

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи



Куценко Владимир Александрович

**Эффекты случайных сред в процессах с генерацией
и блужданием частиц по решёткам**

1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент Яровая Елена Борисовна

Москва — 2024

Оглавление

Стр.

Введение	4
Глава 1. Асимптотика усредненных по среде моментов для ветвящегося случайного блуждания в гумбелевской среде	10
1.1 Описание модели	10
1.2 Представления типа Фейнмана–Каца	12
1.3 Средние численности для неслучайного потенциала	14
1.4 «Замороженные» средние численности для случайного потенциала	16
1.5 «Отожженные» средние численности для случайного потенциала	19
1.6 Асимптотика «отожженных» моментов	21
1.7 Приложение	24
1.7.1 Доказательство леммы 1	24
1.7.2 Доказательство лемм 2 и 3	27
1.7.3 Доказательство лемм 4 и 5	31
Глава 2. Ветвящееся случайное блуждание в случайной убивающей среде с единственным центром размножения	34
2.1 Описание модели	34
2.2 Неслучайная часть спектра эволюционного оператора	37
2.3 Случайная часть спектра эволюционного оператора	40
2.4 Почти наверное надкритичное поведение ВСБ	42
2.5 Верхняя оценка вероятности надкритичности ВСБ	44
2.6 Нижняя оценка вероятности надкритичности ВСБ	46
2.7 Приложение	49
2.7.1 Доказательство леммы 8	49
2.7.2 Доказательство леммы 9	52
2.7.3 Доказательство леммы 10	54
2.7.4 Доказательство теоремы 4	58
2.7.5 Доказательство леммы 11	59
Глава 3. Моделирование ветвящихся случайных блужданий в случайной среде	61

	Стр.
3.1 Моделирование в однородной случайной среде	61
3.1.1 Перемежаемость поля замороженных моментов	61
3.1.2 Наивное моделирование	63
3.1.3 Результаты наивного моделирования	67
3.1.4 Моделирование представлений типа Фейнмана–Каца	75
3.2 Моделирование в случайной среде с одним центром размножения	77
Заключение	82
Список литературы	84

Введение

В работе рассматриваются ветвящиеся случайные блуждания (ВСБ) по многомерным решеткам с непрерывным временем и случайными интенсивностями деления и гибели частиц. Данная область теории стохастических процессов активно развивается в последние годы, см., например, обзор В. Кенига [1] и приведенную в нем библиографию.

В физических моделях со случайной средой возникают явления, существенно отличающиеся от обычно рассматриваемых в статистической физике. В частности, средняя энергия некоторой изучаемой величины способна расти медленнее, нежели корень из среднего квадрата этой величины, и обе упоминаемых скорости роста, в свою очередь, будут выше скорости роста типичной реализации этой величины. В одной из первых работ [2], посвященных данной теме, рассматривалась модель популяции диффундирующих частиц, интенсивность деления которых предполагалась стационарной во времени и случайной по пространственной переменной, со средним значением, равным нулю. С помощью такого рода предположений было показано наличие нерегулярного роста усредненных по среде моментов численностей частиц в системе. Подобный нерегулярный рост моментов, представляющий интерес с физической точки зрения, получил название перемежаемости [2–5].

Эффект перемежаемости был описан для процессов в случайной среде Я. Б. Зельдовичем с соавторами [2; 3], а сами изученные в этих работах процессы представляли собой частный случай модели ВСБ в случайной среде, которая, по-видимому, впервые была детально изучена Ю. Гертнером и С. А. Молчановым [4]. Ключевые понятия и инструменты для анализа модели ВСБ, введенные в указанной работе, основывались на параболической модели Андерсона [6], а само исследование было признано фундаментальным и дало толчок активному применению модели Андерсона в различных областях [1].

Исследование перемежаемости в ВСБ в случайной среде опирается на анализ асимптотического поведения усредненных по среде моментов численностей частиц. Впервые такое асимптотическое поведение было получено для случайной среды с асимптотически вейбулловским распределением правого хвоста случайного потенциала (разности между интенсивностью деления и интенсивностью гибели) [7]. Для того же типа потенциала было изучено ВСБ в неоднородной

случайной среде [8]. Первая глава диссертации посвящена исследованию асимптотического поведения усредненных по среде моментов численностей частиц для случайной среды с асимптотически гумбелевским распределением правого хвоста случайного потенциала. Результаты этой главы получены без применения спинальной техники — инструмента анализа общих процессов ветвления [9]. Спинальная техника выходит за рамки стандартной теории ветвящихся случайных блужданий, однако с помощью нее можно получить результаты об асимптотиках для относительно общего случая случайного субэкспоненциального потенциала [10; 11]. Отдельно отметим, что изучался и случай потенциала со степенным распределением, для которого стандартное определение перемежаемости теряет смысл и приходится рассматривать его обобщения [12]. Таким образом, общий вопрос о наличии перемежаемости в модели ВСБ был практически полностью исследован.

Дальнейшие работы были в основном направлены на изучение неусредненных характеристик ВСБ, например неусредненных по среде моментов [13] или вероятностей выживания частиц [14]. Такие характеристики являются более сложными для изучения, но в то же время дают возможность описания не только качественных, но и количественных характеристик отдельных реализаций процесса. При этом одним из основных инструментов для изучения такого рода задач является исследование спектра соответствующего случайного оператора, возникающего в правых частях дифференциальных уравнений, описывающих поведение средних численностей частиц.

Подобное исследование приведено во второй главе настоящей работы для модели ВСБ в неоднородной случайной среде. В ней изучается простейшая характеристика спектра случайного оператора — спектральная бифуркация, состоящая в наличии или отсутствии положительного собственного значения. Также исследуются условия возникновения данной бифуркации и оцениваются ее вероятностные характеристики.

Важно отметить, что в настоящей работе модель ВСБ рассматривается скорее как модель динамики популяции частиц, а не как физическая модель, порождающая параболическую модель Андерсона. Такой подход в первую очередь связан с востребованностью применения ВСБ в естественных и гуманитарных науках. В демографии ветвящиеся процессы и ветвящиеся блуждания зачастую рассматриваются как реалистичная модель развития человеческой популяции, а в биологии — как модель эволюции организмов [15—18]. Введение случайной

среды в модель ВСБ расширяет круг биологических проблем, для которых ее можно считать разумной моделью эволюции [19].

Достаточно простой, но важной характеристикой популяционного процесса является тип скорости роста популяции частиц. Известно, что в случайной среде популяция частиц может лишь экспоненциально убывать или экспоненциально возрастать [20]. При этом экспоненциальный рост популяции частиц равносителен наличию положительного собственного значения в спектре оператора эволюции для среднего числа частиц. Поэтому описанное ранее исследование спектральной бифуркации рассматривается не в качестве цели работы, а как инструмент для оценки изменений в качественном поведении популяционного процесса.

Большинство результатов для модели ВСБ относится к асимптотическим, при этом ее использование в прикладных задачах требует исследования характеристик модели на конечных временах. Важно отметить, что поиск работ, которые использовали бы теоретические методы для описания характеристик системы на конечных временах, не дал результатов. Аналогичной является ситуация с исследованиями по статистическому моделированию такого рода характеристик. В связи с этим третья глава настоящей работы посвящена моделированию различных моделей ВСБ в случайной среде.

Целью работы является анализ предельного поведения усредненных по среде моментов численностей частиц ВСБ в предположении об асимптотически гумбелевском распределении разности между интенсивностью деления и исчезновения частиц; оценка вероятности возникновения надкритического роста средних численностей частиц для ВСБ в одномерной случайной убывающей среде с размножением в нуле; оценка точности оценок и асимптотик, полученных в работе, при помощи численного моделирования.

Научная новизна работы. Получены новые результаты для ВСБ с возможной генерацией частиц в каждой точке решетки в случайной среде с асимптотически гумбелевским потенциалом, а также для ВСБ с единственным центром размножения частиц в ограниченной случайной убывающей среде. Описаны алгоритмы моделирования ВСБ в случайной среде, получены численные результаты для ряда моделей.

Методы исследования. В работе использованы методы теории вероятностей, теории случайных процессов, спектральной теории, теории дифференциальных уравнений, комбинаторики, а также численные методы. В теоретической части в основном применялись метод Лапласа для интегралов, представление

типа Фейнмана–Каца, а также методы исследования спектров случайных операторов. Численное моделирование проведено при помощи языка R, использованы методы Монте-Карло и методы параллельного программирования.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит в основном теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории ВСБ в случайной среде, а также для моделирования практических задач в области динамики популяций.

Положения, выносимые на защиту.

1. Теорема об асимптотическом поведении моментов численностей частиц, усредненных по среде для модели ВСБ в случайной среде с однородным гумбелевским потенциалом.
2. Теорема о условиях, при которых ВСБ в случайной среде с единственным центром размножения и ограниченной случайной убывающей средой почти наверное имеет экспоненциальный рост моментов численностей частиц.
3. Теоремы об оценках сверху и снизу вероятности экспоненциального роста моментов численностей частиц ВСБ в случайной среде с единственным центром размножения и ограниченной случайной убывающей средой.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на следующих научных конференциях.

