq 0$, в чем можно убедиться непосредственно.

Согласно этому анализу общее семейство S_G является голой сингулярностью для $\sigma \neq 1$, но может обладать некоторыми свойствами черной дыры (красным смещением). Класс S_E представляет собой экстремальные решения, регулярные только при $\alpha = 0$, представляющие собой экстремальные однозарядные решения Рейснера-Нордстрема.

3.7.2 ФЯНВ-браны с параметром деформации

Статические незаряженные решения в общей теории относительности с минимально связанным скалярным полем, являющиеся усечением теории (1.12) с $F = 0$, могут быть сведены к простой сигма-модели. Это позволяет нам внести минимальное безмассовое скалярное поле с помощью преобразований.

Чтобы построить подходящую сигма-модель, мы можем усечь полученные ранее (2.68a) или (2.68b) электрические v или магнитные u -потенциалы. Это дает метрику таргет-пространства

$$dl_0^2 = \frac{s+d}{sd} (d \ln \sqrt{-g})^2 + \frac{1}{2} d\phi^2. \quad (3.190)$$

Метрика таргет-пространства имеет симметрию $SO(2)$, которая соответствует преобразованию, которое было использовано в [67]

$$\begin{cases} \ln \sqrt{-g} = \cos \beta \cdot \ln \sqrt{-g^{(0)}} - \sqrt{\frac{sd}{2(s+d)}} \sin \beta \cdot \phi^{(0)} \\ \phi = \sqrt{\frac{2(s+d)}{sd}} \sin \beta \cdot \ln \sqrt{-g^{(0)}} + \cos \beta \cdot \phi^{(0)} \end{cases}, \quad (3.191)$$

где β – параметр преобразования.

Начиная с четырехмерного вакуумного аксиально-симметричного решения Зипой-Вурхиса [111; 112], p -браны с $s = 1$ можно снабдить параметром деформации (сжатия) δ . Выберем затравочное решение в виде

$$ds^2 = -f_1(x)^\delta dt^2 + f_1(x)^{-\delta} ds_{(3)}^2, \quad f_1(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad (3.192)$$

$$ds_{(3)}^2 = k^2 \left[\left(\frac{x^2-1}{x^2-y^2} \right)^{\delta^2-1} \left(dx^2 + \frac{x^2-1}{1-y^2} dy^2 \right) + (x^2-1)(1-y^2) d\varphi^2 \right],$$

где k и δ – некоторые константы, x и y – сплюснутые сфероидальные координаты, связанные со сферическими координатами соотношением $x = \frac{r}{k} - 1$, $y = \cos \theta$. Подставляя $d = s = 1$, $|g^{(0)}| = f^\delta$ и $\phi^{(0)} = 0$ в $SO(2)$ -преобразования (3.191) и переопределив β через заряды, получим новое решение

$$ds^2 = -f_1^{\delta\sigma} dt^2 + f_1^{-\delta\sigma} ds_{(3)}^2, \quad \phi = \frac{\Sigma}{k} \ln f_1, \quad (3.193)$$

где σ имеет прежнее выражение, $k = \frac{M}{\sigma\delta}$. Полученное решение объединяет четырехмерные решения ФЯНВ и Зипой-Вурхиса. Затем мы можем расширить решение до размерности $D = d+3$ и применить преобразования (2.73). Мы получим решение в виде найденной ранее ФЯНВ-браны (3.172) с заменой $f_1^\sigma \rightarrow f_1^{\sigma\delta}$ и используя новый вид $ds_{(3)}$, имеем

$$ds^2 = f_2^{4/\Delta} \left(-f_1^{\sigma\delta} dt^2 + dy_1^2 + \dots + dy_{d-1}^2 \right) + f_2^{-4d/\Delta} f_1^{-\sigma\delta} ds_{(3)}^2, \quad (3.194)$$

$$\phi(r) = \frac{\Sigma}{k} \ln f_1 + 4B\alpha \ln f_2, \quad f_1(r) = \frac{x-1}{x+1}, \quad f_2(r) = \frac{1-c^2}{1-c^2 f_1^{\sigma\delta U}},$$

$$\sigma = \frac{M}{\sqrt{M^2 + \Sigma^2}}, \quad U = 1 + \frac{\Sigma\alpha}{M},$$

с электрическим потенциалом

$$A_{01\dots d-1} = \frac{2\sqrt{2B}}{c} (f_2 - 1)$$

или магнитной формой

$$F_{y\varphi} = \frac{4c\sqrt{2B}}{1-c^2} (M + \alpha\Sigma).$$

Это решение как с независимым скалярным зарядом, так и с произвольным параметром деформации δ (подробнее о замене $\sigma \rightarrow \sigma\delta$ см. в [129]).

Глава 4. Термодинамика и формула Смарра

4.1 Структура стержней

Здесь мы кратко опишем теорию строения стержней, сформулированную в [154]. Рассмотрим метрику пространства-времени, допускающую два коммутирующих вектора Киллинга $k = \partial_t, m = \partial_\phi$ и предположим, что пространственно-временное многообразие не имеет сильных голых сингулярностей кривизны, но может иметь видимые линейные сингулярности вдоль (части) полярной оси в смысле Израэля [156]. К ним относятся космические струны и распорки (конические сингулярности), а также струны Мизнера в пространстве-времени с НУТ без наложенной периодичности времени. Мы также предполагаем, что пространство-время асимптотически плоское или асимптотически локально плоское. Пусть γ_{ab} , $x^a = t, \phi$ – двумерная лоренцева метрика подпространства, натянутого на векторы Киллинга. Переходя от координат типа Бойера-Линдквиста r, θ к координатам Вейля ρ, z , где

$$\rho = \sqrt{|\det \gamma|}, \quad (4.1)$$

получим:

$$ds^2 = \gamma_{ab}(\rho, z) dx^a dx^b + e^{2\nu} (d\rho^2 + dz^2), \quad (4.2)$$

где ν – функция (ρ, z) . Координаты Вейля для стационарных четырехмерных решений можно записать в виде

$$ds^2 = f(dt - \omega d\phi)^2 + f^{-1} h_{ij} dx^i dx^j, \quad h_{ij} dx^i dx^j = e^{2k} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2. \quad (4.3)$$

Чтобы найти стержневую структуру, необходимо разрешить уравнение

$$\rho(r, \theta) = 0, \quad (4.4)$$

получая систему стержней, разбивающих полярную ось на определенное количество конечных или полубесконечных интервалов $(-\infty, z_1]$, $[z_1, z_2]$, \dots , $[z_N, +\infty)$, где два полубесконечных стержня обозначаются $n = \pm$, а остальные конечные стержни – индексом n , соответствующим левой границе интервала. Каждый стержень можно снабдить двумерным вектором, называемым *направлением стержня*, исходя из следующих рассуждений. При $\rho = 0$ матрица

$\gamma_{ab}(0, z)$ вырождена в силу определения (4.1), поэтому она должна иметь нулевые собственные значения. Для квазирегулярного пространства-времени, когда на оси симметрии нет сильных особенностей кривизны, эти собственные значения должны быть невырожденными, за исключением, быть может, дискретного набора “поворотных” точек z_n , обозначающих концы стержней. Собственный вектор v_n^a , удовлетворяющий уравнению

$$\gamma_{ab}(0, z)v_n^b = 0 \quad (4.5)$$

на любом отрезке $z \in [z_n, z_{n+1}]$, называется n -м направлением стержня. По непрерывности этот вектор можно продолжить до малых $\rho \neq 0$, и более точный анализ показывает, что в ведущем порядке по ρ его двумерная норма ведет себя как

$$v_n^2 = \gamma_{ab}v_n^a v_n^b \sim \pm a(z)\rho^2, \quad e^{2\nu} \sim c_\nu^2 a(z), \quad (4.6)$$

где c_ν – некоторая константа, а знак \pm соответствует *пространственноподобному* и *временноподобному* стержню соответственно.

Нормировка векторов направлений стержней может быть выбрана по-разному. Одна возможность, *Киллинговая нормировка*, связана с предпочтительной нормировкой ассоциированного вектора Киллинга в пространстве-времени: $v = v^0 k + v^1 m$, а именно, $v_0 = 1$ во времениподобном случае и $v_1 = 1$ в пространственноподобном. Ввиду поведения вблизи оси (4.6) в обоих случаях сам стержень (т.е. подмногообразие $\rho = 0$) будет горизонтом Киллинга для заданного таким образом вектора Киллинга. Другая возможность заключается в выборе масштабного фактора таким образом, чтобы обеспечить конечность его нормы при $\rho \rightarrow 0$:

$$l_n^a = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{-1} e^{-\nu} v_n^a, \quad (4.7)$$

опять же с возможностью дальнейшего перемасштабирования мультипликативной константой. Важным свойством заданного таким образом направления стержня является его постоянство (с учетом (4.6)) вдоль стержня, т.е.

$$\partial_z l_n^a = 0. \quad (4.8)$$

Времяподобные стержни конечной длины соответствуют горизонтам черных дыр, бесконечные времениподобные стержни описывают горизонты ускорения. Постоянные составляющие такого стержня горизонта связаны с его

угловой скоростью Ω_H и поверхностной гравитацией \varkappa_H вектора Киллинга

$$\xi = k + \Omega_H m. \quad (4.9)$$

Поверхностную гравитацию

$$\varkappa_H = (-\xi_{\mu;\nu}\xi^{\mu;\nu}/2)^{1/2} \quad (4.10)$$

можно выразить в координатах Вейля как

$$\varkappa_H = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(-\rho^{-2} e^{-2\nu} \gamma_{ab} v^a v^b \right)^{1/2}, \quad (4.11)$$

где $v^0 = 1, v^1 = \Omega_H$. Может оказаться удобным выбрать каноническую нормировку векторов направлений, соответствующую единичной поверхностной гравитации:

$$l_H = (1/\varkappa_H, \Omega_H/\varkappa_H). \quad (4.12)$$

Пространственноподобные стержни соответствуют линейным дефектам, таким как космические струны, распорки, струны Мизнера, которые также могут быть струнами Дирака, связанными с соответствующими векторными потенциалами. Эти стержни являются горизонтами Киллинга для определенных пространственноподобных векторов Киллинга. Для них также имеют место постоянные угловые скорости Ω_n и *пространственноподобная* поверхностная гравитация

$$\varkappa_n = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\rho^{-2} e^{-2\nu} \gamma_{ab} v_n^a v_n^b \right)^{1/2}, \quad (4.13)$$

и как следствие, векторы направления нормированы так, что $v_n^1 = 1$ и

$$l_n = (1/\varkappa_n, \Omega_n/\varkappa_n). \quad (4.14)$$

Каждый стержень представляет собой горизонт Киллинга для вектора Киллинга l_n^μ (здесь мы считаем, что l_n^μ является вектором во всем пространстве-времени). В [144] Картер показал для электровакуумных решений, что каждый горизонт Киллинга обладает своими постоянными электрическими и магнитными потенциалами. Согласно [144], величина $R_{\mu\nu} l_n^\mu l_n^\nu$ равна нулю на горизонте Киллинга l_n^μ . Тогда правая часть уравнений Эйнштейна также равна нулю. Скаляры Φ^A обладают той же симметрией, что и пространство-время, поэтому тензор энергии-импульса для скаляров, свернутых с $l_n^\mu l_n^\nu$, не вносит вклад в выражение. Оставшаяся часть должна быть равна нулю на горизонте

$$K_{IJ} \left(F_{\mu\lambda}^I F^{J\lambda}{}_\nu + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^I F^{J\alpha\beta} \right) l^\mu l^\nu = 0. \quad (4.15)$$

Вводя "электрический" и "магнитный" потенциалы относительно вращающейся в одном направлении системы отсчета как

$$E_\mu^I = F_{\mu\nu}^I l^\nu, \quad B_\mu^I = \tilde{F}_{\mu\nu}^I l^\nu, \quad (4.16)$$

условие (4.15) на тензор энергии-импульса из (1.2) принимает более простой вид

$$K_{IJ} (E_\mu^I E^{\mu J} + B_\mu^I B^{\mu J}) = 0. \quad (4.17)$$

Поскольку K_{IJ} – положительно определенная матрица, это может быть справедливым, только если $\tilde{E}_\mu^J = U_I^J E_\mu^I$ и $\tilde{B}_\mu^J = U_I^J B_\mu^I$ равны нулю, где U_I^J диагонализует матрицу K_{IJ} . Следуя антисимметричному виду $F_{\mu\nu}$ и $\tilde{F}_{\mu\nu}$, можно заметить, что $\tilde{E}_\mu^I l_n^\mu = 0$, $\tilde{B}_\mu^I l_n^\mu = 0$ и векторы \tilde{E}_μ^I , \tilde{B}_μ^I ортогональны l_n^μ . Единственным направлением, ортогональным к l_n^μ на горизонте Киллинга, является само направление l_n^μ , поэтому векторы \tilde{E}_μ^I , \tilde{B}_μ^I имеют направление l_n^μ , и все они имеют одинаковое направление. Тогда любая линейная комбинация имеет направление l_n^μ , включая начальные векторы E_μ^I и B_μ^I , а следующие коммутаторы равны нулю

$$E_{[\mu}^I l_{\nu]} = 0, \quad B_{[\mu}^I l_{\nu]} = 0. \quad (4.18)$$

В частности, они приводят к следующим тождествам

$$\lim_{l_n^\mu l_{n\mu} \rightarrow 0} \partial_i A_t^I + \Omega_n \partial_i A_\phi^I \rightarrow 0, \quad (4.19)$$

$$\lim_{l_n^\mu l_{n\mu} \rightarrow 0} (F^{Ijt} - \omega_n F^{Ij\phi}) \sqrt{|g|} \rightarrow 0. \quad (4.20)$$

Поскольку Ω_n постоянна, $A_t^I + \Omega_n A_\phi^I = \Phi^I$ является так же константой на горизонте Киллинга, т.е. на стержне. Величина Φ^I имеет смысл скалярного электрического потенциала в совращающейся системе отсчета. Объединив два предела, можно получить еще один предел, который пригодится в дальнейших расчетах.

$$\lim_{l_n^\mu l_{n\mu} \rightarrow 0} (G_I^{\rho t} - \omega G_I^{\rho\varphi}) \sqrt{|g|} \rightarrow 0. \quad (4.21)$$

4.2 Заряды Комара

Следуя [158], начнем с определения Комара [331] асимптотической массы и углового момента:

$$M_\infty = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma_\infty} D^\nu k^\mu d\Sigma_{\mu\nu}, \quad J_\infty = -\frac{1}{8\pi} \oint_{\Sigma_\infty} D^\nu m^\mu d\Sigma_{\mu\nu}. \quad (4.22)$$

Нам также необходимо определить сохраняющиеся электрические заряды в качестве поверхностных интегралов. Согласованное определение сохраняющегося электрического заряда следует из модифицированных уравнений Максвелла:

$$Q_I^\infty = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma_\infty} G_I^{\mu\nu} d\Sigma_{\mu\nu}. \quad (4.23)$$

Рассмотрим некоторое стационарное аксиально симметричное решение с произвольной стержневой структурой z_n, l_n . Каждый стержень окружим тонким цилиндром Σ_n . По формуле Остроградского асимптотическую полную массу можно преобразовать в сумму локальных комаровских масс M_n^d стержней ("прямых" масс) и объемного вклада полей: $M = \sum_n M_n^d + M_F$, где

$$M_n^d = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma_n} D^\nu k^\mu d\Sigma_{\mu\nu}, \quad M_F = \frac{1}{4\pi} \int D_\nu D^\nu k^\mu dS_\mu, \quad (4.24)$$

где Σ_n – пространственноподобные поверхности, ограничивающие различные источники ¹, а второй интеграл берется по объему. Аналогично, асимптотический угловой момент имеет вид $J = \sum_n J_n^d + J_F$, где

$$J_n^d = -\frac{1}{8\pi} \oint_{\Sigma_n} D^\nu m^\mu d\Sigma_{\mu\nu}, \quad J_F = -\frac{1}{8\pi} \int D_\nu D^\nu m^\mu dS_\mu. \quad (4.25)$$

Используя известную лемму Киллинга для k ,

$$D_\nu D^\nu k^\mu = -[D_\nu, D^\mu]k^\nu = -R^\mu{}_\nu k^\nu, \quad (4.26)$$

и аналогично для m , и явную форму для тензора Риччи (1.2) объемные интегралы можно выразить как

$$M_F = -\frac{c}{16\pi} \int K_{IJ} (F_{it}^I F^{Jit} - F_{i\varphi}^I F^{Ji\varphi}) \sqrt{|g|} d^3x, \quad (4.27)$$

$$J_F = \frac{c}{16\pi} \int K_{IJ} F_{i\varphi}^I F^{Jit} \sqrt{|g|} d^3x. \quad (4.28)$$

¹Мы используем сигнатуру метрики (-+++), и соглашение $d\Sigma_{\mu\nu} = 1/2\sqrt{|g|}\epsilon_{\mu\nu\lambda\tau}dx^\lambda dx^\tau$ с $\epsilon_{t\rho z\varphi} = 1$ в координатах Вейля. Мы обозначим t, φ индексом a , а остальные координаты ρ, z индексом i, j . Двумерный символ Леви-Чивиты ϵ_{ij} определяется с $\epsilon_{\rho z} = 1$ и $\epsilon_{xy} = 1$ соответственно.

С помощью интегрирования по частям их можно представить в виде

$$M_F = -\frac{c}{16\pi} \int \left[\partial_i \left(\sqrt{|g|} K_{IJ} (F^{Jit} A_t^I - F^{Ji\varphi} A_\varphi^I) \right) \right] d^3x \quad (4.29)$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int \left[\partial_i \left(K_{IJ} \sqrt{|g|} F^{Jit} \right) A_t^I - \partial_i \left(K_{IJ} \sqrt{|g|} F^{Ji\varphi} \right) A_\varphi^I \right] d^3x,$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\mathcal{I}_M}$

$$J_F = \frac{c}{16\pi} \int \partial_i \left(K_{IJ} F^{Jit} A_\varphi^I \sqrt{|g|} \right) d^3x - \frac{1}{4\pi} \int \partial_i \left(K_{IJ} F^{Jit} \sqrt{|g|} \right) A_\varphi^I d^3x. \quad (4.30)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\mathcal{I}_J}$

С помощью модифицированных уравнений Максвелла извлеченные интегралы имеют вид

$$\mathcal{I}_M = -\frac{1}{2\pi} \int \partial_i \left(A_t^I \left(\sqrt{-g} H_{IJ} \tilde{F}^{Jit} \right) - A_\varphi^I \left(\sqrt{-g} H_{IJ} \tilde{F}^{Ji\varphi} \right) \right) d^3x \quad (4.31)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int \left(F_{it}^I \tilde{F}^{Jit} - F_{i\varphi}^I \tilde{F}^{Ji\varphi} \right) H_{IJ} \sqrt{-g} d^3x,$$

$$\mathcal{I}_J = \frac{1}{2\pi} \int \left(\partial_i \left(\sqrt{|g|} A_\varphi^I H_{IJ} \tilde{F}^{Jit} \right) - H_{IJ} \tilde{F}^{Jit} F_{i\varphi}^I \sqrt{-g} \right) d^3x. \quad (4.32)$$

Поскольку выражения $F_{it}^I \tilde{F}^{Jit} - F_{i\varphi}^I \tilde{F}^{Ji\varphi}$, $F_{i\varphi}^I \tilde{F}^{Jit}$ симметризованные по (I, J) тождественно равны нулю, собирая все члены вместе, можно переписать (4.27) и (4.28) в форме полной дивергенции

$$M_F = -\frac{c}{16\pi} \int \partial_i \left[\sqrt{-g} \left(A_t^I G_I^{it} - A_\varphi^I G_I^{i\varphi} \right) \right] d^3x, \quad (4.33)$$

$$J_F = \frac{c}{16\pi} \int \partial_i \left(\sqrt{|g|} A_\varphi^I G_I^{it} \right) d^3x, \quad (4.34)$$

предполагая представление асимптотической массы и углового момента в виде поверхностных интегралов по стержням ²:

$$M_\infty = \sum_n M_n, \quad M_n = \frac{1}{8\pi} \oint_{\Sigma_n} \left(g^{ij} g^{ta} \partial_j g_{ta} + \frac{c}{2} \left(A_t^I G_I^{it} - A_\varphi^I G_I^{i\varphi} \right) \right) d\Sigma_i \quad (4.35)$$

$$J_\infty = \sum_n J_n, \quad J_n = -\frac{1}{16\pi} \oint_{\Sigma_n} \left(g^{ij} g^{ta} \partial_j g_{\varphi a} + c A_\varphi^I G_I^{it} \right) d\Sigma_i, \quad (4.36)$$

где мы также переписали прямые интегралы Комара в явном виде. Таким образом, нам удалось представить объемные вклады в виде интегралов по стержням

²Мы предполагаем, что интегралы по бесконечной сфере равны нулю, иначе их тоже необходимо добавить. Это происходит, если северную и южную струны Мизнера и Дирака расположить несимметрично, добавив подходящие константы к асимптотическим значениям функции вращения ω и азимутальной составляющей четыре-потенциала A_φ .

так же, как это было сделано в [158] для системы Эйнштейна-Максвелла. Эту процедуру можно расценивать как одевание стержня объемными вкладками полей. Таким образом, полученные формулы Смарра для асимптотической массы и углового момента были записаны как суммы вкладов одетого стержня. Заметим, что в общем случае это единственное представление для глобальных M, J , которое можно найти, поскольку разные формы вклада стержня не позволяют записать асимптотические величины напрямую через физические заряды, как это было возможно для одной черной дыры.

С этого момента мы предполагаем стандартную параметризацию Вейля-Папапетру метрики

$$ds^2 = -f(dt - \omega d\varphi)^2 + f^{-1}[e^{2k}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2], \quad (4.37)$$

и представление четырех-потенциала, твист-потенциала и магнитного потенциала как

$$A_\mu^I dx^\mu = c_F(v^I dt + a^I d\varphi), \quad (4.38)$$

$$c_\chi \partial_i \chi = -f^2 \rho^{-1} \epsilon_{ij} \partial_j \omega + \frac{c_F c_G}{2} (u_I \partial_i v^I - v^I \partial_i u_I), \quad (4.39)$$

$$c_G \epsilon^{ijk} \partial_k u_I = f^{-1} e^{2k} \rho G_I^{ij}. \quad (4.40)$$

Стоит обратить внимание, что v^I, u^I, a^I, χ в этой работе отличаются от обозначений в [158] константами c_F, c_G, c_χ , которые будут установлены далее, чтобы соответствовать условным обозначениям литературы для соответствующих моделей. Расчет прямых интегралов Комара по стержням приведен в [138]. Выполняя аналогичные расчеты, масса и угловой момент стержня равны

$$M_n^d = \frac{1}{4} \int_{z_n}^{z_{n+1}} dz \omega \left[c_\chi \partial_z \chi + \frac{c_F c_G}{2} (v^I \partial_z u_I - u_I \partial_z v^I) \right], \quad (4.41)$$

$$J_n^d = -\frac{1}{8} \int_{z_n}^{z_{n+1}} dz \omega \left\{ 2 - \omega \left[\partial_z \chi + \frac{c_F c_G}{2} (v^I \partial_z u_I - u_I \partial_z v^I) \right] \right\} \quad (4.42)$$

Также, стоит обратить внимание на появление электромагнитных потенциалов в выражениях для прямой массы и углового момента стержня из-за использования дуализированного твист-потенциала, т.е. неявного использования уравнений Эйнштейна. Эти члены будут в точности сокращаться полевыми вкладками в тех же величины.

Выше было показано, что помимо постоянства (т.е. независимости от z) угловой скорости стержня $\Omega = 1/\omega$ и обобщенной поверхностной гравитации \varkappa для любого стержня существуют связи (4.19), (4.21), где Φ можно интерпретировать как электрический потенциал стержня. Вместе с постоянством ω соотношения дают также

$$\partial_z a^I = -\omega \partial_z v^I, \quad (4.43)$$

в пределе $\rho \rightarrow 0$. Используя их, а так же уравнение дуализации (2.3), можно переписать вклад поля в массу одетого стержня (4.27) как

$$M_n^F = \frac{-cc_Fc_G}{8} \int_{z_n}^{z_{n+1}} dz (\omega (v^I \partial_z u_I - u_I \partial_z v^I) - \partial_z (a^I u_I)) \quad (4.44)$$

Комбинируя этот результат с прямой массой Комара (4.41), мы получаем массу одетого стержня

$$M_n = \frac{1}{4} \int_{z_n}^{z_{n+1}} dz \left(\omega c_\chi \partial_z \chi + \frac{cc_Fc_G}{2} \partial_z (a^I u_I) \right) \quad (4.45)$$

Может показаться удивительным, что эта формула не отличается от формулы для системы Эйнштейна-Максвелла. Явные скалярные вклады не присутствуют.

Для объемного вклада в угловой момент также применяется уравнение (4.19), а затем уравнение магнитной дуализации (2.3). Последующие преобразования такие же, как и в [158], и приводят к тому же результату

$$J_n^F = \frac{cc_Fc_G}{8} \oint_{\Sigma_n} [\omega \partial (a^I u_I) + \omega^2 u_I \partial v^I] dz \quad (4.46)$$

$$J_n^d = -\frac{1}{8} \int_{z_n}^{z_{n+1}} dz \left\{ -\omega^2 \left[c_\chi \partial_z \chi + \frac{cc_Fc_G}{2} (v^I \partial_z u_I - u_I \partial_z v^I) \right] + 2\omega \right\} \quad (4.47)$$

С учетом прямого момента Комара, для одетого стержня получаем:

$$J_n = \frac{1}{8} \int_{z_n}^{z_{n+1}} dz \partial_z \left[-2\omega z + \omega \frac{cc_Fc_G}{2} a^I u_I + \omega^2 \left(c_\chi \chi - \frac{cc_G}{2} \Phi^I u_I \right) \right] \quad (4.48)$$

это выражение также не содержит скалярные вклады. Теперь рассмотрим Комаровский электрический заряд стержня (4.23). В явном виде заряд задается потоком

$$Q_{In} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_n} \sqrt{|g|} G_I^{t\rho} dz d\varphi. \quad (4.49)$$

Манипулируя индексами и используя уравнение дуализации (2.3)

$$G_I^{t\rho} = \frac{g^{\rho\rho}}{g_{tt}} G_{It\rho} - \frac{g_{t\varphi}}{g_{tt}} G_I^{\varphi i} = e^{-2k} \left[G_{It\rho} + \frac{f\omega}{\rho} \partial_z u \right], \quad (4.50)$$

можно обнаружить, что в пределе $\rho \rightarrow 0$ вклад дает только второе слагаемое, поэтому

$$Q_{In} = \frac{cc_G}{8} \int_{\Sigma_n} \omega \partial_z u_I dz \quad (4.51)$$

После интегрирования по z получаем

$$M_n = \frac{\omega_n}{4} c_\chi \chi \Big|_{z_n}^{z_{n+1}} + \frac{cc_{FCG}}{8} (a^I u_I) \Big|_{z_n}^{z_{n+1}}. \quad (4.52)$$

$$J_n = \frac{\omega_n}{8} \left\{ -2(z_{n+1} - z_n) + \left[\omega_n \left(c_\chi \chi - \frac{cc_G}{2} \Phi_n^I u_I \right) + \frac{cc_{FCG}}{2} a^I u_I \right] \Big|_{z_n}^{z_{n+1}} \right\}. \quad (4.53)$$

$$Q_{In} = \frac{cc_G}{8} \omega_n u_I \Big|_{z_n}^{z_{n+1}}. \quad (4.54)$$

Угловая скорость стержня определяется как предел

$$\Omega_n = \lim_{\rho \rightarrow 0} \omega^{-1}(\rho, z), \quad z_n < z < z_{n+1}. \quad (4.55)$$

Объединяя приведенные выше формулы, получаем формулу Смарра для полной массы и массы стержня

$$M = \sum_n M_n, \quad M_n = \frac{L_n}{2} + 2\Omega_n J_n + \Phi_n Q_n, \quad (4.56)$$

где $L_n = z_{n+1} - z_n$ — длина стержня n (для бесконечных стержней требуется некоторая регуляризация длины).

4.3 Длина и энтропия стержня

Хотя стержень выглядит как одномерный объект, любой стержень с конечной поверхностной гравитацией имеет конечную окружающую цилиндрическую площадь:

$$\mathcal{A}_n = \oint d\varphi \int_{z_n}^{z_{n+1}} \sqrt{|g_{zz} g_{\varphi\varphi}|} dz = 2\pi \int_{z_n}^{z_{n+1}} \sqrt{|e^{2k}| |\omega|} dz. \quad (4.57)$$

Поверхностная гравитация (по определению положительная) в координатах Вейля имеет вид

$$\kappa_n = |\Omega_n| \sqrt{|e^{-2k}|}. \quad (4.58)$$

Таким образом, интеграл (4.57) пропорционален длине стержня:

$$\frac{\kappa_n}{2\pi} \mathcal{A}_n = z_{n+1} - z_n = L_n. \quad (4.59)$$

Это справедливо как для времениподобных стержней (горизонтов), так и для пространственноподобных (дефектов). В первом случае поверхностная гравитация пропорциональна температуре Хокинга, а площадь горизонта пропорциональна энтропии

$$T_H = \kappa_H/2\pi, \quad S_H = \mathcal{A}_H/4, \quad (4.60)$$

поэтому

$$T_H S_H = \frac{\kappa_H}{8\pi} \mathcal{A}_H = \frac{L_H}{4}, \quad (4.61)$$

а формулу Смарра можно переписать как [138]

$$M_H = 2\Omega_H J_H + 2T_H S_H + \Phi_H Q_H. \quad (4.62)$$

Для пространственноподобных стержней такое отождествление не представляется оправданным, поэтому мы предпочитаем оставить формулу Смарра в ее "длинном" виде (4.56).

Для многоцентровых решений это соотношение масс выполняется отдельно для каждой составляющей черной дыры. Как указано в [157; 158], это также верно, когда черные дыры имеют магнитные и/или НУТ-заряды. В нашей интерпретации вклад этих параметров в общую асимптотическую массу исходит от отдельных стержней, представляющих струны Дирака и Мизнера.

4.4 Примеры

4.4.1 Вращающийся ЭМД дион с НУТ

Струну Мизнера можно модифицировать "большими" калибровочными преобразованиями $t \rightarrow t + s\varphi$. В [158] было замечено, что угловой момент J , опре-

деленный в (4.22), вычисленный для сферы с большим радиусом R , расходится как $J \sim sR$. Физический угловой момент конечен только при $s = 0$ (подробности см. в [158; 332]). Поэтому, здесь мы будем рассматривать термодинамику черных дыр с зарядом НУТ, представленную в сгенерированном классе (3.93) без дополнительного параметра s . Обозначим южную ($\theta = \pi$), северную ($\theta = 0$) струны и горизонт индексами $n = -, +, H$ соответственно.

Прежде чем находить заряды, необходимо вычислить функцию e^{2k} для энтропии и температуры. Чтобы вернуться от координат Вейля с три-метрикой (4.3) к три-метрике в виде (3.90), следует применить преобразования координат

$$\rho = \sqrt{\Delta} \sin \theta, \quad z = (r - M) \cos \theta, \quad (4.63)$$

что дает тождество

$$e^{2k}((\partial_r \rho)^2 + (\partial_r z)^2) = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Delta}, \quad (4.64)$$

приводя к выражению для

$$e^{2k} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Delta + \delta_H^2 \sin^2 \theta}. \quad (4.65)$$

Принимая во внимание преобразование (4.63), тождество (4.1) выполняется, что и следовало ожидать.

Тогда, можно непосредственно рассчитать термодинамические величины для горизонта

$$\Omega_H = \frac{Ja^2}{2J^2\delta_H + Wa^2}, \quad \Phi_H = \frac{JV}{a^2}, \quad S_H = \frac{\pi a}{|\Omega_H|}, \quad T_H = \frac{|\Omega_H|\delta_H}{2\pi a}, \quad (4.66a)$$

$$M_H = \frac{1}{4}\omega_H(\chi_- - v_-u_- - \chi_+ + v_+u_+) + \frac{\Phi_H}{2\sqrt{2}}(u_- - u_+), \quad (4.66b)$$

$$Q_H = -\frac{\omega_H}{2\sqrt{2}}(u_- - u_+), \quad J_H = \frac{\omega_n}{2}(-\delta_H + M_H - Q_H\Phi_H), \quad (4.66c)$$

и для струн Мизнера

$$\Omega_{\pm} = \mp \frac{1}{2N}, \quad \Phi_{\pm} = \pm P, \quad S_{\pm} = \frac{\pi L_{\pm}}{2|\Omega_{\pm}|}, \quad T_H = \frac{|\Omega_{\pm}|}{2\pi}, \quad (4.67a)$$

$$M_{\pm} = \pm \frac{1}{4}\omega_{\pm}(\chi_{\pm} - v_{\pm}u_{\pm}) \pm \frac{\Phi_{\pm}}{2\sqrt{2}}u_{\pm}, \quad (4.67b)$$

$$Q_{\pm} = \mp \frac{\omega_{\pm}}{2\sqrt{2}}u_{\pm}, \quad J_{\pm} = \frac{\omega_{\pm}}{2} \left(-\frac{L_{\pm}}{2} + M_{\pm} - Q_{\pm}\Phi_{\pm} \right), \quad (4.67c)$$

где L_{\pm} – расходящаяся длина полубесконечных стержней, и мы учли, что изолированными точками являются $z_n = \pm\delta_H$. Потенциалы χ , v и u с индексами $+$ и $-$ берутся при $r = r_H$, $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ соответственно. Как мы и предполагали, угловая скорость и температура вдоль каждого стержня постоянны. В выражения для площади A_{\pm} и углового момента J_{\pm} входит длина расходящегося стержня L_{\pm} . Тем не менее, эти члены сокращаются друг с другом в окончательной формуле Смарра (4.56), что дает возможность ввести “приведенный” угловой момент

$$\tilde{J}_{\pm} = J_{\pm} + \omega_{\pm} T_{\pm} S_{\pm} = \frac{\omega_{\pm}}{2} (M_{\pm} - Q_{\pm} \Phi_{\pm}). \quad (4.68)$$

Формула Смарра с приведенным угловым моментом для дионов с НУТ имеет вид:

$$M = 2T_H S_H + 2\Omega_H J_H + \Phi_H Q_H + 2\Omega_+ \tilde{J}_+ + \Phi_+ Q_+ + 2\Omega_- \tilde{J}_- + \Phi_- Q_-, \quad (4.69)$$

где полная масса, полный угловой момент и полный заряд подчиняются законам сохранения

$$M = M_H + M_+ + M_-, \quad J = J_H + \tilde{J}_+ + \tilde{J}_-, \quad Q = Q_H + Q_+ + Q_-. \quad (4.70)$$

Хотя формула Смарра (4.69) тождественно верна по своей конструкции, проверим ее явно. Поскольку выражения очень длинные и параметры не являются независимыми, были проведены численные проверки для набора случайных точек в параметрическом пространстве $\mu = 1$, e , α , β с D как функцией $D(e, \mu, 2\alpha + \beta)$, которая определена в (2.40). Ошибка не превышала машинной точности (10^{-15}), что свидетельствует о правильности формулы.

Кроме того, можно предположить существование первого закона термодинамики в дифференциальной форме

$$dM = T_H dS_H + \Omega_H dJ_H + \Phi_H dQ_H + \Omega_+ d\tilde{J}_+ + \Phi_+ dQ_+ + \Omega_- d\tilde{J}_- + \Phi_- dQ_-. \quad (4.71)$$

Аналогично, мы проверили его корректность численно, подставив дилатонный дифференциал заряда dD из дифференцирования выражения (2.18). Опять же, численные проверки подтверждают правильность закона (4.71) с ошибкой, не превышающей машинной точности.

Как указано в [158], если рассматривать предел $N \rightarrow 0$, член $Q_{\pm} \Phi_{\pm}$ исчезает, но угловая скорость Ω_{\pm} расходится. Более внимательное рассмотрение

предела приводит к слагаемому

$$2\Omega_+ J_+ + 2\Omega_- J_- = \frac{P}{2\sqrt{2}} (u_+ + u_-), \quad (4.72)$$

который можно трактовать как $P\Psi_H$, где Ψ_H – магнитный потенциал горизонта

$$M = 2T_H S_H + 2\Omega_H J + \Phi_H Q + \Psi_H P, \quad dM = T_H dS_H + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ + \Psi_H dP. \quad (4.73)$$

Уравнение (4.73) воспроизводит результат, полученный в [22] для дионов без заряда НУТ.

4.4.2 Вращающийся ЭМДА дион с НУТ

Для стационарных аксиально симметричных решений, слагаемые с аксионом и дилатоном не вносят вклад в сектор $t - \varphi$ уравнений Эйнштейна, и дилатон входит в них лишь через дилатонную экспоненты $e^{-2\phi}$ перед тензором энергии-импульса формы Максвелла, что является важным для вывода термодинамики. Формулы для массы и термодинамики черных дыр в ЭМДА активно обсуждались во многих работах, таких как [333; 334], хотя и не в полной общности (для более полного списка соответствующей литературы, см. [334]).

Метрику диона ЭМДА с параметром НУТ, построенного в 1994 г. [299], можно представить в керровской форме:

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} (dt - \omega d\varphi)^2 + \Sigma \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 + \frac{\Delta \sin^2 \theta}{\Delta - a^2 \sin^2 \theta} d\varphi^2 \right), \quad (4.74)$$

с модифицированными функциями:

$$\begin{aligned} \Delta &= (r - r_-)(r - 2M) + a^2 - (N - N_-)^2, \\ \Sigma &= r(r - r_-) + (a \cos \theta + N)^2 - N_-^2, \\ \omega &= \frac{-2w}{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}, \quad w = N\Delta \cos \theta + a \sin^2 \theta (M(r - r_-) + N(N - N_-)). \end{aligned}$$

Два новых параметра r_- , N_- зависят от массы M , параметра НУТ N , электрического и магнитного зарядов Q, P следующим образом:

$$r_- = \frac{M(Q^2 + P^2)}{M^2 + N^2}, \quad N_- = \frac{N(Q^2 + P^2)}{2(M^2 + N^2)}, \quad (4.75)$$

и a – параметр вращения. Электрический и магнитный потенциалы и комплексный скаляр аксидилатона (1.7) зависят также от асимптотических значений дилатона и аксиона $\zeta_\infty = \kappa_\infty + ie^{-2\phi_\infty}$:

$$v = -\frac{\sqrt{2}e^{\phi_\infty}}{\Sigma} \operatorname{Re} [\mathcal{Q}(r - r_- + i\delta)], \quad u = -\frac{\sqrt{2}e^{\phi_\infty}}{\Sigma} \operatorname{Re} [\mathcal{Q}\zeta_\infty(r - r_- + i\delta)]$$

$$\zeta = \frac{\zeta_\infty R + \mathcal{D}\zeta_\infty^*}{R + \mathcal{D}}, \quad R = r - \frac{\mathcal{M}^* r_-}{2M} + i\delta, \quad \delta = a \cos \theta + N - N_-,$$

где вводятся комплексные гравитационные, электромагнитные и аксидилатонные заряды

$$\mathcal{M} = M + iN, \quad \mathcal{Q} = Q + iP, \quad \mathcal{D} \equiv D + iA = -\frac{\mathcal{Q}^{*2}}{2\mathcal{M}}. \quad (4.76)$$

Явные выражения для полей аксиона и дилатона имеют вид:

$$\kappa = \kappa_\infty - e^{-2\phi_\infty} \frac{2\operatorname{Im}(R\mathcal{D}^*)}{|R + \mathcal{D}|^2}, \quad e^{-2(\phi - \phi_\infty)} = \frac{\Sigma}{|R + \mathcal{D}|^2}, \quad (4.77)$$

где $|R|^2 - |\mathcal{D}|^2 = \Sigma$. Асимптотическое значение дилатона перенормирует электрический и магнитный заряды, а аксион определяет их смещение. Действительно, при $r \rightarrow \infty$ электрические и магнитные потенциалы выглядят следующим образом:

$$v \sim -\frac{\sqrt{2}Qe^{\phi_\infty}}{r}, \quad u \sim \frac{\sqrt{2}(Pe^{-\phi_\infty} - \kappa_\infty Qe^{\phi_\infty})}{r}. \quad (4.78)$$

Асимптотики аксионов и дилатонов $r \rightarrow \infty$ имеют следующий вид:

$$\zeta \sim \zeta_\infty - 2ie^{-2\phi_\infty} \frac{\mathcal{D}}{r}, \quad \kappa \sim \kappa_\infty + 2e^{-2\phi_\infty} \frac{A}{r}, \quad \phi \sim \phi_\infty + \frac{D}{r}. \quad (4.79)$$

Комбинируя электрический и магнитный потенциалы, комплексный потенциал Ψ имеет вид

$$\Psi = \frac{\sqrt{2}e^{\phi_\infty}}{\Sigma} [(\zeta - \kappa_\infty)\operatorname{Re} [\mathcal{Q}(r - r_- + i\delta)] + e^{-2\phi_\infty}\operatorname{Im} [\mathcal{Q}(r - r_- + i\delta)]]. \quad (4.80)$$

Применяя обратные уравнения дуализации (2.3), находим азимутальную составляющую четырехпотенциала Максвелла. Для один-формы четыре-потенциала $A = A_\mu dx^\mu$ получаем:

$$A_\mu dx^\mu = \frac{e^{\phi_\infty}}{\Sigma} (-Q(r - r_-) + P\delta) (dt + (2Ny - a(1 - y^2)) d\varphi) - e^{\phi_\infty} P y d\varphi. \quad (4.81)$$

Его норма расходится на струнах Мизнера $\cos \theta = \pm 1$:

$$A_\mu A^\mu \Big|_{\cos \theta \rightarrow \pm 1} \sim \frac{-e^{2\phi_\infty} P^2}{\Sigma \sin^2 \theta}, \quad (4.82)$$

таким образом, струны Мизнера также являются местами струн Дирака. Уравнение гравитационной дуализации (2.4) дает метрический твист-потенциал

$$\chi = 2 \frac{M\delta - N(r - r_-)}{\Sigma}. \quad (4.83)$$

Граница эргосферы определяется выражением

$$r_E = M + r_-/2 + \sqrt{|\mathcal{M}|^2 (1 - r_-/2M)^2 - a^2 \cos^2 \theta}, \quad (4.84)$$

а радиус горизонта событий (внешний корень $\Delta = 0$) равен

$$r_H = M + r_-/2 + \sqrt{|\mathcal{M}|^2 (1 - r_-/2M)^2 - a^2}, \quad (4.85)$$

так что два-поверхность горизонта касается эргосферы на полярной оси.

Преобразование в координаты Вейля ρ, z задается выражением

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \Delta \sin^2 \theta, \\ z &= (\Delta'/2) \cos \theta = (r - M - r_-/2) \cos \theta, \end{aligned}$$

Решая уравнение $\rho = 0$, находим, что система состоит из трех стержней:

- l_+ : северная струна Мизнера $r \in (r_H, \infty)$, $\cos \theta = 1$;
- l_H стержень горизонта $r = r_H$, $\theta \in [0, \pi]$;
- l_- южная струна Мизнера $r \in (r_H, \infty)$, $\cos \theta = -1$.

Нормированные векторы направлений задаются формулами (4.12), (4.14) через соответствующие величины поверхностной гравитации и угловые скорости.

Также полезно представить решение в терминах вытянутых сфероидальных координат x, y , определяемых как

$$r = \sigma x + M + r_-/2, \quad \cos \theta = y, \quad (4.86)$$

$$\sigma^2 = |\mathcal{M}|^2 - |\mathcal{D}|^2 - |\mathcal{Q}|^2 - a^2. \quad (4.87)$$

Можно получить:

$$ds^2 = -f (dt - \omega d\varphi)^2 + f^{-1} \left[\sigma^2 e^{2k} (x^2 - y^2) \left(\frac{dx^2}{x^2 - 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right) + \rho^2 d\varphi^2 \right], \quad (4.88)$$

где метрические функции задаются как

$$\begin{aligned}\Sigma &= (\sigma x + M)^2 - |\mathcal{D}|^2 + (ay + N)^2, \\ \Sigma f &= \sigma^2(x^2 - 1) - a^2(1 - y^2), \quad e^{2k} = \frac{f\Sigma}{\sigma^2(x^2 - y^2)}, \\ f\Sigma\omega &= -2 [N\sigma^2(x^2 - 1)y + a(1 - y^2) (M\sigma x + |\mathcal{M}|^2 - |\mathcal{Q}|^2/2)].\end{aligned}$$

Южный сегмент струны Мизнера равен $x > 1, y = -1$, стержень горизонта равен $x = 1, -1 \leq y \leq 1$, а струна Северная Мизнера равна $x > 1, y = 1$. Как и следовало ожидать, обратная функция вращения $\Omega = 1/\omega$ на стержнях постоянна на них и представляет их угловые скорости. Легко найти

$$\Omega_H = \frac{2a}{\nu^2}, \quad \Omega_{\pm} = \mp \frac{1}{2N}, \quad (4.89)$$

где был введен новый параметр

$$\nu^2 = 2M\sigma + 2|\mathcal{M}|^2 - |\mathcal{Q}|^2, \quad (4.90)$$

такие, что граничные значения $\Sigma(x, y)$ записываются в виде

$$\Sigma_{\pm} \equiv \Sigma(1, \pm 1) = \nu^2 \pm 2aN. \quad (4.91)$$

Остальные составляющие массовых формул зависят от значений электрического и магнитного потенциалов v_{\pm} и u_{\pm} стержней дефектов l_{\pm} . Магнитный потенциал в сфероидальных координатах равен

$$u = \frac{\sqrt{2}}{\Sigma} \left\{ e^{\phi_{\infty}} \kappa_{\infty} [-Q(\sigma x + M - r_-/2) + P\delta] + e^{-\phi_{\infty}} [P(\sigma x + M - r_-/2) + Q\delta] \right\}. \quad (4.92)$$

С его помощью получаем:

$$v_{\pm} = -\frac{\sqrt{2}e^{\phi_{\infty}}}{\nu^2 \pm 2aN} \operatorname{Re} \left[\mathcal{Q}(\sigma \pm ia + \mathcal{M}(1 - |\mathcal{Q}|^2/2|\mathcal{M}|^2)) \right], \quad (4.93)$$

$$u_{\pm} = -\frac{\sqrt{2}e^{\phi_{\infty}}}{\nu^2 \pm 2aN} \operatorname{Re} \left[\mathcal{Q}\zeta(\sigma \pm ia + \mathcal{M}(1 - |\mathcal{Q}|^2/2|\mathcal{M}|^2)) \right]. \quad (4.94)$$

Для поверхностной гравитации удобно использовать уравнение (4.58):

$$\kappa_H = \frac{\sigma}{\nu^2}, \quad \kappa_{\pm} = \mp \frac{1}{2N}. \quad (4.95)$$

Угловые скорости и поверхностная гравитация струн Мизнера аналогичны случаю Керра-Ньюмана-НУТ [158]. Но в массовую формулу они входят по-разному, поэтому не следует рассматривать это совпадение как вопрос интерпретации.

Электрические заряды стержней равны (4.51). Гауссовские заряды горизонта и струн находятся как:

$$Q_H = \frac{\omega_H}{2\sqrt{2}}(u_+ - u_-) = \frac{e^{-\phi_\infty} \nu^2 (2\sigma N^2 + M\nu^2) \operatorname{Im} [\zeta_\infty e^{2\phi_\infty} \mathcal{M}\mathcal{Q}]}{|\mathcal{M}|^2 (\nu^4 - 4a^2 N^2)}, \quad (4.96)$$

$$Q_\pm = \frac{Nu_\pm}{\sqrt{2}}. \quad (4.97)$$

Объединяя их вместе, получаем

$$Q_H + Q_+ + Q_- = Qe^{-\phi_\infty} + P\kappa_\infty e^{\phi_\infty}. \quad (4.98)$$

Это совпадает с истинным асимптотическим зарядом конфигурации с учетом смешивания аксионов и дилатонной перенормировки.

Электрический потенциал на горизонте и на струнах равен

$$\Phi_H = e^{\phi_\infty} \frac{\nu^2(QM - NP) + 2\sigma N(QN + MP)}{2\nu^2 |\mathcal{M}|^2}, \quad \Phi_\pm = -e^{\phi_\infty} \frac{P}{2N}. \quad (4.99)$$

Массы стержней можно выразить в виде (4.52), используя соответствующие значения твист-потенциала (4.83). Получим:

$$M_H = \nu^2 \cdot \frac{M\nu^2 + 2\sigma N^2}{\nu^4 - 4a^2 N^2} + \frac{1}{4}(2N(v_+ u_+ + v_- u_-) - \sqrt{2}e^{\phi_\infty} P(u_+ + u_-)), \quad (4.100)$$

$$M_\pm = N \frac{-N\sigma \pm Ma}{\nu^2 \pm 2aN} + \frac{1}{4}(2Nv_\pm - \sqrt{2}Pe^{\phi_\infty})u_\pm, \quad (4.101)$$

где граничные значения электрического и магнитного потенциалов задаются как (4.93), (4.94). Можно выделить вклад дираковской струны в массы дефектов как части, не равные нулю при $N = 0$. Другие слагаемые связаны со струнами Мизнера. Прямая подстановка (4.93-4.94) приводит к длинным выражениям, но можно показать, что вклады Максвелла в общую массу сокращаются, а оставшаяся часть нетривиально приводит к тождеству

$$M_\infty = M_H + M_+ + M_- = M.$$

Теперь обратимся к балансу углового момента, используя выражение импульса стержня (4.53). Длина стержня горизонта $L_H = 2\sigma$. Другие длины стержней расходятся. Как было показано в [158], чтобы решить эту проблему, можно регуляризовать угловой момент следующим образом:

$$\tilde{J}_\pm = J_\pm + \frac{\omega_\pm L_\pm}{4}. \quad (4.102)$$

Теперь, получим угловые моменты трех стержней как

$$J_H = \frac{\omega_H}{2} (-\sigma + M_H - Q_H \Phi_H), \quad \tilde{J}_{\pm} = N^2 \left(\frac{\pm N\sigma - Ma}{\nu^2 \pm 2aN} \mp \frac{v_{\pm} u_{\pm}}{2} \right). \quad (4.103)$$

Мы явно проверили, что следующее выражение действительно выполняется

$$\tilde{J}_{\infty} = J_H + \tilde{J}_{+} + \tilde{J}_{-} = aM.$$

Таким образом, мы нашли массу горизонта, момент импульса и заряд в терминах глобальных параметров и проверили их суммарный баланс.

Глава 5. БПС-решения

5.1 Ложная суперсимметрия в ЭМД

Модель ЭМД с произвольной константой связи α допускает неравенство типа Богомольного [335]. Решение насыщает неравенство БПС, если существует хотя бы один спинор, удовлетворяющий спинорным уравнениям гравитино и дилатино Киллинга. Эти уравнения связаны с суперсимметрией, и можно надеяться включить модель ЭМД в суперсимметричную теорию для произвольных значений α . Но зава показал, что такие попытки слишком оптимистичны, если только α не равно 0, $\sqrt{3}$ или если решение не чисто электрическое или магнитное $F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu} = 0$. Например, модель ЭМД с $\alpha = 1$ является непротиворечивым усечением эффективной теории гетеротической струны, только если $F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu} = 0$. Для решений без заряда НУТ неравенство БПС сводится к равенству

$$(1 + \alpha^2)M^2 = Q^2 + P^2, \quad (5.1)$$

и выполняется по-force условие Шерка

$$M^2 + \alpha^2 D^2 - Q^2 - P^2 = 0 \quad (5.2)$$

(в некоторых источниках для скалярного заряда используется $\Sigma = \alpha D$). На многих примерах показано (см. [298; 336–339]), что такие равенства можно обобщить на случаи с зарядом NUT, если записать $\sqrt{M^2 + N^2}$ вместо M . Это было показано, например, в [305] для ряда сигма-моделей, полученных из суперсимметричных теорий. В этой главе мы дадим строгое доказательство этого обобщения и найдем подкласс среди сгенерированных решений, который насыщает БПС-равенства.

Уравнения гравитино и дилатино для ЭМД с произвольной константой α записываются в виде

$$\nabla_\mu \epsilon + \frac{ie^{-\alpha\phi}}{4\sqrt{1+\alpha^2}} \gamma^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \gamma_\mu \epsilon = 0, \quad (5.3)$$

$$\left(-\gamma^\mu \nabla_\mu \phi + \frac{i\alpha e^{-\alpha\phi}}{2\sqrt{1+\alpha^2}} \gamma^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right) \epsilon = 0, \quad (5.4)$$

где ϵ – коммутирующий 4-компонентный спинор Дирака. Если решение стационарное, естественно рассматривать статический спинор. Таким образом, t -компонента (5.3) и уравнение (5.4) – алгебраические однородные системы линейных уравнений. Они имеют нетривиальные решения только в том случае, если система вырождена. Условия вырождения представляют собой два уравнения, наложенные на бозонные поля $(g_{\mu\nu}, A_\mu, \phi)$. Разлагая их по асимптотике, можно будет найти необходимые равенства, налагаемые на заряды, в том числе и НУТ.

В данном разделе мы используем γ -матрицы $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$, $\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$. В частности, конкретный вид γ -матриц, который мы используем, записывается следующим образом

$$\gamma^0 = i \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = i \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 & \sigma^k \\ -\sigma^k & \mathbf{0}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = - \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & \mathbf{0}_2 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Также, мы сокращаем тензорные свертки вида $A_{\alpha\beta\gamma\dots}B^{\alpha\beta\gamma\dots}$ как (AB) , где тензор и свертка могут быть как трехмерными, так и четырехмерными. В частности, если тензор сворачивается сам с собой, мы обозначаем его как A^2 или $(A_{\alpha\beta\gamma\dots})^2$.

5.1.1 Вырожденность дилатинного уравнения

Умножив (5.4) на $\alpha e^{\alpha\phi}$, можно записать уравнение в виде $S\epsilon = 0$, где

$$S = \gamma^\mu a_\mu - i\gamma^{\rho\sigma} b_{\rho\sigma}, \quad a_\mu = \nabla_\mu e^{\alpha\phi}, \quad b_{\rho\sigma} = \frac{\alpha^2}{2\sqrt{1+\alpha^2}} F_{\rho\sigma}. \quad (5.6)$$

Система вырождена, если $\det S = 0$. Проще найти вырождение S^2 вместо S (что одно и то же в силу того, что $\det S^2 = (\det S)^2$)

$$S^2 = a^2 + 4\gamma^5\gamma^\beta c_\beta + 2b^2 + 2i\gamma^5(b \star b), \quad (5.7)$$

где мы ввели новый вектор $c^\beta = (\star b)^\beta a_\mu$. Используя представление γ -матриц выше, оператор S^2 имеет вид

$$S^2 = \begin{pmatrix} (a^2 + 2b^2)\mathbb{1}_2 + 4ic_k\sigma^k & (-2i(b \star b) + i4c_0)\mathbb{1}_2 \\ (-2i(b \star b) - i4c_0)\mathbb{1}_2 & (a^2 + 2b^2)\mathbb{1}_2 - 4ic_k\sigma^k \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

где индексы $k = 1, 2, 3$ – плоские, σ^k – матрицы Паули.

Мы можем вычислить определитель блочной 4×4 матрицы M_4 по ассоциированной 2×2 матрице m_2 из тождества

$$\det M_4 = \det m_2, \quad m_2 = AD - BD^{-1}CD, \quad M_4 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Если учесть, что блоки B и C являются единичными матрицами для S^2 с точностью до мультипликативной константы и коммутируют с любой другой матрицей, то формулу можно упростить $m_2 = AD - BC$. Ассоциированная 2×2 матрица s^2 , соответствующая S^2 , имеет вид

$$s^2 = [(a^2 - 2b^2)^2 + 4(b \star b)^2 + 16(ba)^2] \mathbf{1}_2. \quad (5.10)$$

Возвращая поля Максвелла и дилатона, оператор является вырожденным, если

$$(2(1 + \alpha^2)(\nabla_\mu e^{\alpha\phi})^2 - \alpha^4 F^2)^2 + \alpha^8 (F \star F)^2 + 16\alpha^4(1 + \alpha^2) (F^{\nu\mu} \nabla_\mu e^{\alpha\phi})^2 = 0. \quad (5.11)$$

5.1.2 Вырожденность t -компоненты гравитинного уравнения

Рассмотрим алгебраическую часть уравнения гравитино (5.3) с точностью до мультипликативного множителя $1/4$ и свернем ее с произвольным вектором v^α

$$T_v = \gamma_\mu \gamma_\nu \left(v^\alpha \omega_\alpha^{\mu\nu} + \frac{ie^{-\alpha\phi}}{\sqrt{1 + \alpha^2}} F^{\mu\nu} v^\alpha \gamma_\alpha \right). \quad (5.12)$$

Определитель оператора T_v имеет вид

$$\det T_v = (C^2) (C^{*2}) + (U^2) (U^{*2}) + 8(\mathcal{V}\mathcal{V}^*), \quad (5.13)$$

где

$$C^{\mu\nu} = c^{\mu\nu} + i(\star c)^{\mu\nu}, \quad c^{\mu\nu} = v^\alpha \omega_\alpha^{\mu\nu}, \quad (5.14)$$

$$U^\mu = \frac{2e^{-\alpha\phi}}{\sqrt{1 + \alpha^2}} (F^{\mu\nu} + i(\star F)^{\mu\nu}) v_\nu, \quad \mathcal{V}^\mu = \mathcal{U}_\nu C^{\nu\mu}. \quad (5.15)$$

Хотя это тождество можно найти с помощью ассоциированной матрицы 2×2 и уравнения (5.9), его правильность легче проверить с помощью системы символьной алгебры. Компонента t уравнения (5.3) является вырожденной, если

$\det T_v = 0$ для $v^\mu = \delta_t^\mu$. Стоит обратить внимание, что третье слагаемое в (5.13) может быть как положительным, так и отрицательным.

5.1.3 Ограничение на заряды

Теперь оценим условия (5.11), (5.13) для стационарных решений с анзацем (2.1), (2.7a) и $v^\mu = \delta_t^\mu$. Тогда, вводя векторы $\partial_i x = \mathbf{x}$ для $x = f, u, v, \phi$ и $\boldsymbol{\tau} = f^2 h_{il} \epsilon^{ljk} \omega_{j,k}$ эти условия сводятся к следующему виду

$$(\mathbf{D}^2 + (\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}^*))^2 - 4(\mathbf{D}\boldsymbol{\Phi})(\mathbf{D}\boldsymbol{\Phi}^*) + [\boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\Phi}^*]^2 = 0, \quad (5.16)$$

$$\mathcal{E}^2 \mathcal{E}^{*2} + 2\kappa \left[(\mathcal{E}\mathcal{E}^*)(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}^*) - (\mathcal{E}\boldsymbol{\Phi})(\mathcal{E}^*\boldsymbol{\Phi}^*) - (\mathcal{E}^*\boldsymbol{\Phi})(\mathcal{E}\boldsymbol{\Phi}^*) \right] + \kappa^2 \boldsymbol{\Phi}^2 \boldsymbol{\Phi}^{*2} = 0, \quad (5.17)$$

где мы ввели комплексные векторы

$$\mathcal{E} = \mathbf{f} + i\boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\Phi} = e^{-\alpha\phi} \mathbf{v} + ie^{\alpha\phi} \mathbf{u}, \quad \mathbf{D} = \frac{\sqrt{2f(1+\alpha^2)}}{\alpha} \boldsymbol{\phi}, \quad (5.18)$$

скалярную функцию

$$\kappa = \frac{2fe^{-2\alpha\phi}}{1+\alpha^2}, \quad (5.19)$$

и $(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}^*) = h^{ij}\Phi_i\Phi_j^*$, $[\boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\Phi}^*] = \epsilon^{ijk}\Phi_j\Phi_k^*$ – скалярное и векторное произведения. Комплексные векторы \mathcal{E} , $\boldsymbol{\Phi}$ схожи с потенциалами Эрнста, но в строгом смысле они различаются. Пусть потенциалы u, v, ϕ, f имеют асимптотику (2.16b), 3-метрика асимптотически плоская

$$dl^2 \approx dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (5.20)$$

и один-форма ω имеет вид

$$\omega \approx -2N \cos\theta d\varphi, \quad (5.21)$$

Высшие поправки 3-метрики, ω и потенциалов не дают вклада в главное слагаемое (включая слагаемые вращательного происхождения). Тогда единственными ненулевыми компонентами являются

$$D_r \approx -\sqrt{2(1+\alpha^2)}D/r^2, \quad \mathcal{E}_r \approx 2(M - iN)/r^2, \quad \boldsymbol{\Phi}_r \approx -\sqrt{2}(Q + iP)/r^2. \quad (5.22)$$

Подставляя эти асимптотические выражения в (5.16), (5.17) и оставляя только ведущие члены, можно получить ограничения на заряды

$$(1 + \alpha^2)D^2 = Q^2 + P^2, \quad (5.23a)$$

$$(1 + \alpha^2)(M^2 + N^2) = Q^2 + P^2. \quad (5.23b)$$

Из (5.23) следует, что условие

$$M^2 + N^2 + xD^2 - \frac{1+x}{1+\alpha^2}(P^2 + Q^2) = 0. \quad (5.24)$$

верно для любого x . В частности, для $x = \alpha^2$ мы получаем условие отсутствия сил Шерка.

5.1.4 Примеры

Среди сгенерированных решений ограничениям (5.23) удовлетворяют решения, которые имеют зарядовую матрицу с $\text{rank}\mathfrak{A} = 1$ (см. раздел 2.2.2 и [69] для подробностей). Заряды, соответствующие этим ограничениям, приводят к неопределенным выражениям в (3.94). С одной стороны, можно найти явные выражения в пределе $e = 2\mu + \epsilon_e$, $D = D_k$, $\beta = -2\alpha + \pi/2 + \epsilon_\beta$ для $k = 0, 1$ или $\beta = -2\alpha + 3\pi/2 + \epsilon_\beta$ для $k = -1, 0$ и $\epsilon_e, \epsilon_\beta$ являются независимыми бесконечно малыми параметрами. Связь между ϵ_e и ϵ_β определяет неопределенные пределы, которые появляются в решении (3.93). Такие решения будут иметь 4 независимых параметра μ, α, a и некоторую функцию $f(\epsilon_\beta, \epsilon_e)$. С другой стороны, Нозава классифицировал все решения БПС [329] в модели ЭМД. Интересный для нас класс, найденный Нозавой, имеет вид

$$ds^2 = -f(dt - \omega)^2 + f^{-1}h_{ij}dx^i dx^j, \quad (5.25a)$$

$$f = \frac{1}{\sqrt{H(\cosh^2 \sigma - H \sinh^2 \sigma)}}, \quad \partial_{[i}\omega_{j]} = -\frac{\sinh \sigma}{2}\epsilon_{ijk}\partial^k H, \quad (5.25b)$$

$$\phi = \frac{\sqrt{3}}{4} \ln \frac{\cosh^2 \sigma - H \sinh^2 \sigma}{H}, \quad \mathcal{A} = \frac{\cosh \sigma}{2H}(dt - \omega), \quad (5.25c)$$

где h_{ij} – плоская 3-метрика, σ – константа, а H – гармоническая функция относительно 3-метрики, стремящаяся к 1 на бесконечности $r \rightarrow \infty$. Выберем базовую 3-метрику в виде (3.90) с $\Delta = r^2 + a^2$ (т.е. с условием Шерка,

наложенным после преобразования $r \rightarrow r + M$). Такая 3-метрика представляет собой плоское трехмерное многообразие, параметризованное системой координат, тесно связанной с вытянутыми/сплюснутыми сфероидальными координатами. Можно найти следующую гармоническую функцию относительно этой трехмерной метрики

$$H = 1 + \frac{2br - 2c \cos \theta}{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}, \quad (5.26)$$

где b и c – некоторые константы. После калибровочных преобразований решение (5.25) будет записываться как

$$f = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{AB}}, \quad \omega = \frac{2 \sinh \sigma}{\Delta - a^2 \sin^2 \theta} (-b\Delta \cos \theta - cr \sin^2 \theta), \quad (5.27a)$$

$$\mathcal{A} = \frac{C}{B}(dt - \omega d\varphi) + \omega_5 d\varphi, \quad e^{2\alpha\phi/3} = \sqrt{\frac{A}{B}}, \quad (5.27b)$$

где

$$A = r^2 - 2b \sinh^2 \sigma r + 2c \sinh^2 \sigma \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta, \quad (5.28a)$$

$$B = r^2 + 2br - 2c \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta,$$

$$C = -(br - c \cos \theta) \cosh \sigma, \quad \omega_5 = -\frac{1}{2}\omega \cosh \sigma. \quad (5.28b)$$

Как и ожидалось, решение имеет четыре параметра: a , σ , b и c . Физические заряды можно выразить как

$$M = \frac{b}{2}(1 - \sinh^2 \sigma), \quad N = -b \sinh \sigma, \quad J = c \sinh \sigma, \quad (5.29)$$

$$P = b \cosh \sigma \sinh \sigma, \quad Q = -b \cosh \sigma, \quad D = -\frac{b}{2} \cosh^2 \sigma.$$

Заряды (5.29) удовлетворяют ограничениям (5.23), что подтверждает корректность полученных формул. Суперсимметричные решения (5.27) совпадают с решением (3.93) после взятия соответствующих пределов. Таким образом, они содержатся в сгенерированном классе с указанным ограничением.

В силу электромагнитной дуальности (2.10) существует дуальное БПС-решение, найденное Нозавой

$$\phi \rightarrow \tilde{\phi} = -\phi, \quad \omega \rightarrow \tilde{\omega} = -\omega, \quad (5.30a)$$

$$\mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}} = -\frac{\coth \sigma (\sinh^2 \sigma (1 - H) dt + \tilde{\omega})}{2(\cosh \sigma^2 - \sinh^2 \sigma H)} = \frac{\tilde{C}}{A}(dt - \tilde{\omega} d\varphi) + \tilde{\omega}_5 d\varphi, \quad (5.30b)$$

где

$$\tilde{C} = -C \sinh \sigma, \quad \tilde{\omega}_5 = -\frac{\omega_5}{\sinh \sigma}. \quad (5.31)$$

Это решение также удовлетворяет ограничениям (5.23).

Как было показано в Гл. 3.2, суперсимметричные вращающиеся решения всегда сингулярны. При $a^2 > 0$ эти решения не имеют горизонта, но сингулярность всегда присутствует хотя бы в экваториальной плоскости. При $a^2 < 0$ эти решения всегда сингулярны по крайней мере на южном и северном полюсах, что легко найти из выражений (5.28a) и радиуса горизонта $r_H = |a|$. Суперсимметричные решения с $a^2 = 0$ можно рассматривать как представителей подкласса $AdS_2 \times S^2$. Асимптотика $AdS_2 \times S^2$ соответствует $r = 0$. С другой стороны, всегда существует хотя бы один корень A или B больше нуля ($r_{A,B} > 0$) из (5.28a) при $a = 0$ для любого θ . Таким образом, такие решения фактически не интерполируются между $AdS_2 \times S^2$ и Минковским из-за наличия сингулярностей, полностью разделяющих две асимптотики.

5.2 БПС-браны

То, что сингулярности пространства-времени могут быть совместимы с суперсимметрией, известно на примере доменных стенок [340]. Поэтому, имеет смысл проверить возможную суперсимметрию наших сингулярных бран из первых принципов. Видно, что подсемейство решений S_E содержит известное семейство БПС решений для любых d, s, α , представляющих p -браны типа IIА/IIВ суперструнных теорий [341–343]. Однако может возникнуть вопрос, содержит ли общее решение S_G другие суперсимметричные решения.

Мы будем изучать суперсимметрию в случае NS5-браны ($d = 6, s = 2, \alpha = 1$) в супергравитации типа IIА. Условия суперсимметрии имеют простейший вид в струнной системе координат $G_{MN}^{(s)} = e^{-\phi/2} G_{MN}$

$$ds_{(s)}^2 = f_1^{-\sigma(U-1)/2} (-f_1^\sigma dt^2 + dy_1^2 + \dots + dy_5^2) + f_2^{-1} f_1^{-(1+\sigma U)/2} (dr^2 + r^2 f_1 d\Omega_3^2), \quad (5.32)$$

$$\phi = -\sigma(U-1) \ln f_1 - \frac{1}{2} \ln f_2.$$

Выберем метрику 3-сферы следующим образом

$$d\Omega_3^2 = d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad \sqrt{\Omega_{(3)}} = \sin^2 \psi \sin \theta, \quad (5.33)$$

поэтому магнитная 3-форма из сектора Навье-Шварца H_{MNP} имеет вид

$$H_{\psi\theta\varphi} = p \sin^2 \psi \sin \theta, \quad p = \frac{c}{1-c^2} \frac{2\kappa_D^2 M_0 U}{3\pi^2}, \quad (5.34)$$

где для удобства мы ввели константу p .

Вариация по гравитино и дилатино для супергравитации типа IIA с усеченными полями Рамона-Рамона имеют вид [344; 345]

$$\delta\psi_M = \left(\nabla_M - \frac{1}{8} H_{MNP} \Gamma^{NP} \Gamma_{11} \right) \epsilon, \quad (5.35a)$$

$$\delta\lambda = -\frac{1}{3} \left(\Gamma^\mu (\partial_\mu \phi) \Gamma_{11} - \frac{1}{12} H_{MNP} \Gamma^{MNP} \right) \epsilon, \quad (5.35b)$$

где

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_{MAB} \Gamma^{AB}, \quad \Gamma^{M_1 \dots M_n} = \Gamma^{[M_1} \dots \Gamma^{M_n]}, \quad \Gamma_{11} = \Gamma_0 \Gamma_1 \dots \Gamma_9, \quad (5.36)$$

ω_{MAB} является спиновой связностью, и мы используем конвенцию $\{\Gamma_M, \Gamma_N\} = 2G_{MN}^{(s)}$.

Поскольку спинор Киллинга не зависит от координат вдоль орбит коммутирующих векторов Киллинга y^μ , то условие $\delta\psi_\mu = 0$ сводится к $\omega_\mu^{\bar{\nu}\bar{r}} \Gamma_{\bar{\nu}\bar{r}} \epsilon = 0$, где плоские индексы относительно десятимерной метрики $G_{MN}^{(s)}$ обозначаются полосами. Поскольку гамма-матрицы невырождены, спиновая связность равна нулю, что возможно, если $G_{\mu\nu}^{(s)}$ постоянна (только при $\mu, \nu = 0, \dots, 5$). Это невозможно для общего решения S_G , если только функция f_1 не является постоянной. Функция f_1 постоянна только для подсемейства S_E для которого $f_1 = 1$ и $f_2 = r^s / (r^s + \rho^s)$, а других решений в S_G , удовлетворяющие этому условию, нет. Как было упомянуто, известно, что это решение имеет спиноры Киллинга. Для полноты анализа получим соответствующие спиноры Киллинга. Компонента $\delta\psi_r = \partial_r \epsilon$ равна нулю, если спинор Киллинга ϵ зависит только от углов ψ , θ и φ . Остальные уравнения гравитино на трехмерной сфере решаются спинором

$$\epsilon = \exp\left(-\Gamma^{\bar{\psi}} \Gamma^{\bar{r}} \psi / 2\right) \exp\left(-\Gamma^{\bar{\theta}} \Gamma^{\bar{\psi}} \theta / 2\right) \exp\left(-\Gamma^{\bar{\varphi}} \Gamma^{\bar{\theta}} \varphi / 2\right) \epsilon_0, \quad (5.37)$$

где ϵ_0 – постоянный спинор, а экспоненты можно разложить как

$$e^{\Gamma^M \Gamma^N x} = \cos x + \Gamma^M \Gamma^N \sin x, \quad M \neq N \neq t. \quad (5.38)$$

Оставшееся уравнение дилатино (5.35b) для решений S_E имеет вид

$$(1 \pm \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \Gamma_5) \epsilon = 0, \quad (5.39)$$

где знак зависит от знака магнитного заряда. Это условие нарушает половину суперсимметрии.

Глава 6. Геодезические, пробные скалярные поля и скрытые симметрии

6.1 Геодезические на фоне статичных решений КК ЭМД

6.1.1 Геодезические в четырехмерной интерпретации

Интегралы движения

Решение (3.38) обладает тем же набором векторов Киллинга, что и решение Шварцшильда с НУТ-зарядом [55]

$$K_{(t)} = \partial_t, \quad (6.1a)$$

$$K_{(\varphi)} = \partial_\varphi, \quad (6.1b)$$

$$K_{(x)} = 2N \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \partial_t - \sin \varphi \partial_\theta - \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta \partial_\varphi, \quad (6.1c)$$

$$K_{(y)} = 2N \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \partial_t + \cos \varphi \partial_\theta - \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta \partial_\varphi. \quad (6.1d)$$

Анализ геодезических в статичном случае похож на анализ решения Рейснер-Нордстрем-НУТ (РН-НУТ), который обладает сферической симметрией на уровне алгебры. Геодезическое движение на фоне метрики РН-НУТ было изучено в [55; 346]. Вектора Киллинга $K_{(t)}$ и $K_{(\varphi)}$ приводят к законам сохранения энергии E и проекции момента импульса J_z

$$E = f (\dot{t} + 2N \cos \theta \dot{\varphi}), \quad (6.2a)$$

$$J_z = \Sigma \sin^2 \theta \dot{\varphi} - 2NE \cos \theta, \quad (6.2b)$$

где точка $\dot{}$ означает производную относительно аффинного параметра τ . Кроме того, метрика обладает тремя векторами Киллинга ($K_{(x,y,\varphi)}$), которые соответствуют генераторам группы вращений $SO(3)$. Пространственные вектора Киллинга позволяют ввести сохраняющийся вектор полного момента импульса

\vec{J} , который можно разделить на две части – орбитальный угловой момент \vec{L} и спиновый угловой момент \vec{S}

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, \quad (6.3)$$

где

$$J_i = -K_{(i)}^\mu \dot{x}_\mu, \quad \vec{L} = \Sigma \left[\hat{r} \times \dot{\hat{r}} \right], \quad \vec{S} = S \hat{r}, \quad (6.4)$$

при этом $S = -2NE$ и \hat{r} – единичный вектор нормали 2-сферы

$$\hat{r} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).$$

Утверждение (6.3) может быть проверено используя определения (6.4) и подстановку \dot{t} из (6.2). Из перпендикулярности векторов \vec{L} и \vec{S} следует

$$J^2 = L^2 + S^2. \quad (6.5)$$

Так как J^2 и S^2 постоянны, L^2 тоже является константой. Возводя в квадрат вектор \vec{L} , определение (6.4) приводит к следующему выражению

$$L^2 = \Sigma^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right). \quad (6.6)$$

Угловое и временное движение

Используя подход [347] и [55], введем новый параметр, время "Мино" λ , вместо аффинного параметра τ , а также новую переменную ξ и разделим зависимость координаты t на две компоненты:

$$d\tau = \Sigma d\lambda, \quad \xi = \cos \theta, \quad t(\lambda) = t_r(\lambda) + t_\theta(\lambda), \quad (6.7)$$

таким образом что

$$t'_r = E \frac{\Sigma}{f}, \quad (6.8)$$

где $'$ означает производный относительно λ . Тогда, уравнения (6.6) и (6.2) могут быть решены относительно производных t, ξ, φ следующим образом

$$\xi'^2 = -J^2 \xi^2 + 2S J_z \xi + L^2 - J_z^2, \quad (6.9a)$$

$$\varphi' = \frac{1}{2} \left(\frac{J_z + S}{1 + \cos \theta} + \frac{J_z - S}{1 - \cos \theta} \right), \quad (6.9b)$$

$$t'_\theta = N \left(-2S + \frac{S + J_z}{1 + \cos \theta} + \frac{S - J_z}{1 - \cos \theta} \right), \quad (6.9c)$$

Уравнения для (6.9a), (6.9b) и (6.9c) совпадают с уравнениями для РН-НУТ в теории Эйнштейна-Максвелла, которые были решены в [55]:

$$\cos \theta = \cos \psi \cos \eta + \sin \psi \sin \eta \cos(J\lambda), \quad (6.10a)$$

$$\begin{aligned} \phi = \phi_0 + \arctan \left[\frac{\cos \psi - \cos \eta}{1 - \cos(\psi - \eta)} \operatorname{tg} \frac{J\lambda}{2} \right] + \\ + \arctan \left[\frac{\cos \psi + \cos \eta}{1 + \cos(\psi - \eta)} \operatorname{tg} \frac{J\lambda}{2} \right], \end{aligned} \quad (6.10b)$$

$$\begin{aligned} \frac{t_\theta}{2N} = -S\lambda - \pi (\operatorname{sgn}(J_z - S) - \operatorname{sgn}(J_z + S)) \left[\frac{J\lambda}{2\pi} + \frac{1}{2} \right] - \\ - \arctan \left[\frac{\cos \psi - \cos \eta}{1 - \cos(\psi - \eta)} \operatorname{tg} \frac{J\lambda}{2} \right] + \arctan \left[\frac{\cos \psi + \cos \eta}{1 + \cos(\psi - \eta)} \operatorname{tg} \frac{J\lambda}{2} \right], \end{aligned} \quad (6.10c)$$

где

$$\begin{aligned} J \cos \eta = S, & & J \sin \eta = L, \\ J \cos \psi = J_z, & & J \sin \psi = J_\perp, \end{aligned}$$

а также

$$J_\perp^2 = J^2 - J_z^2.$$

Радиальное движение

Уравнение радиального движения можно получить из связи $\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu = \varepsilon$ где $\varepsilon = 1, 0, -1$ для времениподобных, изотропных и пространственноподобных геодезических. Подставляя E , J_z и L вместо \dot{t} , $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, и переписывая уравнения через время Мино, получим уравнение радиального движения

$$r'^2 = E^2 \Sigma^2 - \Delta (\varepsilon \Sigma + L^2). \quad (6.11)$$

Рассеяние на струне внутри границы хронологии. Покажем, что изотропные и времениподобные геодезические могут рассеиваться на струне

вблизи струны Мизнера внутри границы хронологии. Для больших r , радиальное уравнение принимает вид $\dot{r}^2 = E^2 - \varepsilon$, накладывая ограничение $E^2 \geq \varepsilon$. Теперь, рассмотрим уравнение (6.9a) для ξ' при $\xi = \pm(1 - \epsilon)$ и $J_z = \pm(2NE + \mathcal{O}(\epsilon))$ где параметр $\epsilon > 0$ инфинитезимально мал. Тогда, уравнение принимает вид

$$\xi'^2 = 2L^2\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (6.12)$$

что даёт действительные решения для ξ при любых L . Следовательно, геодезические кривые, движущиеся из пространственной бесконечности, могут пересекать окрестность струны по крайней мере при больших r .

Изотропные геодезические. Переписывая уравнение (6.11) через аффинный параметр τ в виде

$$\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = E^2, \quad (6.13)$$

эффективный потенциал для изотропных геодезических примет вид

$$U_{\text{eff}} = L^2 \frac{\Delta}{AB}. \quad (6.14)$$

Он расходится на голой сингулярности и обращается в нуль на поверхности регулярного горизонта событий. Если решение представляет “сингулярную черную дыру”, поведение эффективного потенциала U_{eff} может быть как ограниченным, так и расходящимся, в зависимости от кратности корня числителя и знаменателя. Другим интересным вопросом является существование стабильных и нестабильных круговых изотропных орбит. Уравнение круговых орбит $dU_{\text{eff}}/dr = 0$ довольно сложно решить аналитически. Рассматривая большое количество случайного набора параметров, можно обнаружить, что обычно регулярная черная дыра обладает одной нестабильной круговой орбитой, в то время как голая сингулярность не обладает ни стабильной, ни нестабильной круговой орбитой. В случае сингулярных черных дыр для $D_{\pm 1}$ или D_0 с $e = 2\mu$, не существует круговых орбит. В то же время, “сингулярные черные дыры” ветви D_0 при $e = \mu$ имеют максимум эффективного потенциала на поверхности горизонта.

Несмотря на то, что эти правила кажутся универсальными, существуют тщательно подобранные контр-примеры, представляющие голые сингулярности, например $e/\mu = 1.5, \beta = \pi/2, \alpha = 3\pi/2 + \epsilon$, где $0.099665 \lesssim \epsilon \lesssim 0.123340$.

Такие решения обладают как стабильной, так и нестабильной круговой изотропной орбитой (Рис. 6.1а). На нижней границе $\epsilon \approx 0.099665$, решение становится экстремальной черной дырой, и поэтому стабильная орбита лежит на горизонте. На верхней границе $\epsilon \approx 0.123340$ минимум и максимум эффективного потенциала исчезают. В общем, такие решения являются малыми отклонениями (в пространстве зарядов) от экстремальных черных дыр с сингулярностью расположенной близко к горизонту изнутри. Существование стабильных круговых изотропных орбит указывает на возможность аккумулировать энергию электромагнитного поля, приводя к нестабильности решения.

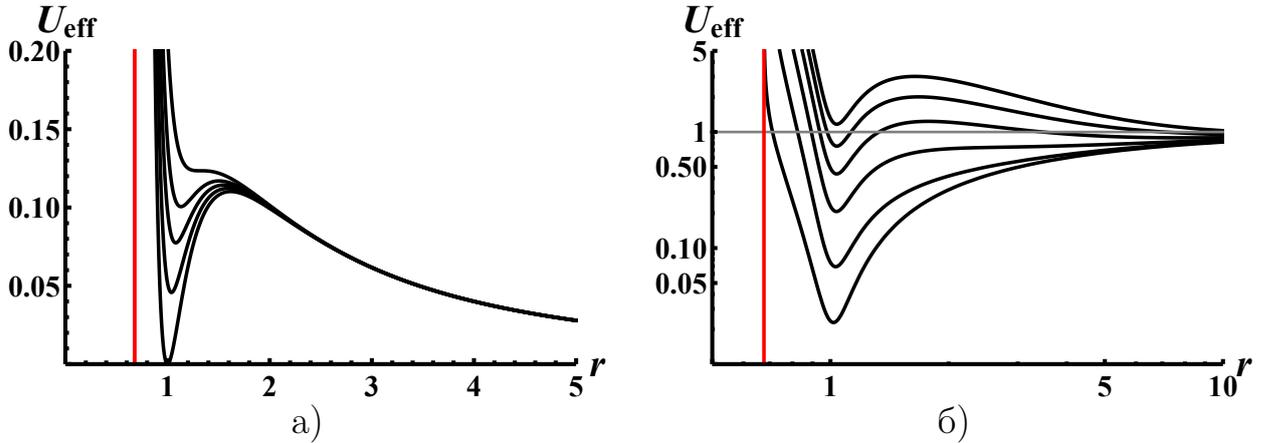


Рисунок 6.1 — Эффективный потенциал U_{eff} для решений $\mu = 1, e = 1.5, \beta = \pi/2, \alpha = 3\pi/2 + \epsilon$. Слева: U_{eff} для изотропных геодезических ($L^2 = 1$) при $\epsilon = 0.099665, 0.105, 0.11, 0.115, 0.123340$ (для кривых снизу вверх). Справа: U_{eff} для времениподобных геодезических с угловым моментом L от 0 до 5 при $\epsilon = 0.105$; шкала логарифмична для лучшего прояснения деталей. Красные линии представляют точки голой сингулярности.

Эффективный потенциал (6.14) представляет полином 4-й степени. Интегрирование этого уравнения приводит к решению

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{P_4(r)}} = \kappa(\lambda - \lambda_0), \quad (6.15)$$

где $\kappa \equiv \pm |E|$, $P_4(r) = \Sigma^2 - L^2 \Delta / E^2 = (r - r_1)(r - r_2)(r - r_3)(r - r_4)$ — полином 4-й степени, разложенный на свои корни. Интеграл может быть выражен через специальные функции

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{P_4(r)}} &\equiv I(r) - I(r_0) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}} F \left(\arcsin \left(m(r)^{-1/2} \right) \middle| m(r_3) \right) \Big|_{r_0}^r, \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$m(r) = \frac{(r_2 - r)(r_1 - r_4)}{(r_1 - r)(r_2 - r_4)},$$

где $F(\varphi|m)$ – эллиптический интеграл первого рода, и корни r_i могут быть переставлены в любом порядке. Если выбрать константу r_0 так, что она расположена между двумя действительными корнями r_i и r_j (или бесконечностью), тогда решение будет описывать движение внутри региона $r \in [r_i, r_j]$. Для простоты, выберем $r_0 = r_1$, поэтому $I(r_0) = 0$. Функция $r(\lambda)$ может быть выражена из (6.15) и (6.16)

$$r(\lambda) = \frac{r_1(r_4 - r_2) + r_2(r_1 - r_4)R(\lambda)}{r_4 - r_2 + (r_1 - r_4)R(\lambda)}, \quad (6.17)$$

$$R(\lambda) = \operatorname{sn} \left(\frac{\kappa}{2}(\lambda - \lambda_0) \sqrt{(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)} \middle| m(r_3) \right)^2,$$

где $\operatorname{sn}(u|m)$ – эллиптическая функция Якоби. Два примера изотропных геодезических, которые рассеиваются на черной дыре изображены на Рис. 6.2. Первый пример (Рис. 6.2а, 6.2б) содержит семейство геодезических кривых, пересекающих границу хронологии, подтверждая вывод о существовании таких геодезических выше. Когда точка разворота достаточно близка к минимуму потенциала, геодезическая кривая имеет достаточно времени, чтобы сделать любое заранее заданное количество оборотов вокруг горизонта (Рис. 6.2в, 6.2г).

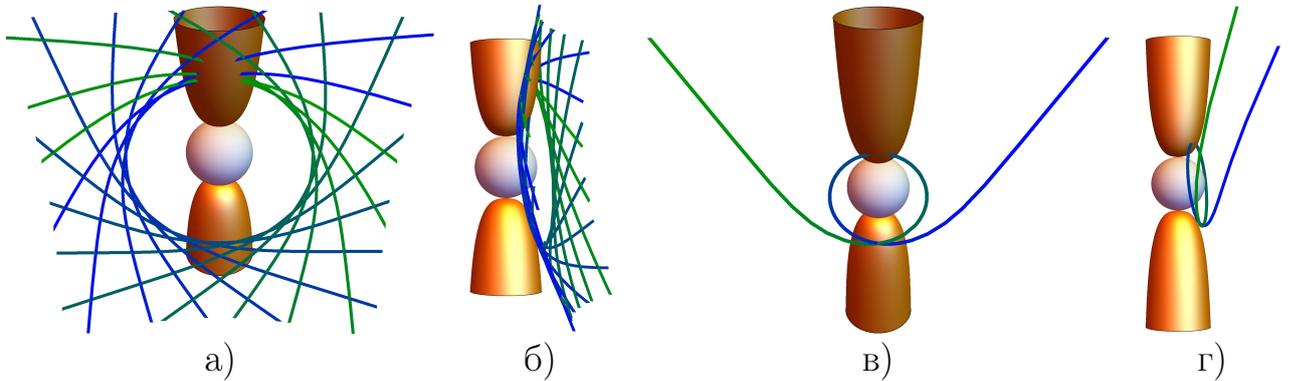


Рисунок 6.2 – Изотропные геодезические в пространстве-времени с параметрами $P = -0.7, Q = 1.1, D = 0.1, N = -5, M = 2.187$. Сферы обозначают горизонты событий, красные поверхности – границы хронологии. Рис. 6.2а, 6.2б: семейство геодезических, рассеиваемых на струне Мизнера ($E = 0.2, J = 5.5, J_z = 0.5$). Рис. 6.2в, 6.2г: геодезические кривые с точкой разворота близкой к минимуму эффективного потенциала $U_{\text{eff}}, E = 0.24148, J = 5.5, J_z = 0.5$.

Времениподобные геодезические. Эффективный потенциал для времениподобных геодезических имеет вид

$$U_{\text{eff}} = \frac{\Delta}{\Sigma} + L^2 \frac{\Delta}{\Sigma^2}. \quad (6.18)$$

Решение при $M \neq 0$ имеет одну стабильную круговую орбиту с $r \approx L^2 \sqrt{M^2 + N^2}/M$ для достаточно больших L . Регулярные решения дополнительно обладают нестабильной времениподобной круговой орбитой вблизи горизонта, если L достаточно велико. Обычно, другие круговые орбиты не существуют, но это не общее правило. Для того же особого класса голых сингулярностей, что был рассмотрен для для изотропных геодезических, существует стабильная круговая времениподобная орбита вблизи сингулярности для любых L (Рис. 6.16).

Замкнутые изотропные и времениподобные геодезические

Чтобы геодезические кривые были замкнутыми, все координаты должны повторно принять те же значения спустя конечный интервал τ или λ . Период времени Мино для функций θ и φ составляет $\Delta\lambda = 2\pi/J$. Пусть $J, E > 0$, тогда справедливо неравенство следующее из (6.10с)

$$\Delta t_\theta \geq -\frac{2\pi|S|}{JE} (J - |S|) \quad (6.19)$$

Используя (6.8) с $f = \Delta/\Sigma$, и условием $r'^2 \geq 0$ в (6.11), при неотрицательном ε и не тахионной материи,

$$\frac{dt_r}{d\lambda} = E \frac{\Sigma}{f} \geq \frac{1}{E} (\Sigma\varepsilon + L^2) \geq \frac{L^2}{E}. \quad (6.20)$$

Собирая оба результата воедино, получим

$$\Delta t_\theta + \Delta t_r \geq \frac{2\pi}{E} (J - |S|) \quad (6.21)$$

Поскольку $J \geq |S|$ из определения (6.5), это неравенство гарантирует $\Delta t \geq 0$ и может обратиться в тождество только для изотропных геодезических с $J = |S|$ (т.е. $L = 0$). Однако, в этом специальном случае можно найти более точные отношения $\Delta t_\theta = 0$ и $\Delta t_r > 0$, поэтому и этот случай не представляет замкнутые геодезические.

6.1.2 Геодезические в пятимерной интерпретации

В данной секции, обозначим пятую координату как $x_5 \equiv \chi$. Вследствие нетривиального поля дилатона (которое приводит к переменной компоненте $g_{\chi\chi}$), и возможного ненулевого импульса p_χ сопряженного с циклической координатой χ (который может быть ассоциирован с электрическим зарядом пробной частицы в четырехмерной интерпретации), пятимерные геодезические не могут быть простым образом подняты из четырехмерных (см. Гл. 6.1.3). Вектора Киллинга пятимерной метрики являются

$$K_{(\chi)} = \partial_\chi, \quad K_{(t)} = \partial_t, \quad K_{(\varphi)} = \partial_\varphi, \quad (6.22a)$$

$$K_{(x)} = \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} (2P\partial_\chi + 2N\partial_t) - \sin \varphi \partial_\theta - \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta \partial_\varphi, \quad (6.22b)$$

$$K_{(y)} = \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} (2P\partial_\chi + 2N\partial_t) + \cos \varphi \partial_\theta - \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta \partial_\varphi. \quad (6.22c)$$

Действуя аналогично, как и в четырехмерной интерпретации, но с другим аффинным параметром τ , другим параметром Мино λ (таким что $d\tau = Ad\lambda$), можно получить аналогичное уравнение $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, где

$$\vec{L} = A [\hat{r} \times \dot{\hat{r}}], \quad \vec{S} = S\hat{r}, \quad S = 2(Pp_\chi - NE), \quad (6.23)$$

справедливы те же уравнения (6.9a), (6.9b), (6.9c) с точностью до переопределения S , а также уравнения

$$t'_r = \frac{A}{\Delta} (BE + 2Cp_\chi), \quad (6.24a)$$

$$\chi'_r = \frac{A}{\Delta} (Fp_\chi - 2CE), \quad (6.24b)$$

$$\chi'_\theta = \frac{P}{N} t'_\theta, \quad (6.24c)$$

где координата χ так же была разделена на две части, $\chi = \chi_r + \chi_\theta$. Решения уравнений для φ , θ и t_θ даны в (6.10a), (6.10b), (6.10c), где следует брать новое определение S , и $\chi_\theta = Pt_\theta/N + \text{const}$. Радиальное уравнение можно записать в виде

$$r'^2 = A (BE^2 + 4CEp_\chi - \Delta\varepsilon - Fp_\chi^2) - \Delta L^2, \quad (6.25)$$

откуда из $r'^2 \geq 0$ следует

$$\frac{A}{B} (BE + 2Cp_\chi)^2 \geq \Delta (A\varepsilon + L^2 + \frac{A^2}{B} p_\chi^2). \quad (6.26)$$

В пяти измерениях, функция B может оказаться неположительной в физической области пространства (во внешней области относительно горизонта). В то же время, в регионе $B < 0$ времениподобной координатой является χ , вследствие чего компактификация χ приводит к компактному времениподобному направлению. Радиальное уравнение может быть разрешено аналогично (6.15) для любых ε . Во внешней области с $A, B, \Delta > 0$, правая часть уравнения (6.26) положительна для всех геодезических, кроме радиальных изотропных ($\varepsilon = L = p_\chi = 0$), поэтому левая часть не может быть отрицательной, что делает поверхности $BE + 2Cp_\chi = 0$ недостижимыми. В частности, если $p_\chi = 0$, геодезические не могут пересечь поверхность $B = 0$. В общем случае, радиальное уравнение может быть переписано как

$$r'^2 = AB (E - V_+) (E - V_-), \quad V_\pm = 2p_\chi \frac{C}{B} \pm \sqrt{\Delta \left(\frac{\varepsilon}{B} + \frac{A}{B^2} p_\chi^2 + \frac{L^2}{AB} \right)}. \quad (6.27)$$

Когда геодезическая приближается к поверхности $B = 0$, обе ветви эффективного потенциала имеют вид

$$V_\pm \approx \frac{2p_\chi C \pm |p_\chi| \sqrt{\Delta A}}{B}. \quad (6.28)$$

В силу того, что отношение $(\Delta A - 4C^2)/B$ является полиномиальной функцией (3.69), на поверхности $B = 0$ мы имеем тождество $\sqrt{\Delta A} = 2|C|$, и одна из ветвей V_\pm конечна, а другая расходится, в зависимости от знака Cp_χ (Рис. 6.3а).

Рассмотрим верхнюю ветвь V_+ в области $A, B, \Delta > 0$. Если знак Cp_χ отрицателен и в некоторой точке имеем $V_+ = 0$, тогда можно наблюдать процесс Пенроуза (Рис. 6.3б), при котором извлекается энергия вращения в плоскости (t, χ) . С точки зрения четырехмерного наблюдателя, импульс p_χ соответствует электрическому заряду частицы. Поэтому, процесс Пенроуза увеличивает как “электрический заряд”, так и энергию частицы.