- 7-я Санкт-Петербургская молодежная конференция по теории вероятностей и математической физике, Санкт-Петербург, Россия, 2023.
- A perpetual search: mathematics, physics, life. Conference dedicated to the 85-th anniversary of Vadim Alexandrovich Malyshev, Москва, Россия, 2023.
- Восьмая международная конференция по стохастическим методам, Дивноморское, Россия, 2023.
- Ломоносовские чтения 2023, Москва, Россия, 2023.
- 6th-St. Petersburg Youth Conference in Probability and Mathematical Physics, Санкт-Петербург, Россия, 2022.
- Вторая конференция Математических центров России, Москва, Россия, 2022.
- Branching processes, random walks and probability on discrete structures, Moscow, Russia, 2022.
- The 7th International Conference on Stochastic Methods, Дивноморское, Россия, 2022.

- 5th-St. Petersburg Youth Conference in Probability and Mathematical Physics, Санкт-Петербург, Россия, 2021.
- The 14th International Conference of the ERCIM WG on Computational and Methodological Statistics, Online, London, UK, 2021.
- Математические основы информатики и информационно коммуникационных систем, Тверь, Россия, 2021.
- 63rd ISI World Statistics Congress, Online, The Netherlands, 2021.
- The 5th International workshop on branching processes and their applications, Online, Badajoz, Spain, 2021.
- 13th International Conference of the ERCIM WG on Computational and Methodological Statistics, Online, London, UK, 2020.
- The 5th International Conference on Stochastic Methods. Онлайн, Москва, Россия, 2020.

Публикации. Основные результаты диссертации содержатся в 15 публикациях. В том числе в научных журналах, индексируемых Web of Science, SCOPUS, RSCI опубликовано 6 работ, из которых 1 — без соавторов. В материалах международных конференций опубликовано 9 работ, из которых 2 — в виде статей. Общий список публикаций автора приведен в конце настоящей работы.

Личный вклад автора. Автором диссертационного исследования совместно с научным руководителем проводился выбор темы, осуществлялось планирование всей работы. Научному руководителю, профессору Е. Б. Яровой, принадлежит постановка задач и нахождение общего подхода к их решению. Автору принадлежит доказательство теорем и лемм, а также проведение компьютерных симуляций.

Соответствие паспорту научной специальности. Тема диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика. Направления исследований: 6. Предельные теоремы. 7. Стохастические процессы (точечные, гауссовские, мартингалы и другие). 10. Марковские процессы и поля, а также связанные с ними модели. 15. Методы статистического моделирования.

Структура и объем диссертации. Диссертационное исследование состоит из введения, 3 глав и заключения. Полный объем работы составляет 89 страниц, включая 10 рисунков и 3 таблицы. Список литературы содержит 30 наименований.

В работу вошли результаты, выполненные при поддержке следующих грантов: фонд РФФИ 20-01-00487А, рук. — проф. Е. Б. Яровая; фонд БАЗИС 22-8-3-36-1; фонд РНФ 23-11-00375, рук. — проф. А. А. Гуцин.

Первая глава содержит результаты для модели ВСБ в случайной гумбелевской среде. Основным результатом стал вывод асимптотики усредненных по среде моментов без использования леммы «многие-к-немногим». Во второй главе рассматривается одномерная случайная убывающая среда с единственным центром размножения. В этой модели оценивается вероятность экспоненциального роста в ВСБ в зависимости от параметров среды. Третья глава посвящена описанию способов моделирования для общей модели ВСБ в случайной среде. Также в этой главе содержатся результаты моделирования для моделей ВСБ из настоящей работы.

Глава 1. Асимптотика усредненных по среде моментов для ветвящегося случайного блуждания в гумбелевской среде

Рассматривается система частиц на целочисленной решетке \mathbb{Z}^d , $d \in \mathbb{N}$. Время полагается непрерывным. Пусть в начальный момент времени в некоторой точке $x \in \mathbb{Z}^d$ находилась одна частица. За малое время эта частица может остаться на месте, переместиться в соседний узел решетки, разделиться надвое или погибнуть. Эволюция ее потомков происходит по тому же закону, независимо друга от друга и от всей предыстории. Этот процесс объединяет ветвление и блуждание частиц, потому его называют ветвящимся случайным блужданием (ВСБ) [7; 21]. Настоящая глава содержит результаты для модели ВСБ в случайной среде, в которой разность интенсивностей деления и гибели имеет асимптотически гумбелевский правый хвост. Основным результатом главы — вывод асимптотики усредненных по среде моментов без использования леммы «многие-к-немногим».

1.1 Описание модели

Будем полагать, что на решетке \mathbb{Z}^d заданы два поля случайных величин $\mathcal{L} = \{\lambda(x), x \in \mathbb{Z}^d\}$ и $\mathcal{M} = \{\mu(x), x \in \mathbb{Z}^d\}$, которые определены на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Предполагается, что случайные величины $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ являются независимыми, одинаково распределенными и абсолютно непрерывными. Поле \mathcal{L} образует на \mathbb{Z}^d «случайную порождающую среду», которая определяет интенсивность деления частиц в ВСБ. Поле \mathcal{M} образует на \mathbb{Z}^d «случайную убивающую среду», которая определяет интенсивность исчезновения частиц в ВСБ. Реализации полей \mathcal{L} и \mathcal{M} обозначим через $\mathcal{L}(\omega) = \{\lambda(x, \omega), x \in \mathbb{Z}, \omega \in \Omega\}$ и $\mathcal{M}(\omega) = \{\mu(x, \omega), x \in \mathbb{Z}, \omega \in \Omega\}$. Дополнительно введем параметр $\kappa > 0$, управляющий интенсивностью блуждания частиц по решетке.

Удобно полагать, что до момента $t = 0$ происходит реализация полей \mathcal{L} и \mathcal{M} . Полученные наборы $\mathcal{L}(\omega)$ и $\mathcal{M}(\omega)$ будут определять интенсивности ветвления для ВСБ. Пусть в момент времени $t = 0$ на \mathbb{Z}^d находится одна

частица. Дальнейшая эволюция происходит следующим образом. Если частица находится в точке $x \in \mathbb{Z}^d$, то за время $h \rightarrow 0$ она с вероятностью $\lambda(x, \omega)h + o(h)$ разделится надвое, с вероятностью $\mu(x, \omega)h + o(h)$ исчезнет, с вероятностью $\kappa h + o(h)$ переместится равновероятно в одну из соседних точек, и с вероятностью $1 - \lambda(x, \omega)h - \mu(x, \omega)h - \kappa h + o(h)$ останется на месте. Новые частицы эволюционируют по тому же закону независимо друг от друга и всей предыстории.

Можно дать альтернативное описание ВСБ в терминах набора экспоненциальных и полиномиальных величин. Для удобства введем среднее время ожидания $\tau(x)$ в произвольной точке $x \in \mathbb{Z}^d$:

$$\tau(x) = (\kappa + \lambda(x, \omega) + \mu(x, \omega))^{-1}.$$

Эволюция частицы, находящейся в точке x выглядит следующим образом. Частица ждёт распределенное экспоненциально с параметром $\tau(x)^{-1}$ время, а затем мгновенно умирает, делится надвое или перемещается равновероятно в одну из соседних точек решетки. Выбор одного из этих трех событий производится с соответствующими вероятностями $\mu(x)\tau(x)$, $\lambda(x)\tau(x)$ и $\kappa\tau(x)$.

В дальнейшем мы увидим, что процесс ветвления частиц в точке $x \in \mathbb{Z}$ удобно описывать потенциалом $V(x, \omega)$ который отражает критичность процесса ветвления в каждой точке:

$$V(x, \omega) = \lambda(x) - \mu(x).$$

ВСБ в момент времени t полностью описывается набором численностей частиц $N_t(y, \omega)$ в точках $y \in \mathbb{Z}$. Однако, $N_t(y, \omega)$ есть случайная величина и трудно поддается исследованию. Поэтому обычно рассматривают моменты численности частиц [4; 7]:

$$m_n(t, x, y, \omega) = \mathbb{E}_x N_t^n(y, \omega),$$

где \mathbb{E}_x — математическое ожидание при условии, что в момент времени $t = 0$ на находится одна частица в точке x .

Моменты для фиксированной среды ω называются «замороженными». Отдельно отметим, из локальных средних численностей частиц в точке y в момент времени t можно получить средние численности частиц в произвольной области $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ при помощи суммирования: $m_n(t, x, A) := \sum_{y \in A} m_n(t, x, y)$. В том числе, можно исследовать численность частиц на всей решетке: $m_n(t, x, \mathbb{Z}^d) = m_n(t, x) := \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} m_n(t, x, y)$.