Проходимые кротовые норы. Пятимерные кротовые норы проходимы, если хотя бы какая-то времениподобная или изотропная геодезическая распространяется из одной асимптотики ($r \rightarrow \infty$) в другую ($r \rightarrow -\infty$). Условием для этого является необходимость положительности правой части радиального

уравнения (6.25) для всех действительных r . Если такие геодезические существуют, тогда среди них существует и геодезическая с $L = 0$. Поскольку A и Δ положительны для кротовых нор, а ε неотрицательна, необходимым условием является

$$y(r) \equiv E^2 B(r) + 4Ep_\chi C(r) - p_\chi^2 F(r) > 0. \quad (6.29)$$

Полагая $p_\chi \neq 0$ (т.к. геодезические с $p_\chi = 0$ имеют точку разворота в нуле функции $B(r)$, который всегда существует вследствие отсутствия четырехмерных кротовых нор), условие (6.29) можно переписать в виде

$$y(r) = p_\chi^2 B(r)(x - x_+(r))(x - x_-(r)), \quad (6.30)$$

где $x = E/p_\chi$, и

$$x_\pm = \frac{-2C \pm \sqrt{A\Delta}}{B}. \quad (6.31)$$

Таким образом, разрешенный интервал ($y > 0$) имеет вид:

$$\text{Для } B(r) > 0 \quad (x_+ > x_-) : \quad x > x_+(r) \quad \text{или} \quad x < x_-(r), \quad (6.32)$$

$$\text{Для } B(r) < 0 \quad (x_+ < x_-) : \quad x_+(r) < x < x_-(r). \quad (6.33)$$

На бесконечности, $B(r) > 0$ и $x_\pm(r) \rightarrow \pm 1$, поэтому геодезические приходящие или уходящие на бесконечность (обоих бесконечностей кротовой норы) должны иметь $x > 1$ или $x < -1$.

Функция $B(r)$ имеет два нуля, $r_{B-} < r_{B+}$. Без потери общности, предположим $C(r_{B+}) > 0$. Тогда,

$$x_+(r_{B+}) = \frac{F(r_{B+})}{4C(r_{B+})}, \quad x_-(r) \simeq -\frac{4C(r_{B+})}{B(r)} \quad (r \simeq r_{B+}). \quad (6.34)$$

Геодезические приходящие из $r \rightarrow +\infty$ с $x < -1$ должны быть такими что $x < x_-(r)$, и поэтому в обязательном порядке развернутся при некотором r_{\min} до того, как достигнут r_{B+} . Лишь геодезические с $x > 1$ имеют возможность пройти дальше.

Функция $C(r)$ имеет единственный нуль r_C , и результат зависит от того, является ли $B(r_C)$ положительным или отрицательным.

1) $B(r_C) > 0$. Тогда $C(r_{B-}) > 0$, и

$$x_+(r_{B-}) = \frac{F(r_{B-})}{4C(r_{B-})}, \quad x_-(r) \simeq -\frac{4C(r_{B-})}{B(r)} \quad (r \simeq r_{B-}). \quad (6.35)$$

Поэтому, в интервале $r_{B-} < r < r_{B+}$, кривая $x_-(r)$ выходит из $+\infty$ на обоих концах $r = r_{B\pm}$, и лежит над кривой $x_+(r)$. Геодезическая выходящая из бесконечности может пройти дальше, если $x_{-\min}$ (локальный минимум $x_-(r)$) больше 1, и может пройти на другой конец кротовой норы если $x_{-\min} > x_{+\max}$ (абсолютный максимум $x_+(r)$).

2) $B(r_C) < 0$. Тогда $C(r_{B-}) < 0$, и

$$x_+(r) \simeq \frac{4|C(r_{B-})|}{B(r)} \quad (r \simeq r_{B-}), \quad x_-(r_{B-}) = -\frac{F(r_{B-})}{4|C(r_{B-})|}, \quad (6.36)$$

В интервале $r < r_{B+}$, кривая $x_-(r)$ непрерывно проходит от $+\infty$ на $r = r_{B+}$ к -1 на $r \rightarrow -\infty$, и поэтому должна пересекать линию $x = +1$ для некоторого конечного значения r . Все геодезические с $x > 1$ в обязательном порядке разворачиваются при значении $r_{\min} < r_{B+}$, таком что $x_-(r_{\min}) = x$.

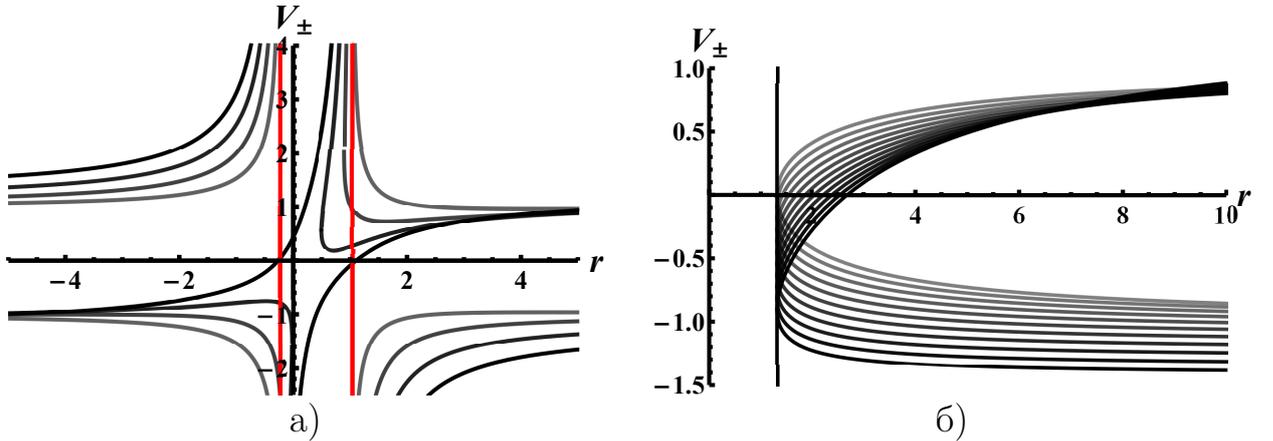


Рисунок 6.3 — Слева: эффективный потенциал V_{\pm} для кротовой норы $\mu = 1, e = 1.5, \beta = 3\pi/4, \alpha = 3\pi/4$ при $L = 0.1$ и различных p_{χ} от 0 до -0.75 с шагом 0.25. Справа: эффективный потенциал V_{\pm} черной дыры $\mu = 1, e = 1.5, \beta = \pi/2, \alpha = 3\pi/2$ для $L = 0.1$ и различных p_{χ} от 0 до -1 с шагом 0.1. Красная линия представляет $B = 0$ и черная вертикальная линия — горизонт событий. Более темные кривые означают большее значение $|p_{\chi}|$.

6.1.3 Редукция геодезических уравнений из 5D в 4D

Редукция геодезических из 5D в 4D рассматривалась в [348]. Здесь мы проведем аналогичные вычисления, используя общий метрический анзац из

теории Калуцы-Клейна. Рассмотрим уравнение геодезических в 5D с метрикой G_{MN} в виде

$$ds^2 = G_{MN}dx^M dx^N = e^{4\alpha\phi/3}(d\chi + 2A_\mu dx^\mu)^2 + e^{-2\alpha\phi/3}g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (6.37)$$

$$\frac{d}{d\lambda} (h^{-1}G_{MA}u^M) - \frac{1}{2}h^{-1}G_{MN,A}u^M u^N = 0, \quad (6.38a)$$

$$-h^2 m^2 = G_{MN}u^M u^N, \quad (6.38b)$$

где $g_{\mu\nu}$, A_μ и ϕ зависят только от x^μ , m – масса частицы, λ – параметр геодезической (не обязательно аффинный), u^M – 5-скорость, прописные латинские индексы принадлежат 5D, а греческие – 4D. Из уравнения (6.38a) с $A = \chi$ можно найти

$$u^\chi = e^{-4\alpha\phi/3}hp_\chi - 2A_\mu u^\mu, \quad (6.39)$$

где p_χ – сопряженный импульс по координате χ . Переписав (6.38) в терминах четырехмерных величин, подставив (6.39) и выбрав такую параметризацию, что $h = e^{-2\alpha\phi/3}$, можно получить

$$\frac{d}{d\lambda} (g_{\mu\rho}u^\mu) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\rho}u^\mu u^\nu = -2p_\chi F_{\rho\mu}u^\mu - \frac{\alpha}{3} (g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu - 2p_\chi^2 e^{-2\alpha\phi}) \partial_\rho \phi, \quad (6.40a)$$

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -m_{\text{eff}}^2(\phi), \quad (6.40b)$$

где мы ввели локальную эффективную массу $m_{\text{eff}}^2(\phi) = m^2 e^{-2\alpha\phi/3} + p_\chi^2 e^{-2\alpha\phi}$, а p_χ играет роль эффективного электрического заряда. Подставив (6.40b) в (6.40a), мы получим окончательное выражение

$$\frac{d}{d\lambda} (g_{\mu\rho}u^\mu) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\rho}u^\mu u^\nu = 2p_\chi F_{\rho\mu}u^\mu - \frac{1}{2}\partial_\rho m_{\text{eff}}^2. \quad (6.41)$$

Уравнение (6.41) представляет собой обычное четырехмерное геодезическое уравнение частицы с массой m_{eff} , электрическим зарядом p_χ (коэффициент 2 в уравнении появляется из-за нашего определение метрики) и некоторую дополнительную силу от градиента скалярного поля. Частица изотропна в 4D и не видит существования пятого измерения тогда и только тогда, когда $m = p_\chi = 0$.

6.2 Геодезические и пробное скалярное поле на фоне гипербраны со скалярными волосами

6.2.1 Геодезические

Рассмотрим геодезические уравнения

$$\frac{d}{d\tau} \left(G_{MN} \dot{X}^N \right) - \frac{1}{2} \frac{dG_{PQ}}{dX^M} \dot{X}^P \dot{X}^Q = 0. \quad (6.42)$$

Метрика (3.172) может быть записана в виде

$$ds^2 = -a(r)dt^2 + b(r) d\vec{y}^2 + v(r)dr^2 + w(r)d\Omega_{s+1}^2, \quad (6.43)$$

где

$$\begin{aligned} a(r) &= f_2^{4s/\Delta} f_1^\sigma, & b(r) &= f_2^{4s/\Delta}, \\ v(r) &= f_2^{-4d/\Delta} f_1^{(1-s-\sigma)/s}, & w(r) &= f_2^{-4d/\Delta} f_1^{(1-\sigma)/s} r^2. \end{aligned} \quad (6.44)$$

В силу сферической симметрии можно выбрать геодезические, лежащие в экваториальной плоскости $s + 1$ -сферы вдоль координаты φ . Интегралы движения для t , y^i и φ следуют из уравнения (6.42)

$$\dot{t} = Ea^{-1}, \quad \dot{y}^i = k^i b^{-1}, \quad \dot{\varphi} = Lw^{-1}. \quad (6.45)$$

Выберем аффинный параметр τ так, чтобы $\dot{X}_M \dot{X}^M = -\epsilon$, где $\epsilon = -1, 0, 1$ для пространственноподобных, светоподобные и времениподобные геодезические соответственно. Используя интегралы движения (6.45), радиальное уравнение примет вид

$$\dot{r}^2 = \frac{1}{av} (E^2 - V_{\text{eff}}), \quad (6.46)$$

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{a}{b} \vec{k}^2 + \frac{a}{w} L^2 + a\epsilon. \quad (6.47)$$

В терминах времени бесконечно удаленного статичного наблюдателя радиальное уравнение имеет вид

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{a}{E^2 v} (E^2 - V_{\text{eff}}). \quad (6.48)$$

Собственное время и время удаленного наблюдателя движения от r_1 до r_2 равны

$$\Delta\tau = \pm \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{av}dr}{\sqrt{E^2 - V_{\text{eff}}}}, \quad \Delta t = \pm \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{v}{a}} \frac{dr}{\sqrt{1 - V_{\text{eff}}/E^2}} \quad (6.49)$$

Таблица 4 — поведение a , a/b , a/w и \sqrt{av} , $\sqrt{v/a}$ вблизи поверхности S радиуса r_S с точностью до мультипликативной константы, $x = r - r_S$.

Величина	Общее выражение	$S_G, c^2 < 1$	$S_G, c^2 > 1$	S_E
r_S		r_0	$r_0(1 - c^{-2/\sigma U})^{-s}$	0
a	$f_2^{4s/\Delta} f_1^\sigma$	x^σ	$x^{-4s/\Delta}$	$x^{4s^2/\Delta}$
a/b	f_1^σ	x^σ	x^0	1
a/w	$f_2^{4(s+d)/\Delta} f_1^{\sigma - \frac{1-\sigma}{s}} r^{-2}$	$x^{\sigma - \frac{1-\sigma}{s}}$	$x^{-4(s+d)/\Delta}$	$x^{-2+4s(s+d)/\Delta}$
\sqrt{av}	$f_2^{2(s-d)/\Delta} f_1^{\frac{(1-s)(1-\sigma)}{2s}}$	$x^{\frac{(1-s)(1-\sigma)}{2s}}$	$x^{2(d-s)/\Delta}$	$x^{2s(s-d)/\Delta}$
$\sqrt{v/a}$	$f_2^{-2(s+d)/\Delta} f_1^{\frac{-(s+1)\sigma+1-s}{2s}}$	$x^{\frac{-(s+1)\sigma+1-s}{2s}}$	$x^{2(s+d)/\Delta}$	$x^{-2s(s+d)/\Delta}$

Геodesические могут достигать сферической поверхности S радиуса r_S , если эффективный потенциал V_{eff} не стремится на этой поверхности к $+\infty$. Для изотропных и времениподобных геodesических эффективный потенциал является положительной функцией во внешней области решения. Следовательно, достаточно потребовать ограниченности V_{eff} . Если каждый член эффективного потенциала ведет себя как $\sim (r - r_S)^a$ вблизи S , где a — некоторая константа, то необходимым и достаточным условием является $a \geq 0$ для каждого члена в эффективном потенциале. Если геodesическая кривая пересекает поверхность S , то искомый интервал времени в некоторой системе отсчета может быть конечным или бесконечным. Для удаленного наблюдателя геodesическая достигает поверхности S за конечный интервал времени Δt тогда и только тогда, когда величина $\sqrt{v/a}$ интегрируема вблизи этой поверхности. Следовательно, если мы хотим, чтобы интервал времени был конечным, функция $\sqrt{v/a}$ не может расходиться как $(r - r_S)^{-1}$ или быстрее. Аналогично, для собственного времени $\Delta\tau$ существует условие, что функция \sqrt{va} не может расходиться как $(r - r_S)^{-1}$ или быстрее. В таблице 5 приведены соответствующие условия для функций a , a/b , a/w , \sqrt{va} и $\sqrt{v/a}$, основанные на результатах таблицы 4.

Поведение геodesических на фоне решений S_G с $c^2 < 1$ принципиально не отличается от движения в незаряженных ФЯНВ-бранах. В зависимости от

Таблица 5 — Условие регулярности различных слагаемых в эффективном потенциале (6.47) и условия конечности времени прохождения геодезическими поверхности S радиуса r_S в терминах собственного времени τ и время удаленного наблюдателя t для разных решений; $e_\epsilon, e_k, e_L, e_\tau, e_t$ — показатели степени старшего слагаемого в разложении функций $a, a/b, a/w, \sqrt{av}, \sqrt{v/a}$ вблизи поверхности S соответственно.

Решение	r_S	$e_\epsilon \geq 0$	$e_k \geq 0$	$e_L \geq 0$	$e_\tau > -1$	$e_t > -1$
$S_G, c^2 < 1$	r_0	$\sigma \geq 0$	$\sigma \geq 0$	$\sigma \geq \frac{1}{1+s}$	Всегда	$\sigma \neq 1$
$S_G, c^2 > 1$	$\frac{r_0}{(1 - c^{-2/\sigma U})^s}$	Никогда	Всегда	Никогда	Всегда	Всегда
S_E	0	Всегда	Всегда	$\alpha^2 \leq \frac{2s^2}{s+d}$	Всегда	$\alpha^2 > \frac{2s^2}{s+d}$

значения σ эффективный потенциал может быть либо ограниченным, либо расходящимся в точке сингулярности. При $\sigma \geq 1/(1+s)$ эффективный потенциал всегда ограничен для любых геодезических; при $0 \leq \sigma < 1/(1+s)$ потенциал ограничен только для геодезических с нулевым угловым моментом $L = 0$; в случае $\sigma < 0$ особенность r_0 достижима только для изотропных радиальных геодезических ($\epsilon = k = L = 0$). Геодезические всегда пересекают поверхность r_0 за конечное собственное время $\Delta\tau$. Удаленный наблюдатель может наблюдать пересечение за конечное время Δt только в сингулярном случае $\sigma \neq 1$.

Решения S_G с $c^2 > 1$ имеют еще одну внешнюю сингулярность, которая имеет другие свойства для геодезических. Времениподобные геодезические никогда не достигают этой сингулярности из-за неограниченного роста эффективного потенциала. Изотропные геодезические могут достичь сингулярности, только если они радиальные, $L = 0$. Изотропные геодезические достигают сингулярности за конечное время Δt и конечное $\Delta\tau$.

Эффективный потенциал для геодезических на фоне S_E с $\alpha^2 \leq \alpha_{\text{crit}}^2$, $\alpha_{\text{crit}}^2 = 2s^2/(s+d)$ ограничен. Геодезические пересекают поверхность $r = 0$ за конечное $\Delta\tau$, но бесконечное Δt . Для другого случая $\alpha^2 > \alpha_{\text{crit}}^2$ эффективный потенциал с ненулевым моментом импульса L неограниченно растет в сингулярности, а геодезические с нулевым моментом импульса $L = 0$ достигают сингулярности за конечные Δt и $\Delta\tau$. В случае NS5-браны дилатонная константа связи имеет критическое значение $\alpha = \alpha_{\text{crit}} = 1$.

6.2.2 Пробное скалярное поле

Физические эффекты теории поля, которые могут проявляться в сингулярном пространстве-времени, интересны как с точки зрения поиска новой физики [349; 350], так и с теоретической точки зрения. В первую очередь необходимо построить самосопряженные волновые операторы, что является нетривиальной задачей в сингулярном искривленном пространстве-времени, поскольку в нем нарушаются обычные аксиомы квантовой теории поля [351]. Это важный вопрос, поскольку считается, что вблизи особенностей квантовые эффекты имеют решающее значение.

Связанный с этим вопрос – возможная квантовая ненаблюдаемость классических сингулярностей. В литературе утверждается, что если существует единственное самосопряженное расширение волнового оператора в сингулярном пространстве-времени, то классическая сингулярность квантово-механически ненаблюдаема соответствующим полем [351; 352]. Этот вопрос исследовался в ряде последующих работ. Ситуация упрощается в статических пространствах. Есть два простых способа проверить существенную самосопряженность симметрических операторов. Первый – расчет индексов дефекта (фон Неймана). Второй использует теорему Вейля: волновой оператор не является самосопряженным, если оба локальных решения в окрестности сингулярного подмногообразия удовлетворяют критерию квадратичной интегрируемости (*limit circle*). Действительно, в этом случае необходимо сделать дополнительные предположения о граничных условиях, от которых будет зависеть эволюция решения. Если локально квадратично интегрируемо только одно решение (*limit point*), эволюция волнового решения будет определена однозначно, поэтому волновой пакет не почувствует присутствия сингулярности. При этом в окрестности сингулярности, как правило, возникает отталкивающий барьер. Идея была сформулирована Вальдом [351] и более конкретно реализована Горовицем и Марольфом [352] в случае скалярного поля. Более поздние работы в этом направлении включают в себя [353–355] и другие. Скалярная теория была обобщена на поля Максвелла и Дирака [354]. Возможность квантового исцеления геодезически неполных многообразий была проверена для ряда статических и конформно-статических сингулярных решений теории Эйнштейна в четырех и трех измерениях (см. недавний обзор [356]).

Тесно связанная задача – проблема устойчивости сингулярных пространств-времен. Устойчивость решения связана со знаком мнимой части частот нормальных мод, определяемых соответствующими граничными условиями в особенностях. Может оказаться так, что разный выбор граничных условий в случае, когда оба локальных решения квадратично интегрируемы, может привести к разным выводам об устойчивости [357; 358]. Физически это означает, что полная спецификация сингулярного пространства-времени должна включать в себя задание граничных условий для возмущений в сингулярностях. Этот вопрос требует дальнейшего изучения, выходящего за рамки настоящей работы. Но решающим вопросом является число локальных решений квадратично интегрируемых вблизи особенностей.

В этом разделе мы исследуем возможность квантового исцеления сингулярностей с помощью пробного скалярного поля массы μ на фоне новых сингулярных бран. Используя определения (6.44), соответствующее уравнение Клейна-Гордона $(\square - \mu^2)\phi = 0$ можно записать в виде

$$-a^{-1}\partial_t^2\phi + b^{-1}\partial_i^2\phi + \frac{1}{R}\partial_r(Rv^{-1}\partial_r\phi) + \frac{1}{w}\Delta_S^{s+1}\phi - \mu^2\phi = 0, \quad (6.50)$$

где Δ_S^{s+1} – оператор Лапласа-Бельтрами единичной $s + 1$ -сферы, а также

$$R(r) = \sqrt{-G/\Omega_{(s+1)}} = \sqrt{ab^{d-1}vw^{s+1}} = f_2^{-4d/\Delta} f_1^{\frac{1-\sigma}{s}} r^{s+1}.$$

Подставляя анзац $\phi = \exp\{-i\omega t + ik_i y^i\} \Phi(r) Y_l^K(\theta)$, где K – набор квантовых чисел гармоник $s + 1$ -сферы Y_l^K , кроме квантового числа полного углового момента l . С учетом собственных значений гармоник $\Delta_S^{s+1} Y_l^K = -l(l + s) Y_l^K$ (собственное значение l вырождено $(2l + s)(l + s - 1)!/l!s!$ раз [359]), получим

$$\frac{1}{R}\partial_r(Rv^{-1}\partial_r\Phi) + \left(\frac{\omega^2}{a} - \frac{\vec{k}^2}{b} - \frac{l(l + s)}{w} - \mu^2\right)\Phi = 0. \quad (6.51)$$

Выполним преобразование координат $\partial_r = W(\varrho)\partial_\varrho$ и замену $\Phi = P(r)\chi(r)$ с некоторыми произвольными функциями W и P . Мы хотим найти такие функции W , P , что уравнение примет вид уравнения Шрёдингера

$$\chi'' + (\omega^2 - V_{\text{eff}})\chi = 0, \quad (6.52)$$

где штрих означает производную по ϱ . Для этого выберем эти функции в следующем виде

$$W^2 = \frac{v}{a}, \quad P = \sqrt{\frac{v}{WR}} = f_2^{\frac{s+d}{\Delta}} f_1^{-(1-\sigma)(s+1)/4s} r^{-(s+1)/2}. \quad (6.53)$$

Подставив (6.53) в уравнение (6.51), получим эффективный потенциал V_{eff} для пробного скалярного поля

$$V_{\text{eff}} = \vec{k}^2 \frac{a}{b} + l(l+s) \frac{a}{w} + a\mu^2 + V_0, \quad (6.54)$$

$$V_0 = (\ln P)'^2 - (\ln P)'' . \quad (6.55)$$

Первые три слагаемых V_{eff} совпадают с эффективным потенциалом для геодезических с точностью до замены констант движения квантовыми числами. Заметим, что L^2 -интегрируемость решений не зависит от выбора функций W и P , если в соответствующей задаче Штурма-Лиувилля выбрать правильную меру интегрирования: $R/a dr$ для (6.51) и $d\rho$ для (6.52).

Рассмотрим предел $r \rightarrow +\infty$. Тогда мера асимптотически стремится к $r^{s+1}dr$, так что L^2 -интегрируемая мода скалярного поля должна стремиться к нулю быстрее, чем $r^{-1-s/2}$. В то же время решение уравнения (6.51) имеет асимптотическую вид

$$\Phi \approx r^{-s/2} (C_1 J_{l+s/2}(\kappa r) + C_2 Y_{l+s/2}(\kappa r)), \quad \kappa^2 = \omega^2 - \vec{k}^2 - \mu^2.$$

При $\kappa^2 > 0$ решения имеют волновой вид и не являются L^2 -интегрируемыми, что видно из асимптотики амплитуды колебаний $r^{-(s+1)/2}$. Случай $\kappa^2 = 0$ приводит к решению вида $\Phi \approx C_1 r^l + C_2 r^{-l-s}$, где единственной квадратично интегрируемой модой является второе слагаемое для $s > 2$ или $l > 0$. В случае $\kappa^2 < 0$ одна мода экспоненциально расходится, а другая экспоненциально затухает. Значит, только половина из них L^2 -интегрируема. Таким образом, из L^2 -интегрируемости следует неравенство $\omega^2 < \vec{k}^2 + \mu^2$ (которое может быть нестрогим при $s > 2$ или $l > 0$).

Рассмотрим решение вблизи самой внешней сингулярности (Фишерского типа при $S_G, c^2 < 1$). Асимптотическое поведение функции $W = \sqrt{v/a}$ классифицировано в таблице 4. В общем случае $W \sim x^m$, где m – некоторая константа, зависящая от параметров теории. Новая координата может быть выражена через старую асимптотически следующим образом $\rho \sim x^{m+1}$ (или $\rho \sim \ln x$ для $m = -1$) с точностью до мультипликативной константы и произвольной аддитивной константы. Новая радиальная координата, приводящая уравнение к форме Шредингера, сильно зависит от того, смогут ли геодезические достичь сингулярности с конечным интервалом времени удаленного наблюдателя или нет. Вблизи особенности функция P ведет себя как x^n с точностью до коэффициента, где n – некоторая константа. Из уравнения (6.55) для

$m \neq -1$ следует, что $V_0 \approx (\nu^2 - 1)\varrho^{-2}/4$, где

$$\nu = \frac{2n + m + 1}{m + 1}. \quad (6.56)$$

Найдем вид решения в окрестности особенности для каждого подсемейства решений.

Решение S_G при $c^2 < 1$. Показатель степени $m = -1 + (1 + s)(1 - \sigma)/2s$ достигает минимума -1 при $\sigma = 1$. Случай $\sigma = 1$ аналогичен случаю пробного скалярного поля на фоне регулярных решений Шварцшильда или Рейсснера–Нордстрема [360; 361], поэтому этот случай рассмотрен не будет. Для всех остальных случаев имеем $m > -1$, то есть вблизи сингулярности $\varrho \rightarrow 0$. Чтобы избежать слагаемых в V_{eff} , которые более сингулярны, чем ϱ^{-2} из V_0 , необходимо потребовать выполнения следующих неравенств

$$\frac{\sigma}{m + 1} \geq -2, \quad \left(\sigma - \frac{1 - \sigma}{s} \right) / (m + 1) \geq -2.$$

Оба условия строго выполняются после замены m , так что наиболее сингулярное слагаемое эффективного потенциала содержится в V_0 . Функция P имеет асимптотику $x^{-\frac{m+1}{2}}$, откуда находим $n = -(m + 1)/2$ и $\nu = 0$. Решение уравнения (6.52) с таким эффективным потенциалом вблизи $r = r_0$ имеет вид

$$\Phi \approx P\varrho^{1/2} (C_1 + C_2 \ln \varrho) \approx C'_1 + C'_2 \ln x. \quad (6.57)$$

Обе моды квадратично интегрируемы вблизи сингулярности (limit circle). Таким образом, в данном случае сингулярность неизлечима. Пробное скалярное поле является регулярным, если $C'_2 = 0$ [10].

Решение S_G при $c^2 > 1$. Из аналогичных вычислений имеем $m = 2(s + d)/\Delta > 0$, $n = -m/2$ и $\varrho \rightarrow 0$ вблизи сингулярности. Условия того, что другие члены в V_{eff} менее сингулярны, чем V_0 , имеют вид

$$(m + 1)\Delta - 2s > 0, \quad (m + 1)\Delta - 2(d + s) > 0,$$

и они выполняются для любых параметров. Подставляя значения m и n в (6.56), получаем $\nu = 1/(m + 1)$. Решение уравнения (6.52) с таким эффективным потенциалом вблизи сингулярности запишется в виде

$$\Phi \approx P\sqrt{\varrho} \left(C_1\varrho^{+\nu/2} + C_2\varrho^{-\nu/2} \right) \approx C_1x + C_2. \quad (6.58)$$

Обе моды являются регулярными и квадратично интегрируемыми вблизи горизонта. Сингулярность также не лечится.

Решение S_E при $\alpha^2 \neq \alpha_{\text{crit}}^2 = 2s^2/(s+d)$. Такие решения в теории с $\alpha = 0$ являются регулярными экстремальными черными дырами Рейсснера-Нордстрема [362] и здесь рассматриваться не будут. Будем предполагать $\alpha \neq 0$. Из асимптотики W и P находим

$$m = -2s(s+d)/\Delta \neq -1, \quad n = -\frac{m+s+1}{2}, \quad (6.59)$$

$$\varrho \approx \frac{r^{m+1}}{\rho^m(m+1)}. \quad (6.60)$$

Оставим только главные члены разложения для каждого слагаемого в эффективном потенциале

$$V_{\text{eff}} \approx \vec{k}^2 + q \left(\frac{r^{m+1}}{\rho^m(m+1)} \right)^{-2} + \mu^2 \left(\frac{r}{\rho} \right)^{4s^2/\Delta}, \quad (6.61)$$

где

$$q = \frac{l(l+s)}{(m+1)^2} + \frac{\nu^2 - 1}{4} = \left(\frac{l+s/2}{m+1} \right)^2 - \frac{1}{4}. \quad (6.62)$$

Решения будут квадратично интегрируемыми вблизи сингулярности, если $R|\Phi|^2/a$ убывает быстрее, чем r^{-1} . Принимая во внимание уравнение (3.183), интегрируемое решение Φ должно убывать быстрее, чем $r^{-s/2-1+2s(d+s)/\Delta}$ вблизи $r = 0$. Мы будем использовать это условие в дальнейшем для анализа случаев $\alpha^2 > \alpha_{\text{crit}}^2$ и $\alpha^2 < \alpha_{\text{crit}}^2$ по отдельности.

Для $m > -1$ ($\alpha^2 > \alpha_{\text{crit}}^2$) главное слагаемое в уравнении (6.52) возникает из второго слагаемого V_{eff} , т.е. $q\varrho^{-2}$. В этом случае решение вблизи сингулярности имеет вид

$$\Phi \approx P\sqrt{\varrho} \left(C_1\varrho^{\sqrt{q+1/4}} + C_2\varrho^{-\sqrt{q+1/4}} \right) \approx C'_1 r^l + C'_2 r^{-l-s}. \quad (6.63)$$

Первая мода r^l удовлетворяет условию квадратичной интегрируемости, если $l > 2s(d+s)/\Delta - 1 - s/2$. Поскольку мы рассматриваем случай $\alpha^2 > \alpha_{\text{crit}}^2$, мы можем заменить $\alpha^2 = \alpha_{\text{crit}}^2 + x_\alpha$, $x_\alpha > 0$, получая новое ограничение $l > -1 - s/2 + 2s/(2s+x_\alpha)$. Это неравенство выполняется всегда, и мода r^l всегда интегрируема. Вторая мода r^{-l-s} интегрируема, если $l < -s/2 + x_\alpha/(2s+x_\alpha)$, что возможно только при $l = 0$, $s = 1$, $\alpha^2 > 2(d+2)/(d+1)$. Эта мода, однако, должна быть исключена из спектра на том же основании, что и соответствующая мода в нерелятивистской квантовой механике (появление дельта-функции под действием лапласиана). Поэтому этот случай соответствует limit point.

Для случая $m < -1$ ($\alpha^2 < \alpha_{\text{crit}}^2$) с $\vec{k}^2 \neq \omega^2$ координата ϱ стремится к бесконечности, поэтому уравнение для χ имеет вид

$$\chi'' + \kappa^2 \chi \approx 0, \quad \kappa^2 = \omega^2 - \vec{k}^2.$$

Решение этого уравнения асимптотически имеет вид

$$\Phi \approx r^n (C_1 \exp(i\kappa\varrho) + C_2 \exp(-i\kappa\varrho)). \quad (6.64)$$

При $\kappa^2 > 0$ решение вблизи особенности осциллирует бесконечно быстро, расходуется в силу $n < 0$ и не интегрируемо. При $\kappa^2 < 0$ одна из двух мод экспоненциально расходится, а другая экспоненциально затухает, будучи квадратично интегрируемой вблизи горизонта/сингулярности. Однако, при $\kappa^2 = 0$ главное слагаемое равно $q\varrho^{-2}$. Таким образом, этот случай аналогичен предыдущему $\alpha^2 > \alpha_{\text{crit}}^2$ с решением (6.63), за исключением того, что теперь $x_\alpha < 0$. Поскольку правая часть неравенства для квадратичной интегрируемости является монотонной функцией α^2 , мы можем сделать выводы из предельных случаев $\alpha^2 = 0, \alpha_{\text{crit}}^2$. Можно обнаружить, что мода r^l интегрируема, кроме случая $d = 1$ с $\alpha^2 \leq 2s^2/(s+1)(s+2)$, и мода r^{-l-s} всегда неинтегрируема.

Решение S_E при $\alpha^2 = \alpha_{\text{crit}}^2 = 2s^2/(s+d)$. В этом случае имеем $m = -1$, $n = -s/2$, $\varrho \approx \rho \ln r \rightarrow -\infty$. Подставляя метрику в уравнение (6.55), мы получаем точное выражение для V_0

$$V_0 = \frac{1}{4} (r^s + \rho^s)^{-\frac{2(s+1)}{s}} ((s^2 - 1) r^{2s} + 2s(s+1) r^s \rho^s + s^2 \rho^{2s}). \quad (6.65)$$

В особой точке выражение (6.65) стремится к конечному положительному значению $V_0|_{r=0} = (s/2\rho)^2$. С учетом остальных слагаемых эффективный потенциал стремится к значению $V_{\text{eff}} \approx \vec{k}^2 + (l + s/2)^2/\rho^2$. В этом случае уравнение имеет вид (6.64) с точностью до замены $\kappa^2 \rightarrow \omega^2 - \vec{k}^2 - (l + s/2)^2/\rho^2$ и зависимости $\varrho(r)$. При $\kappa^2 > 0$ моды остаются сингулярными и неинтегрируемыми. При $\kappa^2 < 0$ решение можно упростить

$$\Phi \approx C_1 r^{-|\kappa|\rho-s/2} + C_2 r^{|\kappa|\rho-s/2}.$$

Первая мода сингулярна и всегда неинтегрируема. Другая мода является регулярной, если $|\kappa|\rho \geq s/2$ (что можно переписать как $\omega^2 \leq \vec{k}^2 + l(l+s)/\rho^2$) и всегда интегрируема. В случае $\kappa^2 = 0$ необходимо выбрать следующее старшее

слагаемое в эффективном потенциале с наименьшим показателем $V_{\text{eff}} \approx b_1 r^{a_1}$. Для массивного скалярного поля эффективный потенциал асимптотически ведет себя как $V_{\text{eff}} \approx \mu^2 (r/\rho)^{a_1}$, где $a_1 = 2s/(d+s)$, и для безмассового случая это $V_{\text{eff}} \approx s^{-1} (s^2 - 2ls - 2l^2) \rho^{-s-2} r^s$ с $a_1 = s$ (следует обратить внимание, что выражение $s^2 - 2ls - 2l^2$ не может быть равно нулю для целых l, s). Тогда решение запишется в виде

$$\chi'' - b_1 \exp(a_1 \varrho/\rho) \chi \approx 0,$$

$$\Phi \approx r^{-s/2} \left(C_1 I_0 \left(\frac{2\sqrt{b_1} \rho}{a_1} r^{a_1/2} \right) + C_2 K_0 \left(\frac{2\sqrt{b_1} \rho}{a_1} r^{a_1/2} \right) \right) \approx C_1' r^{-s/2} + C_2' r^{-s/2} \ln r,$$

где I_0, K_0 – модифицированные функции Бесселя второго рода. Полученные решения расходятся и не интегрируются ни для каких C_1, C_2 . Поскольку для каждого набора квантовых чисел существует не более одной интегрируемой моды, сингулярность устраняется.

Сводка по квадратичной интегрируемости и регулярности мод на фоне различных классов решения дана в таблице 6. Общий класс всегда неизлечим, так как число квадратично интегрируемых мод равно двум. В случае фишеровской особенности ($S_G, c^2 < 1$) одна из этих мод интегрируема. И напротив, в решении с особенностью типа Рейснера-Нордстрема ($S_G, c^2 > 1$) обе моды регулярны. В решении S_E наблюдается не более одной квадратично интегрируемой моды, за исключением одного частного случая: $l = 0$, для решения $S_E \alpha^2 > 2 \frac{d+2}{d+1} > \alpha_{\text{crit}}^2$ с $s = 1$. Однако, наподобие квантовой механики, эта мода может быть исключена из спектра как решение для точечного источника (с распределением в виде δ -функции). Если исключить эту моду, то все S_E решения содержат квантово ненаблюдаемую особенность. В противном случае, особенность наблюдается только в специальном случае. Все квадратично-интегрируемые моды регулярны, кроме этого специального случая $l = 0$ и еще одного случая с критической константой связи $\alpha^2 = \alpha_{\text{crit}}^2$ в определенном интервале частоты $\frac{l(l+s)}{\rho^2} + \mathbf{k}^2 < \omega^2 < \left(\frac{l+s/2}{\rho} \right)^2 + \mathbf{k}^2$.

Таблица 6 — Количество квадратично интегрируемых мод и регулярных мод для каждого класса решений и определенного интервала ω^2 . Если случай содержит какой-либо частный случай, этот частный случай дается в последнем столбце, а количество мод для частного случая дается в скобках.

Решение	Условие на ω^2	# кв. инт. мод	# рег. мод	Особые случаи
$S_G, c^2 < 1$	любое	2	1	
$S_G, c^2 > 1$	любое	2	2	
$S_E, \alpha^2 > \alpha_{\text{crit}}^2$	любое	1 (2)	1 (1)	$l = 0, s = 1, \alpha^2 > 2\frac{d+2}{d+1}$
$S_E, \alpha^2 < \alpha_{\text{crit}}^2$	$\omega^2 > \mathbf{k}^2$	0	0	$d = 1, \alpha^2 \leq \frac{2s^2}{(s+1)(s+2)}$
	$\omega^2 = \mathbf{k}^2$	0 (1)	0 (1)	
	$\omega^2 < \mathbf{k}^2$	1	1	
$S_E, \alpha^2 = \alpha_{\text{crit}}^2$	$\omega^2 - \mathbf{k}^2 \geq \left(\frac{l+s/2}{\rho}\right)^2$	0	0	
	$\frac{l(l+s)}{\rho^2} < \omega^2 - \mathbf{k}^2 < \left(\frac{l+s/2}{\rho}\right)^2$	1	0	
	$\omega^2 - \mathbf{k}^2 \leq \frac{l(l+s)}{\rho^2}$	1	1	

6.3 Гравитационная тень сингулярных вращающихся решений со скалярным зарядом

6.3.1 Базис локального наблюдателя и сохраняющиеся величины

Как правило, аксиально-симметричные пространства-времени не позволяют аналитически построить свои тени или образ аккреционного диска, если они не обладают третьей константой движения [210; 211]. Чтобы решить эту проблему, мы построим гравитационные тени численно. Для формирования изображения неба, наблюдаемого удаленным наблюдателем вблизи изображения гравитирующего объекта, мы используем метод обратной трассировки лучей [162; 184]. Наблюдатель с камерой находится в некоторой точке r_O, θ_O, ϕ_O (например, красная точка на рис. 6.4а). Изотропные геодезические интегрируются в обратном направлении, начиная от камеры к гравитирующему объекту (схематично, черная сфера на рис. 6.4а). На каком-то шаге геодезическая может пересечь далекую сферу в точке r_C . Кроме того, он может достичь точки, очень

близкой к горизонту/сингулярности. Условие близости к горизонту/особенности, где геодезическая считается захваченной, выбирается как $r < r_{H,S} + \epsilon$, где $r_{H,S}$ – координаты горизонта событий или сингулярности, а ϵ – небольшое положительное число. Точность ϵ выбирается таким образом, чтобы окончательное изображение не менялось заметно при дальнейшем уменьшении ϵ . Источником света считается далекая сфера r_C или аккреционный диск.

Начальным положением всех геодезических является положение камеры. Начальный импульс p^μ различен для каждой геодезической кривой и зависит от угла, под которым она входит в камеру. Выразим импульс через локальную систему отсчета $\{\hat{e}_{(t)}, \hat{e}_{(r)}, \hat{e}_{(\theta)}, \hat{e}_{(\phi)}\}$, где

- $\hat{e}_{(t)}^\nu$ – 4-скорость наблюдателя, являющаяся времениподобным вектором;
- $\hat{e}_{(r)}^\nu$ – направление, противоположное тому, на которое указывает камера. Например, направление от гравитирующего объекта. Это направление противоположно зениту небесной сферы наблюдателя;
- $\hat{e}_{(\theta)}^\nu$ – направление камеры “вверх”;
- $\hat{e}_{(\phi)}^\nu$ – это направление камеры “вправо”.

Обычно, проекцию геодезических на небо наблюдателя параметризуют парой небесных координат $\alpha \in [0, \pi]$ и $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$, которые связаны с 4-импульсом фотона следующим образом [363]:

$$p^\mu = \hat{e}_{(t)}^\mu + \sin \alpha \hat{e}_{(\theta)}^\mu + \sin \beta \cos \alpha \hat{e}_{(\phi)}^\mu + \cos \beta \cos \alpha \hat{e}_{(r)}^\mu. \quad (6.66)$$

Также, удобно ввести координаты (X, Y) стереографической проекции небесной сферы на плоскость

$$X = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{1 + \cos \alpha \cos \beta}, \quad Y = \frac{2 \sin \alpha}{1 + \cos \alpha \cos \beta}, \quad (6.67)$$

а 4-импульс фотона как

$$p^\mu = \frac{1}{X^2 + Y^2 + 4} \left((X^2 + Y^2 + 4) \hat{e}_{(t)}^\mu - (X^2 + Y^2 - 4) \hat{e}_{(r)}^\mu + 4Y \hat{e}_{(\theta)}^\mu + 4X \hat{e}_{(\phi)}^\mu \right). \quad (6.68)$$

Общий базис стационарного наблюдателя можно разложить по координатному базису $\{\partial_t, \partial_r, \partial_\theta, \partial_\phi\}$ следующим образом (см. [364]):

$$\hat{e}_{(\theta)} = A^\theta \partial_\theta, \quad \hat{e}_{(r)} = A^r \partial_r, \quad \hat{e}_{(\phi)} = A^\phi \partial_\phi + \xi \partial_t, \quad \hat{e}_{(t)} = \zeta \partial_t + \gamma \partial_\phi, \quad (6.69)$$

накладывая условие ортонормированности $\hat{e}_{(\mu)}^\lambda \hat{e}_{(\nu)\lambda} = \eta_{\mu\nu}$. Угловой момент наблюдателя определяется как

$$L_O = \hat{e}_{(t)}^\mu g_{\mu\phi} = \zeta g_{t\phi} + \gamma g_{\phi\phi}. \quad (6.70)$$

Локально измеренный линейный импульс любого конкретного фотона определяется выражениями $p^{(t)} = -\hat{e}_{(t)}^\mu p_\mu$ и $p^{(i)} = \hat{e}_{(i)}^\mu p_\mu$ (где $i = 1, 2, 3$). Поэтому:

$$p^{(t)} = \zeta E - \gamma L, \quad p^{(\theta)} = A^\theta p_\theta, \quad p^{(\phi)} = A^\phi L - \xi E, \quad p^{(r)} = A^r p_r. \quad (6.71)$$

Сохраняющиеся величины $E = -\dot{\gamma}^\mu g_{\mu t} = -p_t$ и $L = \dot{\gamma}^\mu g_{\mu\phi} = p_\phi$, описывают соответственно энергию и угловой момент фотона, измеренные наблюдателем на пространственной бесконечности [365]. Кроме того, мы определим прицельный параметр как $\rho = L/E$.

Мы рассмотрим систему отсчета наблюдателей нулевого углового момента (ZAMO) $L_O = 0$ (см. [364]). В данном случае

$$A^\theta = \frac{1}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}, \quad A^r = \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}, \quad A^\phi = \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}, \quad (6.72a)$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{g_{\phi\phi}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}}, \quad \gamma = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\zeta, \quad \xi = 0, \quad (6.72b)$$

$$\begin{aligned} p_{(\theta)} &= \sqrt{g_{\theta\theta}} \sin \alpha, & L &= \sqrt{g_{\phi\phi}} \sin \beta \cos \alpha, \\ p_{(r)} &= \sqrt{g_{rr}} \cos \beta \cos \alpha, & E &= \frac{1 + \gamma \sqrt{g_{\phi\phi}} \sin \beta \cos \alpha}{\zeta}. \end{aligned} \quad (6.72c)$$

6.3.2 Алгоритм получения гравитационных теней

Данный формализм позволяет построить отображение из небесной сферы камеры в асимптотически удаленную сферу, декодируемую некоторым цветом $S_O^2 \rightarrow S_C^2$, т.е. присвоить каждой точке небесной сферы наблюдателя S_O^2 определенный цвет. Например, если наблюдатель сфотографирует изображение пустого пространства-времени (т. е. пространства-времени Минковского, параметризованного сферическими координатами), он или она получит кадр,

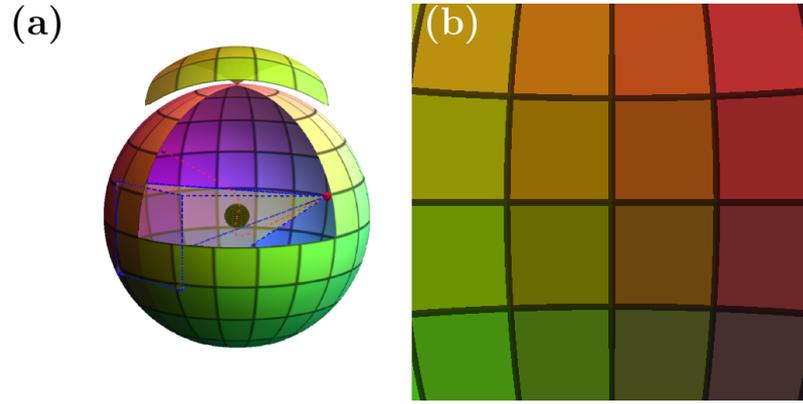


Рисунок 6.4 — (а) раскраска сферы и схематический пример трассировки лучей, красная точка — наблюдатель, черная сфера — схематически горизонт или сингулярность (или другая светопоглощающая поверхность), внешняя сфера — удаленная поверхность, излучающая свет с соответствующим цветом, в зависимости от его положения θ , ϕ ; (б) изображение плоского пространства, полученное наблюдателем $\theta_O = \pi/2$.

изображенный на рис. 6.4b. В плоском пространстве-времени мы видим неискаженное изображение небесной сферы. Однако ситуация существенно меняется при наличии сильного гравитационного поля, когда путь света значительно отклоняется (красная геодезическая на рис. 6.4a), создавая ярко выраженные эффекты гравитационного линзирования (тени, релятивистские изображения и кольца Эйнштейна) [162].

Если тень (множество геодезических, захваченных горизонтом, особенностью или другой поглощающей поверхностью) образует некоторую односвязную область D_{SH} в плоскости (X, Y) , то мы будем характеризовать ее следующими параметрами: вертикальный ΔY и горизонтальный ΔX размеры тени, средний радиус R_c и отклонение от окружности ΔC [184]. Введем полярные координаты (R, φ) в плоскости камеры следующим образом

$$X = R \cos \varphi, \quad Y = R \sin \varphi. \quad (6.73)$$

Тогда, односвязная граница тени может быть параметризована функцией $R = F_{SH}(\varphi)$ (что удобно для численной интерполяции). Дополнительно можно ввести функции $X_{SH}(\varphi) = F_{SH}(\varphi) \cos \varphi$ и $Y_{SH}(\varphi) = F_{SH}(\varphi) \sin \varphi$. Горизонтальный и вертикальный размеры можно найти через разницу

$$\Delta X = X_{SH}^{\max} - X_{SH}^{\min}, \quad \Delta Y = Y_{SH}^{\max} - Y_{SH}^{\min}, \quad (6.74)$$

где \max/\min обозначают глобальный максимум/минимум соответствующих величин. Центр масс (X_c, Y_c) тени можно оценить как

$$X_c = \frac{\int_{D_{SH}} X dA}{\int_{D_{SH}} dA} = \frac{2 \oint X_{SH} F_{SH}^2 d\varphi}{3 \oint F_{SH}^2 d\varphi}, \quad Y_c = \frac{\int_{D_{SH}} Y dA}{\int_{D_{SH}} dA} = \frac{2 \oint Y_{SH} F_{SH}^2 d\varphi}{3 \oint F_{SH}^2 d\varphi}, \quad (6.75)$$

где dA – элемент площади области тени D_{SH} , аналогичная формула используется для Y_c . Можно построить окружность с центром в (X_c, Y_c) и радиусом R_c , определенным из следующего выражения

$$R_c^2 = \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi \{ (X_{SH}(\varphi) - X_c)^2 + (Y_{SH}(\varphi) - Y_c)^2 \}. \quad (6.76)$$

Безразмерное отклонение от окружности определяется выражением (см. [184])

$$\Delta C^2 = \frac{1}{2\pi R_c^2} \oint d\varphi \left(\sqrt{(X_{SH}(\varphi) - X_c)^2 + (Y_{SH}(\varphi) - Y_c)^2} - R_c \right)^2. \quad (6.77)$$

Последняя характеристика слабо зависит от расстояния от наблюдателя до гравитирующего объекта и заслуживает внимания как достоверная. Аналогичным образом, поскольку абсолютные характеристики ΔY , ΔX и R_c сильно зависят от положения наблюдателя, целесообразно ввести более подходящие соотношения

$$\mu_{Y/R} = \Delta Y / (2R_c), \quad \mu_{X/R} = \Delta X / (2R_c), \quad \mu_{Y/X} = \Delta Y / \Delta X. \quad (6.78)$$

Отметим, что для экваториального ($\theta_O = \pi/2$) наблюдателя ZAMO экваториальный размер ΔX Z_2 -симметричной тени можно вычислить аналитически, если известны экваториальные орбиты фотонов. Действительно, для Z_2 -симметричной тени можно ожидать, что тень будет иметь максимальный размер в середине тени $Y = 0$ [214]. Поэтому, сравнивая прицельный параметр для круговой изотропной орбиты и для экваториальной геодезической в точке наблюдения ZAMO, можно получить явное выражение для горизонтального размера тени ($Y = 0$), так как круговые изотропные орбиты соответствуют границе тени.

$$\Delta X = |X_i - X_j|, \quad X_i = \frac{2 \sin \beta_i}{1 + \cos \beta_i}, \quad \sin \beta_i = \frac{\rho_i}{g_{\phi\phi} + g_{t\phi}\rho_i} \sqrt{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}, \quad (6.79)$$

где ρ_i и ρ_j соответствуют прямой и обратной (относительно вращения УКО) самым внутренним неустойчивым изотропным круговым орбитам (ISCO) на

экваторе [210; 211], полученным из уравнений

$$\rho^2 g_{tt} + 2\rho g_{t\phi} + g_{\phi\phi} = 0, \quad \rho = \frac{1}{\partial_r g_{tt}} \left(-\partial_r g_{t\phi} \pm \sqrt{\partial_r g_{t\phi}^2 - \partial_r g_{tt} \partial_r g_{\phi\phi}} \right), \quad (6.80)$$

которые соответствуют минимуму эффективного радиального потенциала. Для асимптотического наблюдателя в асимптотически плоском пространстве-времени горизонтальный размер можно оценить как

$$\Delta X = |\rho_i - \rho_j|/r_O + \mathcal{O}(r_O^{-2}). \quad (6.81)$$

Поэтому удобно определить размерную характеристику типа $\Delta x = \Delta X(r_O - r_H)$ (и аналогично для других величин из стереографической проекции), где сдвиг вводится для избавления от расходимости вблизи горизонт или сингулярность в точке $r = r_H$. Такая величина конечна для бесконечно удаленного наблюдателя, а поправки для конечного r_O имеют порядок $\mathcal{O}(r_O^{-1})$.

6.3.3 Изображения гравитационных теней

KL-подобная геометрия

Оценим экваториальный размер тени для экваториального наблюдателя, используя аналитический результат (6.79). Горизонтальный размер не зависит от скалярного заряда Σ и определяется следующей аналитической формулой [210; 211]

$$\Delta X = |X_+ - X_-|, \quad X_{\pm} = \frac{2 \sin \beta_{\pm}}{1 + \cos \beta_{\pm}}, \quad \sin \beta_{\pm} = \frac{r_O \sqrt{\Delta(r_O)} \rho_{\pm}}{r_O(r_O^2 + a^2) + 2aM(a - \rho_{\pm})}. \quad (6.82)$$

Зависимость величин ΔX и Δx от параметра вращения a и положения наблюдателя r_O показана на рис. 6.5. Для асимптотического наблюдателя $r_O \gg M$ функция Δx стремится к некоторому конечному пределу, и мы можем получить следующий асимптотический ряд

$$\Delta X = 6\sqrt{3} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos(a/M) - \frac{\pi}{6} \right) \left(\frac{M}{r_O} - \frac{M^2}{r_O^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{M^3}{r_O^3} \right). \quad (6.83)$$

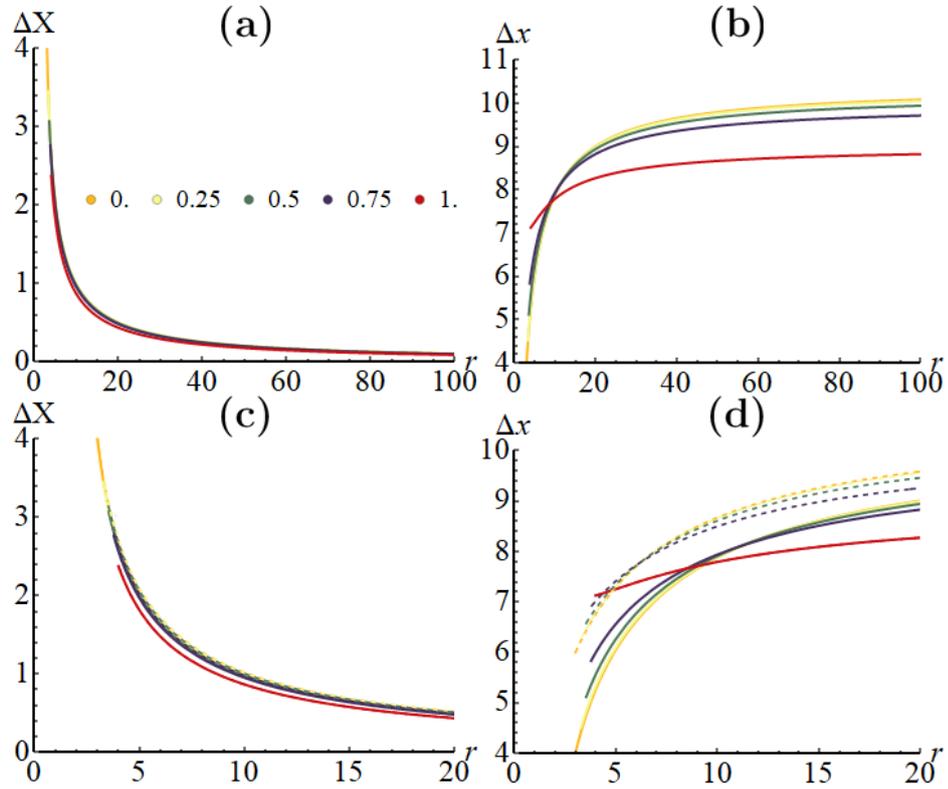


Рисунок 6.5 — Зависимость (а) горизонтального размера ΔX для KL, (б) нормированного горизонтального размера Δx для KL, (с) горизонтального размера ΔX для TSL, (д) нормированный горизонтальный размер Δx для TSL как функция положения наблюдателя r_O для различных параметров a при $M = 1$.

Для статических и экстремальных пределов существует простое точное аналитическое выражение для горизонтального размера тени

$$\Delta X_{\text{static}} = 6\sqrt{3}M/r_O, \quad \Delta X_{\text{extreme}} = 9M/r_O. \quad (6.84)$$

Во-первых, рассмотрим изображение сильного гравитационного линзирования для статического предела. Нулевой скалярный заряд $\Sigma = 0$ соответствует решению Шварцшильда, тень которого показана на рис. 6.6а, где можно найти основные черты сильного гравитационного линзирования – формирование теней (черная область) и релятивистские картинки.

Для случая с малым ненулевым скалярным зарядом $\Sigma \leq b = M$ соответствующее изображение сильного гравитационного линзирования показано на рис. 6.6б. Как и ожидалось, тень и изображение гравитационного линзирования немного отличаются от таковых для решения Шварцшильда. Основное отличие состоит в том, что тень сглажена по сравнению со случаем Шварцшильда. В частности, отклонение от окружности ΔC монотонно возрастает

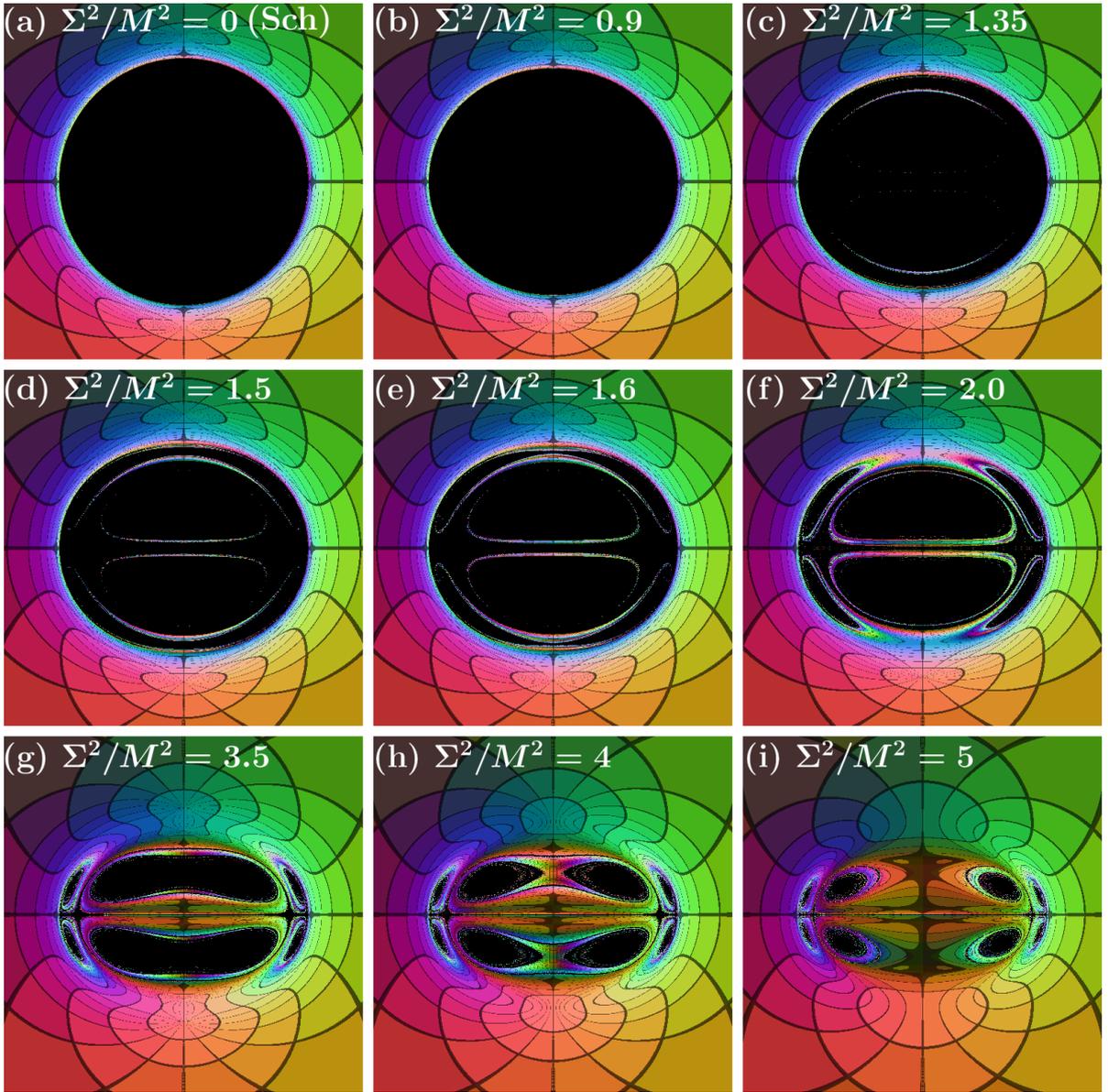


Рисунок 6.6 — Тени решения KL (3.131) в невращающемся пределе для экваториального наблюдателя $r_O/M = 10\,000$, $\theta_O = \pi/2$ для разных значений скалярного заряда Σ .

для более высоких значений Σ . Эволюция изображения с разными Σ аналогична эволюции для метрики Зипой-Вурхиз с другим $\delta = \sqrt{1 + \Sigma^2/M^2} > 1$ [174; 214]. Таким образом, решение в этом диапазоне параметров имитирует решение Шварцшильда и имеет тип слабо голых особенностей.

Однако дальнейшее увеличение скалярного заряда Σ приводит к более заметным эффектам, связанным с наличием скалярного поля. Тень не представляет собой (более или менее деформированный) сплошной диск, и внутри выпуклой оболочки тени можно найти узкие области с рассеянными (не поглощенными) геодезическими (рис. 6.6с). Внутри тени геодезические рассеиваются (например, узкие цветные области внутри теневого диска), так как эти фотоны

входят в фотонную область, пролетают область достаточно близко к сингулярности (т.е. без фундаментальной фотонной поверхности), а затем могут покинуть захваченную область. Этот случай принципиально отличается от случая Шварцшильда или Керра [215].

При некотором большом значении Σ внешний контур тени сливается с внутренним контуром (рис. 6.6d-6.6i). В этих случаях тень резко отличается от керровской из-за того, что поверхности FPS очень деформированы и очень близки к сингулярности, как объяснялось в предыдущем разделе.

Для вращающегося решения результат аналогичен. При малых значениях Σ тень и картина гравитационного линзирования немного отличаются от керровских (см. рис. 6.7a-b), но тень становится более круглой, чем для керровского решения, т.е. отклонение от окружности ΔC уменьшается и достигает некоторого минимального значения, а затем монотонно возрастает (мы используем выпуклую оболочку тени для вычисления округлости, так как граница тени имеет очень некруглую форму).

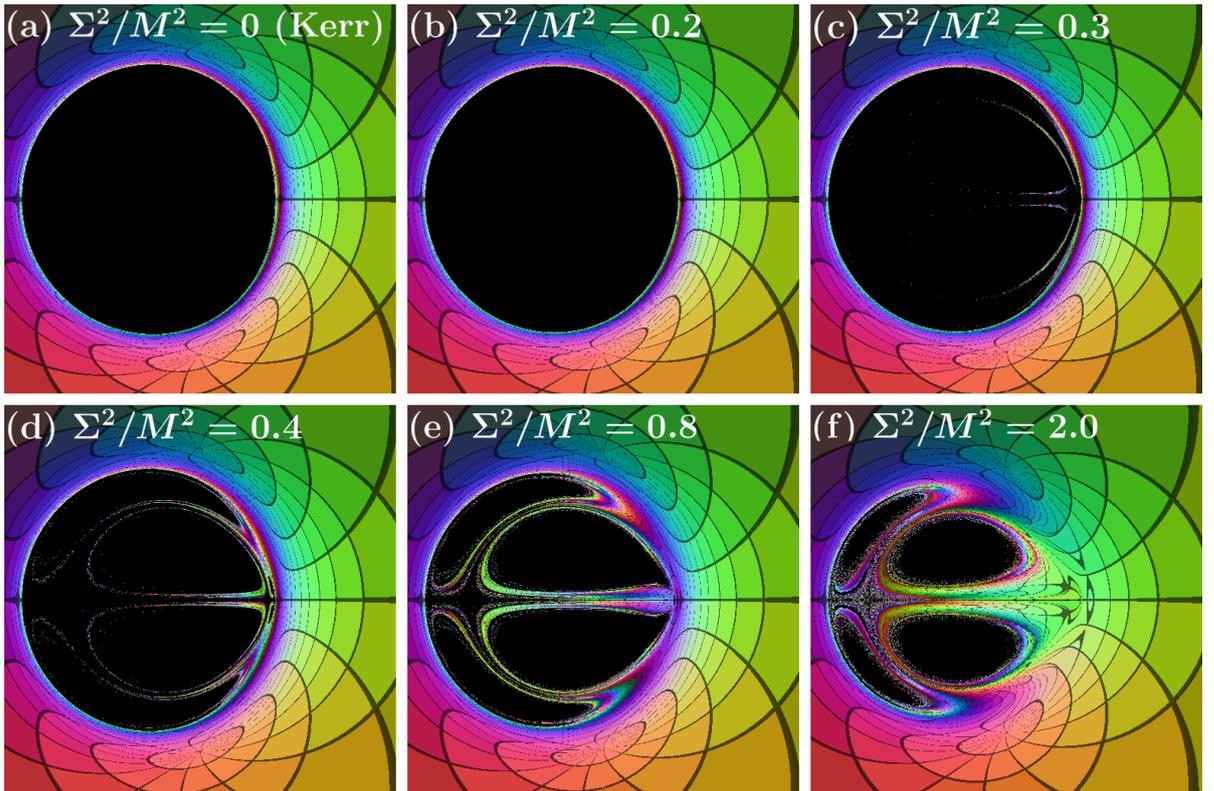


Рисунок 6.7 — Тени решения KL (3.131) с $a = 0,9M$ для экваториального наблюдателя $r_O/M = 10\,000$, $\theta_O = \pi/2$ для разных значения скалярного заряда Σ .

При больших значениях Σ решение сильно деформируется и его граница плохо определяется в численных решениях (рис. 6.7c-f). Значение перехода Σ ,

при котором тень существенно отличается от керровской (т.е. тень не является эллипсовидной и односвязной), возникает при меньших значениях, чем в невращающемся пределе. В частности, в экстремальном пределе тень существенно отличается от экстремальной керровской тени даже при малых значениях Σ (рис. 6.8а-с).

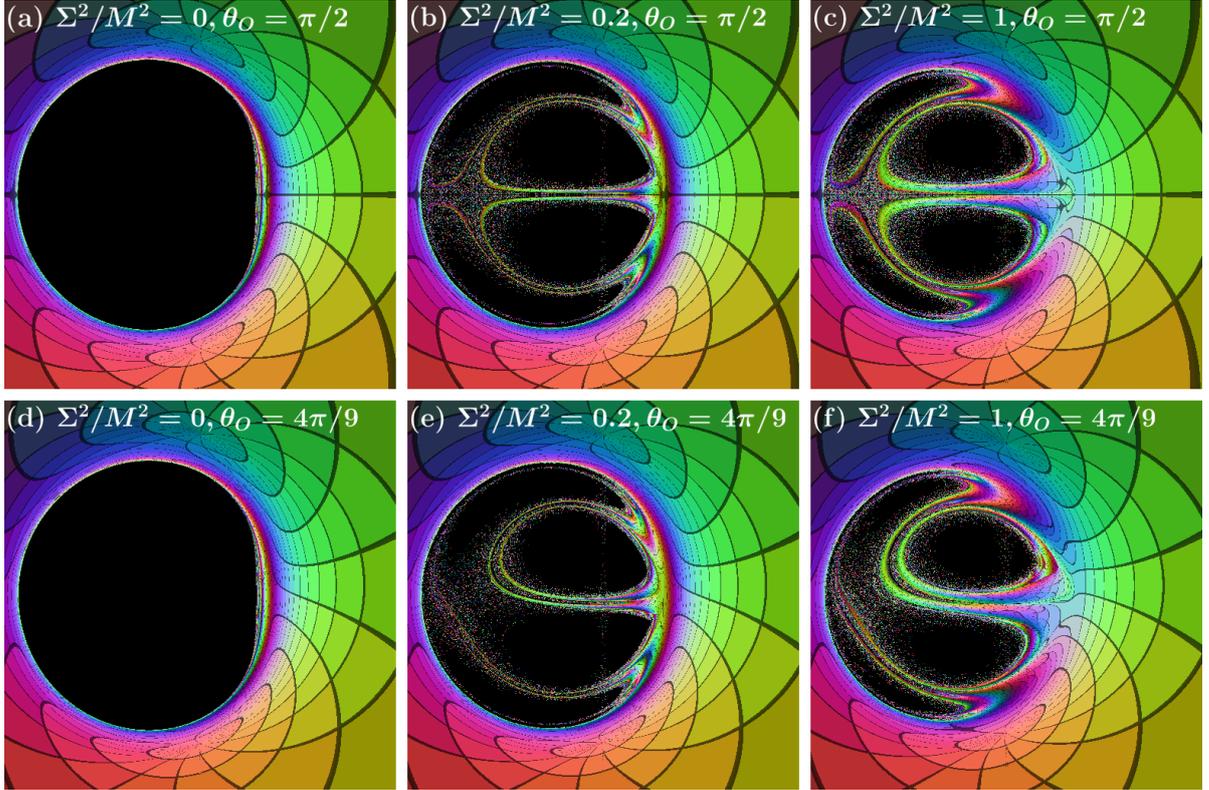


Рисунок 6.8 — Тени почти экстремального решения КЛ (3.131) с $a = 0,998M$ для наблюдателя $r_O/M = 10\,000$ при различных значениях скалярного заряда Σ и угла наблюдения θ_O .

Как и ожидалось, решения с фантомным скалярным полем демонстрируют тени с противоположным поведением – тени вытягиваются в вертикальном направлении (см. рис. 6.9 и рис. 6.10). При всех значениях Σ тень не имеет дополнительной внутренней структуры, но сильнее деформируется при большем значении Σ . Таким образом, это решение является хорошим имитатором Керра, если Σ не очень велико.

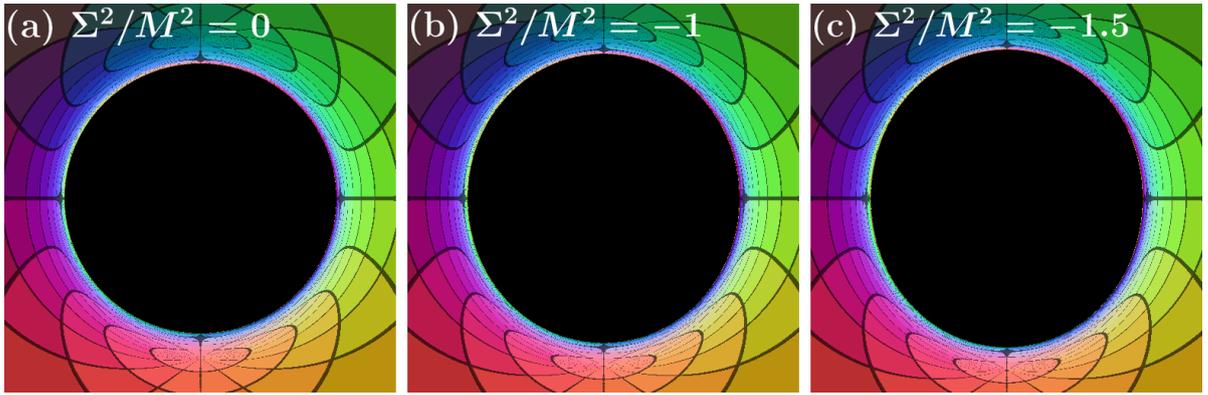


Рисунок 6.9 — Тени статического решения КЛ (3.131) с $a = 0$ для экваториального наблюдателя $r_O/M = 10\,000$, $\theta_O = \pi/2$ для разных значения фантомного скалярного заряда Σ .

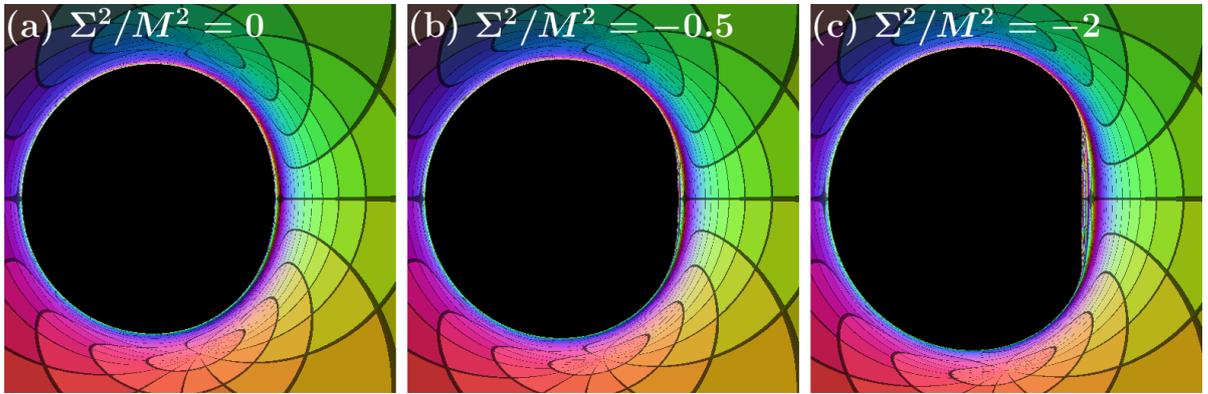


Рисунок 6.10 — Тени экстремального решения КЛ (3.131) с $a = 0,9M$ для экваториального наблюдателя $r_O/M = 10\,000$, $\theta_O = \pi/2$ для разных значений фантомный скалярный заряд Σ .

TSL-геометрия

Рассмотрим тень от решения (3.139), наблюдаемую экваториальным наблюдателем. Используя уравнение (6.79), мы можем определить экваториальный размер тени. Поскольку простого аналитического выражения для ρ не существует, функция экваториального размера тени Δx построена численно на рис. 6.5с-d. Асимптотический наблюдатель вращающегося решения вдали от крайнего предела видит бóльшую тень для решения (3.139), чем для решения Керра.

Для статических и экстремальных пределов точные аналитические выражения для экваториального размера тени имеют вид

$$\Delta X_{\text{static}} = \frac{25}{3} \sqrt{\frac{5}{3}} M/r_O, \quad \Delta X_{\text{extreme}} = 9M/r_O. \quad (6.85)$$

Размеры ΔX тени экстремального решения (3.139) и решения Керра, как и ожидалось, полностью совпадают. Для статического решения экваториальный размер отличается даже для асимптотического наблюдателя, а именно, для решения (3.139) он на 3,5% больше, чем для решения Керра. Кроме того, мы анализируем отношения размеров (например, $\mu_{X/R}$), поскольку они меньше зависят от положения наблюдателя (которое неизбежно конечно в численных расчетах).

Результат численного моделирования тени показан на рис. 6.11. Для сравнения мы также приводим изображение гравитационного линзирования в метрике Керра с теми же значениями параметра вращения a . Как и следовало ожидать из приведенного выше анализа фотонной области, изображение гравитационного линзирования почти идентично керровской метрике. Однако имеется ряд отличий, исследование которых требует более детального анализа.

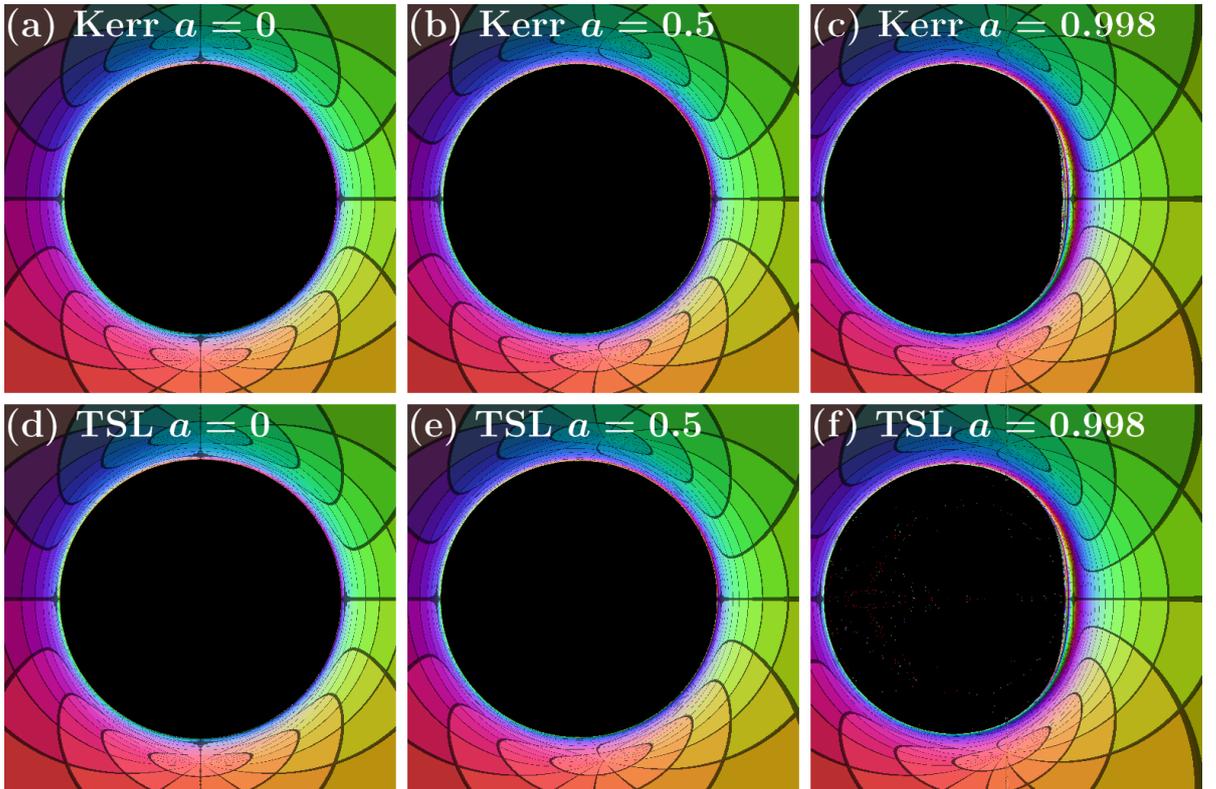


Рисунок 6.11 — Тени (d-f) решения TSL (3.139) и (a-c) метрики Керра с $M = 1$ и $a = 0, 0,5, 0,998$ для экваториального наблюдателя $r_O/M = 10\,000$, $\theta_O = \pi/2$.

Чтобы прояснить эти различия, мы строим семейство границ теней для разных значений параметра вращения (рис. 6.12), а также соответствующие им

подогнанные окружности. Эти семейства внешне очень похожи, но на самом деле они отличаются следующим. Отношения $\mu_{Y/X}$ (красный пунктир), $\mu_{X/R}$ (синий) и $\mu_{Y/R}$ (зеленый) из уравнения (6.78) показаны на рис. 6.13b, а также отклонение от окружности ΔC (6.77) в процентах как функция параметра вращения на рис. 6.13a. Разница между семейством метрик Керра и метрики TSL становится более очевидной. Граница тени решения (3.139) более круглая, чем соответствующая тень метрики Керра для всех значений вращения. На самом деле разница между отклонениями имеет максимум при $a \approx 0,9M$, равном $\approx 0,79\%$, как показано на рис. 6.13c. Отметим, что отклонение от окружности не превышает 10%, что согласуется с наблюдениями M87 [5]. Таким образом, при данном уровне точности наблюдения это решение оптически неотлично от решения Керра. На рис. 6.13d показаны характеристики, больше зависящие от наблюдателя, такие как размер тени по вертикали ΔY и ΔX по горизонтали и ее средний радиус R_c . Тень решения TSL обычно больше, а вертикальный размер тени уменьшается с увеличением a , в отличие от семейства Керра. В крайнем пределе тени совпадают, как и ожидалось, поскольку оба решения совпадают при $a = M$.

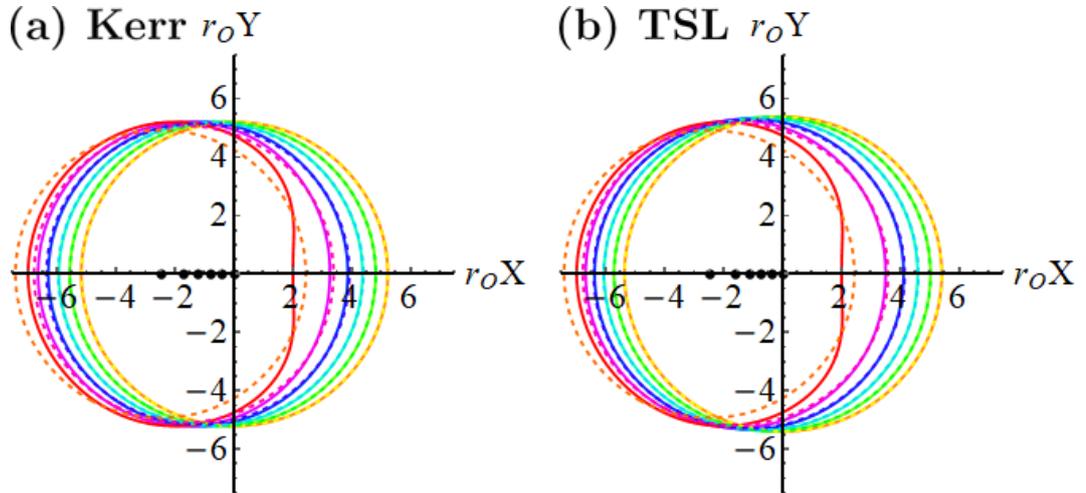


Рисунок 6.12 — Границы тени для (а) Керра и (б) решения TSL (3.139) с $M = 1$ и $a = 0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1$ для экваториального наблюдателя $r_O/M = 10\,000$,

$$\theta_O = \pi/2.$$

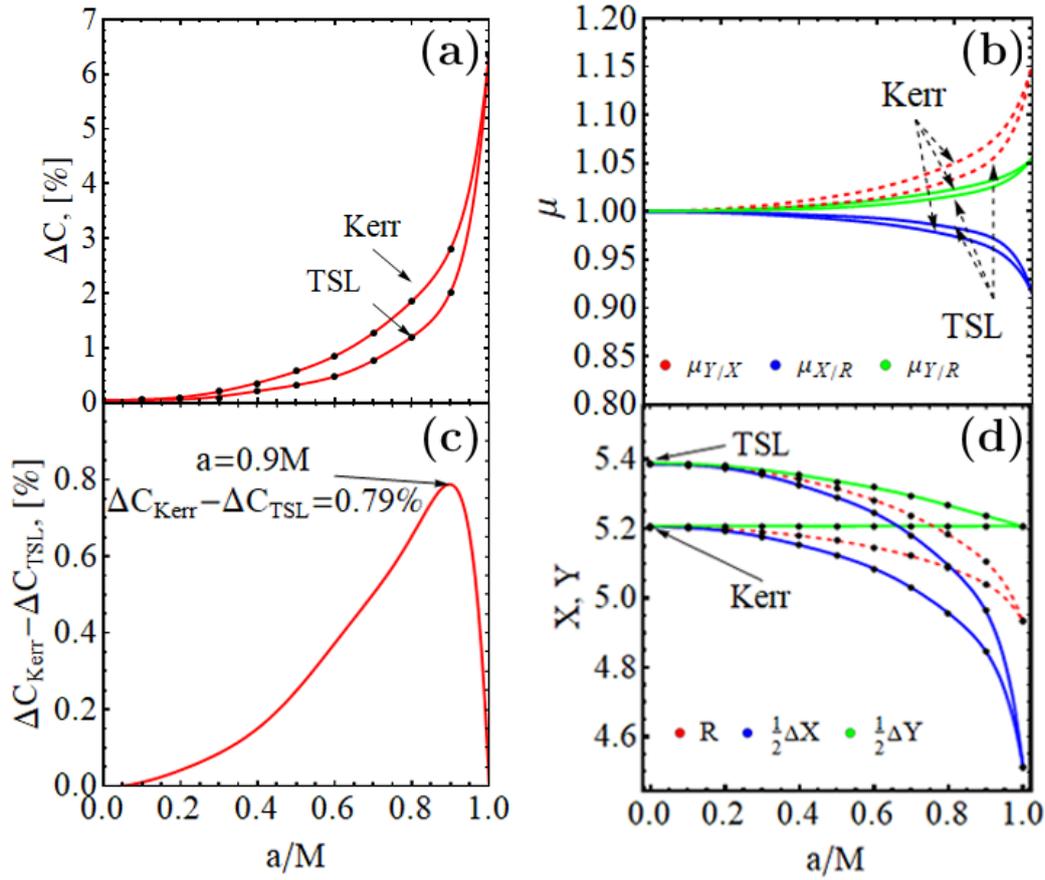


Рисунок 6.13 — Сравнение теней между Керром и решением TSL (3.139) для экваториального наблюдателя $r_O/M = 10\,000$, $\theta_O = \pi/2$: (a) отклонение от окружности, (c) разница между отклонениями, (b) отношения $\mu_{Y/X}$ (красный пунктир), $\mu_{X/R}$ (синий) и $\mu_{Y/R}$ (зеленый) и (d) горизонтальный и вертикальный размер тени и средний радиус. Черные точки обозначают значения, рассчитанные численно, а остальные кривые получены с помощью интерполяции.

6.4 Генерация конформных тензоров Киллинга в расслоенных пространствах

6.4.1 Формализм

Пусть M — лоренцево многообразие [366] размерности t с метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$ и связностью Леви-Чивиты ∇_α в некотором голономном базисе.

Определение 4.1: Тензорные поля K^α и $K_{\alpha\beta}$ называются конформными векторами Киллинга и конформными тензорами Киллинга соответственно,

если ¹

$$\nabla_{(\alpha} K_{\beta)} = \Omega g_{(\alpha\beta)}, \quad \Omega = \frac{1}{m} \nabla_{\alpha} K^{\alpha}, \quad (6.86a)$$

$$\nabla_{(\alpha} K_{\beta\gamma)} = \Omega_{(\alpha} g_{\beta\gamma)}, \quad \Omega_{\gamma} = \frac{1}{m+2} \nabla_{\alpha} (2K_{\gamma}^{\alpha} + K\delta_{\gamma}^{\alpha}), \quad (6.86b)$$

где $K \equiv K_{\alpha}^{\alpha}$ (см. [225; 234]).

Конформные векторы Киллинга и КТК соответствуют набору сохраняющихся величин, определенных как $\mathcal{Q}_{(1)} \equiv \dot{\gamma}^{\alpha} K_{\alpha}$ и $\mathcal{Q}_{(2)} \equiv \dot{\gamma}^{\alpha} \dot{\gamma}^{\beta} K_{\alpha\beta}$ для произвольной нулевой геодезической γ с аффинной параметризацией, т.е. $\dot{\gamma}^{\alpha} \nabla_{\alpha} \mathcal{Q}_{(1,2)} = 0$. Всегда можно построить КТК из конформных векторов Киллинга [225; 249]. Соответствующая сохраняющаяся величина не является независимой, поскольку ее можно выразить через сохраняющиеся величины, связанные с конформными векторами Киллинга. Такие приводимые КТК могут быть построены как симметризованные произведения по следующей процедуре:

Утверждение 4.1: Пусть K_a^{α} – множество из n полей конформных векторов Киллинга ($a = 1, \dots, n$). Тогда можно определить приводимое КТК-поле $K^{\alpha\beta}$ следующим образом

$$K^{\alpha\beta} = \alpha g^{\alpha\beta} + \gamma^{ab} K_a^{\alpha} K_b^{\beta}, \quad (6.87a)$$

$$\Omega^{\alpha} = \nabla^{\alpha} \alpha + 2\gamma^{ab} \Omega_a K_b^{\alpha}, \quad \Omega_a = m^{-1} \nabla_{\alpha} K_a^{\alpha}, \quad (6.87b)$$

где α – произвольная функция, а γ^{ab} – симметричная матрица, состоящая из набора $n(n+1)/2$ независимых констант.

Доказательство: Конформное уравнение Киллинга (6.86a), примененное к тензору (6.87a), дает тождество

$$\nabla_{(\alpha} K_{\beta\gamma)} = \nabla_{(\alpha} (\alpha) g_{\beta\gamma)} + 2\gamma^{ab} \nabla_{(\alpha} (K_{a\beta}) K_{b\gamma)} = \nabla_{(\alpha} (\alpha) g_{\beta\gamma)} + 2\gamma^{ab} \Omega_a g_{(\alpha\beta} K_{b\gamma)}. \quad (6.88)$$

Сравнивая это с уравнением (6.86b), соответствующий вектор Ω^{α} имеет вид

$$\Omega^{\alpha} = \nabla^{\alpha} \alpha + 2\gamma^{ab} \Omega_a K_b^{\alpha}. \quad (6.89)$$

Однако, многообразия могут иметь *нередуцируемые* КТК, обеспечивая новые независимые сохраняющиеся величины для изотропных геодезических,

¹Здесь симметризация определена с весом единица: $T_{(\alpha\beta)} = T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}$.

которые относятся к скрытым симметриям геометрий [234]. Процедура нахождения неприводимых КТК не так проста, как для приводимых тензоров и конформных векторов Киллинга. Для упрощения этой задачи существуют различные методы, основанные на дополнительных жестких ограничениях на геометрию многообразия [245–247]. Здесь мы рассматриваем пространство-время с менее ограничительными условиями, а именно многообразия со слоением коразмерности один общего вида, которые имеют дополнительные произвольные изометрии.

Чтобы расслоить пространство-время, мы будем использовать следующий формализм и обозначения. Во-первых, мы выбираем функцию слоения Φ , которую всегда можно определить локально для любого слоения. Вектор, нормальный к слоям слоения S_s ($\Phi = s$), равен

$$n_\alpha = \pm\varphi \cdot \nabla_\alpha \Phi, \quad n^\alpha n_\alpha = \epsilon, \quad (6.90)$$

где $\varphi \equiv \|\nabla_\alpha \Phi\|^{-1}$ – функция хода, а ϵ равно $+1$ для времениподобных слоев и -1 для пространственноподобных слоев. Метрика индуцированного слоя выражается следующим образом

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \epsilon n_\alpha n_\beta, \quad (6.91)$$

определяя проектор h_β^α и симметричную вторую фундаментальную форму $\chi_{\alpha\beta}$ ²

$$h_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha - \epsilon n^\alpha n_\beta, \quad \chi_{\alpha\beta} \equiv h_\alpha^\lambda h_\beta^\rho \nabla_\lambda n_\rho. \quad (6.92)$$

Соответствующие проекции тензора на касательное пространство слоев принимают вид

$$\mathcal{T}_{\gamma\dots}^{\beta\dots} = h_\rho^\beta \dots h_\gamma^\tau \dots T_{\tau\dots}^{\rho\dots}, \quad \mathcal{D}_\alpha \mathcal{T}_{\gamma\dots}^{\beta\dots} = h_\alpha^\lambda h_\rho^\beta \dots h_\gamma^\tau \dots \nabla_\lambda T_{\tau\dots}^{\rho\dots}, \quad (6.93)$$

где \mathcal{D}_α – связность Леви-Чивиты в S_s . Для заданного слоения можно дополнительно вычислить производную вектора нормали вдоль потока слоев

$$n^\lambda \nabla_\lambda n_\beta = -\epsilon \mathcal{D}_\beta \ln \varphi. \quad (6.94)$$

Докажем следующее утверждение.

²Конвенция для второй фундаментальной формы χ связана с σ в [252] следующим образом: $\chi_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta \equiv -\epsilon \sigma(X, Y)$.

Утверждение 4.2: Коммутатор нормальных и касательных производных, действующих на скаляр, равен

$$[\varphi n^\alpha \nabla_\alpha, \mathcal{D}_\gamma] \omega = (n_\gamma \mathcal{D}^\alpha \varphi - \varphi \chi_\gamma^\alpha) \mathcal{D}_\alpha \omega. \quad (6.95)$$

Доказательство: Во-первых, коммутатор $[n^\alpha \nabla_\alpha, \mathcal{D}_\gamma]$, действующий на скалярную функцию, равен

$$\begin{aligned} [n^\alpha \nabla_\alpha, \mathcal{D}_\gamma] \omega &= [n^\alpha \nabla_\alpha, h_\gamma^\beta \nabla_\beta] \omega = n^\alpha (\nabla_\alpha h_\gamma^\beta) \nabla_\beta \omega - h_\gamma^\beta (\nabla_\beta n^\alpha) \nabla_\alpha \omega \\ &= n^\alpha (-\epsilon \chi_\alpha^\beta n_\gamma - \epsilon n^\beta \nabla_\alpha n_\gamma - n_\alpha n_\gamma n^\lambda \nabla_\lambda n^\beta) \nabla_\beta \omega \\ &\quad - h_\gamma^\beta (\chi_\beta^\alpha + \epsilon n_\beta n^\lambda \nabla_\lambda n^\alpha) \nabla_\alpha \omega \\ &= -\epsilon (n^\beta n^\lambda \nabla_\lambda n_\gamma + n_\gamma n^\lambda \nabla_\lambda n^\beta) \nabla_\beta \omega - \chi_\gamma^\alpha \nabla_\alpha \omega \\ &= -\epsilon n^\lambda \nabla_\lambda n_\alpha (n^\beta h_\gamma^\alpha + n_\gamma h^{\beta\alpha}) \nabla_\beta \omega - \chi_\gamma^\alpha \nabla_\alpha \omega \\ &= \mathcal{D}_\alpha \ln \varphi (n^\beta h_\gamma^\alpha + n_\gamma h^{\beta\alpha}) \nabla_\beta \omega - \chi_\gamma^\alpha \nabla_\alpha \omega. \end{aligned} \quad (6.96)$$

Используя это, найдем выражение для следующего коммутатора

$$\begin{aligned} [\varphi n^\alpha \nabla_\alpha, \mathcal{D}_\gamma] \omega &= \varphi n^\alpha \nabla_\alpha \mathcal{D}_\gamma \omega - \mathcal{D}_\gamma (\varphi n^\alpha \nabla_\alpha \omega) = \\ &= \varphi ([n^\alpha \nabla_\alpha, \mathcal{D}_\gamma] \omega - \mathcal{D}_\gamma \ln \varphi \cdot n^\alpha \nabla_\alpha \omega) \\ &= \varphi (\mathcal{D}_\alpha \ln \varphi (n^\beta h_\gamma^\alpha + n_\gamma h^{\beta\alpha}) \nabla_\beta \omega - \chi_\gamma^\alpha \nabla_\alpha \omega - \mathcal{D}_\gamma \ln \varphi \cdot n^\alpha \nabla_\alpha \omega) \\ &= (n_\gamma \mathcal{D}^\alpha \varphi - \varphi \chi_\gamma^\alpha) \mathcal{D}_\alpha \omega. \end{aligned} \quad (6.97)$$

В дальнейшем выражение (6.95) поможет переформулировать условие интегрируемости системы дифференциальных уравнений первого порядка, которое следует из теоремы Фробениуса:

Утверждение 4.3: Если существует неизвестная скалярная функция ω такая, что

$$n^\alpha \nabla_\alpha \omega = v, \quad \mathcal{D}_\tau \omega = 0, \quad (6.98)$$

то условие интегрируемости этой системы уравнений имеет вид

$$\mathcal{D}_\alpha (\varphi v) = 0. \quad (6.99)$$

Доказательство: Необходимое и достаточное условие интегрируемости на ω следует из теоремы Фробениуса. Из уравнения (6.95) коммутатор векторного

поля, действующий на такую функцию, равен нулю. С другой стороны, из уравнения (6.98) следует другое выражение коммутатора

$$[\varphi n^\alpha \nabla_\alpha, \mathcal{D}_\gamma] \omega = -\mathcal{D}_\gamma(\varphi n^\alpha \nabla_\alpha \omega) = -\mathcal{D}_\gamma(\varphi v), \quad (6.100)$$

которое должно быть равно нулю.