Каждой замороженной среде соответствует свой набор замороженных моментов $m_n(t, x, y)$. В нашей модели среда случайна, поэтому замороженные моменты — тоже случайные величины. Вновь, случайные величины сложно изучать напрямую и, мы будем усреднять их, но в этот раз — по реализациям среды. Под «усреднением по среде» мы будем понимать математическое ожидание вычисленное по введенному ранее вероятностному пространству $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Подобное усреднение по устоявшейся традиции мы будем обозначать угловыми скобками $\langle \cdot \rangle$. Усредненные по среде моменты по устоявшейся терминологии называются «отожженными» (annealed moments, см. напр. [4]), получаются при помощи применения усреднения по среде $\langle \cdot \rangle$ к замороженным моментам и обозначаются соответствующим образом:

$$\langle m_n^p(t, x, y) \rangle.$$

1.2 Представления типа Фейнмана–Каца

Для простоты начнем с рассмотрения средних численностей частиц $m_1(t, x, y)$. Можно показать (см., напр. [7]), что замороженные средние численности частиц $m_1(t, x, y)$ в ВСБ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_1(t, x, y, \omega)}{\partial t} &= \kappa \Delta m_1(t, x, y, \omega) + V(x, \omega) m_1(t, x, y, \omega), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}^d \\ m_1(0, x, y, \omega) &= \delta(x, y), \quad x \in \mathbb{Z}^d, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где κ — положительная константа, Δ — дискретный разностный лапласиан, действующий на $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом: $\Delta f(x) = \frac{1}{2d} \sum_{|x'-x|=1} [f(x') - f(x)]$, $V : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция. Рассмотренное уравнение есть дискретный аналог уравнения теплопроводности со случайным энерговыделением.

Как показано в работе [4], эволюция поля замороженных средних $m_1(t, x, y)$ в рамках задачи (1.1) может быть изучена с помощью интеграла по случайным траекториям, т.е. с помощью формулы типа Фейнмана–Каца:

$$m_1(t, x, y, \omega) = \mathbb{E}_x e^{\int_0^t V(x(s), \omega) ds} \delta(x(t), y), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}^d, \quad (1.2)$$

где $x(s)$ обозначает случайное блуждание по \mathbb{Z}^d с генератором $\kappa \Delta$, \mathbb{P}_x — условное распределение процесса $\{x(t), t \geq 0\}$ при условии, что $x(0) = x$, а \mathbb{E}_x означает ожидаемое значение относительно \mathbb{P}_x .

Представление (1.2) можно интерпретировать следующим образом. Фиксируем замороженную среду, соответствующую некоторому ω . Блуждание x_s начинается в точке x и имеет единичную «массу». Далее, в каждой точке z , в которую попадает случайное блуждание, «масса» изменяется в $\exp(V(z) \cdot \tau(z))$ раз, где $\tau(z)$ — время пребывания в этой точке. Блуждание останавливается в момент времени t . Если оно оказалось не в точке y , то его масса зануляется. Решение $m_1(t, x, y)$ представляет собой усреднение полученных «масс» по всем траекториям блуждания x_s . Эта интерпретация позволяет говорить о представлении (1.2) и, соответственно, о задаче (1.1), как о «случайном блуждании в случайном потенциале», см., напр. [1].

Важный результат доказанный в [4] гласит, что решение задачи (1.1) существует и описывается представлением (1.2) тогда и только тогда, когда это представление конечно. Если представление (1.2) для $m_1(t, x, y)$ обращается в бесконечность, то мы не можем говорить о конечности средней численности частиц в ВСБ. То есть численность частиц в ВСБ настолько неоднородна, что не может быть описана средним.

Конечность замороженных моментов $m_1(t, x, y)$ для почти наверное каждой замороженной среды не гарантирует конечность усреднения по всем средам $\langle m_1(t, x, y) \rangle$. Например, распределение замороженных моментов может иметь в каком-то смысле «тяжелые хвосты» и, соответственно, не иметь математического ожидания. В секции 1.5 будет показано, что уже экспоненциально распределенный потенциал порождает распределение замороженных моментов, не имеющее конечного среднего. Отсутствие отожденного среднего при наличии замороженных показывает, что, хотя в каждой конкретной среде описание средними численностями имеет смысл, поведение модели «в целом» не описывается средними характеристиками.

Задача следующих разделов — выяснить условия, при которых отожденные и замороженные средние обращаются в бесконечность, а также описать поведение отожденного среднего, если оно конечно.

1.3 Средние численности для неслучайного потенциала

Отдельно заметим, что результаты следующих трёх разделов не являются новыми. В этих разделах мы будем опираться на методы, развитые в работах [4; 7], пересказывая их более подробно и снабжая повествование новыми иллюстративными примерами.

В начале рассмотрим неслучайный потенциал, который ограничен снизу. Подчеркнем, в этом разделе будем предполагать, что интенсивности размножения и гибели частиц не являются случайными величинами. Потенциал определен как и раньше и есть разность между интенсивностью деления и интенсивностью смерти частиц каждой точке решетки.

Если потенциал $V(x)$ ограничен сверху некоторой константой $C \in \mathbb{R}$, тогда представление Фейнмана–Каца (1.2) для любого $t > 0$ ограничено:

$$m_1(t, x, y) = \mathbb{E}_x \left[\exp \left\{ \int_0^t V(x_s) ds \right\} \Delta(x_s, y) \right] \leq \mathbb{E}_x \left[\exp \left\{ \int_0^t C ds \right\} \right] = \exp\{Ct\}.$$

Таким образом, решение конечно для любого $t > 0$, каким бы ни был ограниченный потенциал V .

Теперь рассмотрим случай неограниченного сверху потенциала и объясним, как представление (1.2) может оказаться бесконечным. Главное свойство неограниченного потенциала — возможность принимать все бóльшие и бóльшие значения при удалении от стартовой точки x . Зафиксируем бесконечную последовательность $\{x, x_1, x_2, \dots\}$, такую, что на ней потенциал неограниченно возрастает: $\lim_{i \rightarrow \infty} V(x_i) = \infty$. Заметим, этот предел берется по решетке и никак не зависит от времени t .

Зафиксируем произвольно момент времени $t_0 > 0$. Случайное блуждание за время t_0 может «убежать» сколь угодно далеко от стартовой точки x . Потому существует некоторое семейство траекторий блуждания $\mathcal{T}(x_i)$, стартовавших в точке x и находящихся в точке x_i все время с $t_0/2$ до t_0 . Каждая отдельная траектория из $\mathcal{T}(x_i)$, стоя в точке x_i время $t_0/2$ набирает массу, зависящую от $V(x_i)$. Таким образом, чем больше i , тем больше «масса» каждой траектории, причем предел этой «массы» при $i \rightarrow \infty$ бесконечен. Так что

рост «массы» семейства $\mathcal{T}(x_i)$ потенциально неограничен и может «взорвать» представление Фейнмана–Каца.

Однако заметим, что траектории из семейства $\mathcal{T}(x_i)$ — это редкие траектории и вероятность выбрать их среди всех возможных траекторий стремится к нулю при удалении от стартовой точки, т.е. при $i \rightarrow \infty$. Соревнование между падением «вероятности» семейства $\mathcal{T}(x_i)$ и ростом «массы» $\mathcal{T}(x_i)$ и определяет, сможет ли блуждание в представлении (1.2) набрать бесконечную «массу» в момент времени t_0 , т.е., будет ли само представление конечно.

Это соревнование можно описать количественно с помощью оценок, см. лемму 2.4 в [4]. Оказывается, что вероятность того, что случайное блуждание $\kappa\Delta$ за время t уйдет от стартовой точки на расстояние, большее r , убывает быстрее экспоненты:

$$\mathbb{P}_x(\max_{s \in [0, t]} |x_s| \geq r) \leq \exp\{-r \ln r + O(r)\}. \quad (1.3)$$

Отметим, главный член асимптотики в правой части не зависит от t , κ и размерности d .

Естественно ожидать, что, если $V(x)$ растет быстрее, чем $x \ln x$, то рост $\exp\{V(x)\}$ «обгонит» спад блуждания и интересующее нас решение обратится в бесконечность. Более точно, ожидается, что конечность или бесконечность представления Фейнмана–Каца определяется конечностью или бесконечностью предела

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{V(x)}{|x| \ln |x|}, \quad (1.4)$$

где $|\cdot|$ — l_1 норма на \mathbb{Z}^d , равная сумме модулей координат x .

Приведенные в следующей лемме формальные оценки отчасти подтверждают это ожидание. Доказательство леммы вынесено в приложение 1.7.

Лемма 1. *Для представления типа Фейнмана–Каца (1.2) решения задачи Коши (1.1) верно:*

- a) *если $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x \ln x} \leq 0$, то (1.2) конечно для всех (x, t) ;*
- b) *если $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x \ln x} = \infty$, то (1.2) бесконечно для всех (x, t) .*

Из леммы следует: если предел 1.4 неотрицателен, то представление (1.2) конечно; если предел 1.4 не существует, то представление (1.2) бесконечно. Если же рассматриваемый предел предел конечный и положительный, то в

общем случае ничего сказать нельзя. Отдельно заметим, что конечность и бесконечность утверждаются сразу для всех $t > 0$.

Например, в случае одномерной решетки для неслучайного потенциала $V(x) = |x|$ предел (1.4) равен нулю, а, значит, неотрицательное решение задачи (1.1) существует, единственно и задается соответствующим представлением Фейнмана–Каца. Для неслучайного потенциала $V(x) = |x|^2$ предел 1.4 обращается в бесконечность, соответственно, интеграл Фейнмана–Каца обращается в бесконечность и неотрицательных решений уже нет. С точки зрения ВСБ, этот случай означает, что численность частиц столь неоднородна, что не имеет среднего.