6.4.2 Послойно-редуцируемые тензоры Киллинга

Цель этого раздела состоит в том, чтобы определить, как расщепляются конформные уравнения Киллинга (6.86) в общих расслоенных пространствах, обобщая подход, предложенный в работах [246; 247]. В частности, нас интересует появление нередуцируемого КТК, поднятого из приводимого в слоении, как это было в случае с ТК [252]. Этот механизм отражает природу скрытых симметрий, лежащих в основе возникновения многих известных неприводимых полей КТК.

Уравнения поднятия из слоя

Утверждение 4.4: Пусть K^α – конформное векторное поле Киллинга в многообразии M , расслоенное на S_s , с нормальной ζn^α и касательной \mathcal{K}^α компонентами, а именно $K^\alpha = \mathcal{K}^\alpha + \zeta n^\alpha$. Уравнения Киллинга (6.86a) разбиваются на следующие части (см. [283]):

$$\mathcal{D}_{(\alpha} \mathcal{K}_{\beta)} + 2\zeta \chi_{\alpha\beta} = 2\Omega h_{\alpha\beta}, \quad (6.101a)$$

$$h_\rho^\alpha n^\beta \nabla_\beta \mathcal{K}_\alpha = \chi_\rho^\beta \mathcal{K}_\beta + \epsilon \zeta \mathcal{D}_\rho \ln(\varphi/\zeta), \quad (6.101b)$$

$$\mathcal{K}^\beta \mathcal{D}_\beta \ln \varphi + n^\alpha \nabla_\alpha \zeta = \Omega. \quad (6.101c)$$

Как следствие уравнения (6.101a), конформное векторное поле Киллинга в M , касающееся всех слоев слоения S_s (т. е. $\zeta = 0$), также является конформным векторным полем Киллинга в S_s с той же функцией Ω . В общем

случае некасательных векторных полей, проекция \mathcal{K}_α является конформным вектором Киллинга в слоях, только если вторая фундаментальная форма $\chi_{\alpha\beta}$ пропорциональна индуцированной метрике $h_{\alpha\beta}$, т. е. слои полностью омбиличны. Такие полностью омбилические слои возникают, если они порождены набором (конформных) векторных полей Киллинга и/или пространство-время имеет структуру warped/twisted произведения [366]. Поэтому, порождение нетривиального конформного вектора Киллинга из слоя возможно только в случае полностью омбилического слоения. Как мы увидим далее, случай КТК более сложен.

Утверждение 4.5: Пусть $K_{\alpha\beta}$ – поле КТК в многообразии M , расслоенное на S_s , с нормальной $\zeta n_\alpha n_\beta$, касательной $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$ и смешанной β_α ($n^\alpha \beta_\alpha = 0$) компонентами, т.е. $K_{\alpha\beta} = \mathcal{K}_{\alpha\beta} + \zeta n_\alpha n_\beta + \beta_{(\alpha} n_{\beta)}$. Тогда, уравнения Киллинга (6.86b) разбиваются на следующие части (см. [283]):

$$\mathcal{D}_{(\alpha} \mathcal{K}_{\beta\gamma)} + 2\beta_{(\alpha} \chi_{\beta\gamma)} = {}^\tau \Omega_{(\alpha} h_{\beta\gamma)}, \quad (6.102a)$$

$$h_{(\sigma}^\beta h_{\tau)}^\gamma n^\alpha \nabla_\alpha \mathcal{K}_{\beta\gamma} - 2\chi_{(\sigma}^\alpha \mathcal{K}_{\tau)\alpha} + 2\epsilon \zeta \chi_{(\sigma\tau)} + 2\epsilon \mathcal{D}_{(\sigma} \beta_{\tau)} - 2\epsilon \beta_{(\sigma} \mathcal{D}_{\tau)} \ln \varphi = {}^n \Omega h_{(\sigma\tau)}, \quad (6.102b)$$

$$h_\tau^\gamma n^\alpha \nabla_\alpha \beta_\gamma + \mathcal{K}_\tau^\beta \mathcal{D}_\beta \ln \varphi + \epsilon \mathcal{D}_\tau(\zeta)/2 - \epsilon \zeta \mathcal{D}_\tau \ln \varphi - \chi_\tau^\alpha \beta_\alpha = {}^\tau \Omega_\tau/2, \quad (6.102c)$$

$$n^\alpha \nabla_\alpha \zeta + 2\beta^\beta \mathcal{D}_\beta \ln \varphi = \epsilon \cdot {}^n \Omega, \quad (6.102d)$$

где

$${}^\tau \Omega_\alpha = h_\alpha^\beta \Omega_\beta, \quad {}^n \Omega = n^\beta \Omega_\beta. \quad (6.103)$$

Как и прежде, уравнение (6.102a) сводится к конформному уравнению Киллинга в слоях только при некоторых дополнительных предположениях (см. [283]). В дальнейшем мы будем рассматривать только случай пространства-времени размерности $m > 3$ с не полностью омбилическими слоями. Тогда уравнение (6.102) сводится к следующей системе

$$\mathcal{D}_{(\alpha} \mathcal{K}_{\beta\gamma)} = {}^\tau \Omega_{(\alpha} h_{\beta\gamma)}, \quad (6.104a)$$

$$h_{(\sigma}^\beta h_{\tau)}^\gamma n^\alpha \nabla_\alpha \mathcal{K}_{\beta\gamma} - 2\chi_{(\sigma}^\alpha \mathcal{K}_{\tau)\alpha} + 2\epsilon \zeta \chi_{(\sigma\tau)} = {}^n \Omega h_{(\sigma\tau)}, \quad (6.104b)$$

$$\mathcal{D}_\tau \zeta = \epsilon \cdot {}^\tau \Omega_\tau + 2\zeta \mathcal{D}_\tau \ln \varphi - 2\epsilon \cdot \mathcal{K}_\tau^\beta \mathcal{D}_\beta \ln \varphi, \quad (6.104c)$$

$$n^\alpha \nabla_\alpha \zeta = \epsilon \cdot {}^n \Omega. \quad (6.104d)$$

В общем случае задача нахождения решения уравнений (6.104) по-прежнему остается весьма нетривиальной. Однако ситуацию можно упростить, если слои слоения будут иметь ряд дополнительных внутренних симметрий.

Поднятие послойно-редуцируемых конформных тензоров Киллинга из слоев

Предположим, что многообразие M имеет набор $n \leq m - 2$ линейно независимых конформных векторных полей Киллинга K_a^α , касающихся слоев S_s , т. е. $K_a^\alpha = \mathcal{K}_a^\alpha$. Матрица Грама $\mathcal{G}_{ab} \equiv \mathcal{K}_{a\alpha}\mathcal{K}_b^\alpha$ предполагается обратимой $\mathcal{G}^{ab} = (\mathcal{G}_{ab})^{-1}$. Введем набор дополнительных векторов \mathcal{X}_i^α ($i = 1, \dots, m - n - 1$), ортогональных векторам Киллинга $\mathcal{K}_{a\alpha}\mathcal{X}_i^\alpha = 0$ такой, что \mathcal{K}_a^α и \mathcal{X}_i^α образуют полный базис в слоях³. В силу 4.4, такие векторы K_a^α также являются конформными векторами Киллинга в слоях S_s и редуцируемый КТК вида (6.87) всегда можно определить в следующем виде

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta} = \alpha h_{\alpha\beta} + \gamma^{ab}\mathcal{K}_{a\alpha}\mathcal{K}_{b\beta}, \quad \mathcal{D}_\tau\gamma^{ab} = 0, \quad \gamma^{ab} = \gamma^{ba}. \quad (6.105)$$

Подставляя этот редуцируемый КТК (6.105) в уравнения (6.104) и используя уравнения (6.101) с $\zeta = 0$ для вектора Киллинга, мы получаем окончательную систему уравнений

$$\mathcal{D}_\tau \ln(\zeta - \epsilon\alpha) = \mathcal{D}_\tau \ln \varphi^2, \quad (6.106a)$$

$$2\epsilon(\zeta - \epsilon\alpha)\chi_{\sigma\tau} = \epsilon n^\alpha \nabla_\alpha (\zeta - \epsilon\alpha) h_{\sigma\tau} - n^\alpha \nabla_\alpha \gamma^{ab} \mathcal{K}_{a\sigma} \mathcal{K}_{b\tau}, \quad (6.106b)$$

$${}^n\Omega = \epsilon n^\alpha \nabla_\alpha \zeta, \quad (6.106c)$$

$${}^\tau\Omega_\tau = \mathcal{D}_\tau \alpha + 2\gamma^{ab} \mathcal{K}_{a\tau} \mathcal{K}_b^\alpha \mathcal{D}_\alpha \ln \varphi, \quad (6.106d)$$

Уравнения (6.106c), (6.106d) дают выражения для ${}^n\Omega$ и ${}^\tau\Omega_\tau$ через другие величины. Для этих уравнений всегда существует тривиальное решение $\zeta = \epsilon\alpha$ и $\gamma^{ab} = \text{const}$, которое соответствует редуцируемому КТК в полном пространстве-времени. Однако в некоторых случаях она также может иметь нередуцируемые решения, что соответствует послойно-редуцируемому КТК.

³Такой полный базис корректно определен, так как можно естественным образом выбрать набор линейно независимых конформных векторов Киллинга, такой, что их матрица Грама почти всюду не является вырожденной [252].

Определение 4.2: Конформный тензор Киллинга $K_{\alpha\beta}$ называется послойно-редуцируемым, если существует хотя бы одно слоение многообразия такое, что касательные проекции $K_{\alpha\beta}$ на все слои редуцируемы.

Далее, мы получим общие явные решения для ζ и γ^{ab} и найдем соответствующие необходимые и достаточные условия интегрируемости.

Решение для ζ

Проекция уравнения (6.106b) на конформные векторы Киллинга \mathcal{K}_a^α и ортогональные векторы \mathcal{X}_i^α равны нулю

$$\chi_{\alpha\beta}\mathcal{K}_a^\alpha\mathcal{X}_i^\beta = 0, \quad (6.107)$$

что приводит к условию блок-диагональности второй фундаментальной формы в базисе векторов $\{\mathcal{K}_a, \mathcal{X}_i\}$. Из уравнение свертки (6.106b) только с ортогональными векторами \mathcal{X}_i^α можно найти, что вторая квадратичная форма $\chi_{\alpha\beta}$ частично омбилична [218; 252] по данным направлениям

$$\chi_{\alpha\beta}\mathcal{X}_i^\alpha\mathcal{X}_j^\beta = \chi h_{\alpha\beta}\mathcal{X}_i^\alpha\mathcal{X}_j^\beta, \quad (6.108)$$

со взвешенным следом второй фундаментальной формы χ по ортогональным направлениям \mathcal{X}_i^α ⁴

$$\chi \equiv \frac{1}{m-n-1} \sum_i \frac{\mathcal{X}_i^\alpha \chi_{\alpha\beta} \mathcal{X}_i^\beta}{\mathcal{X}_i^\alpha h_{\alpha\beta} \mathcal{X}_i^\beta} = \frac{1}{2} n^\alpha \nabla_\alpha \ln(\zeta - \epsilon\alpha). \quad (6.109)$$

Подставляя $\zeta - \epsilon\alpha \equiv e^\Psi$ в уравнение (6.109) и (6.106a), можно получить

$$n^\alpha \nabla_\alpha \Psi = 2\chi, \quad (6.110a)$$

$$\mathcal{D}_\tau \Psi = \mathcal{D}_\tau \ln \varphi^2. \quad (6.110b)$$

Систему можно упростить, введя еще одну ассоциированную величину $\tilde{\Psi} \equiv \Psi - \ln \varphi^2$ постоянную в слоях

$$n^\alpha \nabla_\alpha \tilde{\Psi} = 2(\chi - n^\alpha \nabla_\alpha \ln \varphi), \quad (6.111a)$$

$$\mathcal{D}_\tau \tilde{\Psi} = 0. \quad (6.111b)$$

⁴Такой след имеет смысл главной или средней кривизны данного ортогонального подрасслоения. Величина χ связана с h^Ω в [252] следующим образом: $\chi = -\epsilon h^\Omega$

Следуя утверждению 4.3, система (6.111) является интегрируемой, если выполняется следующее условие

$$\mathcal{D}_\gamma(\varphi\chi - \varphi n^\alpha \nabla_\alpha \ln \varphi) = 0. \quad (6.112)$$

Имея в виду, что функция α в целом произвольна, можно выразить ζ из определения Ψ

$$\zeta = e^{\tilde{\Psi}} \varphi^2 + \epsilon \alpha. \quad (6.113)$$

Решение для γ^{ab}

Чтобы найти γ^{ab} для произвольных слоев, нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, обобщающее утверждение 4.1 в [252].

Утверждение 4.6: Пусть все конформные векторные поля Киллинга \mathcal{K}_a^α касаются всех слоев S_s слоения. Тогда выполняется следующее тождество (см. [283]):

$$n^\alpha \nabla_\alpha \mathcal{G}_{ab} = 2\chi_{\alpha\beta} \mathcal{K}_a^\alpha \mathcal{K}_b^\beta. \quad (6.114)$$

Проецируя уравнение (6.106b) на направления вдоль конформных векторов Киллинга $\mathcal{K}_c^\sigma \mathcal{K}_d^\tau$ и, используя утверждение 4.6, можно получить уравнение для γ^{ab}

$$n^\alpha \nabla_\alpha (e^\Psi \mathcal{G}^{ab} - \epsilon \gamma^{ab}) = 0, \quad (6.115)$$

в дополнение к постоянству на слоях $\mathcal{D}_\tau \gamma^{ab} = 0$. Для удобства представим решение в виде

$$\gamma^{ab} = \epsilon e^\Psi \mathcal{G}^{ab} + \nu^{ab}, \quad n^\alpha \nabla_\alpha \nu^{ab} = 0, \quad (6.116)$$

где ν^{ab} – новая матрица. Следуя утверждению 4.3, условие интегрируемости для γ^{ab} имеет вид

$$\mathcal{D}_\gamma(\varphi n^\alpha \nabla_\alpha (e^\Psi \mathcal{G}^{ab})) = 0. \quad (6.117)$$

Используя правило Лейбница и уравнение (6.110а), условие (6.117) можно переписать в следующей форме без Ψ

$$\mathcal{D}_\gamma \left(\mathcal{G}^{ab} + \frac{1}{2\chi} n^\alpha \nabla_\alpha \mathcal{G}^{ab} \right) = -\mathcal{D}_\gamma \ln (\chi \varphi^3) \left(\mathcal{G}^{ab} + \frac{1}{2\chi} n^\alpha \nabla_\alpha \mathcal{G}^{ab} \right), \quad (6.118)$$

что напоминает условие интегрируемости в [252]. Хотя условие (6.117) справедливо для любого χ , условие (6.118) не работает для $\chi = 0$. Это так, поскольку мы неявно предполагаем $\chi \neq 0$, получая (6.118) из (6.117). Выполнение тех же шагов при выводе (6.118), но с учетом $\chi = 0$ приводит к другому условию

$$\mathcal{D}_\gamma (n^\alpha \nabla_\alpha \mathcal{G}^{ab}) = -\mathcal{D}_\gamma \ln \varphi^3 \cdot n^\alpha \nabla_\alpha \mathcal{G}^{ab}. \quad (6.119)$$

Таким образом, мы получили все неизвестные функции системы (6.106) и можем сформулировать следующую теорему, представляющую ключевой результат.

Теорема

Теорема 4.7: Пусть многообразие M содержит набор $n \leq t - 2$ конформных векторных полей Киллинга \mathcal{K}_a^α с невырожденной матрицей Грама $\mathcal{G}_{ab} = \mathcal{K}_a^\alpha \mathcal{K}_{b\alpha}$, касательной к слоям слоения S_s со второй фундаментальной формой $\chi_{\alpha\beta}$, удовлетворяющей (6.107), (6.108) и условию интегрируемости⁵

$$\mathcal{D}_\gamma (\varphi \chi - \varphi n^\alpha \nabla_\alpha \ln \varphi) = 0, \quad (6.120a)$$

$$\mathcal{D}_\gamma \left(\mathcal{G}^{ab} + \frac{1}{2\chi} n^\alpha \nabla_\alpha \mathcal{G}^{ab} \right) = -\mathcal{D}_\gamma \ln (\chi \varphi^3) \left(\mathcal{G}^{ab} + \frac{1}{2\chi} n^\alpha \nabla_\alpha \mathcal{G}^{ab} \right). \quad (6.120b)$$

Тогда на многообразии M существует послойно-редуцируемый КТК, который можно построить следующим образом:

Шаг 1: Получим $\Psi = \ln \varphi^2 + \tilde{\Psi}$ из уравнений

$$n^\alpha \nabla_\alpha \tilde{\Psi} = 2 (\chi - n^\alpha \nabla_\alpha \ln \varphi), \quad \mathcal{D}_\tau \tilde{\Psi} = 0. \quad (6.121)$$

Шаг 2: Получим γ^{ab} из уравнений

$$\gamma^{ab} = \epsilon e^\Psi \mathcal{G}^{ab} + \nu^{ab}, \quad n^\alpha \nabla_\alpha \nu^{ab} = 0, \quad \mathcal{D}_\tau \gamma^{ab} = 0. \quad (6.122)$$

⁵Если $\chi = 0$, уравнение (6.120b) следует заменить на (6.119).

Шаг 3: Используя функции, найденные на предыдущих шагах, построим соответствующий КТК:

$$K_{\alpha\beta} = \alpha g_{\alpha\beta} + \gamma^{ab} \mathcal{K}_{a\alpha} \mathcal{K}_{b\beta} + e^\Psi n_\alpha n_\beta, \quad (6.123a)$$

$${}^n\Omega = n^\alpha \nabla_\alpha \alpha + 2\epsilon\chi e^\Psi, \quad {}^\tau\Omega_\tau = \mathcal{D}_\tau \alpha + 2\gamma^{ab} \mathcal{K}_{a\tau} \mathcal{K}_b{}^\alpha \mathcal{D}_\alpha \ln \varphi, \quad (6.123b)$$

где α – произвольная функция.

Вместо этого алгоритма можно предложить следующую модификацию. Сначала мы проверяем условие интегрируемости (6.120a) и находим Ψ из первого шага. Это позволяет нам использовать условие (6.117) вместо (6.120b), которое работает для всех χ . И затем, как и раньше, мы проходим шаги два и три.

Редукция теоремы к случаю точного ТК

Полученный тензор является точным КТ, если ${}^n\Omega = 0$, ${}^\tau\Omega_\tau = 0$. В [252] было показано, что аналогичная теорема существует для точного КТ второго ранга, если $\mathcal{K}_a{}^\alpha$ являются неконформными векторами Киллинга. В этом случае $\mathcal{K}_a{}^\alpha \mathcal{D}_\alpha \ln \varphi = 0$ и уравнение (6.123b) становятся новой системой уравнений на функцию α

$$n^\alpha \nabla_\alpha \alpha = -2\epsilon\chi e^\Psi, \quad \mathcal{D}_\tau \alpha = 0. \quad (6.124)$$

Если условие послонного постоянства α выполняется, тензор $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$ является КТ в слоях. Следуя утверждению 4.3, условие интегрируемости для α имеет вид

$$\mathcal{D}_\gamma(\varphi\chi e^\Psi) = 0, \quad (6.125)$$

что совпадает с “условием совместимости” в [252] после применения правила Лейбница и уравнения (6.110b):

$$\mathcal{D}_\gamma(\chi\varphi^3) = 0. \quad (6.126)$$

Используя это условие, второе условие интегрируемости (6.120b) сводится к результату в [252]

$$\mathcal{D}_\gamma \left(\mathcal{G}^{ab} + \frac{1}{2\chi} n^\alpha \nabla_\alpha \mathcal{G}^{ab} \right) = 0. \quad (6.127)$$

Новое условие в уравнении (6.126) позволяет нам сформулировать теорему из [252] точнее. Для этого необходимо в теореме для конформного ТК потребовать дополнительно выполнение условия интегрируемости (6.126).

Заметим, что существование точного КТ накладывает дополнительные ограничения на геометрию слоения и включает условия существования СКТ. В частности, метрика, допускающая существование КТ, всегда допускает существование бесконечного семейства КТК, получающихся добавлением величины $\alpha g_{\alpha\beta}$.

6.4.3 Связь с тенями черных дыр и других УКО

Формирование теней и релятивистских изображений стационарных черных дыр и других сверхкомпактных объектов тесно связано с *фотонными регионами* [210; 211; 265], которые определяются как компактные области, где фотоны могут путешествовать бесконечно, не выходя в бесконечность или исчезая за горизонтом событий. Действительно, граница гравитационной тени соответствует набору световых лучей, асимптотически падающих на часть сферических поверхностей в фотонных областях [163; 217; 367].

Сферические поверхности в фотонном регионе так же важны для определения тени стационарной черной дыры, как и *фотонные поверхности* [209; 368] в статическом случае⁶. Напомним, что важное свойство фотонных поверхностей устанавливается теоремой, утверждающей, что это времениподобные полностью омбилические гиперповерхности S в пространстве-времени. Это свойство может служить конструктивным определением для анализа фотонных поверхностей вместо решения геодезических уравнений и играет решающую роль в анализе единственности черной дыры [268–277] и ограничений на площадь поверхности [278–280]. Это особенно полезно в тех случаях, когда уравнения геодезических неразделимы и их аналитическое решение не может быть найдено [369–374].

Однако во вращающемся пространстве-времени, таком как Керр, поверхности $r = \text{const}$ в фотонной области не полностью удовлетворяют

⁶См. недавний обзор эффекта сильного гравитационного линзирования и теней [162; 163; 165].

омбилическому условию и могут иметь границу. Такие поверхности обычно образуют семейство, определяемое значением азимутального прицельного параметра $\rho = L/E$, где L, E – интегралы движения, соответствующие времениподобному и азимутальному векторным полям Киллинга [214; 215]. Для геометрического описания этих поверхностей и фотонного региона было введено понятие *частично омбилических* подмногообразий, ослабляющих омбилическое условие. А именно, можно наложить омбилическое условие не на *все* вектора из касательного пространства TS , а только на некоторое подпространство TS , заданное азимутальным прицельным параметром. Кроме того, мы должны указать граничные условия для подмногообразий, чтобы фотоны не убежали через них. Все вместе, это приводит к определению *фундаментальных фотонных подмногообразий* (ФФП) [218]. Слои, состоящие из фундаментальных фотонных поверхностей, образуют обобщенные фотонные регионы.

В [283] была обобщена связь между ФФП и послойно-редуцируемым КТК, которая изначально была найдена в [216] для ТК. Используем этот факт для того, чтобы описать тень черных дыр и УКО с КТК аналитически.

Вспомним концепцию фундаментальных фотонных поверхностей [218; 258]. Рассмотрим случай многообразия с двумя конформными векторами Киллинга, на которые натянута времениподобная поверхность ($\det(\mathcal{G}_{ab}) < 0$). Определим конформное векторное поле Киллинга

$$\rho^\alpha = \rho^a \mathcal{K}_a^\alpha, \quad \rho^a = (\rho, 1), \quad (6.128)$$

где ρ – константа, а ρ^a нигде не времениподобна ($\rho^\alpha \rho_\alpha \geq 0$). Рассмотрим произвольную аффинно параметризованную изотропную геодезическую γ с сохраняющейся величиной $\rho_\alpha \dot{\gamma}^\alpha$, равной нулю. Из определения (6.128) мы находим, что $\rho = -\mathcal{K}_{2\alpha} \dot{\gamma}^\alpha / \mathcal{K}_{1\alpha} \dot{\gamma}^\alpha$ и ρ можно назвать *обобщенным прицельным параметром* (подробности см. в [218]). Однако, можно выбрать произвольную параметризацию ρ^α с точностью до нормировки. Кроме того, введем ортогональный вектор τ^a такой, что $\tau^a \mathcal{G}_{ab} \rho^b = 0$ (для простоты будем использовать определение $\tau^a \equiv \sqrt{-\mathcal{G}} \mathcal{G}^{ab} \epsilon_{bc} \rho^c$, где $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$ – антисимметричная тензорная плотность).

По определению времениподобная гиперповерхность называется *фундаментальной фотонной поверхностью*, если она омбилична для всех векторов из ортогонального дополнения векторного поля ρ^α

$$\chi_{\alpha\beta} \tau^\alpha \tau^\beta = \chi h_{\alpha\beta} \tau^\alpha \tau^\beta, \quad \chi_{\alpha\beta} \mathcal{X}_i^\alpha \mathcal{X}_j^\beta = \chi h_{\alpha\beta} \mathcal{X}_i^\alpha \mathcal{X}_j^\beta, \quad \chi_{\alpha\beta} \mathcal{X}_i^\alpha \tau^\beta = 0, \quad (6.129)$$

где $\mathcal{K}_{a\alpha}\mathcal{X}_i^\alpha = 0$. Каждый ФФП характеризуется своим ρ . Все изотропные геодезические с таким прицельным параметром ρ , которые касаются ФПС хотя бы в одной точке, касаются ее везде, т.е. в ФПС находятся изотропные геодезические с данным ρ [218]. В то время как полностью омбилическая фотонная поверхность захватывает изотропные геодезические со всеми ρ , ФФП захватывает изотропные геодезические только с определенным значением ρ , поскольку омбилическое условие накладывается только на часть направлений, касательных к ФФП. Подставив явное выражение для τ^α в первое уравнение в (6.129), можно показать, что для описания ФФП можно использовать следующее эквивалентное определение [252].

Определение 4.3: *Фундаментальная фотонная поверхность – это частично омбилическая поверхность со второй фундаментальной формой, удовлетворяющей (6.107), (6.108), такой, что для некоторого $\rho^a \neq 0$, $\tau_a \mathcal{D}_\alpha \rho^a = 0$ (т.е. направление ρ^a постоянно на каждой поверхности) выполняется следующее мастер-уравнение*

$$\rho^a \mathcal{M}_{ab} \rho^b = 0, \quad \mathcal{M}_{ab} \equiv \frac{1}{2\chi} \cdot n^\alpha \nabla_\alpha \mathcal{G}_{ab} - \frac{1}{2\chi} n^\alpha \nabla_\alpha \ln \mathcal{G} \cdot \mathcal{G}_{ab} + \mathcal{G}_{ab}. \quad (6.130)$$

Если фотонная поверхность полностью омбилическая, то оператор \mathcal{M}_{ab} тождественно равен нулю. Времениподобное слоение, порождающее послойно-редуцируемый КТК в соответствии с теоремой 4.7, является ФФП [283]. Можно легко найти решение уравнения (6.130) относительно ρ и проверить условие $\rho_\alpha \rho^\alpha \geq 0$

$$\rho^a = \left(\frac{-\mathcal{M}_{12} \pm \sqrt{-\mathcal{M}}}{\mathcal{M}_{11}}, 1 \right), \quad (6.131a)$$

$$\pm 2(\mathcal{G}_{12} \mathcal{M}_{11} - \mathcal{G}_{11} \mathcal{M}_{12}) \sqrt{-\mathcal{M}} - 2\mathcal{G}_{11} \cdot \mathcal{M} + \mathcal{M}_{11} \cdot \mathcal{G} \cdot \text{Tr}(\mathcal{M}) \geq 0, \quad (6.131b)$$

где

$$\mathcal{M} \equiv \det(\mathcal{M}_{ab}) = \mathcal{M}_{11} \mathcal{M}_{22} - \mathcal{M}_{12}^2, \quad \text{Tr}(\mathcal{M}) \equiv \mathcal{M}_{ab} \mathcal{G}^{ab} = 2 - (2\chi)^{-1} n^\alpha \nabla_\alpha \ln \mathcal{G}. \quad (6.132)$$

Неравенство (6.131b) определяет так называемую фотонную область [210; 211], которая возникает как поток фундаментальных фотонных поверхностей [218].

Тени черных дыр и УКО

Как известно, $m = 4$ пространства-времени с $n = 2$ конформными векторами Киллинга и одним нередуцируемым КТК соответствует полностью интегрируемой динамической системе (для изотропных геодезических). Если известна структура фотонной области, то можно получить общее аналитическое выражение для границы тени [165; 210; 211; 265; 266]. Здесь мы рассмотрим случай послойно-редуцируемых КТК, полученных с помощью теоремы 4.7. Чтобы получить выражение для границы тени, рассмотрим наблюдателя с 4-скоростью $v^\alpha = v^a \mathcal{K}_a^\alpha$ (стационарный наблюдатель [375]) и все возможные изотропные геодезические, пролетающий через него. Векторы, касающиеся этих изотропных геодезических имеют вид

$$\dot{\gamma}^\alpha = \mathfrak{N}(-v^{-1}v^\alpha + \sin(\Phi) \sin(\Theta)v^{-1}u^\alpha + \cos(\Phi) \sin(\Theta)\mathcal{X}^{-1}\mathcal{X}^\alpha - \cos(\Theta)n^\alpha), \quad (6.133)$$

$$v = \sqrt{-v_\alpha v^\alpha}, \quad \mathcal{X} = \sqrt{\mathcal{X}_\alpha \mathcal{X}^\alpha} \quad u^a = (-\mathcal{G})^{1/2} \mathcal{G}^{ab} \epsilon_{bc} v^c,$$

где координаты Φ , Θ кодируют небесную сферу наблюдателя, вектор \mathcal{X} является единственным направлением, ортогональным относительно конформных векторов Киллинга и касающимся слоев, и \mathfrak{N} является некоторой функцией. Функция \mathfrak{N} и произведение синусов $\sin(\Phi) \sin(\Theta)$ находятся из условий $\rho_\alpha \dot{\gamma}^\alpha = 0$ (из определения ρ) и $\mathfrak{N}_\alpha \dot{\gamma}^\alpha = \mathcal{Q}_\mathfrak{N}$:

$$\sin(\Phi) \sin(\Theta) = \frac{\rho_a v^a}{\rho_b u^b}, \quad \mathfrak{N} = v \mathcal{Q}_\mathfrak{N} \left(\frac{\rho_a v^a}{\rho_b u^b} u^c \mathfrak{N}_c - v^c \mathfrak{N}_c \right)^{-1}. \quad (6.134)$$

Здесь \mathfrak{N}^α – произвольный ненулевой конформный вектор Киллинга, направленный не вдоль ρ^α . Величина $\mathcal{Q}_\mathfrak{N}$ является соответствующим интегралом движения. Константа Картера [224], соответствующая послойно-редуцируемому КТК, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{(2)} &\equiv K_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^\alpha \dot{\gamma}^\beta = \mathfrak{N}^2 (e^\Psi \cos^2(\Theta) + v^{-2} \gamma^{ab} \mathcal{Q}_{ab}), \quad (6.135) \\ \mathcal{Q}_{ab} &\equiv v_a v_b - \frac{\rho_c v^c}{\rho_e u^e} (v_a u_b + u_a v_b) + \frac{(\rho_c v^c)^2}{(\rho_e u^e)^2} u_a u_b, \end{aligned}$$

где мы использовали уравнения (6.123а), (6.133) и (6.134). С другой стороны, граница тени соответствует изотропным геодезическим, асимптотически

касающимся ФФП [210; 211; 265] или обычным фотонным поверхностям (ФП) [165]. Для таких геодезических, $\dot{\gamma}^\alpha$ можно всегда разложить на тетраду $\{n^\alpha, \mathcal{X}^\alpha, \rho^\alpha, \tau^\alpha\}$ (сделав замену $v^\alpha \rightarrow \tau^\alpha$ и $u^\alpha \rightarrow \rho^\alpha$ в (6.135)), которая всегда хорошо определена для ФФП

$$\mathcal{Q}_{(2)}^{PS} = \mathcal{Q}_{\mathfrak{N}}^2 (\tau_c \mathfrak{N}^c)^{-2} \gamma^{ab} \tau_a \tau_b \Big|_{PS}, \quad (6.136)$$

где мы учитываем предел $\dot{\gamma}^\alpha n_\alpha \rightarrow 0$ для геодезических, асимптотически касающихся ФФП, и ортогональность ρ^a и τ_a . Нижний индекс PS означает величины, рассчитанные на ФФП. Величина $\mathcal{Q}_{(2)}^{PS}$ – это постоянная Картера, вычисляемая для заданного ФФП. Переписав τ_a через ρ^a и используя решение уравнения (6.131a), получаем следующие выражения

$$\mathcal{Q}_{(2)}^{PS} = \mathcal{Q}_{\mathfrak{N}}^2 (\epsilon_{ef} \mathfrak{N}^e \rho_{PS}^f)^{-2} \gamma^{ab} \epsilon_{ad} \epsilon_{bc} \rho_{PS}^d \rho_{PS}^c \Big|_{PS}, \quad (6.137a)$$

$$\rho_{PS}^a = \left(\frac{-\mathcal{M}_{12} \pm \sqrt{-\mathcal{M}}}{\mathcal{M}_{11}}, 1 \right) \Big|_{PS}. \quad (6.137b)$$

Найдем $\sin(\Phi_{SH}) \sin(\Theta_{SH})$ и $\cos^2(\Theta_{SH})$, соответствующие некоторому ФФП. Произведение синусов можно найти непосредственно из уравнения (6.134), взяв $\rho^a = \rho_{PS}^a$. Косинус можно найти из уравнения (6.135) и учитывая постоянство $\mathcal{Q}_{(2)} = \mathcal{Q}_{(2)}^{PS}$ вдоль изотропной геодезической:

$$\cos^2(\Theta_{SH}) = e^{-\Psi} \left(\mathfrak{N}^{-2} \mathcal{Q}_{(2)}^{PS} - v^{-2} \gamma^{ab} \mathcal{Q}_{ab} \right). \quad (6.138)$$

Прежде чем мы вычислим величины из этого выражения, заметим, что комбинацию трех векторов v^a , u^a , ρ^a в \mathcal{Q}_{ab} и \mathfrak{N} из (6.135) и (6.134) можно привести к виду

$$\mathcal{Q}_{ab} = \mathcal{G}^2 \left(\frac{u^c \epsilon_{cd} v^d}{\rho^e u_e} \right)^2 \epsilon_{af} \epsilon_{bg} \rho^f \rho^g = \left(\frac{v^c v_c}{v^d \epsilon_{de} \rho^e} \right)^2 \epsilon_{af} \epsilon_{bg} \rho^f \rho^g, \quad (6.139a)$$

$$\mathfrak{N} = \mathcal{G}^{-1} v \mathcal{Q}_{\mathfrak{N}} \frac{(\rho^a u_a)}{(\mathfrak{N}^b \epsilon_{bc} \rho^c)(u^d \epsilon_{de} v^e)} = v^{-1} \mathcal{Q}_{\mathfrak{N}} \frac{(v^a \epsilon_{ab} \rho^b)}{(\mathfrak{N}^c \epsilon_{cd} \rho^d)}, \quad (6.139b)$$

где во вторых преобразованиях мы выразили u^a через v^a . Таким образом, величины в уравнении (6.138) имеют вид

$$\gamma^{ab} \mathcal{Q}_{ab} = \left(\frac{v^c v_c}{\epsilon_{de} v^d \rho_{PS}^e} \right)^2 \mathcal{J}_{ab} \Big|_O \rho_{PS}^a \rho_{PS}^b, \quad (6.140a)$$

$$\mathcal{Q}_{(2)}^{PS} = \frac{\mathcal{Q}_{\mathfrak{N}}^2}{(\epsilon_{cd} \mathfrak{N}^c \rho_{PS}^d)^2} \mathcal{J}_{ab} \Big|_{PS} \rho_{PS}^a \rho_{PS}^b, \quad (6.140b)$$

$$\mathfrak{N}^2 = - \frac{\mathcal{Q}_{\mathfrak{N}}^2}{v^a v_a} \left(\frac{\epsilon_{bc} v^b \rho_{PS}^c}{\epsilon_{de} \mathfrak{N}^d \rho_{PS}^e} \right)^2 \Big|_O, \quad (6.140c)$$

где мы ввели

$$\mathcal{J}_{ab} \equiv -\epsilon_{ac} \gamma^{cd} \epsilon_{db} = \mathcal{J}_{ab}^{(1)} + \mathcal{J}_{ab}^{(2)}, \quad \mathcal{J}_{ab}^{(1)} \equiv e^\Psi \mathcal{G}_{ab} / \mathcal{G}, \quad \mathcal{J}_{ab}^{(2)} \equiv -\epsilon_{ac} \nu^{cd} \epsilon_{db}. \quad (6.141)$$

Поскольку ϵ_{ab} , \mathfrak{N}^a , ρ_{PS}^a и $\mathcal{Q}_{\mathfrak{N}}$ одинаковы в ФФП и в точке наблюдателя, мы получаем

$$\cos^2(\Theta_{SH}) = \frac{e^{-\Psi} v^c v_c}{(\epsilon_{de} v^d \rho_{PS}^e)^2} \Big|_O (\mathcal{J}_{ab} \Big|_O - \mathcal{J}_{ab} \Big|_{PS}) \rho_{PS}^a \rho_{PS}^b, \quad (6.142a)$$

$$\sin(\Phi_{SH}) \sin(\Theta_{SH}) = \frac{v_a \rho_{PS}^a}{u_b \rho_{PS}^b} \Big|_O, \quad (6.142b)$$

где $\Big|_O$ и $\Big|_{PS}$ указывают на то, что выражения следует брать в точке наблюдателя и ФФП соответственно.

Полученные выражения задают границу как функцию слоения ФФП и зависят только от геометрии и четырех-скорости наблюдателя. Эти выражения являются обобщением аналогичных аналитических выражений для границы тени в [165; 210; 211; 265]. Согласно теореме 4.7, γ^{ab} постоянна для каждого ФФП. Следовательно, \mathcal{J}_{ab} не зависит от точки слоя ФФП и может быть вычислено в любом месте соответствующего слоя. Хотя ФФП может представлять только подобласть всего слоя слоения из-за условия $\rho_\alpha \rho^\alpha \geq 0$, постоянство \mathcal{J}_{ab} верно на всем слое. Для простоты введем координату r , соответствующую параметру слоения, и координату θ вдоль направления \mathcal{X} . Также по теореме 4.7 ν^{ab} не зависит от r

$$\mathcal{J}_{ab}(r) = \mathcal{J}_{ab}^{(1)}(r, \theta) + \mathcal{J}_{ab}^{(2)}(\theta). \quad (6.143)$$

В итоге, чтобы найти \mathcal{J}_{ab} , мы можем использовать любое значение θ в выражениях $\mathcal{J}_{ab}^{(1,2)}$. Если это так, то $\mathcal{J}_{ab} \Big|_O$ и $\mathcal{J}_{ab} \Big|_{PS}$ могут быть вычислены для одного

и того же θ

$$\mathcal{J}_{ab}|_O - \mathcal{J}_{ab}|_{PS} = \mathcal{J}_{ab}^{(1)}(r_O, \theta) - \mathcal{J}_{ab}^{(1)}(r_{PS}, \theta), \quad (6.144)$$

где окончательное выражение является функцией от r_O и r_{PS} , и в вычислениях на практике можно подставить любое значение θ (например, $\theta = \pi/2$). Таким образом, для определения тени нам нужно знать только конформные векторные поля Киллинга, нормальную компоненту послойно-редуцируемого КТК и соответствующее слоение со слоями, представляющими ФФП.

Тени для асимптотически удаленных наблюдателей

Предположим, что многообразие M является стационарным локально асимптотически плоским пространством-временем (с параметром НУТ N)

$$\mathcal{G}_{ab} dx^a dx^b = -A(r, \theta) (dt - C(r, \theta) d\phi)^2 + B(r, \theta) r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (6.145)$$

$$A|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 1, \quad B|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 1, \quad C|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow C_\infty(\theta) = -2N(\cos \theta + C_N),$$

и слоение определяется слоями $r = \text{const}$ в $r \rightarrow \infty$ (с $g_{rr} \rightarrow 1$, $g_{\theta\theta} \rightarrow r^2$). Тогда можно взять следующую асимптотику

$$\varphi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 1, \quad \chi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 1/r, \quad e^\Psi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow r^2, \quad (6.146)$$

где последний предел следует из уравнения (6.110).

Произвольный стационарный наблюдатель [375]

$$v^\alpha = v^t \delta_t^\alpha + v^\phi \delta_\phi^\alpha, \quad v^t|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 1, \quad r^2 v^\phi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow w(\theta_O), \quad (6.147)$$

пролетает в асимптотически удаленной точке $\theta = \theta_O$, $r = r_O \rightarrow \infty$ и имеет конечный асимптотический угловой момент

$$\mathcal{Q}_\phi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \mathcal{Q}_\phi^\infty \equiv C_\infty(\theta_O) + w(\theta_O) \sin^2 \theta_O, \quad (6.148)$$

даже для случая без НУТ. В частности, асимптотически удаленный наблюдатель имеет нулевой угловой момент для $w(\theta_O) = -C_\infty(\theta_O) \sin^{-2} \theta_O$ [365; 375]. Используя тождество (6.144) при $\theta = \theta_O$, метрику (6.145), асимптотику (6.146)

и вектор скорости для наблюдателя из уравнения (6.147), после объемных простых вычислений, разложение уравнений (6.142) по r_O^{-1} имеет вид

$$\cos^2(\Theta_{SH}) = 1 - \frac{R_{SH}^2}{r_O^2} + \mathcal{O}(r_O^{-3}), \quad \sin(\Phi_{SH}) \sin(\Theta_{SH}) = \frac{\rho_N}{r_O \sin \theta_O} + \mathcal{O}(r_O^{-2}), \quad (6.149a)$$

$$\rho_N \equiv \rho_{PS} - \mathcal{Q}_\phi^\infty, \quad R_{SH}^2 \equiv \sin^{-2} \theta_O \cdot \rho_N^2 - \mathcal{J}_{ab}^{(1)}(r_{PS}, \theta_O) \rho_{PS}^a \rho_{PS}^b, \quad (6.149b)$$

где $\rho_{PS} \equiv \rho_{PS}^1$. Предел выражений, взятых в положении наблюдателя ($r_O \rightarrow \infty$), не зависит от конкретного вида функций A, B, C и v^t, v^ϕ , за исключением их асимптотических значений. Функции A, B, C играют важную роль только при вычислении ρ_{PS} и $\mathcal{J}_{ab}^{(1)}(r_{PS}, \theta)$ или для нахождения поправок более высокого порядка. Поскольку $\cos^2(\Theta_{SH})$ близко к 1, можно использовать разложение косинуса, чтобы получить следующее асимптотическое решение

$$\Theta_{SH} = \frac{R_{SH}}{r_O}, \quad \Phi_{SH} = \arcsin \left(\frac{\rho_N(\theta_O)}{R_{SH} \sin \theta_O} \right). \quad (6.150)$$

Тень расположена вблизи зенита наблюдателя, где координаты Θ, Φ можно локально рассматривать как полярную систему координат. Изображение тени, параметризованное декартовой системой координат, имеет вид

$$X = -\frac{R_{SH}}{r_O} \sin(\Phi_{SH}) = -\frac{\rho_N}{r_O \sin \theta_O}, \quad (6.151a)$$

$$Y = \pm \frac{R_{SH}}{r_O} \cos(\Phi_{SH}) = \pm \frac{\sqrt{R_{SH}^2 \sin^2 \theta_O - \rho_N^2}}{r_O \sin \theta_O} = \pm \frac{1}{r_O} \sqrt{-\mathcal{J}_{ab}^{(1)}(r_{PS}, \theta_O) \rho_{PS}^a \rho_{PS}^b}. \quad (6.151b)$$

Чтобы построить границу тени относительно некоторого наблюдателя с определенным θ_O , можно выполнить следующие шаги. Возьмем некоторую координату r_{PS} и вычислим прицельный параметр ρ_{PS} и $\mathcal{J}_{ab}^{(1)}(r_{PS}, \theta_O)$, используя (6.137b) и (6.141). Подставим эти значения и азимут наблюдателя θ_O в $\bar{X} = r_O X, \bar{Y} = r_O Y$ из (6.151). Повторим эти действия для всех r_{PS} , определенных из условия $\rho_{PS}^a \mathcal{G}_{ab} \rho_{PS}^b \Big|_{\theta=\theta_O}^{r=r_{PS}} \geq 0$ (подмножество в семействе поверхностей полного фотонного региона).

Из уравнения (6.151) видно, что изменение асимптотического значения $w \rightarrow w' = w + \Delta w$ (и, соответственно, асимптотически удаленного углового момента \mathcal{Q}_ϕ^∞) не меняет форму тени, а только сдвигает ее

$$\bar{Y} \rightarrow \bar{Y}, \quad \bar{X} \rightarrow \bar{X} + \Delta w(\theta_O) \sin \theta_O. \quad (6.152)$$

Этот сдвиг можно интерпретировать как иной выбор начала координат небесной сферы наблюдателя [165]. Если начало системы координат задано главными изотропными лучами [165; 210; 211; 265], например, для решения Плебанского-Демьянского, $w(\theta) = a$ воспроизводит результат (53) из [165] точно. Таким образом, мы получили прямое обобщение ряда выражений, полученных в работах [165; 266].

6.4.4 Применение и примеры

Анзац с $m - 2$ коммутирующими векторами Киллинга

Зафиксируем наши обозначения для общей m -мерной метрики с $m - 2$ коммутирующими векторами Киллинга [376], представленной в виде

$$ds^2 = \mathcal{G}_{ab} dy^a dy^b + \lambda_{ij} dx^i dx^j, \quad (6.153)$$

где y^a – координаты вдоль векторов Киллинга и $i, j = 1, 2$. Поскольку помимо направлений Киллинга есть только две координаты, можно выбрать координаты x^i так, чтобы $x_1 = \text{const}$ задавало слои слоения (мы используем нижние индексы для ясности). Тогда преобразование $x_2 \rightarrow x_2 - \int dx_1 (\lambda_{12}/\lambda_{22})$ удаляет смешанную компоненту λ_{12} , оставляя условие слоения неизменным. Далее, мы будем рассматривать случай $\lambda_{11} \equiv \lambda_1$, $\lambda_{22} \equiv \lambda_2$, $\lambda_{12} = 0$, что приводит к следующим выражениям

$$n^\alpha \nabla_\alpha = \lambda_1^{-1/2} \partial_1, \quad \chi = \frac{1}{2} \lambda_1^{-1/2} \partial_1 \ln \lambda_2, \quad \varphi = \lambda_1^{1/2}, \quad (6.154)$$

и из уравнения (6.111),

$$\Psi = \ln \lambda_1 + \tilde{\Psi}(x_1), \quad \partial_1 \tilde{\Psi}(x_1) = \partial_1 \ln(\lambda_2/\lambda_1). \quad (6.155)$$

Условия интегрируемости имеют вид

$$\partial_2 \partial_1 \ln(\lambda_2/\lambda_1) = 0, \quad \partial_2 \partial_1 (e^\Psi \mathcal{G}^{ab}) = 0. \quad (6.156)$$

Первое условие означает, что λ_1 и λ_2 можно представить как функцию только одной переменной, умноженную на общий множитель, зависящий от

обеих координат. Такие координаты легко преобразовать к виду $\lambda_{ij}dx^i dx^j = \lambda(x_1, x_2)(dx_1^2 + dx_2^2)$. В этом случае кривая $x_1 = \text{const}$ строится по *изотермической* координате. Тогда второе условие принимает вид $\partial_2 \partial_1 (\lambda \mathcal{G}^{ab}) = 0$ и метрика вдоль векторов Киллинга равна

$$\mathcal{G}_{ab} = (\mathcal{F}^{-1})_{ab} \lambda, \quad (6.157)$$

где матрица \mathcal{F} представляет собой матрицу функций вида $\mathcal{F}^{ab}(x_1, x_2) = \mathcal{X}_1^{ab}(x_1) + \mathcal{X}_2^{ab}(x_2)$. Окончательная структура метрики выглядит следующим образом

$$ds^2/\lambda = (\mathcal{F}^{-1})_{ab} dy^a dy^b + dx_1^2 + dx_2^2. \quad (6.158)$$

Полученная метрика ожидаемо обеспечивает разделяемость безмассового уравнения Гамильтона-Якоби. Чтобы метрика выглядела менее ограничительной, можно выполнить преобразования вида $x^i = x^i(x^i)$ (где i фиксировано)

$$ds^2/\lambda = (\mathcal{F}^{-1})_{ab} dy^a dy^b + f_1(x_1) dx_1^2 + f_2(x_2) dx_2^2, \quad (6.159)$$

с соответствующим КТК

$$K^{\alpha\beta} = \alpha(x_1, x_2) g^{\alpha\beta} + \mathcal{X}_1^{ab}(x_1) \delta_a^\alpha \delta_b^\beta + f_1(x_1)^{-1} \delta_{x_1}^\alpha \delta_{x_1}^\beta, \quad (6.160a)$$

$$\Omega_\alpha = \partial_\alpha \alpha(x_1, x_2) + \delta_\alpha^{x_1} \cdot \partial_{x_1} \lambda. \quad (6.160b)$$

Для проверки условий интегрируемости КТК необходимо убедиться, что метрика может быть представлена в виде (6.159). Эта форма метрики и слоения удовлетворяет условию (6.107) автоматически, а уравнение (6.108) является не условием, а выражением для χ (поскольку существует только одно уравнение с одной неизвестной функцией χ). Метрическая форма (6.159) имеет формальную симметрию $x_1 \leftrightarrow x_2$, поэтому если слоение $x_1 = \text{const}$ порождает КТК, то слоение $x_2 = \text{const}$ тоже будет его генерировать.

Кроме того, если нас интересуют точные КТ, третье условие интегрируемости $\mathcal{D}_\gamma(\chi\varphi^3) = 0$ дает $\partial_2 \partial_1 \lambda = 0$, а множитель λ должен быть функцией вида $\lambda = \mathcal{F}^\lambda(x_1, x_2) = \mathcal{X}_1^\lambda(x_1) + \mathcal{X}_2^\lambda(x_2)$ и $\alpha = -\mathcal{X}_1^\lambda(x_1)$ (для сравнения см. [228; 235–237], где аналогичная форма метрики была предложена из других соображений).

Черная дыра ЭМДА

Решения стационарно заряженных черных дыр Эйнштейна-Максвелла-дилатон-аксиона с НУТ, соответствующие супергравитации $\mathcal{N} = 4$ или теории гетеротических струн, зависящие от семи параметров: массы M , электрического и магнитного зарядов Q, P , параметра вращения a , НУТ N и асимптотических значений полей дилатона и аксиона (не относящихся к метрике), были получены в [299]. Решение для черной дыры без НУТ было ранее получено Сенем [297] и теперь обычно называется метрикой Керра-Сена. Невращающиеся решения с НУТ были независимо получены Каллош и др. [298] и Джонсоном с Майерсом [377]. Метрика Керра-Сена часто рассматривается как деформированный Керр при моделировании отклонений от стандартной картины черных дыр [378]. Линейный элемент решения можно записать в керровской форме в координатах Бойера-Линдквиста

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} (dt - \omega d\phi)^2 + \Sigma \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 + \frac{\Delta \sin^2 \theta}{\Delta - a^2 \sin^2 \theta} d\phi^2 \right), \quad (6.161)$$

где функции Δ , ω , Σ переопределяются следующим образом

$$\Delta = (r - r_-)(r - 2M) + a^2 - (N - N_-)^2, \quad (6.162a)$$

$$\Sigma = r(r - r_-) + (a \cos \theta + N)^2 - N_-^2, \quad (6.162b)$$

$$\omega = \frac{-2W}{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}, \quad W = N\Delta \cos \theta + a \sin^2 \theta (M(r - r_-) + N(N - N_-)) \quad (6.162c)$$

со следующими краткими обозначениями для констант

$$r_- = \frac{M|\mathcal{Q}|^2}{|\mathcal{M}|^2}, \quad N_- = \frac{N|\mathcal{Q}|^2}{2|\mathcal{M}|^2}, \quad \mathcal{M} = M + iN, \quad \mathcal{Q} = Q - iP. \quad (6.163)$$

Полное решение также содержит поля Максвелла, дилатона ϕ и аксиона κ (форму которых можно найти в [299]). Решение сводится к Керр-НУТ при $Q = P = 0$. Показано, что оно принадлежит к общему типу Петрова I [379; 380], в отличие от аналогичного решения в модели Эйнштейна-Максвелла, Керра-Ньюмана-НУТ, которое принадлежит типу D .

Для построения КТК прежде всего, из метрики $\lambda = \Sigma$ извлекается конформный множитель λ . После этого метрика (6.161) принимает разделяемый

вид (6.159) с

$$\mathcal{F}^{ab} = \underbrace{-\Delta^{-1} \begin{pmatrix} S^2 & aS \\ aS & a^2 \end{pmatrix}}_{\chi_r^{ab}(r)} + \underbrace{\sin^{-2} \theta \begin{pmatrix} \chi^2 & \chi \\ \chi & 1 \end{pmatrix}}_{\chi_\theta^{ab}(\theta)}, \quad f_r(r) = \Delta^{-1}, \quad f_\theta(\theta) = 1, \quad (6.164)$$

где

$$\chi \equiv a \sin^2 \theta - 2N \cos \theta, \quad S \equiv r(r - r_-) + a^2 + N^2 - N_-^2. \quad (6.165)$$

Нередуцируемый КТК (6.160a) принимает вид

$$\begin{aligned} K^{\alpha\beta} &= \alpha g^{\alpha\beta} - \Delta^{-1} S^\alpha S^\beta + \Delta \delta_r^\alpha \delta_r^\beta, \quad \Omega_\alpha = \partial_\alpha \alpha + (2r - r_-) \delta_\alpha^r, \\ S^\alpha &= (r(r - r_-) + a^2 + N^2 - N_-^2) \delta_t^\alpha + a \delta_\phi^\alpha. \end{aligned} \quad (6.166)$$

Поскольку λ разделяемо, мы всегда можем получить КТ, выбрав $\alpha = -r(r - r_-)$ [293]. Для обзора решения Керра-Сена см. [381].

Из общих уравнений (6.149), тень, сфотографированная асимптотическим наблюдателем (с $w(\theta_O) = a$), имеет следующую границу

$$R_{SH}^2 = \frac{4\tilde{r}^2}{(\tilde{r} - M)^2} (\tilde{r}^2 - 2M\tilde{r} + a^2 - (N - N_-)^2 - r_-^2/4 + Mr_-), \quad (6.167a)$$

$$\rho_N = -\frac{1}{a(\tilde{r} - M)} \left(\tilde{r}^3 - 3M\tilde{r}^2 + \tilde{r} (-3N^2 + 4NN_- - N_-^2 + 2Mr_- + a^2 - r_-^2/4) + \right. \quad (6.167b)$$

$$\left. + M(N^2 - N_-^2 + a^2 - r_-^2/4) \right) + 2N \cos \theta_O - a \sin^2 \theta_O,$$

где $\tilde{r} = r_{PS} - r_-/2$. Уравнение границы для тени ЭМДА аналогично случаю Плебанского-Демьянского в терминах сдвинутого радиуса \tilde{r} с точностью до переопределения некоторых коэффициентов [283]. В частном случае Керра-НУТ $r_- = N_- = 0$ граница тени в точности совпадает с границей тени для решения Плебанского-Демьянского при $\beta = 0$ [283]. Численный расчет этих функций демонстрирует следующую закономерность. Увеличение значения параметра $|\mathcal{Q}|^2$ приводит к небольшому уменьшению размера (среднего радиуса) тени, но увеличению ее деформации (отклонения от окружности). Этот эффект аналогичен решению Плебански-Демьянски, где электрические/магнитные заряды вносят аналогичную картину. Тень решения напоминает экстремальное решение Керра-Ньюмена при достаточно больших $|\mathcal{Q}|^2$. Таким образом, это решение можно считать хорошей имитацией Керра-Ньюмана.

Вращающиеся асимптотически плоские черные дыры STU

Черные дыры STU представляют собой общие $\mathcal{N} = 8$ супергравитационные решения [244]. В этом подразделе мы сосредоточимся на вращающихся электрически заряженных черных дырах в некалиброванной супергравитации STU, которые характеризуются массой M , угловым моментом J и четырьмя электрическими зарядами, параметризуемыми константами $s_i, i = 1, 2, 3, 4$. Используя методы генерации решений, это семейство метрик было впервые получено в [382] (см. также [383; 384]) и выглядит следующим образом:

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} (dt - \omega d\phi)^2 + \Sigma \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 + \frac{\Delta \sin^2 \theta}{\Delta - a^2 \sin^2 \theta} d\phi^2 \right), \quad (6.168)$$

где функции Δ, ω, Σ определяются как

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad \omega = -\frac{2MaW \sin^2 \theta}{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}, \quad W = (\Pi_c - \Pi_s)r + 2M\Pi_s, \quad (6.169a)$$

$$\Sigma^2 = \prod_i^4 (r + 2Ms_i^2) + a^4 \cos^4 \theta + 2a^2 R^2 \cos^2 \theta, \quad (6.169b)$$

$$R^2 = r^2 + Mr \sum_i^4 s_i^2 + 4M^2(\Pi_c - \Pi_s)\Pi_s - 2M^2 \sum_{i < j < k}^4 s_i^2 s_j^2 s_k^2, \quad (6.169c)$$

со следующими константами

$$\Pi_s = \prod_i^4 s_i, \quad \Pi_c = \prod_i^4 \sqrt{1 + s_i^2}. \quad (6.170)$$

Аналогично извлекается общий конформный фактор λ из метрики $\lambda = \Sigma$ и находится разделяемая форма метрики (6.168)

$$\mathcal{F}^{ab} = \underbrace{-\Delta^{-1} \begin{pmatrix} S^2 & aS \\ aS & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{X}_r^{ab}(r)} + \underbrace{\begin{pmatrix} -a^2 \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}}_{\mathcal{X}_\theta^{ab}(\theta)}, \quad f_r(r) = \Delta^{-1}, \quad (6.171)$$

где

$$Q \equiv 2R^2 - r(r - 2M), \quad S \equiv 2MW. \quad (6.172)$$

Нередуцируемым КТК (6.160a) является

$$K^{\alpha\beta} = \alpha g^{\alpha\beta} - \Delta^{-1} S^\alpha S^\beta - \left(r^2 + 2Mr \left(1 + \sum_i^4 s_i^2 \right) \right) \delta_t^\alpha \delta_t^\beta + \Delta \delta_r^\alpha \delta_r^\beta, \quad (6.173)$$

$$\Omega_\alpha = \partial_\alpha \alpha + \Sigma' \delta_\alpha^r, \quad S^\alpha = 2M ((\Pi_c - \Pi_s)r + 2M\Pi_s) \delta_t^\alpha + a\delta_\phi^\alpha.$$

В частном случае $s_i = 0$ этот тензор сводится к тензору Киллинга метрики Керра с дополнительным сдвигом на тривиальный тензор $a^2 \delta_t^\alpha \delta_t^\beta + a(\delta_t^\alpha \delta_\phi^\beta + \delta_\phi^\alpha \delta_t^\beta)$.

КТК можно свести к КТ, только если Σ разделяем. Смешанная производная $\partial_r \partial_\theta \Sigma$ имеет вид дроби с полиномиальным числителем. Обнуляя коэффициенты при всех степенях $r^a \cdot \cos^b \theta$ числителя, получаем, что Σ разделяема тогда и только тогда, когда выполняются все следующие условия (для $M \neq 0$ и $a \neq 0$)

$$s_i^2 = s_j^2, \quad s_k^2 = s_l^2, \quad s_i s_k = s_j s_l, \quad (6.174)$$

где (i, j, k, l) – любая перестановка $(1, 2, 3, 4)$. Рассмотрим несколько частных случаев [384].

1. Черные дыры Эйнштейна-Максвелла с $s_i = s$. Конформный фактор

$$\lambda = (r + 2Ms^2)^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

разделяем, и существует КТ с $\alpha = -(r + 2Ms^2)^2$.

2. Черные дыры Керра-Сена с $s_1 = s_3 = s$, $s_2 = s_4 = 0$. Конформный фактор

$$\lambda = \Sigma = r(r + 2Ms^2) + a^2 \cos^2 \theta$$

разделяем, и существует КТ с $\alpha = -r(r + 2Ms^2)$.

3. Черные дыры с попарно равными зарядами $s_1 = s_3 = s$, $s_2 = s_4 = s'$. Конформный фактор

$$\lambda = \Sigma = (r + 2Ms^2)(r + 2Ms'^2) + a^2 \cos^2 \theta$$

разделяем, и существует КТ с $\alpha = -(r + 2Ms^2)(r + 2Ms'^2)$.

4. Вращающиеся заряженные черные дыры Калуцы-Клейна с $s_1 = s$, $s_2 = s_3 = s_4 = 0$. Конформный фактор

$$\lambda = \Sigma = \sqrt{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)(r^2 + 2Ms^2 r + a^2 \cos^2 \theta)}$$

не разделяем, и есть только КТК.

Следуя уравнению (6.149) граница тени черной дыры STU, сфотографированной асимптотически удаленным статическим наблюдателем ($w(\theta_O) = 0$), определяется следующим выражением

$$R_{SH}^2 = \frac{(a\rho_{PS} - 2MW_{PS})^2}{\Delta_{PS}} - \frac{4M^2W_{PS}^2 - \Sigma^2(r_{PS}, \theta_O)}{\Delta_{PS} - a^2 \sin^2 \theta_O}, \quad \rho_N = \rho_{PS}, \quad (6.175a)$$

$$\rho_{PS} = \frac{1}{a(M - r_{PS})} \left(M((r_{PS} - 2M)^2 \Pi_s - r_{PS}^2 \Pi_c) + a^2 M(\Pi_c - \Pi_s) \right. \\ \left. \pm \Delta_{PS}(r_{PS}^2 + Mr_{PS} \sum_i^4 s_i^2 + M^2(2\Pi_s(\Pi_s - \Pi_c) + \sum_{i<j}^4 s_i^2 s_j^2 + \sum_{i<j<k}^4 s_i^2 s_j^2 s_k^2))^{1/2} \right). \quad (6.175b)$$

Согласно численным расчетам, возрастающие заряды s_i при той же АДМ массе (зависящей от M и s_i , см. [384]), слегка деформируют тень, как в случаях ЭМ-ДА и Плебанского-Демьянского. Так что тень по-прежнему является хорошей имитацией Керра для не очень больших зарядов.

Общие черные дыры в $D = 4$, $\mathcal{N} = 2$ супергравитации

Наиболее общая асимптотически плоская стационарная неэкстремальная дионная черная дыра в $D = 4$ $\mathcal{N} = 2$ супергравитации, связанная с 3-мя векторными мультиплетами, была представлена в [385] (подробнее см. [244]). Она описывает низкоэнергетическое решение модели STU. Это семейство решений зависит от 11 независимых параметров: массы M , НУТ N , параметра вращения a , четырех электрических Q_i и четырех магнитных P_i зарядов. Элемент строки имеет вид

$$ds^2 = -\frac{\Delta_r - \Delta_u}{\Sigma} (dt - \omega d\phi)^2 + \Sigma \left(\frac{dr^2}{\Delta_r} + \frac{du^2}{\Delta_u} + \frac{\Delta_r \Delta_u}{a^2(\Delta_r - \Delta_u)} d\phi^2 \right), \quad (6.176)$$

где функции Δ_r , Δ_u , ω , Σ определяются следующим образом

$$\Delta_r = r^2 - 2Mr + a^2 - N^2, \quad \Delta_u = a^2 - (u - N)^2, \quad (6.177a)$$

$$\omega = -\frac{2N_{ph}(u - N)\Delta_r + (W_r + 2N_{ph}N)\Delta_u}{a(\Delta_r - \Delta_u)}, \quad (6.177b)$$

$$\Sigma^2 = (\Delta_r - \Delta_u)^2 + 2(\Delta_r - \Delta_u)(2Mr + W_u) + (2N_{ph}u + W_r)^2, \quad (6.177c)$$

где $W_r = a_r r + b_r$ и $W_u = a_u u + b_u$ – линейные функции соответствующих координат. Физические заряды сложным образом соответствуют этим параметрам.

В частности, физическая масса и заряд НУТ имеют вид

$$M_{ph} = \mu_1 M + \mu_2 N \quad N_{ph} = \nu_1 M + \nu_2 N. \quad (6.178)$$

Полное описание решения приведено в [385].

Конформный фактор, извлекаемый из метрики (6.176) для генерации КТК, равен $\lambda = \Sigma$. После этого метрика (6.176) принимает разделяемый вид (6.159) с

$$\mathcal{F}^{ab} = \underbrace{-\Delta_r^{-1} \begin{pmatrix} S^2 & aS \\ aS & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\chi_r^{ab}(r)} + \underbrace{\Delta_u^{-1} \begin{pmatrix} Q^2 & aQ \\ aQ & a^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\chi_u^{ab}(u)}, \quad (6.179)$$

$$f_r(r) = \Delta_r^{-1}, \quad f_u(u) = \Delta_u^{-1}$$

где

$$S \equiv W_r + 2N_{ph}N, \quad S' = \Delta_r + 4Mr, \quad (6.180a)$$

$$Q \equiv 2N_{ph}(N - u), \quad Q' = \Delta_u - 2W_u. \quad (6.180b)$$

Соответствующий нередуцируемый КТК (6.160a) равен

$$K^{\alpha\beta} = \alpha g^{\alpha\beta} - \Delta_r^{-1} S^\alpha S^\beta - (\Delta_r + 4Mr) \delta_t^\alpha \delta_t^\beta + \Delta_r \delta_r^\alpha \delta_r^\beta, \quad (6.181)$$

$$\Omega_\alpha = \partial_\alpha \alpha + \Sigma' \delta_\alpha^r, \quad S^\alpha = (W_r + 2N_{ph}N) \delta_t^\alpha + a \delta_\phi^\alpha. \quad (6.182)$$

КТК можно свести к точному ТК тогда и только тогда, когда Σ разделяема. Вычисляя смешанную производную $\partial_r \partial_u \Sigma$ и обнуляя коэффициенты при всех степенях $u^a r^b$, находим, что Σ разделяема, если

$$a_r = \pm 2M, \quad a_u = \pm 2N_{ph}, \quad b_r = \pm b_u. \quad (6.183)$$

и тогда форма конформного фактора становится разделяемой

$$\lambda = \Sigma = r^2 + b_u + u(u - 2N \pm 2N_{ph}), \quad (6.184)$$

откуда получается точное КТ с $\alpha = -r^2$.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем. Основываясь на работе [15], были построены и проанализированы общие неврацающиеся локально асимптотически плоские решения со скалярными волосами в пятимерной вакуумной гравитации с двумя векторами Киллинга (один из которых времени-подобный), и их редукции до четырех измерений как решения ЭМД $\alpha = \sqrt{3}$. Подход зарядовых матриц, который был использован, дополняет технику генерации решений в [22], а именно применение специальной $SL(3, R)$ группы преобразований к решению Шварцшильда в 5D. Это приводит к более широкому классу дионных решений, которые также обладают параметром НУТ и дилатонным зарядом, на который не накладывается обычное кубическое условие регулярности. Эти решения включают в себя решение ФЯНВ с сингулярным горизонтом и регулярные локально асимптотически плоские черные дыры КК.

Было обнаружено, что кубическое ограничение, гарантирующее, что матрица заряда $sl(3, R)$ является вырожденной, является лишь необходимым условием регулярности горизонта. Вторым условием является правильный выбор частного решения кубического ограничения из трех возможностей. Два других решения кубического уравнения приводят к сингулярным решениям общего положения, принадлежащим к вырожденному типу. Также было обобщено условие экстремальных решений для произвольного заряда НУТ.

Во всех случаях мы включали независимый заряд НУТ в надежде, что он может превратить сверхэкстремальные решения в кротовые норы, как в случае решения Брилла теории Эйнштейна-Максвелла. Но в теории КК это оказалось невозможным: никакая комбинация пяти зарядов не может породить четырехмерную неврацающуюся кротовую нору. Тем не менее, существуют пятимерные решения теории КК с топологией кротовой норы, но эти кротовые норы не являются геодезически проходимыми.

Из анализа геодезических на фоне полученных решений с зарядом НУТ мы обнаружили, что времениподобные и изотропные геодезические не могут быть замкнуты в окрестности полярных осей внутри области нарушения хронологии, окружающей струну Мизнера, и показали, что времениподобные геодезические включают класс геодезических с круговыми орбитами, лежащими в произвольных (в общем случае неэкваториальных) плоскостях.

Также, мы изучили НУТ-обобщение вращающихся дионов в КК ЭМД и рассмотрели некоторые частные примеры. Среди них нет регулярных кротовых нор, но встречаются вращающиеся кротовые норы с голыми кольцевыми сингулярностями вблизи горловины. Кроме того, мы обобщили решения, первоначально найденные Рашидом, которые соответствуют изотропным геодезическим в косетном подходе. Такие решения представляют интерполяцию пространство-время между асимптотикой Минковского и $AdS_2 \times S^2$. Хотя решение Шварцшильда с ФЯНВ ($S = 1/2$) связывают три разные ветви в невращающемся случае, для вращающихся решений это не так, поскольку его незаряженный предел ($P = Q = 0$) для ветвей D_{\pm} обладает нетривиальным полем Максвелла. Точно так же среди порожденных вращающихся решений нет решений с тривиальным дилатонным полем, кроме вакуумного решения Керра-НУТ. Примечательно, что решения с экстремальным вращением для ветвей D_{\pm} накладывают дополнительное ограничение на угловой момент $J = 0$.

Сгенерированные решения с параметром НУТ использовались для проверки результатов, полученных для модели ЭМД с произвольной константой связи α , в отношении суперсимметрии и термодинамики. Мы строго получили два зарядовых ограничения, необходимых для существования спинора Киллинга при произвольном заряде α и НУТ. Такие ограничения широко известны для теорий, связанных с супергравитацией, или для случая без НУТ. Полученный результат справедлив для ЭМД для любых α , хотя вложения ЭМД в супергравитацию известны только для $\alpha = 0, \sqrt{3}$. Условия на заряды и физические поля, накладываемые условиями сохранения части суперсимметрии, были получены из анализа части уравнений на гравитино и дилатино, которые представлены в виде системы однородных алгебраических уравнений. Условие вырожденности последних дает возможность получить прямые ограничения на физические поля ЭМД и их асимптотический анализ – на соответствующие заряды. Данный подход может быть обобщен на произвольные суперсимметричные модели.

Были изучены дилатонные p -браны, сгенерированные из решений ФЯНВ и ЗВ. Для этого использовалась техника генерации, основанная на сигма-модельном представлении уравнений движения для полей гравитации, дилатона и антисимметричной формы в произвольных размерностях. Полученные решения имеют скалярный заряд, не зависящий от зарядов Пейджа, и не удовлетворяют обычному дилатонному ограничению заряда для регулярных бран.

Таким образом, в общем случае эти браны содержат голые сингулярности, хотя с помощью некоторых ограничений мы можем выделить регулярные решения.

Были построены заряженные p -браны с первичным скалярным зарядом в гравитации Эйнштейна с дилатоном и антисимметричной формой с использованием преобразований Харрисона адаптированных для бран, примененных к расширенному решению Фишера. Полученные сферически симметричные в поперечном пространстве браны в общем случае имеют голые сингулярности, за исключением тех, которые получены из регулярного подсемейства затравочных решений и параметра преобразования Харрисона $c^2 < 1$.

С помощью некоторой процедуры ограничения в пространстве параметров мы также нашли специальное решение, обозначенное как S_E , удовлетворяющее ограничению на физические заряды, которое сводится к no-force условию в теории ЭМД с $\alpha^2 = 3$. Исследуя суперсимметрию полного нового семейства решений, соответствующих NS5-бранам, мы обнаружили, что суперсимметрия имеет место только в предельном случае S_E , совпадающем со стандартными БПС NS5-бранами.

Мы исследовали геодезическое движение в окрестности самой внешней сингулярности полученных решений. В общем случае, когда решение $c^2 < 1$ с Фишеровской сингулярностью, ключевую роль в поведении геодезических играет параметр σ . В общем случае с $c^2 > 1$ поведение существенно не отличается для разных параметров теории и зарядов решения. Поведение движения вблизи сингулярности для семейства S_E зависит от соотношения между константой связи α и ее критическим значением $\alpha_{\text{crit}}^2 = 2s^2/(s+d)$. При $\alpha^2 \leq \alpha_{\text{crit}}^2$ геодезические вблизи сингулярности ведут себя аналогично движению вблизи поверхности черной дыры: эффективный потенциал всегда ограничен, частица достигает сингулярности за бесконечное время относительно удаленного наблюдателя. В противном случае, если $\alpha^2 > \alpha_{\text{crit}}^2$, эффективный потенциал для геодезических с ненулевым угловым моментом расходуется, а радиальные геодезические достигают сингулярности за конечное время удаленного наблюдателя.

На фоне полученных решений мы рассмотрели массивное пробное скалярное поле. Преобразовывая динамическую переменную и радиальную координату, можно представить уравнение Клейна-Гордона в виде уравнения Шредингера с некоторым эффективным потенциалом. Мы исследовали возможность излечения сингулярности в квантовом смысле на основе анализа квадратичной интегрируемости пробного поля. Для семейства решений S_E по-

казано, что форма пробного скалярного поля зависит от того, превышает ли константа связи α критическое значение α_{crit} или нет. Для S_E не более, чем одна мода квадратично интегрируема вблизи сингулярности (и сингулярность вылечена), за исключением случая $s = 1$, $\alpha^2 > 2(d+2)/(d+1) > \alpha_{\text{crit}}^2$ для моды $l = 0$ (где одна мода может быть исключена из спектра на том же основании, что и соответствующая мода в нерелятивистской квантовой механике). Для общего семейства с произвольным c^2 все моды квадратично интегрируемы вблизи сингулярности. Таким образом, выбор граничных условий остается важным вопросом устойчивости решения по отношению к пробному скалярному полю.

Также в случае коразмерности три были построены браны с параметром деформации Зипоя-Вурхиса, которые не обладают сферической симметрией в поперечном пространстве.

В модели ЭМС, используя сигма-модельную формулировку уравнений поля, мы получили новое статическое обобщение ФЯНВ, наделенное параметром деформации и НУТ-параметром. Комбинированное решение ЗВ-ФЯНВ открыло возможность применить технику Клемана для генерации вращения, получив нетривиальное вращающееся решение ЭМС. Решение имеет простой вид, и его можно использовать в качестве полноправной вращающейся метрики для изучения физики вне парадигмы Керра. В экстремальном пределе оно совпадает с одним из недавно найденных Шовино решений. Но в этом решении деформация не может быть устранена из-за внутреннего ограничения, которое существует в этой технике.

Для поиска вращающихся скалярно-тензорных конфигураций без дополнительных параметров мы прибегли к методу Эриша и Гюрсеса. Применяя дуальность ЭГ, мы смогли воспроизвести результат, полученный с помощью ПК. Используя ЭГ-преобразование, мы предполагаем, что вращающиеся вакуумные решения семейства ЗВ дуальны скалярным вращающимся решениям ФЯНВ. В качестве примера мы получили новое вращающееся решение, дуальное вакуумному решению Томимацу-Сато с $\delta = 2$, которое имеет регулярный горизонт, окруженный голой кольцевой сингулярностью. Сингулярность поддерживается фантомным скалярным полем. С помощью некоторых сложных преобразований скалярное поле можно сделать действительным (не фантомным), но оно уже не будет обобщением решения ФЯНВ и может быть интерпретировано как диск со скалярным зарядом или червоточина с кольцевой сингулярностью.

Мы также получили новое решение, используя метод генерации, предложенный Шовино для керроподобных метрик. С помощью ЭГ-преобразований эта техника была распространена на произвольный аксиально симметричный анзац в форме Вейля-Папапетру. Следуя Шовино, действие дифференциального оператора ∂_z на скалярное поле оставляет уравнения движения выполненными. В силу теоремы ЭГ наличие скалярного поля приводит к дополнительному члену γ^ϕ в метрике, который можно найти из дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Таким образом, новое сгенерированное скалярное поле переопределяет функцию γ^ϕ , которую можно более или менее легко найти. Мы применили эту технику к решению, полученному с помощью преобразований Клемана.

Все решения, которые мы получили в этой главе, можно рассматривать как действительные альтернативы ложным решениям, возникающим в результате применения алгоритма Яниса-Ньюмена в рамках теорий ЭМС и БД.

Касательно термодинамики черных дыр, мы показали, что вывод массовых формул с использованием подхода Томимацу для вычисления интегралов Комара вокруг стержней в электровакууме может быть обобщен на теорию с набором скаляров и векторных абелевых полей. С помощью трехмерной редукции уравнений построены магнитный и твист-потенциалы, которые позволяют выразить интегралы по стержням так же, как в теории Эйнштейна-Максвелла, где Томимацу использовал для этой цели потенциалы Эрнста. Следует отметить, что скалярные поля не дают вклада в результирующие формулы масс, а их асимптотика лишь вращает электрические и магнитные заряды в пространстве параметров. Для правильных асимптотически плоских конфигураций скалярные заряды вторичны и их вариации не входят в формулы типа Смарра.

При таком подходе магнитный и НУТ-заряды не влияют на массу и угловой момент черной дыры, вычисляемые как интегралы Комара по горизонту. Они вносят вклад в асимптотическую массу и угловой момент через соответствующие отдельные стержни, представляющие струны Дирака и Мизнера. В качестве иллюстрации мы рассмотрели случаи вращающихся дионов ЭМДА и КК ЭМД, оснащенных НУТ.

Целью написания алгоритма для построения теней было дать подробные оптические картины теней вокруг двух имитаторов черных дыр, описываемых решениями эйнштейновской гравитации, минимально связанными со скалярным полем найденных ранее [129]. Обе они могут рассматриваться как

вращающиеся обобщения статических голых сингулярностей ФЯНВ, которые, в отличие от ранее известных, являются законными решениями, удовлетворяющими полному набору уравнений движения теории.

Для обоих рассмотренных решений уравнения геодезических неинтегрируемы, но для решения TSL численное интегрирование показывает лишь небольшие отклонения от результатов интегрируемого случая Керра. Соответствующие поверхности фундаментальных фотонов приближаются к сферическим, а оптические свойства пространства-времени напоминают свойства решения Керра. Таким образом, в этом случае мы получаем сверхкомпактные объекты, которые можно рассматривать как неплохие имитаторы обычных вакуумных черных дыр в ОТО. Граница тени даже ближе к окружности, чем в метрике Керра при всех значениях параметра вращения. На самом деле его отклонение от окружности не превышает 10 %, что согласуется с наблюдениями M87 [5] и Sgr A* [6] и отличается менее чем 1 % от случая Керра. Таким образом, на уровне точности наблюдений ЕНТ решения TSL практически неотличимы от керровских. Заметим, что максимальная разница наблюдается в близком к экстремальному режиме с $a \approx 0,9M$ и в принципе может наблюдаться при достижении большей экспериментальной точности. Кроме того, тень решения TSL, как правило, больше, а вертикальный размер тени уменьшается с увеличением параметра вращения a , в отличие от семейства Керра.

Решение KL с параметром сжатия индуцированным скалярным зарядом не может быть исключено по экспериментальным данным, если значение скалярного заряда меньше переходного значения существования фотонной области. Однако, с увеличением заряда отличие от случая Керра быстро увеличивается. Для фантомных скалярных полей отклонения еще малы и проявляются только в вытянутых изображениях теней по мере увеличения деформации с увеличением абсолютного значения скалярного заряда. Однако для больших действительных скалярных полей мы можем наблюдать существенные эффекты, такие как формирование множественных изображений теней.

Для конформных тензоров Киллинга был представлен чисто геометрический метод построения КТК второго ранга в пространстве-времени со слоением коразмерности один и дополнительными изометриями. Для пространств-времен, расслоенных на произвольные слои, в работе [283] были получены общие уравнения подъема (6.102), связывающие КТК с его проекциями на слои и ортогональное дополнение. Используя эти уравнения, можно попытаться под-

нять редуцируемый КТК, определенный в таких слоях, до КТК во всем пространстве-времени, который может оказаться нередуцируемым. Автором были установлены условия интегрируемости (6.120), обеспечивающие успешный подъем для данного слоения. Окончательный метод генерации был представлен в основной теореме работы [283]. Было показано, как эта теорема для КТК сводится к аналогичной теореме для точных КТ, обеспечивая более элегантную и ясную формулировку предыдущих результатов [252].

Поиск слоения, удовлетворяющего условиям интегрируемости, может оказаться трудной задачей. Однако, было доказано, что слои, удовлетворяющие условиям интегрируемости, должны представлять из себя фундаментальные фотонные поверхности, если выполняются неравенства фотонных областей. Таким образом, наличие ФФП является необходимым условием, которое еще не гарантирует существования КТК, но служит указанием на то, что такой тензор может существовать. Поэтому рекомендуется проверять условия интегрируемости, используя ФФП в качестве слоев в методе генерации КТК. Этот факт обобщает и проясняет взаимосвязь между ФФП и КТК, обсуждавшуюся ранее в [216; 250; 252].

Поскольку m -мерная геометрия с $n = m - 2$ конформными векторами Киллинга, удовлетворяющая условиям интегрируемости (6.120), соответствует интегрируемой динамической системе для изотропных геодезических, можно получить полностью аналитическое описание гравитационных теней соответствующих сверхкомпактных объектов. Мы нашли общее аналитическое выражение (6.142) для границы тени в произвольной геометрии с послойно-редуцируемым КТК и его предел для удаленного наблюдателя. Эти уравнения обеспечивают простую основу для анализа теней, требуя только знания двух конформных векторов Киллинга, послойно-редуцируемого КТК (нередуцируемого во всем пространстве) и структуры фундаментальных фотонных поверхностей, связанных с этим КТК. Разработанный формализм легко применим в практических расчетах и на новом уровне выявляет глубокую связь фотонных поверхностей с оптическими свойствами гравитирующего объекта.

Мы применили разработанные методы к решениям ЭМДА, STU, где послойно-редуцируемые КТК возникают чисто алгебраически без решения каких-либо дифференциальных уравнений. Мы проанализировали, можно ли в этих примерах свести КТК к точному ТК, и дали аналитические выражения для границ гравитационных теней.

Основные результаты работы

1. Показано, что метод генерации решений Клемана может быть обобщен для генерации решений в ЭМС, если рассматривать поле Максвелла как вспомогательное. Продемонстрировано, что решения Томиматсу-Сату могут рассматриваться как решения дуальные относительно вращающихся обобщений ФЯНВ в теории ЭМС. Комплексификация таких решений может быть проинтерпретирована как вращающиеся кротовые норы. Тени полученных решений являются хорошими имитаторами черной дыры Керра и решения не могут быть отсеяны полученными результатами из наблюдений ЕНТ.
2. Показано, что сгенерированные решения с первичными скалярными волосами и НУТ-зарядом в теории ЭМД и произвольной зарядовой матрицей в общем случае являются голыми сингулярностями. Среди обнаруженных трех независимых ветвей для решений с вырожденной зарядовой матрицей лишь одна ветвь содержит регулярные черные дыры, которые были классифицированы в работе. Голые сингулярности, которые находятся параметрически близко к экстремальным невращающимся черным дырам в ЭМД, обладают стабильными фотонными орбитами, что подразумевает нестабильность данных сингулярностей. В пятимерной интерпретации ЭМД дионов с зарядом НУТ, импульс может рассматриваться четырехмерным наблюдателем как электрический заряд, который может являться объектом процесса Пенроуза.
3. Показано, что сгенерированные сингулярные p -браны содержат БПС-решения в качестве некоторого нетривиального предела. Класс, обобщающий данные БПС-браны на произвольную дилатонную константу, может быть “квантово излечен” на примере пробного скалярного поля, что значит отсутствие проблемы выбора самосопряженного волнового оператора в таких метриках.
4. Обобщена термодинамическая формула Смарра на модель с набором скалярных и абелевых векторных полей в рамках подхода Комара-Томиматсу. Показано, что скалярные вклады в построенную таким образом формулу Смарра отсутствуют.
5. Продемонстрировано, что решения ЭМД с произвольной дилатонной константой и “ложной суперсимметрией” обладают статичным спинором Киллинга, если выполнены условия вырожденности алгеб-

раических однородных уравнений на данный спинор. Полученные условия представлены в виде связей на физические поля и асимптотические физические заряды, включая массу, НУТ, электрический и магнитный заряды и скалярный заряд. Методология получения подобных условий может применяться и в рамках других теорий.

6. Показано, что конформный тензор Киллинга в пространстве может быть сгенерирован из тривиального конформного тензора Киллинга на слое расслоения пространства, если выполнены определенные условия интегрируемости, найденные в работе.

Автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Гальцову Д. В. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Автор благодарит Кобялко К. В. за плодотворные дискуссии и идеи. Диссертационная работа была выполнена при поддержке научной и образовательной школы МГУ “Фундаментальные прикладные космические исследования”, Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 17-02-01299а, 20-52-18012Bulg-a), а также фонда развития теоретической физики и математики “Базис”. Автор благодарит близких, родных и друзей за моральную поддержку при написании диссертации.

Словарь терминов

- АДМ-масса** : Масса Арновитта-Дезера-Мизнера
- БПС** : Решения Богомольного-Прасада-Соммерфельда
- ЗВ** : Решение Зипой-Вурхиса
- КК** : Модель Калуцы-Кляйна
- КТК** : Конформный тензор Киллинга
- НУТ** : Параметр Ньюмена-Унти-Тамбурино
- РН** : Рейснер-Нордстрем
- ТК** : Тензор Киллинга
- ТКЯ** : Тензор Киллинга-Яно
- ТС** : Решение Томиматсу-Сато
- УКО** : Ультракомпактные объекты
- ФП** : Фотонные поверхности
- ФФП** : Фундаментальные фотонные поверхности
- ФЯНВ** : Решение Фишера-Яниса-Ньюмена-Виникура
- ЧД** : Черные дыры
- ЭАД** : Модель Эйнштейна с антисимметричной формой и дилатоном
- ЭМД** : Модель Эйнштейна-Максвелла с дилатоном
- ЭМДА** : Модель Эйнштейна-Максвелла с дилатоном и аксионом
- ЭМС** : Модель Эйнштейна с минимальным скаляром (со скаляром с минимальной связью)
- CUDA** : Compute Unified Device Architecture (программно-аппаратная архитектура параллельных вычислений)
- DHOST** : Degenerate Higher-Order Scalar-Tensor theories (вырожденные скалярно-тензорные теории высшего порядка)
- ЕНТ** : Event Horizon Telescope (телескоп горизонта событий)
- ISCO** : Innermost unstable null circular orbits (самые внутренние неустойчивые изотропные круговые орбиты)
- KL** : Kerr-like solution (решение, подобное Керровскому)
- TSL** : Tomimatsu-Sato-like solution (решение, подобное решению Томиматсу-Сато)
- STU** : STU-модель (исторически, S, T и U являются обозначениями соответствующих комплексных скаляров)

ZAMO : Zero angular momentum observer (наблюдатель с нулевым моментом импульса)

Список литературы

1. *Мизнер, Ч.* Гравитация [Текст]. Т. 1–3 / Ч. Мизнер, К. Торн, Д. Уилер. — М.: Мир, 1977.
2. *Вайнберг, С.* Гравитация и космология [Текст]. Т. 1–3 / С. Вайнберг ; пер. п. р. Я. А. С. Пер. с англ. В. М. Дубовика и Э. А. Тагирова. — Волгоград: Платон, 2000. — С. 696.
3. *Will, C. M.* The Confrontation between General Relativity and Experiment [Текст] / С. М. Will // Living Rev. Rel. — 2014. — Т. 17. — С. 4. — arXiv: [1403.7377](https://arxiv.org/abs/1403.7377) [gr-qc].
4. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger [Текст] / Б. Р. Abbott [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Т. 116, № 6. — С. 061102. — arXiv: [1602.03837](https://arxiv.org/abs/1602.03837) [gr-qc].
5. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole [Текст] / К. Akiyama [и др.] // Astrophys. J. Lett. — 2019. — Т. 875. — С. L1. — arXiv: [1906.11238](https://arxiv.org/abs/1906.11238) [astro-ph.GA].
6. First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way [Текст] / К. Akiyama [и др.] // Astrophys. J. Lett. — 2022. — Т. 930, № 2. — С. L12.
7. *Fujii, Y.* The scalar-tensor theory of gravitation [Текст] / Y. Fujii, K. Maeda. — Cambridge University Press, 07.2007. — (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
8. *Bronnikov, K. A.* Scalar-tensor theory and scalar charge [Текст] / К. А. Bronnikov // Acta Phys. Polon. B. — 1973. — Т. 4. — С. 251–266.
9. *Bronnikov, K. A.* Black Holes, Cosmology and Extra Dimensions [Текст] / К. А. Bronnikov, S. G. Rubin. — WSP, 2012.
10. *Bronnikov, K. A.* Scalar fields as sources for wormholes and regular black holes [Текст] / К. А. Bronnikov // Particles / под ред. А. Sedrakian. — 2018. — Т. 1, № 1. — С. 56–81. — arXiv: [1802.00098](https://arxiv.org/abs/1802.00098) [gr-qc].

11. *Gal'tsov, D.* Ghost-free Palatini derivative scalar-tensor theory: Desingularization and the speed test [Текст] / D. Gal'tsov, S. Zhidkova // Phys. Lett. B. — 2019. — Т. 790. — С. 453–457. — arXiv: [1808.00492](https://arxiv.org/abs/1808.00492) [hep-th].
12. *Katanaev, M. O.* Geometric interpretation and classification of global solutions in generalized dilaton gravity [Текст] / M. O. Katanaev, W. Kummer, H. Liebl // Phys. Rev. D. — 1996. — Т. 53. — С. 5609–5618. — arXiv: [gr-qc/9511009](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9511009).
13. *Katanaev, M. O.* Effective action for scalar fields in two-dimensional gravity [Текст] / M. O. Katanaev // Annals Phys. — 2002. — Т. 296. — С. 1–50. — arXiv: [gr-qc/0101033](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0101033).
14. *Leutwyler, H.* La solution statique à symétrie sphérique en théorie pentadimensionnelle [Текст] / H. Leutwyler // Arch. Sci. Genève. — 1960. — Т. 13. — С. 549.
15. *Dobiasch, P.* Stationary, Spherically Symmetric Solutions of Jordan's Unified Theory of Gravity and Electromagnetism [Текст] / P. Dobiasch, D. Maison // Gen. Rel. Grav. — 1982. — Т. 14. — С. 231–242.
16. *Chodos, A.* Spherically Symmetric Solutions in Five-dimensional General Relativity [Текст] / A. Chodos, S. L. Detweiler // Gen. Rel. Grav. — 1982. — Т. 14. — С. 879.
17. *Gross, D. J.* Magnetic Monopoles in Kaluza-Klein Theories [Текст] / D. J. Gross, M. J. Perry // Nucl. Phys. B. — 1983. — Т. 226. — С. 29–48.
18. *Sorkin, R. d.* Kaluza-Klein Monopole [Текст] / R. d. Sorkin // Phys. Rev. Lett. — 1983. — Т. 51. — С. 87–90.
19. *Clement, G.* Rotating Kaluza-Klein Monopoles and Dyons [Текст] / G. Clement // Phys. Lett. A. — 1986. — Т. 118. — С. 11–13.
20. *Clement, G.* Solutions of Five-dimensional General Relativity Without Spatial Symmetry [Текст] / G. Clement // Gen. Rel. Grav. — 1986. — Т. 18. — С. 861–877.
21. *Gibbons, G. W.* Black Holes in Kaluza-Klein Theory [Текст] / G. W. Gibbons, D. L. Wiltshire // Annals Phys. — 1986. — Т. 167. — С. 201–223. — [Erratum: Annals Phys. 176, 393 (1987)].

22. *Rasheed, D.* The Rotating dyonic black holes of Kaluza-Klein theory [Текст] / D. Rasheed // Nucl. Phys. B. — 1995. — Т. 454. — С. 379—401. — arXiv: [hep-th/9505038](https://arxiv.org/abs/hep-th/9505038).
23. *Neugebauer, G.* Untersuchungen zu Einstein-Maxwell-Feldern mit eindimensionaler Bewegungsgruppe [Текст] : дис. . . . канд. / Neugebauer Gernot. — FSU Jena, 1969.
24. *Maison, D.* EHLERS-HARRISON TYPE TRANSFORMATIONS FOR JORDAN'S EXTENDED THEORY OF GRAVITATION [Текст] / D. Maison // Gen. Rel. Grav. — 1979. — Т. 10. — С. 717—723.
25. *Belinsky, V.* ON AXIALLY SYMMETRIC SOLITON SOLUTIONS OF THE COUPLED SCALAR VECTOR TENSOR EQUATIONS IN GENERAL RELATIVITY [Текст] / V. Belinsky, R. Ruffini // Phys. Lett. B. — 1980. — Т. 89. — С. 195—198.
26. *Clement, G.* Stationary Solutions in Five-dimensional General Relativity [Текст] / G. Clement // Gen. Rel. Grav. — 1986. — Т. 18. — С. 137—160.
27. *Frolov, V. P.* Charged Rotating Black Hole From Five-dimensional Point of View [Текст] / V. P. Frolov, A. I. Zelnikov, U. Bleyer // Annalen Phys. — 1987. — Т. 44. — С. 371—377.
28. *Matos, T.* 5-D axisymmetric stationary solutions as harmonic maps [Текст] / T. Matos // J. Math. Phys. — 1994. — Т. 35. — С. 1302—1321. — arXiv: [gr-qc/9401009](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9401009).
29. *Poletti, S. J.* Dyonic Dilaton black holes [Текст] / S. J. Poletti, J. Twamley, D. L. Wiltshire // Class. Quant. Grav. — 1995. — Т. 12. — С. 1753—1770. — arXiv: [hep-th/9502054](https://arxiv.org/abs/hep-th/9502054). — [Erratum: Class.Quant.Grav. 12, 2355 (1995)].
30. *Aliev, A. N.* Kerr-Taub-NUT Spacetime with Maxwell and Dilaton Fields [Текст] / A. N. Aliev, H. Cebeci, T. Dereli // Phys. Rev. D. — 2008. — Т. 77. — С. 124022. — arXiv: [0803.2518](https://arxiv.org/abs/0803.2518) [[hep-th](https://arxiv.org/abs/hep-th)].
31. *Gibbons, G. W.* Antigravitating Black Hole Solitons with Scalar Hair in N=4 Supergravity [Текст] / G. W. Gibbons // Nucl. Phys. B. — 1982. — Т. 207. — С. 337—349.
32. *Gibbons, G. W.* Soliton - Supermultiplets and Kaluza-Klein Theory [Текст] / G. W. Gibbons, M. J. Perry // Nucl. Phys. B. — 1984. — Т. 248. — С. 629—646.