1.4 «Замороженные» средние численности для случайного потенциала

В этой секции мы покажем, как перейти от результатов для неслучайного потенциала к результатам для случайного потенциала. Для удобства, мы будем формулировать результаты для абсолютно непрерывных случайных потенциалов с плотностью f_V . На случай дискретных потенциалов все утверждения переносятся в точности также.

Рассмотрим случайный потенциал, ограниченный снизу. Заметим, что для замороженный потенциал $V(x, \omega)$ можно рассматривать как неслучайный потенциал. В таком случае, если для некоторого случайного потенциала почти все его реализации имеют неположительный предел (1.4), то для них будет существовать единственное решение задачи (1.1).

При подобной постановке вопроса как кажется возможным существование случайных потенциалов таких, что для некоторых их реализаций предел выше существует, а для некоторых — нет. Однако утверждение о пределе лежит в области закона нуля или единицы и в работе [4] показано, что, если:

$$\int_2^{\infty} \frac{x^d}{(\ln x)^d} f_V(x) < \infty, \quad (1.5)$$

то предел (1.4) почти наверное неположителен, в противном случае — почти наверное предел бесконечен.

Таким образом, ответ однозначен: если правый хвост потенциала достаточно лёгок в смысле (1.5), то задача (1.1) почти наверное имеет единственное неотрицательное решение. Мало того, если условие (1.5) нарушено, то задача (1.1) почти наверное не имеет единственных неотрицательных решений.

Распределения со степенным хвостом имеют «тяжелый» правый хвост и способны порождать высокие «пики», что может привести к «взрыву» представления Фейнмана–Каца [4]. Например, одномерный потенциал с плотностью

$$f_V(x) = \begin{cases} 2/x^2, & x > 2; \\ 0, & x \leq 2; \end{cases}$$

не удовлетворяет условию (1.5):

$$\int_2^{\infty} \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{2}{x^2} = \int_2^{\infty} \frac{2}{x \ln x} = \infty.$$

Таким образом, задача Коши (1.1) в этом случае не имеет неотрицательных решений, а соответствующее ВСБ не допускает описания при помощи замороженных средних $m_1(t, x, y)$.

До этого момента утверждения секции сформулированы только для ограниченного снизу потенциала. Ограниченность снизу позволяла считать, что у потенциала нет точек с нехарактерно низким потенциалом, так называемых «ям». Если же потенциал неограничен снизу, то по мере удаления от стартовой точки, могут появляться всё более глубокие «ямы». Потенциально они могут уничтожить большую часть частиц, и, тем самым, убересть представление типа Фейнмана–Каца от набора бесконечной «массы» за конечное время.

Оказывается, что такой эффект возможен только на решетке \mathbb{Z}^1 , так как в этом случае при движении на бесконечность блуждание обязано пройти по всем образовавшимся ямам, без возможности их обойти. На решетке размерности 2 и выше блуждание может обойти отрицательные ямы, тем самым взорвав представление 1.2, подробнее см. замечание на стр. 629 в [4].

Таким образом, для произвольного потенциала в любых размерностях выполнение условия (1.5) по-прежнему гарантирует существование единственного решения. В размерностях 2 и выше это условие является необходимым и достаточным.

Как установлено в [4], в случае размерности 1 при невыполнении условия (1.5) необходимо проверить существование достаточно глубоких «ям» потенциала

при помощи следующего условия:

$$\int_{-\infty}^{-2} \ln |x| f_V(x) < \infty. \quad (1.6)$$

Если условие (1.6) выполнено, то «ям» нет, соответственно, представление (1.2) бесконечно и неотрицательных решений нет. Однако, если левый хвост потенциала достаточно тяжел и интеграл (1.6) расходится, то общего ответа нет.

В первом примере этой секции потенциал имел тяжелый правый хвост, что приводило к «взрыву» представления Фейнмана–Каца. Добавим этому потенциалу тяжелый левый хвост, чтобы породить «ямы», которые уменьшат рост средних численностей частиц. Рассмотрим размерность 1, и следующую плотность потенциала:

$$f_V(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x > 2; \\ 0, & x \in [-2, 2]; \\ \frac{\log(2)}{2} \cdot \frac{1}{|x| \ln^2 |x|}, & x \leq -2. \end{cases}$$

Проверим условие (1.6):

$$\int_{-\infty}^{-2} \ln(|x|) \cdot \frac{\log(2)/2}{|x| \ln^2 |x|} = \int_2^{\infty} \ln x \cdot \frac{\log(2)/2}{x \ln^2 x} = \infty.$$

То есть условие нарушено, и, потенциально, для такого $V(x)$ может существовать единственное решение задачи (1.1). Чтобы в этом убедиться необходимо сделать прямую оценку представления типа Фейнмана–Каца. Подобная оценка проведена в работе [4] и показано, что представление Фейнмана–Каца будет конечным для любых (x, t) .

Подведем итог секции 1.4. Задача (1.1) имеет смысл не для всех потенциалов. В частности, если потенциал имеет степенной хвост вида $1/x^k$, $k \geq 3$ то в размерности $k - 1$ задача (1.1) не имеет неотрицательных решений для $t > 0$, а соответствующее ВСБ не допускает описание при помощи замороженных средних численностей частиц для $t > 0$.

1.5 «Отожженные» средние численности для случайного потенциала

В предыдущих секциях мы описали условия на потенциал $V(x, \omega)$, при которых существует решение задачи (1.1) для почти наверное каждой реализации случайного потенциала. Однако даже если замороженные моменты $m_1(t, x, y, \omega)$ конечны для каждой реализации среды ω , $m_1(t, x, y, \omega)$ как случайная величина может не иметь математического ожидания.

Рассмотрим этот случай более подробно. Заметим, что каждое замороженное среднее $\langle m_1(t, x, y, \omega) \rangle$ включает в себя траектории из представления Фейнмана–Каца, которые стоят в стартовой точке x всё время $[0, t]$. Вероятность «выбрать» такую траекторию равна $\exp\{-\kappa t\}$ в силу экспоненциальности времени между скачками. Тогда верна оценка:

$$\langle m_1(t, x, y, \omega) \rangle \geq \left\langle e^{-\kappa t} \mathbb{E}_x \exp \left\{ \int_0^t V(x_s, \omega) ds \right\} \right\rangle,$$

причем последний интеграл берется по траекториям, остающимся в нуле время $[0, t]$. Поэтому $V(x_s) = V(0)$ и случайности внутри $\mathbb{E}_x(\cdot)$ нет. Для удобства обозначим $V = V(0)$ и продолжим:

$$\langle m_1(t, x, y, \omega) \rangle \geq \langle e^{-\kappa t} e^{Vt} \rangle = e^{-\kappa t} \langle e^{Vt} \rangle.$$

Из этой оценки вытекает, что $\langle m_1(t, x, y, \omega) \rangle$ конечен только если конечно $\langle e^{Vt} \rangle$. Оказывается, что для потенциала V , имеющего экспоненциальное распределение, математическое ожидание по среде $\langle e^{Vt} \rangle$ конечно только конечное время t_0 . Иными словами, экспоненциально распределенный потенциал порождает настолько неоднородные реализации сред, что описывать поведение системы усреднением по средам можно только лишь конечное время $[0, t_0)$.

Экспоненциальное распределение является в некотором смысле пограничным для величины $\langle e^{Vt} \rangle$. Именно, для распределений V с хвостами легче, чем у экспоненциального верно:

$$\langle e^{Vt} \rangle < \infty \tag{1.7}$$

В то же время для распределений V с хвостами тяжелее, чем у экспоненциального, $\langle e^{Vt} \rangle$ обращается в бесконечность для всех $t > 0$. Наконец, для

экспоненциального распределения величина $\langle e^{Vt} \rangle$ конечна некоторое конечное время, а затем обращается в бесконечность.

Разумеется, интересно узнать оценку сверху для $\langle m_1(t, x, y, \omega) \rangle$, поскольку одной оценки снизу недостаточно, чтобы утверждать конечность $\langle m_1(t, x, y, \omega) \rangle$. Увы, в этом месте наше повествование распадется и мы отдельно будем рассматривать два вида моментов: локальный $\langle m_1(t, x, y) \rangle$ и глобальный $\langle m_1(t, x, \mathbb{Z}^d) \rangle$.

Для глобального момента и произвольного распределения потенциала V точные оценки получены еще в работе [4] и выглядят так:

$$e^{-xt} \langle e^{Vt} \rangle \leq \langle m_1(t, x, \mathbb{Z}^d) \rangle \leq \langle e^{Vt} \rangle. \quad (1.8)$$

То есть $\langle e^{Vt} \rangle$ является ограничением и сверху, и снизу с точностью до неслучайного множителя.

Здесь и далее выражение $f(x) \sim g(x)$ означает, что $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1$. С помощью оценки (1.8) мы получаем поведение первого отождженного момента при больших временах:

$$\ln \langle m_1(t, x, \mathbb{Z}^d) \rangle \sim \ln \langle \exp\{Vt\} \rangle. \quad (1.9)$$

Эта форма записи удобна: она окончательно связывает конечность отождженного момента с конечностью $\langle e^{Vt} \rangle$.

Выражение (1.9) позволяет грубо оценить скорость роста отождженных моментов. Например, если V имеет стандартное нормальное распределение, то $\ln \langle \exp\{Vt\} \rangle = t^2/2$. Следовательно $\langle m_1(t, x, \mathbb{Z}^d) \rangle$ растет с надэкспоненциальной скоростью $\exp\{t^2/2\}$.

В случае локальных моментов условие конечности отождженных моментов не меняется — конечность $\langle m_1(t, x, y) \rangle$ вновь равносильна условию (1.7). Однако вывод выражения типа (1.9) более сложен. В частности, нет результатов для случая потенциала с произвольным распределением. Однако, можно выделить два достаточно общих семейства потенциалов, для которых можно получить асимптотические результаты.

Первое семейство потенциалов, «граница» которого есть экспоненциальное распределение рассмотрено в работе [7]. Это потенциалы с асимптотически экспоненциальным, т.н. «вейбулловским» хвостом: для их функции распределения $F(z)$ верно: $-\ln(1 - F(z)) \sim cz^\alpha$, $c > 0$, $\alpha > 1$. В случае потенциала из этого семейства общее соотношение аналогичное (1.9) принимает следующий общий вид:

$$\ln \langle m_n^p(t, x, y) \rangle \sim c(np)^{\alpha/(\alpha-1)} t^{\alpha/(\alpha-1)}. \quad (1.10)$$

Нормальное распределение входит в семейство потенциалов с вейбулловским хвостом. В частности, для потенциала, подчиняющегося стандартному нормальному распределению константы равны $\alpha = 2$, $c = -1/2$. Потому порядок роста $\langle m_1(t, x, y) \rangle$ будет равен $\exp\{t^2/2\}$, что совпадает со ранее вычисленной скоростью роста $\langle m_1(t, x, \mathbb{Z}^d) \rangle$. Получается, скорость роста средней численности частиц на всей решетке совпадает с ранее вычисленной скоростью роста средней численности частиц в отдельной точке.

Второе семейство потенциалов получается взятием логарифма от первого семейства и содержит потенциалы с очень легкими, т.н. «гумбелевскими» хвостами [8], которые встречаются в теории экстремумов. Для их функции распределения $F(z)$ верно: $-\ln(1 - F(z)) \sim c \exp\{z\alpha\}$, $c > 0$, $\alpha > 1$. Для потенциалов из этого семейства общее соотношение (1.9) принимает следующий вид:

$$\ln \langle m_n^p(t, x, y) \rangle \sim \alpha^{-1} p n t \ln(p n t). \quad (1.11)$$

Асимптотические результаты для гумбелевского семейства являются новыми и доказаны в следующих разделах.

Из выражений (1.10) и (1.11) можно заметить, что чем легче хвосты потенциала, тем скорость роста ближе к экспоненциальной. Возникает вопрос: существует ли потенциал такой, что скорость роста отождженного среднего была порядка e^{Ct} ? Оказывается любой потенциал ограниченный сверху константой C обладает следующим свойством: $\ln \langle \exp\{Vt\} \rangle \sim Ct$. Поэтому для ограниченного потенциала из результата (1.9) следует, что скорость роста отождженного момента равна e^{Ct} .

1.6 Асимптотика «отождженных» моментов

В этой главе мы будем изучать асимптотическое поведение величины $m_1(t, x, y)$ в предположении об асимптотически гумбелевском хвосте случайного потенциала. Заметим, что в работе [10] подобный результат был уже получен. Однако в этой работе использована спиальная техника, и, в частности, лемма «многие-к-немногим». Наша цель была получить этот результат за счет обобщения уже полученных результатов.

Обобщение результатов работы [7] на случай произвольного семейства случайных потенциалов делается при помощи доказательства аналогов лемм 6.2, 6.3 и 6.4 из [7]. Для удобства приведем их ниже. Для случайной величины $V(x)$ с функцией распределения $F(x)$ будем называть хвостовой функцией $S(x)$ дополнение к функции распределения: $S(x) := 1 - F(x)$. Введем обозначения: $M(t) := \langle e^{Vt} \rangle$ и $G(t) := \ln M(t)$.

Лемма (6.2 из Albeverio 2000). Пусть $F(z) := \mathbf{P}\{\xi(0) \leq z\}$ обозначает функцию распределения потенциала $V(\cdot)$. Предположим, что ее правый хвост — асимптотически вейбулловский:

$$-\ln(1 - F(z)) \sim cz^\alpha,$$

для некоторых $\alpha > 1, c > 0$. Зададим $\alpha' := \alpha/(\alpha - 1) > 1$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\alpha'} G(t) = (\alpha - 1)\alpha^{-\alpha'} c^{-1/(\alpha-1)} =: \gamma(\alpha, c).$$

Лемма (6.3 из Albeverio 2000). Предположим, что $f_1(t), f_2(t) (t \geq 0)$ — непрерывные положительные функции, такие, что

$$\ln f_i(t) \sim C_i t^a > 0, \quad i = 1, 2,$$

где $a > 1$. Тогда для их свертки

$$W(t) := f_1 * f_2(t) = \int_0^t f_1(s) f_2(t-s) ds$$

верно

$$\ln W(t) \sim \max(C_1, C_2) t^a.$$

Лемма (6.4 из Albeverio 2000). В условиях леммы 6.3 интеграл

$$W^{(p)}(t) := \int_0^t \cdots \int_0^t f_1(s_1 + \cdots + s_p) f_2(pt - s_1 - \cdots - s_p) ds_1 \cdots ds_p$$

имеет следующую асимптотику:

$$\ln W^{(p)}(t) \sim \max(C_1, C_2) p^a t^a.$$

В этом разделе мы сформулируем аналогичные результаты для асимптотически гумбелевского потенциала. Аналог леммы 1.6 представлен в виде леммы 3, аналог леммы 1.6 — в виде леммы 4, а аналог леммы 1.6 — в виде леммы 5. Дополнительно нам понадобится техническая лемма 2. Доказательства всех лемм вынесены в приложение.

Лемма 2. Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина для хвостовой функции которой верно: $\ln S(x) = -ce^{\alpha x}$, $c > 0$, $\alpha \geq 1$. Тогда $G(t)$ имеет следующее асимптотическое представление:

$$G(t) \sim \alpha^{-1} t \ln t, \quad t \rightarrow \infty.$$

Лемма 3. Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина для хвостовой функции которой верно: $\ln S(x) \sim -ce^{\alpha x}$, $c > 0$, $\alpha \geq 1$, $x \rightarrow \infty$. Тогда $G(t)$ имеет следующее асимптотическое представление:

$$G(t) \sim \alpha^{-1} t \ln t, \quad t \rightarrow \infty.$$

Лемма 4. Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — непрерывные функции, такие, что $\ln f_i(t) \sim at \ln t$, $t \rightarrow \infty$, $i = 1, 2$. Тогда для их свертки

$$W(t) = f_1 * f_2(t) = \int_0^t f_1(x) f_2(t-x) dx$$

верно:

$$\ln W(t) \sim at \ln t, \quad t \rightarrow \infty.$$

Лемма 5. Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — непрерывные функции, такие, что $\ln f_i(t) \sim at \ln t$, $t \rightarrow \infty$, $i = 1, 2$. Тогда для следующего интеграла:

$$W^{(p)}(t) := \int_0^t \cdots \int_0^t f_1(s_1 + \dots + s_p) f_2(pt - s_1 - \dots - s_p) ds_1 \dots ds_p$$

верно асимптотическое равенство

$$\ln W^{(p)}(t) \sim apt \ln t, \quad t \rightarrow \infty.$$

Теперь можем в точности повторить доказательство теорем 6.1 и 8.1 из работы [7], заменив леммы 6.2–6.4 на леммы 3–5 получив основной результат главы. Отдельно заметим, доказательства обеих теорем не требуют модификаций помимо замены лемм, поэтому здесь не повторяются.

Теорема 1. Пусть дана модель ВСБ на многомерной решетке \mathbb{Z}^d , $d \in \mathbb{N}$, с непрерывным временем в случайной среде со стационарным, пространственно независимым и однородным потенциалом $V(x, \omega)$, $x \in \mathbb{Z}^d$. Пусть для его функции распределения $F(z)$ выполнено условие

$$\ln(1 - F(z)) \sim -ce^{z\alpha}, \quad c > 0, \quad \alpha > 1, \quad z \rightarrow \infty.$$

Тогда при фиксированных $x, y \in \mathbb{Z}^d$ справедливо асимптотическое равенство

$$\ln \langle m_n^p(t, x, y) \rangle \sim \alpha^{-1} p n t \ln t, \quad t \rightarrow \infty.$$

1.7 Приложение

1.7.1 Доказательство леммы 1

Рассмотрим задачу Коши для неслучайного ограниченного снизу потенциала $f(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_1(t, x, y)}{\partial t} &= \kappa \Delta m_1(t, x, y) + f(x) m_1(t, x, y), \\ m_1(0, x, y) &= \delta(x, y). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Представление типа Фейнмана–Каца для решения задачи (1.12) выглядит так:

$$m_1(t, x, y) = \mathbb{E}_x \left[\exp \left\{ \int_0^t f(x_s) ds \right\} \Delta(x_s, y) \right], \quad (1.13)$$

где x_s — случайное блуждание с генератором $\kappa \Delta$, а математическое ожидание \mathbb{E}_x вычисляется для траекторий случайного блуждания при условии старта из точки $x \in \mathbb{Z}^d$.