33. *Gibbons, G. W.* Black Holes and Membranes in Higher Dimensional Theories with Dilaton Fields [Текст] / G. W. Gibbons, K.-i. Maeda // Nucl. Phys. B. — 1988. — Т. 298. — С. 741—775.
34. *Breitenlohner, P.* Four-Dimensional Black Holes from Kaluza-Klein Theories [Текст] / P. Breitenlohner, D. Maison, G. W. Gibbons // Commun. Math. Phys. — 1988. — Т. 120. — С. 295.
35. *Garfinkle, D.* Charged black holes in string theory [Текст] / D. Garfinkle, G. T. Horowitz, A. Strominger // Phys. Rev. D. — 1991. — Т. 43. — С. 3140. — [Erratum: Phys.Rev.D 45, 3888 (1992)].
36. *Cvetic, M.* Supersymmetric dyonic black holes in Kaluza-Klein theory [Текст] / M. Cvetic, D. Youm // Nucl. Phys. B. — 1995. — Т. 438. — С. 182—210. — arXiv: [hep-th/9409119](https://arxiv.org/abs/hep-th/9409119). — [Addendum: Nucl.Phys.B 449, 146–148 (1995)].
37. *Ortin, T.* Gravity and Strings [Текст] / T. Ortin. — 2nd ed. — Cambridge University Press, 07.2015. — (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
38. *Giusto, S.* Stationary axisymmetric solutions of five dimensional gravity [Текст] / S. Giusto, A. Saxena // Class. Quant. Grav. — 2007. — Т. 24. — С. 4269—4294. — arXiv: [0705.4484](https://arxiv.org/abs/0705.4484) [[hep-th](#)].
39. *Niarchos, V.* Phases of Higher Dimensional Black Holes [Текст] / V. Niarchos // Mod. Phys. Lett. A. — 2008. — Т. 23. — С. 2625—2643. — arXiv: [0808.2776](https://arxiv.org/abs/0808.2776) [[hep-th](#)].
40. *Tomizawa, S.* Charged Black Holes in a Rotating Gross-Perry-Sorkin Monopole Background [Текст] / S. Tomizawa, A. Ishibashi // Class. Quant. Grav. — 2008. — Т. 25. — С. 245007. — arXiv: [0807.1564](https://arxiv.org/abs/0807.1564) [[hep-th](#)].
41. *Horowitz, G. T.* General black holes in Kaluza-Klein theory [Текст] / G. T. Horowitz, T. Wiseman // Black holes in higher dimensions. — Cambridge University Press, 2012. — С. 69—98. — arXiv: [1107.5563](https://arxiv.org/abs/1107.5563) [[gr-qc](#)].
42. *Herdeiro, C. A. R.* Asymptotically flat black holes with scalar hair: a review [Текст] / C. A. R. Herdeiro, E. Radu // Int. J. Mod. Phys. D / под ред. C. A. R. Herdeiro [и др.]. — 2015. — Т. 24, № 09. — С. 1542014. — arXiv: [1504.08209](https://arxiv.org/abs/1504.08209) [[gr-qc](#)].

43. *Rojas Mejías, R.* Thermodynamics of Asymptotically Flat Dyonic Black Holes [Текст] / R. Rojas Mejías // Phys. Rev. D. — 2020. — Т. 101, № 12. — С. 124030. — arXiv: [1907.10681 \[hep-th\]](#).
44. Einstein-Maxwell-scalar black holes: classes of solutions, dyons and extremality [Текст] / D. Astefanesei [и др.] // JHEP. — 2019. — Т. 10. — С. 078. — arXiv: [1905.08304 \[hep-th\]](#).
45. *Grunau, S.* Motion of charged particles around a scalarized black hole in Kaluza-Klein theory [Текст] / S. Grunau, M. Kruse // Phys. Rev. D. — 2020. — Т. 101, № 2. — С. 024051. — arXiv: [1910.09835 \[gr-qc\]](#).
46. *Azeyanagi, T.* Holographic Duals of Kaluza-Klein Black Holes [Текст] / T. Azeyanagi, N. Ogawa, S. Terashima // JHEP. — 2009. — Т. 04. — С. 061. — arXiv: [0811.4177 \[hep-th\]](#).
47. Holography of Charged Dilaton Black Holes [Текст] / K. Goldstein [и др.] // JHEP. — 2010. — Т. 08. — С. 078. — arXiv: [0911.3586 \[hep-th\]](#).
48. Black Hole Dynamics in Einstein-Maxwell-Dilaton Theory [Текст] / E. W. Hirschmann [и др.] // Phys. Rev. D. — 2018. — Т. 97, № 6. — С. 064032. — arXiv: [1706.09875 \[gr-qc\]](#).
49. Black hole merger estimates in Einstein-Maxwell and Einstein-Maxwell-dilaton gravity [Текст] / P. Jai-akson [и др.] // Phys. Rev. D. — 2017. — Т. 96, № 4. — С. 044031. — arXiv: [1706.06519 \[gr-qc\]](#).
50. *Mccarthy, F.* Dilatonic Imprints on Exact Gravitational Wave Signatures [Текст] / F. Mccarthy, D. Kubizňák, R. B. Mann // Phys. Rev. D. — 2018. — Т. 97, № 10. — С. 104025. — arXiv: [1803.01862 \[gr-qc\]](#).
51. Distinguishing rotating naked singularities from Kerr-like wormholes by their deflection angles of massive particles [Текст] / K. Jusufi [и др.] // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Т. 79, № 1. — С. 28. — arXiv: [1808.02751 \[gr-qc\]](#).
52. *Ben Achour, J.* Hairy black holes in DHOST theories: Exploring disformal transformation as a solution-generating method [Текст] / J. Ben Achour, H. Liu, S. Mukohyama // JCAP. — 2020. — Т. 02. — С. 023. — arXiv: [1910.11017 \[gr-qc\]](#).
53. Could the black hole singularity be a field singularity? [Текст] / G. Domènech [и др.] // Int. J. Mod. Phys. D. — 2020. — Т. 29, № 03. — С. 2050026. — arXiv: [1912.02845 \[gr-qc\]](#).

54. *Clément, G.* Rehabilitating space-times with NUTs [Текст] / G. Clément, D. Gal'tsov, M. Guenouche // Phys. Lett. B. — 2015. — Т. 750. — С. 591–594. — arXiv: [1508.07622 \[hep-th\]](#).
55. *Clément, G.* NUT wormholes [Текст] / G. Clément, D. Gal'tsov, M. Guenouche // Phys. Rev. D. — 2016. — Т. 93, № 2. — С. 024048. — arXiv: [1509.07854 \[hep-th\]](#).
56. *Galtsov, D. V.* Symmetries of the stationary Einstein-Maxwell dilaton theory [Текст] / D. V. Galtsov, A. A. Garcia, O. V. Kechkin // Class. Quant. Grav. — 1995. — Т. 12. — С. 2887–2903. — arXiv: [hep-th/9504155](#).
57. *Gal'tsov, D.* “Triangular” extremal dilatonic dyons [Текст] / D. Gal'tsov, M. Khramtsov, D. Orlov // Phys. Lett. B. — 2015. — Т. 743. — С. 87–92. — arXiv: [1412.7709 \[hep-th\]](#).
58. *Neugebauer, G.* A method for the construction of stationary einstein-maxwell fields. (in german) [Текст] / G. Neugebauer, D. Kramer // Annalen Phys. — 1969. — Т. 24. — С. 62–71.
59. *Larsen, F.* Rotating Kaluza-Klein black holes [Текст] / F. Larsen // Nucl. Phys. B. — 2000. — Т. 575. — С. 211–230. — arXiv: [hep-th/9909102](#).
60. *Masood-ul-Alam, A. K. M.* Uniqueness of a static charged dilaton black hole [Текст] / A. K. M. Masood-ul-Alam // Class. Quant. Grav. — 1993. — Т. 10. — С. 2649–2656.
61. *Yazadjiev, S. S.* A Classification (uniqueness) theorem for rotating black holes in 4D Einstein-Maxwell-dilaton theory [Текст] / S. S. Yazadjiev // Phys. Rev. D. — 2010. — Т. 82. — С. 124050. — arXiv: [1009.2442 \[hep-th\]](#).
62. *Chrusciel, P. T.* Stationary Black Holes: Uniqueness and Beyond [Текст] / P. T. Chrusciel, J. Lopes Costa, M. Heusler // Living Rev. Rel. — 2012. — Т. 15. — С. 7. — arXiv: [1205.6112 \[gr-qc\]](#).
63. *Fisher, I. Z.* Scalar mesostatic field with regard for gravitational effects [Текст] / I. Z. Fisher // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1948. — Т. 18. — С. 636–640. — arXiv: [gr-qc/9911008](#).
64. *Bergmann, O.* Space-Time Structure of a Static Spherically Symmetric Scalar Field [Текст] / O. Bergmann, R. Leipnik // Phys. Rev. — 1957. — Т. 107. — С. 1157–1161.

65. *Penney, R.* Axially Symmetric Zero-Mass Meson Solutions of Einstein Equations [Текст] / R. Penney // Phys. Rev. — 1968. — Т. 174. — С. 1578—1579.
66. *Janis, A. I.* Reality of the Schwarzschild Singularity [Текст] / A. I. Janis, E. T. Newman, J. Winicour // Phys. Rev. Lett. — 1968. — Т. 20. — С. 878—880.
67. *Abdolrahimi, S.* Analysis of the Fisher solution [Текст] / S. Abdolrahimi, A. A. Shoom // Phys. Rev. D. — 2010. — Т. 81. — С. 024035. — arXiv: [0911.5380](https://arxiv.org/abs/0911.5380) [gr-qc].
68. Image of the Janis-Newman-Winicour naked singularity with a thin accretion disk [Текст] / G. Gyulchev [и др.] // Phys. Rev. D. — 2019. — Т. 100, № 2. — С. 024055. — arXiv: [1905.05273](https://arxiv.org/abs/1905.05273) [gr-qc].
69. Nutty Kaluza-Klein dyons revisited [Текст] / I. Bogush [и др.] // Phys. Rev. D. — 2021. — Т. 103, № 6. — С. 064045. — arXiv: [2009.07922](https://arxiv.org/abs/2009.07922) [gr-qc].
70. *Торбунов, Д. А.* / Д. А. Торбунов. — из личного общения.
71. *Penney, R.* Generalization of the reissner-nordstroem solution to the einstein field equations [Текст] / R. Penney // Phys. Rev. — 1969. — Т. 182. — С. 1383—1384.
72. *Deser, S.* Essential singularities in general relativity [Текст] / S. Deser, J. Higbie // Phys. Rev. Lett. — 1969. — Т. 23. — С. 1184—1186.
73. *Wyman, M.* Static Spherically Symmetric Scalar Fields in General Relativity [Текст] / M. Wyman // Phys. Rev. D. — 1981. — Т. 24. — С. 839—841.
74. *Virbhadra, K. S.* Janis-Newman-Winicour and Wyman solutions are the same [Текст] / K. S. Virbhadra // Int. J. Mod. Phys. A. — 1997. — Т. 12. — С. 4831—4836. — arXiv: [gr-qc/9701021](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9701021).
75. *Bhadra, A.* On the equivalence of the Buchdahl and the Janis-Newman-Winnicour solutions [Текст] / A. Bhadra, K. K. Nandi // Int. J. Mod. Phys. A. — 2001. — Т. 16. — С. 4543—4545.
76. *Buchdahl, H. A.* Reciprocal Static Metrics and Scalar Fields in the General Theory of Relativity [Текст] / H. A. Buchdahl // Phys. Rev. — 1959. — Т. 115. — С. 1325—1328.

77. *Winicour, J.* Static, Axially Symmetric Point Horizons [Текст] / J. Winicour, A. I. Janis, E. T. Newman // Phys. Rev. — 1968. — Т. 176. — С. 1507—1513.
78. *Бочарова, Н. М.* Об одном точном решении системы уравнений Эйнштейна и безмассового скалярного поля [Текст] / Н. М. Бочарова, К. А. Бронников, В. Н. Мельников // Vestn. Mosk. Univ. — 1970. — № 6. — С. 706—709.
79. *Faraoni, V.* Black holes and wormholes subject to conformal mappings [Текст] / V. Faraoni, A. Prain, A. F. Zambrano Moreno // Phys. Rev. D. — 2016. — Т. 93, № 2. — С. 024005. — arXiv: [1509.04129 \[gr-qc\]](#).
80. *Agnese, A. G.* GRAVITATION WITHOUT BLACK HOLES [Текст] / A. G. Agnese, M. La Camera // Phys. Rev. D. — 1985. — Т. 31. — С. 1280—1286.
81. *Newman, E. T.* Note on the Kerr spinning particle metric [Текст] / E. T. Newman, A. I. Janis // J. Math. Phys. — 1965. — Т. 6. — С. 915—917.
82. *Erbin, H.* Janis-Newman algorithm: generating rotating and NUT charged black holes [Текст] / H. Erbin // Universe. — 2017. — Т. 3, № 1. — С. 19. — arXiv: [1701.00037 \[gr-qc\]](#).
83. *Gyulchev, G. N.* Gravitational Lensing by Rotating Naked Singularities [Текст] / G. N. Gyulchev, S. S. Yazadjiev // Phys. Rev. D. — 2008. — Т. 78. — С. 083004. — arXiv: [0806.3289 \[gr-qc\]](#).
84. *Kovacs, Z.* Can accretion disk properties observationally distinguish black holes from naked singularities? [Текст] / Z. Kovacs, T. Harko // Phys. Rev. D. — 2010. — Т. 82. — С. 124047. — arXiv: [1011.4127 \[gr-qc\]](#).
85. *Liu, H.* Distinguishing black holes and naked singularities with iron line spectroscopy [Текст] / H. Liu, M. Zhou, C. Bambi // JCAP. — 2018. — Т. 08. — С. 044. — arXiv: [1801.00867 \[gr-qc\]](#).
86. *Pirogov, Y. F.* Towards the rotating scalar-vacuum black holes [Текст] / Y. F. Pirogov. — 06.2013. — [arXiv:1306.4866 [gr-qc]].
87. *Hansen, D.* Applicability of the Newman-Janis Algorithm to Black Hole Solutions of Modified Gravity Theories [Текст] / D. Hansen, N. Yunes // Phys. Rev. D. — 2013. — Т. 88, № 10. — С. 104020. — arXiv: [1308.6631 \[gr-qc\]](#).

88. *Virbhadra, K. S.* Gravitational lensing by naked singularities [Текст] / K. S. Virbhadra, G. F. R. Ellis // Phys. Rev. D. — 2002. — Т. 65. — С. 103004.
89. *Crisford, T.* Violating the Weak Cosmic Censorship Conjecture in Four-Dimensional Anti-de Sitter Space [Текст] / T. Crisford, J. E. Santos // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Т. 118, № 18. — С. 181101. — arXiv: [1702.05490 \[hep-th\]](#).
90. *DeAndrea, J. P.* Negative Time Delay in Strongly Naked Singularity Lensing [Текст] / J. P. DeAndrea, K. M. Alexander // Phys. Rev. D. — 2014. — Т. 89, № 12. — С. 123012. — arXiv: [1402.5630 \[gr-qc\]](#). — [Addendum: Phys.Rev.D 89, 129904 (2014)].
91. Geodesic structure of Janis-Newman-Winicour space-time [Текст] / S. Zhou [и др.] // Int. J. Theor. Phys. — 2015. — Т. 54, № 8. — С. 2905—2920. — arXiv: [1408.6041 \[gr-qc\]](#).
92. Circular geodesics and accretion disks in Janis-Newman-Winicour and Gamma metric [Текст] / A. N. Chowdhury [и др.] // Phys. Rev. D. — 2012. — Т. 85. — С. 104031. — arXiv: [1112.2522 \[gr-qc\]](#).
93. *Babar, G. Z.* Dynamics of a charged particle around a weakly magnetized naked singularity [Текст] / G. Z. Babar, M. Jamil, Y.-K. Lim // Int. J. Mod. Phys. D. — 2015. — Т. 25, № 02. — С. 1650024. — arXiv: [1504.00072 \[gr-qc\]](#).
94. On rotating black holes in DHOST theories [Текст] / J. Ben Achour [и др.] // JCAP. — 2020. — Т. 11. — С. 001. — arXiv: [2006.07245 \[gr-qc\]](#).
95. *Stashko, O.* Singularities in Static Spherically Symmetric Configurations of General Relativity with Strongly Nonlinear Scalar Fields [Текст] / O. Stashko, V. I. Zhdanov // Galaxies. — 2021. — Т. 9, № 4. — С. 72. — arXiv: [2109.01931 \[gr-qc\]](#).
96. *Zhdanov, V. I.* Static spherically symmetric configurations with N nonlinear scalar fields: Global and asymptotic properties [Текст] / V. I. Zhdanov, O. S. Stashko // Phys. Rev. D. — 2020. — Т. 101, № 6. — С. 064064. — arXiv: [1912.00470 \[gr-qc\]](#).
97. *Gal'tsov, D. V.* Conformal and kinetic couplings as two Jordan frames of the same theory: Conformal and kinetic couplings [Текст] / D. V. Gal'tsov // Eur. Phys. J. C. — 2020. — Т. 80, № 5. — С. 443. — arXiv: [2001.03221 \[gr-qc\]](#).

98. *Gal'tsov, D. V.* Palatini kinetic scalar-tensor theory: analytical and numerical solutions [Текст] / D. V. Gal'tsov, D. S. Bushuev // 16th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories. — 10.2021. — arXiv: [2110.14784](https://arxiv.org/abs/2110.14784) [gr-qc].
99. *Chauvineau, B.* New method to generate exact scalar-tensor solutions [Текст] / B. Chauvineau // Phys. Rev. D. — 2019. — Т. 100, № 2. — C. 024051. — arXiv: [1812.04934](https://arxiv.org/abs/1812.04934) [gr-qc].
100. *Tiwari, R. N.* Class of the Brans-Dicke Maxwell Fields [Текст] / R. N. Tiwari, B. K. Nayak // Phys. Rev. D. — 1976. — Т. 14. — C. 2502–2504.
101. *Kim, H.* New black hole solutions in Brans-Dicke theory of gravity [Текст] / H. Kim // Phys. Rev. D. — 1999. — Т. 60. — C. 024001. — arXiv: [gr-qc/9811012](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9811012).
102. *Kirezli, P.* Stationary axially symmetric solutions in Brans-Dicke theory [Текст] / P. Kirezli, Ö. Delice // Phys. Rev. D. — 2015. — Т. 92. — C. 104045. — arXiv: [1507.00910](https://arxiv.org/abs/1507.00910) [gr-qc].
103. *Bronnikov, K. A.* Instabilities of wormholes and regular black holes supported by a phantom scalar field [Текст] / K. A. Bronnikov, R. A. Konoplya, A. Zhidenko // Phys. Rev. D. — 2012. — Т. 86. — C. 024028. — arXiv: [1205.2224](https://arxiv.org/abs/1205.2224) [gr-qc].
104. *Bronnikov, K. A.* Notes on wormhole existence in scalar-tensor and F(R) gravity [Текст] / K. A. Bronnikov, M. V. Skvortsova, A. A. Starobinsky // Grav. Cosmol. — 2010. — Т. 16. — C. 216–222. — arXiv: [1005.3262](https://arxiv.org/abs/1005.3262) [gr-qc].
105. *Bakopoulos, A.* Traversable wormholes in beyond Horndeski theories [Текст] / A. Bakopoulos, C. Charmousis, P. Kanti // JCAP. — 2022. — Т. 05, № 05. — C. 022. — arXiv: [2111.09857](https://arxiv.org/abs/2111.09857) [gr-qc].
106. *Sokoliuk, O.* On the existence and stability of traversable wormhole solutions in modified theories of gravity [Текст] / O. Sokoliuk, A. Baransky // Eur. Phys. J. C. — 2021. — Т. 81, № 8. — C. 781.
107. *Bronnikov, K. A.* Hybrid metric-Palatini gravity: black holes, wormholes, singularities and instabilities [Текст] / K. A. Bronnikov, S. V. Bolokhov, M. V. Skvortsova // Grav. Cosmol. — 2020. — Т. 26, № 3. — C. 212–227. — arXiv: [2006.00559](https://arxiv.org/abs/2006.00559) [gr-qc].

108. *Krori, K. D.* Kerr-like metric in Brans-Dicke theory [Текст] / K. D. Krori, D. R. Bhattacharjee // Journal of Mathematical Physics. — 1982. — Т. 23, № 4. — С. 637—638. — eprint: <https://doi.org/10.1063/1.525401>. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.525401>.
109. *Janis, A. I.* Comments on einstein scalar solutions [Текст] / A. I. Janis, D. C. Robinson, J. Winicour // Phys. Rev. — 1969. — Т. 186. — С. 1729—1731.
110. *Clement, G.* From Schwarzschild to Kerr: Generating spinning Einstein-Maxwell fields from static fields [Текст] / G. Clement // Phys. Rev. D. — 1998. — Т. 57. — С. 4885—4889. — arXiv: [gr-qc/9710109](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9710109).
111. *Zipoy, D. M.* Topology of Some Spheroidal Metrics [Текст] / D. M. Zipoy // J. Math. Phys. — 1966. — Т. 7. — С. 1137.
112. *Voorhees, B. H.* Static axially symmetric gravitational fields [Текст] / B. H. Voorhees // Phys. Rev. D. — 1970. — Т. 2. — С. 2119—2122.
113. *Eris, A.* Stationary Axially Symmetric Solutions of Einstein-Maxwell Massless Scalar Field Equations [Текст] / A. Eris, M. Gurses // J. Math. Phys. — 1977. — Т. 18. — С. 1303.
114. *Xanthopoulos, B. C.* Einstein Gravity Coupled to a Massless Scalar Field in Arbitrary Space-time Dimensions [Текст] / B. C. Xanthopoulos, T. Zannias // Phys. Rev. D. — 1989. — Т. 40. — С. 2564—2567.
115. *Duff, M. J.* Black and super p-branes in diverse dimensions [Текст] / M. J. Duff, J. X. Lu // Nucl. Phys. B. — 1994. — Т. 416. — С. 301—334. — arXiv: [hep-th/9306052](https://arxiv.org/abs/hep-th/9306052).
116. *Lu, H.* P-brane solitons in maximal supergravities [Текст] / H. Lu, C. N. Pope // Nucl. Phys. B. — 1996. — Т. 465. — С. 127—156. — arXiv: [hep-th/9512012](https://arxiv.org/abs/hep-th/9512012).
117. *Stelle, K. S.* Lectures on supergravity p-branes [Текст] / K. S. Stelle // ICTP Summer School in High-energy Physics and Cosmology. — 06.1996. — С. 287—339. — arXiv: [hep-th/9701088](https://arxiv.org/abs/hep-th/9701088).
118. *Gal'tsov, D. V.* Supergravity p-branes revisited: Extra parameters, uniqueness, and topological censorship [Текст] / D. V. Gal'tsov, J. P. S. Lemos, G. Clement // Phys. Rev. D. — 2004. — Т. 70. — С. 024011. — arXiv: [hep-th/0403112](https://arxiv.org/abs/hep-th/0403112).

119. *Duff, M. J.* String and five-brane solitons: Singular or nonsingular? [Текст] / M. J. Duff, R. R. Khuri, J. X. Lu // Nucl. Phys. B. — 1992. — Т. 377. — С. 281–294. — arXiv: [hep-th/9112023](https://arxiv.org/abs/hep-th/9112023).
120. *Zhou, B.* The Complete black brane solutions in D-dimensional coupled gravity system [Текст] / B. Zhou, C.-J. Zhu. — 05.1999. — [arXiv:hep-th/9905146].
121. *Lu, J. X.* Supergravity approach to tachyon condensation on the brane - anti-brane system [Текст] / J. X. Lu, S. Roy // Phys. Lett. B. — 2004. — Т. 599. — С. 313–318. — arXiv: [hep-th/0403147](https://arxiv.org/abs/hep-th/0403147).
122. *Lu, J. X.* Static, non-SUSY p-branes in diverse dimensions [Текст] / J. X. Lu, S. Roy // JHEP. — 2005. — Т. 02. — С. 001. — arXiv: [hep-th/0408242](https://arxiv.org/abs/hep-th/0408242).
123. *Kobayashi, S.* Open string tachyon in supergravity solution [Текст] / S. Kobayashi, T. Asakawa, S. Matsuura // Mod. Phys. Lett. A. — 2005. — Т. 20. — С. 1119–1134. — arXiv: [hep-th/0409044](https://arxiv.org/abs/hep-th/0409044).
124. More on general p-brane solutions [Текст] / D. Gal'tsov [и др.] // Int. J. Mod. Phys. A. — 2006. — Т. 21. — С. 3575–3604. — arXiv: [hep-th/0508070](https://arxiv.org/abs/hep-th/0508070).
125. *Asakawa, T.* Excited D-branes and supergravity solutions [Текст] / T. Asakawa, S. Kobayashi, S. Matsuura // Int. J. Mod. Phys. A. — 2006. — Т. 21. — С. 1503–1528. — arXiv: [hep-th/0506221](https://arxiv.org/abs/hep-th/0506221).
126. *Chase, J. E.* Event Horizons in Static Scalar-Vacuum Space-Times [Текст] / J. E. Chase // Commun. Math. Phys. — 1970. — Т. 19, № 4. — С. 276–288.
127. *Virbhadra, K. S.* Nature of singularity in Einstein massless scalar theory [Текст] / K. S. Virbhadra, S. Jhingan, P. S. Joshi // Int. J. Mod. Phys. D. — 1997. — Т. 6. — С. 357–362. — arXiv: [gr-qc/9512030](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9512030).
128. *Sokolowski, L.* Can Black Holes in Classical Kaluza-Klein Theory Have Scalar Hair? [Текст] / L. Sokolowski, B. J. Carr // Phys. Lett. B. — 1986. — Т. 176. — С. 334–340.
129. *Bogush, I.* Generation of rotating solutions in Einstein-scalar gravity [Текст] / I. Bogush, D. Gal'tsov // Phys. Rev. D. — 2020. — Т. 102, № 12. — С. 124006. — arXiv: [2001.02936 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/2001.02936).

130. *Astorino, M.* Stationary axisymmetric spacetimes with a conformally coupled scalar field [Текст] / M. Astorino // Phys. Rev. D. — 2015. — Т. 91. — С. 064066. — arXiv: [1412.3539 \[gr-qc\]](#).
131. *Gal'tsov, D. V.* Generating branes via sigma models [Текст] / D. V. Gal'tsov, O. A. Rytchkov // Phys. Rev. D. — 1998. — Т. 58. — С. 122001. — arXiv: [hep-th/9801160](#).
132. *B. K. Harrison.* New Solutions of the Einstein-Maxwell Equations from Old [Текст] / B. K. Harrison // J. Math. Phys. — 1968. — Т. 9. — С. 1744.
133. *Akhmedov, E. T.* Hawking temperature in the tunneling picture [Текст] / E. T. Akhmedov, V. Akhmedova, D. Singleton // Phys. Lett. B. — 2006. — Т. 642. — С. 124–128. — arXiv: [hep-th/0608098](#).
134. *Helliwell, T. M.* Quantum healing of classical singularities in power-law spacetimes [Текст] / T. M. Helliwell, D. A. Konkowski // Class. Quant. Grav. — 2007. — Т. 24. — С. 3377–3390. — arXiv: [gr-qc/0701149](#).
135. *Christodoulou, D.* Reversible and irreversible transformations in black hole physics [Текст] / D. Christodoulou // Phys. Rev. Lett. — 1970. — Т. 25. — С. 1596–1597.
136. *Hawking, S. W.* Black holes in general relativity [Текст] / S. W. Hawking // Commun. Math. Phys. — 1972. — Т. 25. — С. 152–166.
137. *Christodoulou, D.* Reversible transformations of a charged black hole [Текст] / D. Christodoulou, R. Ruffini // Phys. Rev. D. — 1971. — Т. 4. — С. 3552–3555.
138. *Smarr, L.* Mass formula for Kerr black holes [Текст] / L. Smarr // Phys. Rev. Lett. — 1973. — Т. 30. — С. 71–73. — [Erratum: Phys.Rev.Lett. 30, 521–521 (1973)].
139. *Hawking, S. W.* Black hole explosions [Текст] / S. W. Hawking // Nature. — 1974. — Т. 248. — С. 30–31.
140. *Bekenstein, J. D.* Black holes and the second law [Текст] / J. D. Bekenstein // Lett. Nuovo Cim. — 1972. — Т. 4. — С. 737–740.
141. *Bardeen, J. M.* The Four laws of black hole mechanics [Текст] / J. M. Bardeen, B. Carter, S. W. Hawking // Commun. Math. Phys. — 1973. — Т. 31. — С. 161–170.

142. *Hawking, S. W.* Black Holes and Thermodynamics [Текст] / S. W. Hawking // Phys. Rev. D. — 1976. — Т. 13. — С. 191—197.
143. *Gibbons, G. W.* Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity [Текст] / G. W. Gibbons, S. W. Hawking // Phys. Rev. D. — 1977. — Т. 15. — С. 2752—2756.
144. *Carter, B.* Black holes equilibrium states [Текст] / B. Carter // Les Houches Summer School of Theoretical Physics: Black Holes. — 1973. — С. 57—214.
145. *Hunter, C. J.* The Action of instantons with nut charge [Текст] / C. J. Hunter // Phys. Rev. D. — 1999. — Т. 59. — С. 024009. — arXiv: [gr-qc/9807010](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9807010).
146. *Hawking, S. W.* Gravitational entropy and global structure [Текст] / S. W. Hawking, C. J. Hunter // Phys. Rev. D. — 1999. — Т. 59. — С. 044025. — arXiv: [hep-th/9808085](https://arxiv.org/abs/hep-th/9808085).
147. *Carlip, S.* Entropy from conformal field theory at Killing horizons [Текст] / S. Carlip // Class. Quant. Grav. — 1999. — Т. 16. — С. 3327—3348. — arXiv: [gr-qc/9906126](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9906126).
148. *Mann, R. B.* Misner string entropy [Текст] / R. B. Mann // Phys. Rev. D. — 1999. — Т. 60. — С. 104047. — arXiv: [hep-th/9903229](https://arxiv.org/abs/hep-th/9903229).
149. *Hennigar, R. A.* Thermodynamics of Lorentzian Taub-NUT spacetimes [Текст] / R. A. Hennigar, D. Kubizňák, R. B. Mann // Phys. Rev. D. — 2019. — Т. 100, № 6. — С. 064055. — arXiv: [1903.08668](https://arxiv.org/abs/1903.08668) [[hep-th](#)].
150. *Durka, R.* The first law of black hole thermodynamics for Taub–NUT spacetime [Текст] / R. Durka // Int. J. Mod. Phys. D. — 2022. — Т. 31, № 04. — С. 2250021. — arXiv: [1908.04238](https://arxiv.org/abs/1908.04238) [[gr-qc](#)].
151. *Wu, S.-Q.* Thermodynamical hairs of the four-dimensional Taub-Newman-Unti-Tamburino spacetimes [Текст] / S.-Q. Wu, D. Wu // Phys. Rev. D. — 2019. — Т. 100, № 10. — С. 101501. — arXiv: [1909.07776](https://arxiv.org/abs/1909.07776) [[hep-th](#)].
152. *Chen, Z.* General Smarr relation and first law of a NUT dyonic black hole [Текст] / Z. Chen, J. Jiang // Phys. Rev. D. — 2019. — Т. 100, № 10. — С. 104016. — arXiv: [1910.10107](https://arxiv.org/abs/1910.10107) [[hep-th](#)].

153. *Ballon Bordo, A.* Thermodynamics of Rotating NUTty Dyons [Текст] / A. Ballon Bordo, F. Gray, D. Kubizňák // JHEP. — 2020. — Т. 05. — С. 084. — arXiv: [2003.02268](https://arxiv.org/abs/2003.02268) [hep-th].
154. *Harmark, T.* Stationary and axisymmetric solutions of higher-dimensional general relativity [Текст] / T. Harmark // Phys. Rev. D. — 2004. — Т. 70. — С. 124002. — arXiv: [hep-th/0408141](https://arxiv.org/abs/hep-th/0408141).
155. *Emparan, R.* Generalized Weyl solutions [Текст] / R. Emparan, H. S. Reall // Phys. Rev. D. — 2002. — Т. 65. — С. 084025. — arXiv: [hep-th/0110258](https://arxiv.org/abs/hep-th/0110258).
156. *Israel, W.* Line sources in general relativity [Текст] / W. Israel // Phys. Rev. D. — 1977. — Т. 15. — С. 935–941.
157. *Clément, G.* On the Smarr formula for rotating dyonic black holes [Текст] / G. Clément, D. Gal'tsov // Phys. Lett. B. — 2017. — Т. 773. — С. 290–294. — arXiv: [1707.01332](https://arxiv.org/abs/1707.01332) [gr-qc].
158. *Clément, G.* On the Smarr formulas for electrovac spacetimes with line singularities [Текст] / G. Clément, D. Gal'tsov // Phys. Lett. B. — 2020. — Т. 802. — С. 135270. — arXiv: [1908.10617](https://arxiv.org/abs/1908.10617) [gr-qc].
159. *Tomimatsu, A.* On Gravitational Mass and Angular Momentum of Two Black Holes in Equilibrium [Текст] / A. Tomimatsu // Prog. Theor. Phys. — 1983. — Т. 70. — С. 385.
160. *Tomimatsu, A.* Equilibrium of Two Rotating Charged Black Holes and the Dirac String [Текст] / A. Tomimatsu // Prog. Theor. Phys. — 1984. — Т. 72. — С. 73.
161. Constraints on black-hole charges with the 2017 EHT observations of M87* [Текст] / P. Kocherlakota [и др.] // Phys. Rev. D. — 2021. — Т. 103, № 10. — С. 104047. — arXiv: [2105.09343](https://arxiv.org/abs/2105.09343) [gr-qc].
162. *Cunha, P. V. P.* Shadows and strong gravitational lensing: a brief review [Текст] / P. V. P. Cunha, C. A. R. Herdeiro // Gen. Rel. Grav. — 2018. — Т. 50, № 4. — С. 42. — arXiv: [1801.00860](https://arxiv.org/abs/1801.00860) [gr-qc].
163. *Dokuchaev, V. I.* Silhouettes of invisible black holes [Текст] / V. I. Dokuchaev, N. O. Nazarova // Usp. Fiz. Nauk. — 2020. — Т. 190, № 6. — С. 627–647. — arXiv: [1911.07695](https://arxiv.org/abs/1911.07695) [gr-qc].

164. *Bronzwaer, T.* The Nature of Black Hole Shadows [Текст] / T. Bronzwaer, H. Falcke // *Astrophys. J.* — 2021. — Т. 920, № 2. — С. 155. — arXiv: [2108.03966 \[astro-ph.HE\]](#).
165. *Perlick, V.* Calculating black hole shadows: Review of analytical studies [Текст] / V. Perlick, O. Y. Tsupko // *Phys. Rept.* — 2022. — Т. 947. — С. 1–39. — arXiv: [2105.07101 \[gr-qc\]](#).
166. *Virbhadra, K. S.* Compactness of supermassive dark objects at galactic centers [Текст] / K. S. Virbhadra. — 2022. — Апр. — arXiv: [2204.01792 \[gr-qc\]](#).
167. *Virbhadra, K. S.* Distortions of images of Schwarzschild lensing [Текст] / K. S. Virbhadra. — 2022. — Апр. — arXiv: [2204.01879 \[gr-qc\]](#).
168. *Dokuchaev, V. I.* Visible shapes of black holes M87* and SgrA* [Текст] / V. I. Dokuchaev, N. O. Nazarova // *Universe* / под ред. V. M. Mostepanenko, A. A. Starobinsky, E. N. Velichko. — 2020. — Т. 6, № 9. — С. 154. — arXiv: [2007.14121 \[astro-ph.HE\]](#).
169. *Konoplya, R. A.* Shadow of a black hole surrounded by dark matter [Текст] / R. A. Konoplya // *Phys. Lett. B.* — 2019. — Т. 795. — С. 1–6. — arXiv: [1905.00064 \[gr-qc\]](#).
170. *Saurabh, K.* Imprints of dark matter on black hole shadows using spherical accretions [Текст] / K. Saurabh, K. Jusufi // *Eur. Phys. J. C.* — 2021. — Т. 81, № 6. — С. 490. — arXiv: [2009.10599 \[gr-qc\]](#).
171. *Lee, B.-H.* Shadow cast by a rotating black hole with anisotropic matter [Текст] / B.-H. Lee, W. Lee, Y. S. Myung // *Phys. Rev. D.* — 2021. — Т. 103, № 6. — С. 064026. — arXiv: [2101.04862 \[gr-qc\]](#).
172. *Adler, S. L.* Cosmological constant corrections to the photon sphere and black hole shadow radii [Текст] / S. L. Adler, K. S. Virbhadra // *Gen. Rel. Grav.* — 2022. — Т. 54, № 8. — С. 93. — arXiv: [2205.04628 \[gr-qc\]](#).
173. *Zhang, Z.* Geometrization of light bending and its application to SdS_w spacetime [Текст] / Z. Zhang // *Class. Quant. Grav.* — 2022. — Т. 39, № 1. — С. 015003. — arXiv: [2112.04149 \[gr-qc\]](#).
174. Black hole mimicker hiding in the shadow: Optical properties of the γ metric [Текст] / A. B. Abdikamalov [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 2019. — Т. 100, № 2. — С. 024014. — arXiv: [1904.06207 \[gr-qc\]](#).

175. *Psaltis, D.* Testing General Relativity with the Event Horizon Telescope [Текст] / D. Psaltis // Gen. Rel. Grav. — 2019. — Т. 51, № 10. — С. 137. — arXiv: [1806.09740 \[astro-ph.HE\]](#).
176. *Rummel, M.* Constraining Fundamental Physics with the Event Horizon Telescope [Текст] / M. Rummel, C. P. Burgess // JCAP. — 2020. — Т. 05. — С. 051. — arXiv: [2001.00041 \[gr-qc\]](#).
177. Testing the rotational nature of the supermassive object M87* from the circularity and size of its first image [Текст] / C. Bambi [и др.] // Phys. Rev. D. — 2019. — Т. 100, № 4. — С. 044057. — arXiv: [1904.12983 \[gr-qc\]](#).
178. *Tsukamoto, N.* Constraining the spin and the deformation parameters from the black hole shadow [Текст] / N. Tsukamoto, Z. Li, C. Bambi // JCAP. — 2014. — Т. 06. — С. 043. — arXiv: [1403.0371 \[gr-qc\]](#).
179. *Kumar, R.* Black Hole Parameter Estimation from Its Shadow [Текст] / R. Kumar, S. G. Ghosh // Astrophys. J. — 2020. — Т. 892. — С. 78. — arXiv: [1811.01260 \[gr-qc\]](#).
180. *Afrin, M.* Parameter estimation of hairy Kerr black holes from its shadow and constraints from M87* [Текст] / M. Afrin, R. Kumar, S. G. Ghosh // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 2021. — Т. 504. — С. 5927—5940. — arXiv: [2103.11417 \[gr-qc\]](#).
181. Magnetically charged black holes from non-linear electrodynamics and the Event Horizon Telescope [Текст] / A. Allahyari [и др.] // JCAP. — 2020. — Т. 02. — С. 003. — arXiv: [1912.08231 \[gr-qc\]](#).
182. *Atamurotov, F.* Shadow of rotating non-Kerr black hole [Текст] / F. Atamurotov, A. Abdujabbarov, B. Ahmedov // Phys. Rev. D. — 2013. — Т. 88, № 6. — С. 064004.
183. Multiple shadows from distorted static black holes [Текст] / J. Grover [и др.] // Phys. Rev. D. — 2018. — Т. 97, № 8. — С. 084024. — arXiv: [1802.03062 \[gr-qc\]](#).
184. Shadows of Kerr black holes with scalar hair [Текст] / P. V. P. Cunha [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Т. 115, № 21. — С. 211102. — arXiv: [1509.00021 \[gr-qc\]](#).

185. Black holes with scalar hair in light of the Event Horizon Telescope [Текст] / M. Khodadi [и др.] // JCAP. — 2020. — Т. 09. — С. 026. — arXiv: [2005.05992 \[gr-qc\]](#).
186. Photon spheres and spherical accretion image of a hairy black hole [Текст] / Q. Gan [и др.] // Phys. Rev. D. — 2021. — Т. 104, № 2. — С. 024003. — arXiv: [2104.08703 \[gr-qc\]](#).
187. *Khodadi, M.* No-hair theorem in the wake of Event Horizon Telescope [Текст] / M. Khodadi, G. Lambiase, D. F. Mota // JCAP. — 2021. — Т. 09. — С. 028. — arXiv: [2107.00834 \[gr-qc\]](#).
188. *Stashko, O. S.* Thin accretion discs around spherically symmetric configurations with nonlinear scalar fields [Текст] / O. S. Stashko, V. I. Zhdanov, A. N. Alexandrov // Phys. Rev. D. — 2021. — Т. 104, № 10. — С. 104055. — arXiv: [2107.05111 \[gr-qc\]](#).
189. *Cai, X.-C.* Can shadows connect black hole microstructures? [Текст] / X.-C. Cai, Y.-G. Miao. — 2021. — ЯНВ. — arXiv: [2101.10780 \[gr-qc\]](#).
190. Constraints on dark matter annihilation from the Event Horizon Telescope observations of M87* [Текст] / G.-W. Yuan [и др.] // JHEP. — 2022. — Т. 04. — С. 018. — arXiv: [2106.05901 \[hep-ph\]](#).
191. *Eiroa, E. F.* Shadow cast by rotating braneworld black holes with a cosmological constant [Текст] / E. F. Eiroa, C. M. Sendra // Eur. Phys. J. C. — 2018. — Т. 78, № 2. — С. 91. — arXiv: [1711.08380 \[gr-qc\]](#).
192. *Khodadi, M.* Einstein-Æther gravity in the light of event horizon telescope observations of M87* [Текст] / M. Khodadi, E. N. Saridakis // Phys. Dark Univ. — 2021. — Т. 32. — С. 100835. — arXiv: [2012.05186 \[gr-qc\]](#).
193. *Vagnozzi, S.* Hunting for extra dimensions in the shadow of M87* [Текст] / S. Vagnozzi, L. Visinelli // Phys. Rev. D. — 2019. — Т. 100, № 2. — С. 024020. — arXiv: [1905.12421 \[gr-qc\]](#).
194. *Roy, R.* Superradiance evolution of black hole shadows revisited [Текст] / R. Roy, S. Vagnozzi, L. Visinelli // Phys. Rev. D. — 2022. — Т. 105, № 8. — С. 083002. — arXiv: [2112.06932 \[astro-ph.HE\]](#).
195. *Amarilla, L.* Shadow of a Kaluza-Klein rotating dilaton black hole [Текст] / L. Amarilla, E. F. Eiroa // Phys. Rev. D. — 2013. — Т. 87, № 4. — С. 044057. — arXiv: [1301.0532 \[gr-qc\]](#).

196. *Amarilla, L.* Shadow of a rotating braneworld black hole [Текст] / L. Amarilla, E. F. Eiroa // Phys. Rev. D. — 2012. — Т. 85. — С. 064019. — arXiv: [1112.6349 \[gr-qc\]](#).
197. *Dymnikova, I.* Spherically symmetric space-time with the regular de Sitter center [Текст] / I. Dymnikova // Int. J. Mod. Phys. D / под ред. V. M. Mostepanenko, C. Romero. — 2003. — Т. 12. — С. 1015–1034. — arXiv: [gr-qc/0304110](#).
198. *Nedkova, P. G.* Shadow of a rotating traversable wormhole [Текст] / P. G. Nedkova, V. K. Tinchev, S. S. Yazadjiev // Phys. Rev. D. — 2013. — Т. 88, № 12. — С. 124019. — arXiv: [1307.7647 \[gr-qc\]](#).
199. On the shadow of rotating traversable wormholes [Текст] / G. Gyulchev [и др.] // Eur. Phys. J. C. — 2018. — Т. 78, № 7. — С. 544. — arXiv: [1805.11591 \[gr-qc\]](#).
200. *Shaikh, R.* Shadows of rotating wormholes [Текст] / R. Shaikh // Phys. Rev. D. — 2018. — Т. 98, № 2. — С. 024044. — arXiv: [1803.11422 \[gr-qc\]](#).
201. Shadows of spherically symmetric black holes and naked singularities [Текст] / R. Shaikh [и др.] // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 2019. — Т. 482, № 1. — С. 52–64. — arXiv: [1802.08060 \[astro-ph.HE\]](#).
202. *Karimov, R. K.* Accretion disk around the rotating Damour–Solodukhin wormhole [Текст] / R. K. Karimov, R. N. Izmailov, K. K. Nandi // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Т. 79, № 11. — С. 952. — arXiv: [1901.05762 \[gr-qc\]](#).
203. Can accretion properties distinguish between a naked singularity, wormhole and black hole? [Текст] / R. K. Karimov [и др.] // Eur. Phys. J. C. — 2020. — Т. 80, № 12. — С. 1138. — arXiv: [2012.13564 \[gr-qc\]](#).
204. Observational signatures of strongly naked singularities: image of the thin accretion disk [Текст] / G. Gyulchev [и др.] // Eur. Phys. J. C. — 2020. — Т. 80, № 11. — С. 1017. — arXiv: [2003.06943 \[gr-qc\]](#).
205. Constraining alternatives to the Kerr black hole [Текст] / R. Shaikh [и др.] // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 2021. — Т. 506, № 1. — С. 1229–1236. — arXiv: [2102.04299 \[gr-qc\]](#).