Напомним, что единственное неотрицательное решение задачи (1.12) существует тогда и только тогда, когда представление (1.13) конечно, см. секцию 1.2.

Сформулируем лемму, которая связывает конечность представления (1.13) со скоростью возрастания функции $f(x)$ на \mathbb{Z}^d . Эта лемма была доказана в работе [4] сразу для случая случайного потенциала. Мы пользуемся схемой доказательства из [4], но рассматриваем неслучайный потенциал.

Лемма. 1 Для представления типа Фейнмана–Каца (1.13) решения задачи Коши (1.12) верно:

- a) если $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x \ln x} \leq 0$, то (1.13) конечно для всех (x, t) ;
- b) если $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x \ln x} = \infty$, то (1.13) бесконечно для всех (x, t) .

Доказательство. Начнем с пункта а). В силу оценки сверху:

$$m_1(t, x, y) = \mathbb{E}_x \left[\exp \left\{ \int_0^t f(x_s) ds \right\} \Delta(x_s, y) \right] \leq \mathbb{E}_x \left[\exp \left\{ \int_0^t f(x_s) ds \right\} \right]$$

достаточно доказать конечность последнего интеграла.

Зафиксируем произвольно момент времени t . Рассмотрим семейство траекторий x_s , которые не успели убежать за время t дальше чем на расстояние n от старта, т.е. $\max_{s \in [0, t]} |x_s| = n$, где $|\cdot|$ — L_1 норма. Вклад каждой такой траектории в представление Фейнмана–Каца не больше вклада траектории, которая сразу прыгнула в точку из куба $|x| \leq n$ с самым большим потенциалом и осталась там все время $(0, t]$. Этот вклад равен $\exp\{t \cdot \max_{|x| \leq n} f(x)\}$. Таким образом получаем:

$$\mathbb{E}_x \left[\exp \left\{ \int_0^t f(x_s) ds \right\} \right] \leq \sum_{n=0}^{\infty} P_x(\max_{s \in [0, t]} |x_s| = n) \cdot \exp\{t \cdot \max_{|x| \leq n} f(x)\}.$$

В лемме 2.4 работы [4] выражение $P_x(\max_{s \in [0, t]} |x_s| \geq n)$ было оценено сверху как $\exp\{-n \ln n + O(n)\}$, при $n \rightarrow \infty$. Пользуясь этой оценкой, рассмотрим некоторое n_0 , начиная с которого $P_x(\max_{s \in [0, t]} |x_s| = n) \leq \exp\{-n \ln n + Cn\}$ для некоторой константы C .

Пользуясь условием $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x \ln x \leq 0$, выберем n_1 , т.ч. для $n > n_1$ выражение $\max_{|x| \leq n} f(x)/n \ln n$ лежит в отрезке $(-\infty; \varepsilon]$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Заметим, можно взять сколь угодно близкое к нулю ε .

Пользуясь двумя предыдущими рассуждениям, рассмотрим $n_2 := \max(n_0, n_1)$. Для n_2 верно:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_x(\max_{s \in [0, t]} |x_s| = n) \cdot \exp\{t \cdot \max_{|x| \leq n} f(x)\} &\leq \\ &\leq C_1 + \sum_{n=n_2}^{\infty} \exp\{-n \ln n + Cn\} \cdot \exp\{t \cdot \max_{|x| \leq n} f(x)\} = \\ &= C_1 + \sum_{n=n_2}^{\infty} \exp \left\{ -n \ln n \left(1 - \frac{C}{\ln n} - t \frac{\max_{|x| \leq n} f(x)}{n \ln n} \right) \right\} \\ &\leq C_1 + \sum_{n=n_2}^{\infty} \exp \left\{ -n \ln n \left(1 - \frac{C}{\ln n} - t \cdot \varepsilon \right) \right\}, \end{aligned}$$

где C_1 — константа, отвечающая конечной сумме от 0 до n_2 .

Для каждого фиксированного t мы можем выбрать такое n_1 , чтобы $C_3 := 1 - C/\ln n_1 - t\varepsilon$ было бы строго больше нуля. Тогда исследуемый ряд ограничивается

сверху сходящимся рядом:

$$C_1 + \sum_{n=n_2}^{\infty} \exp \left\{ -n \ln n \left(1 - \frac{C}{\ln n} - t \cdot \varepsilon \right) \right\} < C_1 + \sum_{n=n_2}^{\infty} \exp \{ -C_3 n \ln n \} < \infty.$$

Из представленной цепочки неравенств следует, что исходное представление типа Фейнмана–Каца $m_1(t, x, y)$ ограничено сходящимся рядом для любого фиксированного $t > 0$ и $x \in \mathbb{Z}^d$ и пункт а) доказан.

Доказательство пункта б). Если супремум средних по траекториям, стартующих из нуля бесконечен:

$$\sup_{y \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E}_0 \left[\exp \left\{ \int_0^t f(x_s) ds \right\} \Delta(x_t, y) \right] = \infty, \quad (1.14)$$

то общее представление типа Фейнмана–Каца также расходится:

$$\mathbb{E}_x \left[\exp \left\{ \int_0^t f(x_s) ds \right\} \Delta(x_t, y) \right] = \infty. \quad (1.15)$$

Этот факт кажется понятным, однако его доказательство технически громоздкое, в точности повторяет рассуждение на странице 628 работы [4] и, в связи с этим, здесь не приводится.

Напомним, что, по предположению, f ограничена снизу. Пусть $f(x) > \alpha$, $\alpha < 0$. В силу условия пункта б) мы можем выбрать путь, состоящий из $n + 1$ шагов, из нуля в y_n , такой, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n)}{|y_n| \ln |y_n|} = \infty. \quad (1.16)$$

Рассмотрим семейство траекторий блуждания, которые проходят в точности путь $\{0, y_1, \dots, y_n\}$, достигают точки y_n за время $t/2$ и оставшееся время стоят в y_n . Оценим минимальный вклад этого семейства в математическое ожидание из формулы (1.14):

$$\mathbb{E}_0 \left[\exp \left\{ \int_0^t f(x_s) ds \right\} \Delta_{y_n}(x_t) \right] \quad (1.17)$$

Вначале оценим приросты «массы» траекторий из рассматриваемого семейства. В силу ограниченности потенциала снизу, прирост «массы» за $[0, t/2]$, в каждой точке больше $\exp \{ \alpha t/2 \}$. Прирост «массы» в последней точке равен $\exp \{ f(y_n) \cdot t/2 \}$. Итоговая оценка снизу прироста «массы» составит:

$$\exp \{ \alpha t/2 + f(y_n) \cdot t/2 \}. \quad (1.18)$$

Теперь оценим вероятность «выбрать» траекторию семейства. Вероятность выбора пути $\{0, y_1, \dots, y_n\}$ в пространстве равна $(1/2d)^n$. Количество прыжков за время t имеет пуассоновское распределение с параметром κt , потому вероятность получить ровно n скачков за время $t/2$ равна $P(n_{t/2}) = \frac{(\kappa t)^n}{n!} \exp\{-\kappa t\}$. Пользуясь формулой Стирлинга для $n!$, получим: $P(n_{t/2}) \geq \exp\{-n \ln n + O(n)\}$. Наконец, вероятность, того что траектория осталась стоять в точке y_n все время $t/2$ в силу экспоненциальности времени между скачками равна $\exp\{-\kappa t/2\}$. Итоговая оценка снизу вероятности семейства траекторий равна:

$$\left(\frac{1}{2d}\right)^n \exp\{-n \ln n - \kappa t/2\} \quad (1.19)$$

Объединим оценки (1.18) и (1.19):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 \left[\exp \left\{ \int_0^t f(x_s) ds \right\} \Delta_{y_n}(x_t) \right] &\geq \\ &\geq \exp\{\alpha t/2 + f(y_n) \cdot t/2 - n \ln(2d) - n \ln n - \kappa t/2\} = \\ &= \exp\{f(y_n) \cdot t/2 - n \ln n + O(n)\} = \\ &= \exp \left\{ -n \ln n \cdot \left(1 - \frac{t f(y_n)}{2 n \ln n} + O\left(\frac{1}{\ln n}\right) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Согласно предположению (1.16), полученное выражение не ограничено при $n \rightarrow \infty$ для любых (x, t) . Поэтому супремум (1.14) равен бесконечности. Следовательно, исходное представление типа Фейнмана–Каца (1.17) бесконечно и лемма доказана. \square

1.7.2 Доказательство лемм 2 и 3

Лемма. 2 Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина с хвостовой функцией $S(x) = e^{-ce^{\alpha x}}$, $c > 0$, $\alpha \geq 1$. Тогда $G(t)$ имеет следующее асимптотическое представление:

$$G(t) \sim \alpha^{-1} t \ln t, \quad t \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Найдем представление функции $M(t)$ через хвостовую функцию $S(x)$:

$$M(t) = \langle e^{\xi t} \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} dF = - \int_{\mathbb{R}} e^{tx} d(1-F) = - \int_{\mathbb{R}} e^{tx} dS = -S e^{tx} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} S(x) d(e^{tx}).$$

Используя монотонное убывание $S(x)$ получим:

$$M(t) = t \int_{\mathbb{R}} S(x) e^{tx} dx = t \int_{\mathbb{R}} e^{tx - ce^{\alpha x}} dx. \quad (1.20)$$

Далее можно было бы применить метод Лапласа для вычисления интегралов, если бы функция $S(x)$ была бы более простая, например $\ln S(x) = x^a$, $a > 1$ [7; 22]. В нашем случае использовать метод Лапласа напрямую не получится и придется выписать его заново в общем виде.