206. *Boero, E. F.* Strong gravitational lens image of the M87 black hole with a simple accreting matter model [Текст] / E. F. Boero, O. M. Moreschi // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 2021. — Т. 507, № 4. — С. 5974–5990. — arXiv: [2105.07075](https://arxiv.org/abs/2105.07075) [gr-qc].
207. *Bisnovatyi-Kogan, G. S.* Analytical study of higher-order ring images of the accretion disk around a black hole [Текст] / G. S. Bisnovatyi-Kogan, O. Y. Tsupko // Phys. Rev. D. — 2022. — Т. 105, № 6. — С. 064040. — arXiv: [2201.01716](https://arxiv.org/abs/2201.01716) [gr-qc].
208. *Badía, J.* Shadow of axisymmetric, stationary, and asymptotically flat black holes in the presence of plasma [Текст] / J. Badía, E. F. Eiroa // Phys. Rev. D. — 2021. — Т. 104, № 8. — С. 084055. — arXiv: [2106.07601](https://arxiv.org/abs/2106.07601) [gr-qc].
209. *Claudel, C.-M.* The Geometry of photon surfaces [Текст] / C.-M. Claudel, K. S. Virbhadra, G. F. R. Ellis // J. Math. Phys. — 2001. — Т. 42. — С. 818–838. — arXiv: [gr-qc/0005050](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0005050).
210. *Grenzebach, A.* Photon Regions and Shadows of Kerr-Newman-NUT Black Holes with a Cosmological Constant [Текст] / A. Grenzebach, V. Perlick, C. Lämmerzahl // Phys. Rev. D. — 2014. — Т. 89, № 12. — С. 124004. — arXiv: [1403.5234](https://arxiv.org/abs/1403.5234) [gr-qc].
211. *Grenzebach, A.* Photon Regions and Shadows of Accelerated Black Holes [Текст] / A. Grenzebach, V. Perlick, C. Lämmerzahl // Int. J. Mod. Phys. D / под ред. С. А. R. Herdeiro [и др.]. — 2015. — Т. 24, № 09. — С. 1542024. — arXiv: [1503.03036](https://arxiv.org/abs/1503.03036) [gr-qc].
212. Extension of photon surfaces and their area: Static and stationary spacetimes [Текст] / H. Yoshino [и др.] // PTEP. — 2017. — Т. 2017, № 6. — 063E01. — arXiv: [1704.04637](https://arxiv.org/abs/1704.04637) [gr-qc].
213. Transversely trapping surfaces: Dynamical version [Текст] / H. Yoshino [и др.] // PTEP. — 2020. — Т. 2020, № 2. — 023E02. — arXiv: [1909.08420](https://arxiv.org/abs/1909.08420) [gr-qc].
214. *Gal'tsov, D. V.* Photon trapping in static axially symmetric spacetime [Текст] / D. V. Gal'tsov, K. V. Kobialko // Phys. Rev. D. — 2019. — Т. 100, № 10. — С. 104005. — arXiv: [1906.12065](https://arxiv.org/abs/1906.12065) [gr-qc].

215. *Gal'tsov, D. V.* Completing characterization of photon orbits in Kerr and Kerr-Newman metrics [Текст] / D. V. Gal'tsov, K. V. Kobialko // Phys. Rev. D. — 2019. — Т. 99, № 8. — С. 084043. — arXiv: [1901.02785 \[gr-qc\]](#).
216. *Koga, Y.* Photon surfaces in less symmetric spacetimes [Текст] / Y. Koga, T. Igata, K. Nakashi // Phys. Rev. D. — 2021. — Т. 103, № 4. — С. 044003. — arXiv: [2011.10234 \[gr-qc\]](#).
217. *Teo, E.* Spherical orbits around a Kerr black hole [Текст] / E. Teo // Gen. Rel. Grav. — 2021. — Т. 53, № 1. — С. 10. — arXiv: [2007.04022 \[gr-qc\]](#).
218. *Kobialko, K. V.* Photon regions and umbilic conditions in stationary axisymmetric spacetimes: Photon Regions [Текст] / K. V. Kobialko, D. V. Gal'tsov // Eur. Phys. J. C. — 2020. — Т. 80, № 6. — С. 527. — arXiv: [2002.04280 \[gr-qc\]](#).
219. *Lukes-Gerakopoulos, G.* The non-integrability of the Zipoy-Voorhees metric [Текст] / G. Lukes-Gerakopoulos // Phys. Rev. D. — 2012. — Т. 86. — С. 044013. — arXiv: [1206.0660 \[gr-qc\]](#).
220. *Joshi, P. S.* Recent developments in gravitational collapse and spacetime singularities [Текст] / P. S. Joshi, D. Malafarina // Int. J. Mod. Phys. D. — 2011. — Т. 20. — С. 2641–2729. — arXiv: [1201.3660 \[gr-qc\]](#).
221. *Ota, K.* Revisiting timelike geodesics in the Fisher-Janis-Newman-Winicour-Wyman spacetime [Текст] / K. Ota, S. Kobayashi, K. Nakashi // Phys. Rev. D. — 2022. — Т. 105, № 2. — С. 024037. — arXiv: [2110.07503 \[gr-qc\]](#).
222. Shadows and precession of orbits in rotating Janis–Newman–Winicour spacetime [Текст] / D. N. Solanki [и др.] // Eur. Phys. J. C. — 2022. — Т. 82, № 1. — С. 77. — arXiv: [2109.14937 \[gr-qc\]](#).
223. Comparing accretion disk profiles of Bogush–Galt'sov naked singularity and Kerr black hole [Текст] / R. K. Karimov [и др.] // Eur. Phys. J. C. — 2022. — Т. 82, № 3. — С. 239.
224. *Carter, B.* Hamilton-Jacobi and Schrodinger separable solutions of Einstein's equations [Текст] / B. Carter // Commun. Math. Phys. — 1968. — Т. 10, № 4. — С. 280–310.
225. *Walker, M.* On quadratic first integrals of the geodesic equations for type [22] spacetimes [Текст] / M. Walker, R. Penrose // Commun. Math. Phys. — 1970. — Т. 18. — С. 265–274.

226. On a quadratic first integral for the charged particle orbits in the charged kerr solution [Текст] / L. P. Hughston [и др.] // Commun. Math. Phys. — 1972. — Т. 27. — С. 303—308.
227. *Sommers, P.* On Killing tensors and constants of motion [Текст] / P. Sommers // Journal of Mathematical Physics. — 1973. — Т. 14, № 6. — С. 787—790.
228. *Benenti, S.* Remarks on certain separability structures and their applications to general relativity [Текст] / S. Benenti, M. Francaviglia // General Relativity and Gravitation. — 1979. — Т. 10, № 1. — С. 79—92.
229. *Carter, B.* Killing Tensor Quantum Numbers and Conserved Currents in Curved Space [Текст] / B. Carter // Phys. Rev. D. — 1977. — Т. 16. — С. 3395—3414.
230. Exact solutions of Einstein's field equations [Текст] / H. Stephani [и др.]. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2003. — (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
231. *Katanaev, M. O.* Killing vector fields and a homogeneous isotropic universe [Текст] / M. O. Katanaev // Phys. Usp. — 2016. — Т. 59, № 7. — С. 689—700. — arXiv: [1610.05628](https://arxiv.org/abs/1610.05628) [gr-qc].
232. Some Spacetimes with Higher Rank Killing-Stackel Tensors [Текст] / G. W. Gibbons [и др.] // Phys. Lett. B. — 2011. — Т. 700. — С. 68—74. — arXiv: [1103.5366](https://arxiv.org/abs/1103.5366) [gr-qc].
233. *Cariglia, M.* Hidden Symmetries of Dynamics in Classical and Quantum Physics [Текст] / M. Cariglia // Rev. Mod. Phys. — 2014. — Т. 86. — С. 1283. — arXiv: [1411.1262](https://arxiv.org/abs/1411.1262) [math-ph].
234. *Frolov, V.* Black holes, hidden symmetries, and complete integrability [Текст] / V. Frolov, P. Krtous, D. Kubiznak // Living Rev. Rel. — 2017. — Т. 20, № 1. — С. 6. — arXiv: [1705.05482](https://arxiv.org/abs/1705.05482) [gr-qc].
235. *Papadopoulos, G. O.* Preserving Kerr symmetries in deformed spacetimes [Текст] / G. O. Papadopoulos, K. D. Kokkotas // Class. Quant. Grav. — 2018. — Т. 35, № 18. — С. 185014. — arXiv: [1807.08594](https://arxiv.org/abs/1807.08594) [gr-qc].
236. *Carson, Z.* Asymptotically flat, parameterized black hole metric preserving Kerr symmetries [Текст] / Z. Carson, K. Yagi // Phys. Rev. D. — 2020. — Т. 101, № 8. — С. 084030. — arXiv: [2002.01028](https://arxiv.org/abs/2002.01028) [gr-qc].

237. *Papadopoulos, G. O.* On Kerr black hole deformations admitting a Carter constant and an invariant criterion for the separability of the wave equation [Текст] / G. O. Papadopoulos, K. D. Kokkotas // Gen. Rel. Grav. — 2021. — Т. 53, № 2. — С. 21. — arXiv: [2007.12125 \[gr-qc\]](#).
238. Supertranslations and Superrotations at the Black Hole Horizon [Текст] / L. Donnay [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Т. 116, № 9. — С. 091101. — arXiv: [1511.08687 \[hep-th\]](#).
239. *Akhmedov, E. T.* Symmetries at the black hole horizon [Текст] / E. T. Akhmedov, M. Godazgar // Phys. Rev. D. — 2017. — Т. 96, № 10. — С. 104025. — arXiv: [1707.05517 \[hep-th\]](#).
240. *Carlip, S.* Black Hole Entropy from Bondi-Metzner-Sachs Symmetry at the Horizon [Текст] / S. Carlip // Phys. Rev. Lett. — 2018. — Т. 120, № 10. — С. 101301. — arXiv: [1702.04439 \[gr-qc\]](#).
241. Classification of the Weyl tensor in higher dimensions [Текст] / A. Coley [и др.] // Class. Quant. Grav. — 2004. — Т. 21. — С. L35–L42. — arXiv: [gr-qc/0401008](#).
242. *Coley, A.* Classification of the Weyl Tensor in Higher Dimensions and Applications [Текст] / A. Coley // Class. Quant. Grav. — 2008. — Т. 25. — С. 033001. — arXiv: [0710.1598 \[gr-qc\]](#).
243. *Keeler, C.* Separability of Black Holes in String Theory [Текст] / C. Keeler, F. Larsen // JHEP. — 2012. — Т. 10. — С. 152. — arXiv: [1207.5928 \[hep-th\]](#).
244. *Chow, D. D. K.* Black holes in N=8 supergravity from SO(4,4) hidden symmetries [Текст] / D. D. K. Chow, G. Compère // Phys. Rev. D. — 2014. — Т. 90, № 2. — С. 025029. — arXiv: [1404.2602 \[hep-th\]](#).
245. *Krtous, P.* Killing-Yano forms and Killing tensors on a warped space [Текст] / P. Krtous, D. Kubiznak, I. Kolar // Phys. Rev. D. — 2016. — Т. 93, № 2. — С. 024057. — arXiv: [1508.02642 \[gr-qc\]](#).
246. *Garfinkle, D.* Killing Tensors and Symmetries [Текст] / D. Garfinkle, E. N. Glass // Class. Quant. Grav. — 2010. — Т. 27. — С. 095004. — arXiv: [1003.0019 \[gr-qc\]](#).
247. *Garfinkle, D.* Killing-Yano tensors in spaces admitting a hypersurface orthogonal Killing vector [Текст] / D. Garfinkle, E. N. Glass // J. Math. Phys. — 2013. — Т. 54. — С. 032501. — arXiv: [1302.6207 \[gr-qc\]](#).

248. *Koutras, A.* Killing tensors from conformal Killing vectors [Текст] / A. Koutras // Classical and Quantum Gravity. — 1992. — Т. 9, № 6. — С. 1573.
249. *Barnes, A.* Killing tensors from conformal Killing vectors [Текст] / A. Barnes, B. Edgar, R. Rani // Spanish Relativity Meeting on Gravitation and Cosmology (ERE 2002). — 12.2002. — arXiv: [gr-qc/0212016](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0212016).
250. *Pappas, G.* On the connection of spacetime separability and spherical photon orbits [Текст] / G. Pappas, K. Glampedakis. — 2018. — ИЮНЬ. — arXiv: [1806.04091 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1806.04091).
251. *Glampedakis, K.* Modification of photon trapping orbits as a diagnostic of non-Kerr spacetimes [Текст] / K. Glampedakis, G. Pappas // Phys. Rev. D. — 2019. — Т. 99, № 12. — С. 124041. — arXiv: [1806.09333 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1806.09333).
252. *Kobialko, K.* Killing tensors and photon surfaces in foliated spacetimes [Текст] / K. Kobialko, I. Bogush, D. Gal'tsov // Phys. Rev. D. — 2021. — Т. 104, № 4. — С. 044009. — arXiv: [2104.02167 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/2104.02167).
253. Formation of dynamically transversely trapping surfaces and the stretched hoop conjecture [Текст] / H. Yoshino [и др.] // PTEP. — 2020. — Т. 2020, № 5. — 053E01. — arXiv: [1911.09893 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1911.09893).
254. *Teo, E.* Spherical Photon Orbits Around a Kerr Black Hole [Текст] / E. Teo // General Relativity and Gravitation. — 2003. — Т. 35, № 11. — С. 1909–1926.
255. *Cao, L.-M.* Quasi-local photon surfaces in general spherically symmetric spacetimes [Текст] / L.-M. Cao, Y. Song // Eur. Phys. J. C. — 2021. — Т. 81, № 8. — С. 714. — arXiv: [1910.13758 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1910.13758).
256. Dynamical photon sphere and time evolving shadow around black holes with temporal accretion [Текст] / Y. Koga [и др.] // Phys. Rev. D. — 2022. — Т. 105, № 10. — С. 104040. — arXiv: [2202.00201 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/2202.00201).
257. Loosely trapped surface and dynamically transversely trapping surface in Einstein–Maxwell systems [Текст] / K. Lee [и др.] // PTEP. — 2020. — Т. 2020, № 10. — 103E03. — arXiv: [2007.03139 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/2007.03139).

258. *Kobialko, K.* Photon regions in stationary axisymmetric spacetimes and umbilic conditions [Текст] / K. Kobialko, D. Gal'tsov // 16th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories. — 10.2021. — arXiv: [2110.04610 \[gr-qc\]](#).
259. *Grover, J.* Black Hole Shadows and Invariant Phase Space Structures [Текст] / J. Grover, A. Wittig // Phys. Rev. D. — 2017. — Т. 96, № 2. — С. 024045. — arXiv: [1705.07061 \[gr-qc\]](#).
260. *Shiple, J. O.* Strong-field gravitational lensing by black holes [Текст] : дис. . . . канд. / Shipley Jake O. — Sheffield U., 2019. — arXiv: [1909.04691 \[gr-qc\]](#).
261. *Tsukamoto, N.* Deflection angle of a light ray reflected by a general marginally unstable photon sphere in a strong deflection limit [Текст] / N. Tsukamoto // Phys. Rev. D. — 2020. — Т. 102, № 10. — С. 104029. — arXiv: [2008.12244 \[gr-qc\]](#).
262. *Tsukamoto, N.* Gravitational lensing in the Simpson-Visser black-bounce spacetime in a strong deflection limit [Текст] / N. Tsukamoto // Phys. Rev. D. — 2021. — Т. 103, № 2. — С. 024033. — arXiv: [2011.03932 \[gr-qc\]](#).
263. *Tsukamoto, N.* Gravitational lensing by a photon sphere in a Reissner-Nordström naked singularity spacetime in strong deflection limits [Текст] / N. Tsukamoto // Phys. Rev. D. — 2021. — Т. 104, № 12. — С. 124016. — arXiv: [2107.07146 \[gr-qc\]](#).
264. *Tsukamoto, N.* Retrolensing by light rays slightly inside and outside of a photon sphere around a Reissner-Nordström naked singularity [Текст] / N. Tsukamoto // Phys. Rev. D. — 2022. — Т. 105, № 2. — С. 024009. — arXiv: [2109.00495 \[gr-qc\]](#).
265. *Grenzebach, A.* The Shadow of Black Holes: An Analytic Description [Текст] / A. Grenzebach. — Springer, Heidelberg, 2016.
266. *Konoplya, R. A.* Shadows of parametrized axially symmetric black holes allowing for separation of variables [Текст] / R. A. Konoplya, A. Zhidenko // Phys. Rev. D. — 2021. — Т. 103, № 10. — С. 104033. — arXiv: [2103.03855 \[gr-qc\]](#).
267. *Lan, X. G.* Observing the contour profile of a Kerr–Sen black hole [Текст] / X. G. Lan, J. Pu // Mod. Phys. Lett. A. — 2018. — Т. 33, № 17. — С. 1850099.

268. *Cederbaum, C.* Uniqueness of photon spheres in electro-vacuum spacetimes [Текст] / C. Cederbaum, G. J. Galloway // Class. Quant. Grav. — 2016. — Т. 33. — С. 075006. — arXiv: [1508.00355 \[math.DG\]](#).
269. *Yazadjiev, S. S.* Uniqueness of the static spacetimes with a photon sphere in Einstein-scalar field theory [Текст] / S. S. Yazadjiev // Phys. Rev. D. — 2015. — Т. 91, № 12. — С. 123013. — arXiv: [1501.06837 \[gr-qc\]](#).
270. *Yazadjiev, S.* Classification of the static and asymptotically flat Einstein-Maxwell-dilaton spacetimes with a photon sphere [Текст] / S. Yazadjiev, B. Lazov // Phys. Rev. D. — 2016. — Т. 93, № 8. — С. 083002. — arXiv: [1510.04022 \[gr-qc\]](#).
271. *Yazadjiev, S.* Uniqueness of the static Einstein–Maxwell spacetimes with a photon sphere [Текст] / S. Yazadjiev, B. Lazov // Class. Quant. Grav. — 2015. — Т. 32. — С. 165021. — arXiv: [1503.06828 \[gr-qc\]](#).
272. *Yoshino, H.* Uniqueness of static photon surfaces: Perturbative approach [Текст] / H. Yoshino // Phys. Rev. D. — 2017. — Т. 95, № 4. — С. 044047. — arXiv: [1607.07133 \[gr-qc\]](#).
273. *Yazadjiev, S.* Classification of static asymptotically flat spacetimes with a photon sphere in Einstein-multiple-scalar field theory [Текст] / S. Yazadjiev // Phys. Rev. D. — 2021. — Т. 104, № 12. — С. 124070. — arXiv: [2109.02945 \[gr-qc\]](#).
274. *Koga, Y.* Photon surfaces as pure tension shells: Uniqueness of thin shell wormholes [Текст] / Y. Koga // Phys. Rev. D. — 2020. — Т. 101, № 10. — С. 104022. — arXiv: [2003.10859 \[gr-qc\]](#).
275. *Rogatko, M.* Uniqueness of photon sphere for Einstein-Maxwell-dilaton black holes with arbitrary coupling constant [Текст] / M. Rogatko // Phys. Rev. D. — 2016. — Т. 93, № 6. — С. 064003. — arXiv: [1602.03270 \[hep-th\]](#).
276. *Cederbaum, C.* Uniqueness of photon spheres in static vacuum asymptotically flat spacetimes [Текст] / C. Cederbaum. — 2014. — ИЮНЬ. — arXiv: [1406.5475 \[math.DG\]](#).
277. *Cederbaum, C.* Photon surfaces with equipotential time-slices [Текст] / C. Cederbaum, G. J. Galloway // J. Math. Phys. — 2021. — Т. 62, № 3. — С. 032504. — arXiv: [1910.04220 \[math.DG\]](#).

278. Area bound for a surface in a strong gravity region [Текст] / Т. Shiromizu [и др.] // PTEP. — 2017. — Т. 2017, № 3. — 033E01. — arXiv: [1701.00564 \[gr-qc\]](#).
279. *Feng, X.-H.* On the size of rotating black holes [Текст] / X.-H. Feng, H. Lu // Eur. Phys. J. C. — 2020. — Т. 80, № 6. — С. 551. — arXiv: [1911.12368 \[gr-qc\]](#).
280. *Yang, R.-Q.* Universal bounds on the size of a black hole [Текст] / R.-Q. Yang, H. Lu // Eur. Phys. J. C. — 2020. — Т. 80, № 10. — С. 949. — arXiv: [2001.00027 \[gr-qc\]](#).
281. *Kubiznak, D.* On conformal Killing-Yano tensors for Plebanski-Demianski family of solutions [Текст] / D. Kubiznak, P. Krtous // Phys. Rev. D. — 2007. — Т. 76. — С. 084036. — arXiv: [0707.0409 \[gr-qc\]](#).
282. *Vasudevan, M.* Integrability of some charged rotating supergravity black hole solutions in four and five dimensions [Текст] / M. Vasudevan // Phys. Lett. B. — 2005. — Т. 624. — С. 287–296. — arXiv: [gr-qc/0507092](#).
283. *Kobialko, K.* Slice-reducible conformal Killing tensors, photon surfaces, and shadows [Текст] / K. Kobialko, I. Bogush, D. Gal'tsov // Phys. Rev. D. — 2022. — Т. 106, № 2. — С. 024006. — arXiv: [2202.09126 \[gr-qc\]](#).
284. Photon surfaces, shadows, and accretion disks in gravity with minimally coupled scalar field [Текст] / I. Bogush [и др.] // Phys. Rev. D. — 2022. — Т. 106, № 2. — С. 024034. — arXiv: [2205.01919 \[gr-qc\]](#).
285. *Богущ, И. А.* Гипербраны со скалярными волосами [Текст] / И. А. Богущ, Д. В. Гальцов // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. — 2019. — № 3.
286. *Богущ, И. А.* Генерация нового заряженного решения с вращением в теории Эйнштейна-Максвелла с дилатоном с помощью сигма-модели [Текст] / И. А. Богущ // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2018» Секция физики. Сборник тезисов докладов. — Физический факультет МГУ Москва. — М.: МАКС Пресс, 2018.
287. *Богущ, И. А.* ПОЛУЧЕНИЕ НОВЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ РЕШЕНИЙ В СКАЛЯРНО-ТЕНЗОРНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ С МИНИМАЛЬНОЙ СВЯЗЬЮ [Текст] / И. А. Богущ // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2019» Секция физики.

- Сборник тезисов докладов. – Физический факультет МГУ Москва. — М.: МАКС Пресс, 2019.
288. *Богущ, И. А.* Формула Смарра для стационарных решений с сингулярностями на полярной оси в модели ЭМД [Текст] / И. А. Богущ // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020» Секция физики. Сборник тезисов докладов. – Физический факультет МГУ Москва. — М.: МАКС Пресс, 2020.
289. *Богущ, И. А.* Моделирование и анализ теней гравитирующих ультракомпактных объектов [Текст] / И. А. Богущ, К. В. Кобялко // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2021» Секция физики. Сборник тезисов докладов. – Физический факультет МГУ Москва. — М.: МАКС Пресс, 2021.
290. *Богущ, И. А.* Послойно-редуцируемые конформные тензора Киллинга и их связь с фотонными поверхностями и тенями черных дыр [Текст] / И. А. Богущ, К. В. Кобялко // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2022» Секция физики. Сборник тезисов докладов. – Физический факультет МГУ Москва. — М.: МАКС Пресс, 2022.
291. *Богущ, И. А.* ГИПЕРБРАНЫ СО СКАЛЯРНЫМИ ВОЛОСАМИ [Текст] / И. А. Богущ, Д. В. Гальцов // Ломоносовские чтения - 2019. Секция физики. Сборник тезисов докладов. – Физический факультет МГУ Москва. — 2019.
292. *Богущ, И. А.* КВАНТОВАЯ ТРАКТОВКА СИНГУЛЯРНОСТЕЙ В РЕШЕНИЯХ ДЛЯ БРАН СО СКАЛЯРНЫМИ ВОЛОСАМИ [Текст] / И. А. Богущ, Д. В. Гальцов // Ломоносовские чтения - 2021. Секция физики. Сборник тезисов докладов. – Физический факультет МГУ Москва. — 2021.
293. *Kobialko, K.* Killing tensors in foliated spacetimes and photon surfaces [Текст] / K. Kobialko, I. Bogush, D. Gal'tsov // 16th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories. — 10.2021. — arXiv: [2110.04608](https://arxiv.org/abs/2110.04608) [gr-qc]. — (accepted in Int.J.Mod.Phys.D).

294. *Gal'tsov, D.* Einstein-Maxwell-Dilaton-Axion mass formulas for black holes with struts and strings [Текст] / D. Gal'tsov, G. Clément, I. Bogush // 16th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories. — 11.2021. — arXiv: [2111.06111 \[gr-qc\]](#). — (accepted in Int.J.Mod.Phys.D).
295. *Kobialko, K.* The geometry of massive particle surfaces [Текст] / K. Kobialko, I. Bogush, D. Gal'tsov. — 2022. — АБГ. — arXiv: [2208.02690 \[gr-qc\]](#).
296. *Bogush, I.* Supergravity p -branes with scalar charge [Текст] / I. Bogush, D. Gal'tsov. — 2022. — АБГ. — arXiv: [2208.14667 \[gr-qc\]](#).
297. *Sen, A.* Rotating charged black hole solution in heterotic string theory [Текст] / A. Sen // Phys. Rev. Lett. — 1992. — Т. 69. — С. 1006—1009. — arXiv: [hep-th/9204046](#).
298. Supersymmetry and stationary solutions in dilaton axion gravity [Текст] / R. Kallosh [и др.] // Phys. Rev. D. — 1994. — Т. 50. — С. 6374—6384. — arXiv: [hep-th/9406059](#).
299. *Galtsov, D. V.* Ehlers-Harrison type transformations in dilaton - axion gravity [Текст] / D. V. Galtsov, O. V. Kechkin // Phys. Rev. D. — 1994. — Т. 50. — С. 7394—7399. — arXiv: [hep-th/9407155](#).
300. *Narang, A.* Test of Kerr-Sen metric with black hole observations [Текст] / A. Narang, S. Mohanty, A. Kumar. — 02.2020. — [arXiv:2002.12786 [gr-qc]].
301. *Banerjee, I.* Implications of Einstein–Maxwell dilaton–axion gravity from the black hole continuum spectrum [Текст] / I. Banerjee, B. Mandal, S. SenGupta // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 2020. — Т. 500, № 1. — С. 481—492. — arXiv: [2007.13980 \[gr-qc\]](#).
302. *Banerjee, I.* Signatures of Einstein-Maxwell dilaton-axion gravity from the observed jet power and the radiative efficiency [Текст] / I. Banerjee, B. Mandal, S. SenGupta // Phys. Rev. D. — 2021. — Т. 103, № 4. — С. 044046. — arXiv: [2007.03947 \[gr-qc\]](#).
303. *Khuri, R. R.* Supersymmetric black holes in N=8 supergravity [Текст] / R. R. Khuri, T. Ortin // Nucl. Phys. B. — 1996. — Т. 467. — С. 355—382. — arXiv: [hep-th/9512177](#).

304. *Cho, Y. M.* Violation of equivalence principle in Brans-Dicke theory [Текст] / Y. M. Cho // *Class. Quant. Grav.* — 1997. — Т. 14. — С. 2963—2970.
305. *Breitenlohner, P.* On nonlinear sigma models arising in (super-)gravity [Текст] / P. Breitenlohner, D. Maison // *Commun. Math. Phys.* — 2000. — Т. 209. — С. 785—810. — arXiv: [gr-qc/9806002](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9806002).
306. *Israel, W.* A class of stationary electromagnetic vacuum fields [Текст] / W. Israel, G. A. Wilson // *J. Math. Phys.* — 1972. — Т. 13. — С. 865—871.
307. *Clement, G.* Sigma-model approaches to exact solutions in higher-dimensional gravity and supergravity [Текст] / G. Clement // 418th WE-Heraeus-Seminar: Models of Gravity in Higher Dimensions: From theory to Experimental search. — 11.2008. — arXiv: [0811.0691](https://arxiv.org/abs/0811.0691) [[hep-th](#)].
308. *Ehlers, J.* Transformations of static exterior solutions of Einstein's gravitational field equations into different solutions by means of conformal mapping [Текст] / J. Ehlers // *Colloq. Int. CNRS* / под ред. M. A. Lichnerowicz, M. A. Tonnelat. — 1962. — Т. 91. — С. 275—284.
309. *Astorino, M.* Embedding hairy black holes in a magnetic universe [Текст] / M. Astorino // *Phys. Rev. D.* — 2013. — Т. 87, № 8. — С. 084029. — arXiv: [1301.6794](https://arxiv.org/abs/1301.6794) [[gr-qc](#)].
310. *Astorino, M.* C-metric with a conformally coupled scalar field in a magnetic universe [Текст] / M. Astorino // *Phys. Rev. D.* — 2013. — Т. 88, № 10. — С. 104027. — arXiv: [1307.4021](https://arxiv.org/abs/1307.4021) [[gr-qc](#)].
311. *Horne, J. H.* Black holes coupled to a massive dilaton [Текст] / J. H. Horne, G. T. Horowitz // *Nucl. Phys. B.* — 1993. — Т. 399. — С. 169—196. — arXiv: [hep-th/9210012](https://arxiv.org/abs/hep-th/9210012).
312. *Chen, C.-M.* Dyonic wormholes in 5-D Kaluza-Klein theory [Текст] / C.-M. Chen // *Class. Quant. Grav.* — 2001. — Т. 18. — С. 4179—4186. — arXiv: [gr-qc/0009042](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0009042).
313. *Azreg- Ainou, M.* The Geodesics of the Kaluza-Klein wormhole soliton [Текст] / M. Azreg- Ainou, G. Clement // *Gen. Rel. Grav.* — 1990. — Т. 22. — С. 1119—1133.
314. Electrostatic solutions in Kaluza-Klein theory: Geometry and stability [Текст] / M. Azreg-Ainou [и др.] // *Grav. Cosmol.* — 2000. — Т. 6. — С. 207—218. — arXiv: [gr-qc/9911107](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9911107).

315. *Stelea, C. I.* Higher dimensional Taub-NUT spaces and applications [Текст] : Master thesis / Stelea Cristian I. — University of Waterloo, 2006.
316. *Кобялко, К. В.* Черные дыры за пределами стандартной модели [Текст] : Магистерская диссертация / Кобялко К. В. — Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, 2017.
317. *J. Chazy.* Sur la champ de gravitation de deux masses fixes dans la théorie de la relativité [Текст] / J. Chazy // Bull. Soc. Math. France. — 1924. — Т. 52. — С. 17.
318. *H. Curzon.* Cylindrical solutions of Einstein's gravitation equations [Текст] / H. Curzon // P. Lond. Math. Soc. — 1925. — Т. 23. — С. 477—480.
319. *Parnovskii, S. L.* Gravitational field of rotating bodies [Текст] / S. L. Parnovskii // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1991. — Т. 100. — С. 1423—1437.
320. *Hori, S.* Generalization of Tomimatsu-Sato Solutions [Текст] / S. Hori // Prog. Theor. Phys. — 1996. — Т. 95, № 1. — С. 65—70.
321. *Tomimatsu, A.* New Series of Exact Solutions for Gravitational Fields of Spinning Masses [Текст] / A. Tomimatsu, H. Sato // Progress of Theoretical Physics. — 1973. — Июль. — Т. 50, № 1. — С. 95—110. — eprint: <https://academic.oup.com/ptp/article-pdf/50/1/95/5362605/50-1-95.pdf>. — URL: <https://doi.org/10.1143/PTP.50.95>.
322. *Hori, S.* On the Exact Solution of Tomimatsu-Sato Family for an Arbitrary Integral Value of the Deformation Parameter [Текст] / S. Hori // Prog. Theor. Phys. — 1978. — Т. 59. — С. 1870. — [Erratum: Prog.Theor.Phys. 61, 365 (1979)].
323. *Gibbons, G. W.* Ring wormholes via duality rotations [Текст] / G. W. Gibbons, M. S. Volkov // Phys. Lett. B. — 2016. — Т. 760. — С. 324—328. — arXiv: [1606.04879](https://arxiv.org/abs/1606.04879) [hep-th].
324. *Gibbons, G. W.* Weyl metrics and wormholes [Текст] / G. W. Gibbons, M. S. Volkov // JCAP. — 2017. — Т. 05. — С. 039. — arXiv: [1701.05533](https://arxiv.org/abs/1701.05533) [hep-th].
325. *Lu, J. X.* ADM masses for black strings and p-branes [Текст] / J. X. Lu // Phys. Lett. B. — 1993. — Т. 313. — С. 29—34. — arXiv: [hep-th/9304159](https://arxiv.org/abs/hep-th/9304159).

326. Stainless super p-branes [Текст] / H. Lu [и др.] // Nucl. Phys. B. — 1995. — Т. 456. — С. 669—698. — arXiv: [hep-th/9508042](#).
327. *Scherk, J.* ANTIGRAVITY: A CRAZY IDEA? [Текст] / J. Scherk // Phys. Lett. B. — 1979. — Т. 88. — С. 265—267.
328. *Tseytlin, A. A.* 'No force' condition and BPS combinations of p-branes in eleven-dimensions and ten-dimensions [Текст] / A. A. Tseytlin // Nucl. Phys. B. — 1997. — Т. 487. — С. 141—154. — arXiv: [hep-th/9609212](#).
329. *Nozawa, M.* On the Bogomol'nyi bound in Einstein-Maxwell-dilaton gravity [Текст] / M. Nozawa // Class. Quant. Grav. — 2011. — Т. 28. — С. 175013. — arXiv: [1011.0261 \[hep-th\]](#).
330. Mass of Dyonic Black Holes and Entropy Super-Additivity [Текст] / W.-J. Geng [и др.] // Class. Quant. Grav. — 2019. — Т. 36, № 14. — С. 145003. — arXiv: [1811.01981 \[hep-th\]](#).
331. *Komar, A.* Covariant conservation laws in general relativity [Текст] / A. Komar // Phys. Rev. — 1959. — Т. 113. — С. 934—936.
332. *Manko, V. S.* Physical interpretation of NUT solution [Текст] / V. S. Manko, E. Ruiz // Class. Quant. Grav. — 2005. — Т. 22. — С. 3555—3560. — arXiv: [gr-qc/0505001](#).
333. *Rogatko, M.* Extrema of mass, first law of black hole mechanics and staticity theorem in Einstein-Maxwell axion dilaton gravity [Текст] / M. Rogatko // Phys. Rev. D. — 1998. — Т. 58. — С. 044011. — arXiv: [hep-th/9807012](#).
334. *Ghosh, T.* Thermodynamics Of dilaton-axion black holes [Текст] / T. Ghosh, S. SenGupta // Phys. Rev. D. — 2008. — Т. 78. — С. 124005. — arXiv: [0811.3679 \[hep-th\]](#).
335. Supersymmetric selfgravitating solitons [Текст] / G. W. Gibbons [и др.] // Nucl. Phys. B. — 1994. — Т. 416. — С. 850—880. — arXiv: [hep-th/9310118](#).
336. *Alonso-Alberca, N.* Supersymmetry of topological Kerr-Newman-Taub-NUT-AdS space-times [Текст] / N. Alonso-Alberca, P. Meessen, T. Ortin // Class. Quant. Grav. — 2000. — Т. 17. — С. 2783—2798. — arXiv: [hep-th/0003071](#).
337. *Bergshoeff, E.* Stationary axion / dilaton solutions and supersymmetry [Текст] / E. Bergshoeff, R. Kallosh, T. Ortin // Nucl. Phys. B. — 1996. — Т. 478. — С. 156—180. — arXiv: [hep-th/9605059](#).

338. *Alvarez, E.* Transformation of black hole hair under duality and supersymmetry [Текст] / E. Alvarez, P. Meessen, T. Ortin // Nucl. Phys. B. — 1997. — Т. 508. — С. 181—218. — arXiv: [hep-th/9705094](https://arxiv.org/abs/hep-th/9705094).
339. *Ortin, T.* Electric - magnetic duality and supersymmetry in stringy black holes [Текст] / T. Ortin // Phys. Rev. D. — 1993. — Т. 47. — С. 3136—3143. — arXiv: [hep-th/9208078](https://arxiv.org/abs/hep-th/9208078).
340. *Kallosch, R.* Supersymmetry in singular spaces and domain walls [Текст] / R. Kallosch // Int. J. Mod. Phys. A / под ред. М. J. Duff, J. T. Liu, J. Lu. — 2001. — Т. 16. — С. 683—692.
341. Superstrings and Solitons [Текст] / A. Dabholkar [и др.] // Nucl. Phys. B. — 1990. — Т. 340. — С. 33—55.
342. *Duff, M. J.* String solitons [Текст] / M. J. Duff, R. R. Khuri, J. X. Lu // Phys. Rept. — 1995. — Т. 259. — С. 213—326. — arXiv: [hep-th/9412184](https://arxiv.org/abs/hep-th/9412184).
343. *Clement, G.* Black branes on the linear dilaton background [Текст] / G. Clement, D. Gal'tsov, C. Leygnac // Phys. Rev. D. — 2005. — Т. 71. — С. 084014. — arXiv: [hep-th/0412321](https://arxiv.org/abs/hep-th/0412321).
344. *Becker, K.* String theory and M-theory: A modern introduction [Текст] / K. Becker, M. Becker, J. H. Schwarz. — Cambridge University Press, 12.2006.
345. *Kallosch, R.* Democratic formulation of $D = 10$ supersymmetry [Текст] / R. Kallosch // Theor. Math. Phys. — 2001. — Т. 128. — С. 1193—1206.
346. *Zimmerman, R. L.* Geodesics for the Nut Metric and Gravitational Monopoles [Текст] / R. L. Zimmerman, B. Y. Shahir // Gen. Rel. Grav. — 1989. — Т. 21. — С. 821—848.
347. Analytic treatment of complete and incomplete geodesics in Taub-NUT spacetimes [Текст] / V. Kagramanova [и др.] // Phys. Rev. D. — 2010. — Т. 81. — С. 124044. — arXiv: [1002.4342 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1002.4342).
348. *Kovacs, D.* THE GEODESIC EQUATION IN FIVE-DIMENSIONAL RELATIVITY THEORY OF KALUZA-KLEIN [Текст] / D. Kovacs // Gen. Rel. Grav. — 1984. — Т. 16. — С. 645—655.
349. Absorption and scattering of scalar wave by naked singularity [Текст] / P. Liao [и др.] // Gen. Rel. Grav. — 2014. — Т. 46. — С. 1752.

350. *Chowdhury, A.* Echoes from a singularity [Текст] / A. Chowdhury, N. Banerjee // Phys. Rev. D. — 2020. — Т. 102, № 12. — С. 124051. — arXiv: [2006.16522](https://arxiv.org/abs/2006.16522) [gr-qc].
351. *Wald, R. M.* DYNAMICS IN NONGLOBALLY HYPERBOLIC, STATIC SPACE-TIMES [Текст] / R. M. Wald // J. Math. Phys. — 1980. — Т. 21. — С. 2802—2805.
352. *Horowitz, G. T.* Quantum probes of space-time singularities [Текст] / G. T. Horowitz, D. Marolf // Phys. Rev. D. — 1995. — Т. 52. — С. 5670—5675. — arXiv: [gr-qc/9504028](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9504028).
353. *Ishibashi, A.* Who's afraid of naked singularities? Probing timelike singularities with finite energy waves [Текст] / A. Ishibashi, A. Hosoya // Phys. Rev. D. — 1999. — Т. 60. — С. 104028. — arXiv: [gr-qc/9907009](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9907009).
354. *Helliwell, T. M.* Quantum singularity in quasiregular space-times, as indicated by Klein-Gordon, Maxwell and Dirac fields [Текст] / T. M. Helliwell, D. A. Konkowski, V. Arndt // Gen. Rel. Grav. — 2003. — Т. 35. — С. 79—96.
355. *Ishibashi, A.* Dynamics in nonglobally hyperbolic static space-times. 2. General analysis of prescriptions for dynamics [Текст] / A. Ishibashi, R. M. Wald // Class. Quant. Grav. — 2003. — Т. 20. — С. 3815—3826. — arXiv: [gr-qc/0305012](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0305012).
356. *Konkowski, D. A.* Quantum healing of spacetime singularities: A review [Текст] / D. A. Konkowski, T. M. Helliwell // Mod. Phys. Lett. A. — 2018. — Т. 33, № 04. — С. 1830002.
357. *Gibbons, G. W.* On the stability of naked singularities [Текст] / G. W. Gibbons, S. A. Hartnoll, A. Ishibashi // Prog. Theor. Phys. — 2005. — Т. 113. — С. 963—978. — arXiv: [hep-th/0409307](https://arxiv.org/abs/hep-th/0409307).
358. *Sadhu, A.* A naked singularity stable under scalar field perturbations [Текст] / A. Sadhu, V. Suneeta // Int. J. Mod. Phys. D. — 2013. — Т. 22. — С. 1350015. — arXiv: [1208.5838](https://arxiv.org/abs/1208.5838) [gr-qc].
359. *Harnad, J. P.* Hyperspherical harmonics, separation of variables and the Bethe ansatz [Текст] / J. P. Harnad, P. Winternitz // Lett. Math. Phys. — 1995. — Т. 33. — С. 61—74. — arXiv: [hep-th/9405085](https://arxiv.org/abs/hep-th/9405085).

360. *Futterman, J. A. H.* SCATTERING FROM BLACK HOLES [Текст] / J. A. H. Futterman, F. A. Handler, R. A. Matzner. — Cambridge University Press, 05.2012. — (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
361. *Kehle, C.* A Scattering Theory for Linear Waves on the Interior of Reissner–Nordström Black Holes [Текст] / C. Kehle, Y. Shlapentokh-Rothman // Annales Henri Poincare. — 2019. — Т. 20, № 5. — С. 1583–1650. — arXiv: [1804.05438 \[gr-qc\]](#).
362. *Dain, S.* The wave equation on the extreme Reissner-Nordström black hole [Текст] / S. Dain, G. Dotti // Class. Quant. Grav. — 2013. — Т. 30. — С. 055011. — arXiv: [1209.0213 \[gr-qc\]](#).
363. Shadows of Kerr black holes with and without scalar hair [Текст] / P. V. P. Cunha [и др.] // Int. J. Mod. Phys. D / под ред. C. A. R. Herdeiro [и др.]. — 2016. — Т. 25, № 09. — С. 1641021. — arXiv: [1605.08293 \[gr-qc\]](#).
364. *Frolov, V. P.* Black Hole Physics: Basic concepts and new developments [Текст] / V. P. Frolov, I. D. Novikov. — Springer Dordrecht, 1998.
365. *Bardeen, J. M.* Timelike and null geodesics in the Kerr metric [Текст] / J. M. Bardeen // Les Houches Summer School of Theoretical Physics: Black Holes. — 1973. — С. 215–240.
366. *Chen, B.-Y.* Pseudo-Riemannian Geometry, delta-invariants and Applications [Текст] / B.-Y. Chen. — World Scientific Publishing, Hackensack, NJ, 06.2011.
367. *Wilkins, D. C.* Bound Geodesics in the Kerr Metric [Текст] / D. C. Wilkins // Phys. Rev. D. — 1972. — Т. 5. — С. 814–822.
368. *Gibbons, G. W.* Aspherical Photon and Anti-Photon Surfaces [Текст] / G. W. Gibbons, C. M. Warnick // Phys. Lett. B. — 2016. — Т. 763. — С. 169–173. — arXiv: [1609.01673 \[gr-qc\]](#).
369. *Cornish, N. J.* The Tale of two centers [Текст] / N. J. Cornish, G. W. Gibbons // Class. Quant. Grav. — 1997. — Т. 14. — С. 1865–1881. — arXiv: [gr-qc/9612060](#).
370. Chaotic lensing around boson stars and Kerr black holes with scalar hair [Текст] / P. V. P. Cunha [и др.] // Phys. Rev. D. — 2016. — Т. 94, № 10. — С. 104023. — arXiv: [1609.01340 \[gr-qc\]](#).

371. *Semerak, O.* Free motion around black holes with discs or rings: between integrability and chaos - I [Текст] / O. Semerak, P. Sukova // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 2010. — Т. 404. — С. 545—574. — arXiv: [1211.4106 \[gr-qc\]](#).
372. *Shiple, J.* Binary black hole shadows, chaotic scattering and the Cantor set [Текст] / J. Shipley, S. R. Dolan // Class. Quant. Grav. — 2016. — Т. 33, № 17. — С. 175001. — arXiv: [1603.04469 \[gr-qc\]](#).
373. *Cunha, P. V. P.* Does the black hole shadow probe the event horizon geometry? [Текст] / P. V. P. Cunha, C. A. R. Herdeiro, M. J. Rodriguez // Phys. Rev. D. — 2018. — Т. 97, № 8. — С. 084020. — arXiv: [1802.02675 \[gr-qc\]](#).
374. *Cunha, P. V. P.* Fundamental photon orbits: black hole shadows and spacetime instabilities [Текст] / P. V. P. Cunha, C. A. R. Herdeiro, E. Radu // Phys. Rev. D. — 2017. — Т. 96, № 2. — С. 024039. — arXiv: [1705.05461 \[gr-qc\]](#).
375. *Pugliese, D.* Observers in Kerr spacetimes: the ergoregion on the equatorial plane [Текст] / D. Pugliese, H. Quevedo // Eur. Phys. J. C. — 2018. — Т. 78, № 1. — С. 69. — arXiv: [1801.06149 \[gr-qc\]](#).
376. *Konoplya, R. A.* Axisymmetric black holes allowing for separation of variables in the Klein-Gordon and Hamilton-Jacobi equations [Текст] / R. A. Konoplya, Z. Stuchlík, A. Zhidenko // Phys. Rev. D. — 2018. — Т. 97, № 8. — С. 084044. — arXiv: [1801.07195 \[gr-qc\]](#).
377. *Johnson, C. V.* Stringy twists of the Taub - NUT metric [Текст] / C. V. Johnson, R. C. Myers // 7th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity (MG 7). — 07.1994. — С. 940—942. — arXiv: [hep-th/9409177](#).
378. *Zhang, M.* Emissions of photons near the horizons of Kerr-Sen black holes [Текст] / M. Zhang, J. Jiang // Phys. Rev. D. — 2020. — Т. 102, № 12. — С. 124012. — arXiv: [2004.11087 \[gr-qc\]](#).
379. *Garcia, A.* Class of stationary axisymmetric solutions of the Einstein-Maxwell dilaton - axion field equations [Текст] / A. Garcia, D. Galtsov, O. Kechkin // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Т. 74. — С. 1276—1279.

380. *Burinskii, A.* Some properties of the Kerr solution to low-energy string theory [Текст] / A. Burinskii // Phys. Rev. D. — 1995. — Т. 52. — С. 5826—5831. — arXiv: [hep-th/9504139](#).
381. Generalized hidden symmetries and the Kerr-Sen black hole [Текст] / T. Houri [и др.] // JHEP. — 2010. — Т. 07. — С. 055. — arXiv: [1004.1032 \[hep-th\]](#).
382. *Cvetic, M.* Entropy of nonextreme charged rotating black holes in string theory [Текст] / M. Cvetic, D. Youm // Phys. Rev. D. — 1996. — Т. 54. — С. 2612—2620. — arXiv: [hep-th/9603147](#).
383. Charged rotating black holes in four-dimensional gauged and ungauged supergravities [Текст] / Z. -. Chong [и др.] // Nucl. Phys. B. — 2005. — Т. 717. — С. 246—271. — arXiv: [hep-th/0411045](#).
384. *Cvetic, M.* STU Black Holes and SgrA [Текст] / M. Cvetic, G. W. Gibbons, C. N. Pope // JCAP. — 2017. — Т. 08. — С. 016. — arXiv: [1705.05740 \[gr-qc\]](#).
385. *Chow, D. D. K.* Seed for general rotating non-extremal black holes of $\mathcal{N} = 8$ supergravity [Текст] / D. D. K. Chow, G. Compère // Class. Quant. Grav. — 2014. — Т. 31. — С. 022001. — arXiv: [1310.1925 \[hep-th\]](#).