Для простоты выкладок положим $c = 0$ и $\alpha = 1$. Разложим функцию $tx - e^x$ в ряд Тейлора в окрестности её точки максимума $x^* = \ln t$:

$$tx - e^x = tx^* - e^{x^*} - \frac{1}{2}e^{x^*}(x - x^*)^2 - \sum_{k=3}^{\infty} e^{x^*} \frac{(x - x^*)^k}{k!}.$$

Подставим в предыдущее выражение $x^* = \ln t$:

$$tx - e^x = t \ln t - t - \frac{1}{2}t(x - \ln t)^2 - t \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(x - \ln t)^k}{k!}.$$

Таким образом, получим:

$$M(t) = t \int_{\mathbb{R}} e^{tx - e^x} dx = te^{t \ln t - t} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}t(x - \ln t)^2 - t \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(x - \ln t)^k}{k!}} dx. \quad (1.21)$$

Исследуем правый интеграл, сделав замену $z = \sqrt{t}(x - \ln t)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \exp \left\{ \frac{1}{2}t(x - \ln t)^2 - t \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(x - \ln t)^k}{k!} \right\} dx &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}z^2 \right\} \exp \left\{ - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{z^k t^{\frac{k-2}{2}}}{k!} \right\} dz. \end{aligned}$$

Последний интеграл исследован в разделе 2.5 из [22] и показано, что он есть $1 + O\left(\frac{1}{t}\right)$. Учитывая это, из выражения (1.21) получим:

$$M(t) = t \int_{\mathbb{R}} e^{tx - e^x} dx \sim e^{t \ln t - t} \sqrt{t} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right), \quad t \rightarrow \infty.$$

Таким образом, для $G(t) = \ln M(t)$ имеем:

$$G(t) \sim t \ln t, \quad t \rightarrow \infty, \quad (1.22)$$

что есть условие леммы для $c = 0$ и $\alpha = 1$.

В общем случае, при $c > 0$ и $\alpha \geq 1$ вычисления более громоздки, однако общий ход рассуждения не меняется. Главный член асимптотики $t \ln t$ заменится на $\alpha^{-1} t \ln(t/\alpha c)$, что эквивалентно $\alpha^{-1} t \ln t$ при $t \rightarrow \infty$. С учетом этого замечания можно считать лемму доказанной. \square

Лемма. 3 Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина для хвостовой функции которой верно: $\ln S(x) \sim -ce^{\alpha x}$, $c > 0$, $\alpha \geq 1$, $x \rightarrow \infty$. Тогда $G(t)$ имеет следующее асимптотическое представление:

$$G(t) \sim \alpha^{-1} t \ln t, \quad t \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Фиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. По условию леммы, начиная с некоторого x_0 , для $x > x_0$ верно:

$$-(1 + \varepsilon)ce^{\alpha x} \leq \ln S(x) \leq -(1 - \varepsilon)ce^{\alpha x}.$$

Для удобства, сделаем следующие обозначения: $g(x) := -ce^{\alpha x}$, $c_+ := 1 + \varepsilon$; $c_- := 1 - \varepsilon$. В этих обозначениях, начиная с некоторого x_0 , для $x > x_0$ верно:

$$c_+ce^{\alpha x} \leq \ln S(x) \leq c_-ce^{\alpha x}. \quad (1.23)$$

Воспользоваться оценками (1.23) можно только начиная с x_0 . Поэтому, разобьем функцию $M(t)$ в представлении (1.20) на два интеграла:

$$M(t) = t \int_{\mathbb{R}} S(x)e^{tx} dx = t \int_{-\infty}^{x_0} (\dots) + t \int_{x_0}^{\infty} (\dots). \quad (1.24)$$

Оценим второй интеграл с двух сторон:

$$t \int_{x_0}^{\infty} e^{tx+c+g(x)} dx \leq t \int_{x_0}^{\infty} e^{tx+\ln S(x)} dx \leq t \int_{x_0}^{\infty} e^{tx+c-g(x)} dx.$$

Добавим первый интеграл из (1.24) от $-\infty$ до x_0 :

$$t \int_{x_0}^{\infty} e^{tx+c+g(x)} dx + t \int_{-\infty}^{x_0} e^{tx+\ln S(x)} dx \leq M(t) \leq t \int_{x_0}^{\infty} e^{tx+c-g(x)} dx + t \int_{-\infty}^{x_0} e^{tx+\ln S(x)} dx. \quad (1.25)$$

Рассмотрим оценку снизу в предыдущем выражении. Представим ее в следующем виде:

$$t \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx+c+g(x)} dx + t \int_{-\infty}^{x_0} e^{tx+\ln S(x)} dx - t \int_{-\infty}^{x_0} e^{tx+c+g(x)} dx.$$

Первый интеграл обозначим за J_+ , сумму второго и третьего — за B_+ . Таким же образом представим правую часть выражения (1.25) в виде интегралов J_- и B_- :

$$J_+ + B_+ \leq M(t) \leq J_- + B_- \quad (1.26)$$

Оценим B_+ и B_- , воспользовавшись тем, что $S(x) \leq 1$, а $g(x) \leq 0$:

$$B_+ = t \int_{-\infty}^x e^{tx+\ln S(x)} dx - t \int_{-\infty}^x e^{tx+c+g(x)} dx \leq t \int_{-\infty}^x e^{tx} dx + t \int_{-\infty}^x e^{tx} dx \leq 2e^{tx}.$$

Таким же образом оценив B_+ снизу, и повторив рассуждения для B_- , получим:

$$|B_+| \leq 2e^{tx}; \quad |B_-| \leq 2e^{tx}.$$

Интегралы J_+ и J_- есть функции $M(t)$ для случайная величина с хвостовыми функциями $e^{c+ce^{\alpha x}}$ и $e^{c-ce^{\alpha x}}$, соответственно. В таком случае, воспользуемся леммой 2:

$$\ln J_+ \sim \alpha^{-1} t \ln t; \quad \ln J_- \sim \alpha^{-1} t \ln t.$$

Таким образом:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(J_+ + B_+)}{\ln J_+} = 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{B_+}{J_+} \right) = 1, \quad (1.27)$$

т.е.

$$\ln(J_+ + B_+) \sim \ln(J_- + B_-) \sim \alpha^{-1} t \ln t.$$

Возьмем логарифм от выражения (1.26):

$$\ln(J_+ + B_+) \leq G(t) \leq \ln(J_- + B_-).$$

Левая и правая части асимптотически эквивалентны $\alpha^{-1} t \ln t$, а, значит, $G(t)$ асимптотически эквивалентна тому же, и лемма доказана. \square

1.7.3 Доказательство лемм 4 и 5

Лемма. 4 Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — непрерывные функции, такие, что $\ln f_i(t) \sim at \ln t$, $t \rightarrow \infty$, $i = 1, 2$. Тогда для их свертки

$$W(t) = f_1 * f_2(t) = \int_0^t f_1(x) f_2(t-x) dx$$

верно:

$$\ln W(t) \sim at \ln t, \quad t \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Запишем функции $\ln f_i(t)$ в следующей форме:

$$\ln f_i(t) = at \ln t + \varphi_i(t), \quad i = 1, 2.$$

Согласно предположениям леммы, для любого $\varepsilon > 0$ существует $K = K(\varepsilon) > 0$, такое, что

$$|\varphi_i(t)| \leq K + \varepsilon t \ln t, \quad i = 1, 2. \quad (1.28)$$

Эти оценки означают, что свертка $W(t)$ главным образом зависит от главной части асимптотики $at \ln t$. Обозначим за $W_0(t)$ интеграл соответствующий свертке главных частей асимптотик:

$$W_0(t) = \int_0^t e^{ax \ln x + a(t-x) \ln(t-x)} dx.$$

Тогда $W(t)$ можно оценить следующим образом:

$$W_0(t) \cdot e^{-2K-2\varepsilon t \ln t} \leq W(t) \leq W_0(t) \cdot e^{2K+2\varepsilon t \ln t}.$$

Взяв логарифм, с обеих сторон получим:

$$\ln W_0(t) - 2K - 2\varepsilon t \ln t \leq \ln W(t) \leq \ln W_0(t) + 2K + 2\varepsilon t \ln t. \quad (1.29)$$

Исследуем асимптотическое поведение $W_0(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Чтобы применить метод Лапласа необходимо избавиться от переменного предела интегрирования, сделав замену $x = tz$:

$$W_0(t) = t \int_0^1 e^{atz \ln(tz) + a(t-tz) \ln(t-tz)} dz$$

Упростим полученное выражение:

$$W_0(t) = t \int_0^1 e^{at \ln t + a(t-z) \ln(t-z)} dz = t e^{at \ln t} \int_0^1 e^{at(z \ln z + (1-z) \ln(1-z))} dz. \quad (1.30)$$

Мы находимся в условиях применения метода Лапласа. Он утверждает, что последний интеграл (1.30) при больших t близок к значению своей подинтегральной функции в точке максимума функции $z \ln z + (1-z) \ln(1-z)$, см. [22]. Функция $z \ln z + (1-z) \ln(1-z)$ достигает максимума в точках 1 и -1 который равен нулю. Поэтому при больших t интеграл из выражения (1.30) асимптотически равен единице:

$$W_0(t) \sim t e^{at \ln t}, \quad \ln W_0(t) \sim at \ln t, \quad t \rightarrow \infty.$$

Полученное выражение, подставленное в неравенство (1.29) влечет утверждение леммы. \square

Лемма. 5 Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — непрерывные функции, такие, что $\ln f_i(t) \sim at \ln t$, $t \rightarrow \infty$, $i = 1, 2$. Тогда для следующего интеграла:

$$W^{(p)}(t) := \int_0^t \cdots \int_0^t f_1(s_1 + \dots + s_p) f_2(pt - s_1 - \dots - s_p) ds_1 \dots ds_p$$

верно асимптотическое равенство

$$\ln W^{(p)}(t) \sim apt \ln t, \quad t \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Запишем функции $\ln f_i(t)$ в следующей форме:

$$\ln f_i(t) = at \ln t + \varphi_i(t), \quad i = 1, 2.$$

Согласно предположениям леммы для любого $\varepsilon > 0$ существует число $K = K(\varepsilon) > 0$, такое, что

$$|\varphi_i(t)| \leq K + \varepsilon t \ln t, \quad i = 1, 2. \quad (1.31)$$

Эти оценки подсказывают, что свертка $W^{(p)}(t)$ должна асимптотически зависеть от главной части асимптотики, т.е. от $at \ln t$. Обозначим через $W_0^{(p)}(t)$ интеграл, который соответствует свертке главных частей асимптотик:

$$W_0^{(p)}(t) = \int_0^t \cdots \int_0^t e^{aS \ln S + a(pt-S) \ln(pt-S)} ds_1 \dots ds_p,$$

где $S := s_1 + \dots + s_p$.

В силу (1.31) интеграл $W^{(p)}(t)$ можно оценить следующим образом:

$$W_0^{(p)}(t) \cdot e^{-2K-2\epsilon t \ln t} \leq W^{(p)}(t) \leq W_0^{(p)}(t) \cdot e^{2K+2\epsilon t \ln t}.$$

Взяв логарифм, получим:

$$\ln W_0^{(p)}(t) - 2K - 2\epsilon t \ln t \leq \ln W^{(p)}(t) \leq \ln W_0^{(p)}(t) + 2K + 2\epsilon t \ln t. \quad (1.32)$$

Исследуем асимптотическое поведение $W_0^{(p)}(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Обычно подобные задачи решаются методом Лапласа (см., например, [7]). Для его применения необходимо избавиться от переменного предела интегрирования. Сделаем замену переменных $s_1 := tv_1, \dots, s_p = tv_p$ и обозначим $V := \frac{1}{p}(v_1 + \dots + v_p)$. Тогда $S = ptV$ и $W_0^{(p)}(t)$ принимает следующий вид:

$$W_0^{(p)}(t) = t^p \int_0^1 \dots \int_0^1 e^{aptV \ln(ptV) + a(pt-ptV) \ln(pt-ptV)} dv_1 \dots dv_p. \quad (1.33)$$

Упростим выражение в экспоненте:

$$\begin{aligned} aptV \ln(ptV) + a(pt-ptV) \ln(pt-ptV) &= apt(V \ln(ptV) + (1-V) \ln\{pt(1-V)\}) = \\ &= apt \ln(pt) + apt(V \ln V + (1-V) \ln(1-V)). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Подставим полученное выражение (1.34) обратно в формулу (1.33):

$$W_0^{(p)}(t) = t^p e^{apt \ln(pt)} \int_0^1 \dots \int_0^1 e^{apt(V \ln V + (1-V) \ln(1-V))} dv_1 \dots dv_p. \quad (1.35)$$

Мы находимся в условиях применения метода Лапласа. Согласно этому методу интеграл в (1.35) при больших t близок к значению своей подынтегральной функции в точке максимума. Функция $V \ln V + (1-V) \ln(1-V)$ достигает максимума в точках $V = 0$ и $V = 1$, и он равен нулю. Поэтому при больших t интеграл из выражения (1.35) асимптотически равен единице. Тем самым

$$W_0^{(p)}(t) \sim t^p e^{apt \ln(pt)}, \quad \ln W_0^{(p)}(t) \sim apt \ln t, \quad t \rightarrow \infty.$$

Полученное выражение, подставленное в неравенство (1.32), влечет утверждение леммы. \square

Глава 2. Ветвящееся случайное блуждание в случайной убивающей среде с единственным центром размножения

Настоящая глава содержит результаты для модели ВСБ на одномерной решетке в случайной среде, в которой размножение возможно только в нуле, а смерть — только вне нуля с некоторой ограниченной случайной интенсивностью. Основным результатом главы — оценки вероятности надкритичности ВСБ в рассматриваемой среде.

2.1 Описание модели

Рассматривается ВСБ по одномерной решетке \mathbb{Z} с непрерывным временем. На решетке вне нуля задано поле абсолютно непрерывных, независимых, одинаково распределенных случайных величин $\mathcal{M} = \{\mu(x, \cdot), x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, которые определены на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Предполагается, что каждая случайная величина $\mu(x, \cdot)$ принимает значения из отрезка $[0, c]$, $c \geq 0$ и имеет на нем положительную плотность. Поле \mathcal{M} образует на \mathbb{Z} «случайную убивающую среду», которая определяет интенсивность исчезновения частиц в ВСБ. Реализацию поля \mathcal{M} обозначим через $\mathcal{M}(\omega) = \{\mu(x, \omega), x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \omega \in \Omega\}$. Дополнительно введем параметр $\Lambda \geq 0$, отвечающий за интенсивность размножения частиц в нуле, и параметр $\kappa > 0$, управляющий интенсивностью блуждания частиц по решетке.

Удобно полагать, что реализация поля \mathcal{M} происходит до момента $t = 0$. Полученный набор $\mathcal{M}(\omega)$ будет определять интенсивности убивания для ВСБ. Пусть в момент времени $t = 0$ на \mathbb{Z} находится одна частица. Дальнейшая эволюция происходит следующим образом. Если частица находится в нуле, то за время $h \rightarrow 0$ она с вероятностью $\Lambda h + o(h)$ разделится надвое, с вероятностью $\kappa h + o(h)$ переместится равновероятно в одну из соседних точек, и с вероятностью $1 - \Lambda h - \kappa h + o(h)$ останется на месте. Если же частица находится в точке $x \neq 0$, то за время $h \rightarrow 0$ она с вероятностью $\mu(x, \omega)h + o(h)$ исчезнет, с вероятностью $\kappa h + o(h)$ переместится равновероятно в одну из соседних точек, и с вероятностью

$1 - \mu(x, \omega)h - \kappa h + o(h)$ останется на месте. Новые частицы эволюционируют по тому же закону независимо друг от друга и всей предыстории.

Можно дать альтернативное описание ВСБ в терминах набора экспоненциальных и полиномиальных величин. Для удобства введем среднее время ожидания $\tau(x)$ в произвольной точке $x \in \mathbb{Z}^d$:

$$\tau(x) = \begin{cases} (\kappa + \Lambda)^{-1}, & \text{если } x = 0; \\ (\kappa + \mu(x, \omega))^{-1}, & \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Эволюция частицы, находящейся в точке x выглядит следующим образом. Если частица находится в нуле, то она ждет ждёт экспоненциально распределенное время с параметром $\tau(x)^{-1}$, а затем мгновенно делится надвое или перемещается равновероятно в одну из соседних точек решетки. Выбор из этих двух событий производится с соответствующими вероятностями $\Lambda\tau(0)$ и $\kappa\tau(0)$. Если частица находится в точке x вне нуля, то она также ждёт экспоненциально распределенное время с параметром $\tau(x)^{-1}$, а затем мгновенно исчезает или перемещается равновероятно в одну из соседних точек решетки. Выбор из этих двух событий производится с соответствующими вероятностями $\mu(x, \omega)\tau(x)$ и $\kappa\tau(x)$. Эволюция частиц происходит независимо друг от друга и от всей предыстории.

В дальнейшем мы увидим, что процесс ветвления частиц в точке $x \in \mathbb{Z}$ удобно описывать потенциалом $V(x, \omega)$ который отражает критичность процесса ветвления в каждой точке.

$$V(x, \omega) = \begin{cases} \Lambda, & x = 0; \\ -\mu(x, \omega), & x \neq 0; \end{cases}$$

или

$$V(x, \omega) = \Lambda\delta_0(x) - \mu(x, \omega)(1 - \delta_0(x)). \quad (2.1)$$

ВСБ в момент времени t полностью описывается набором численностей частиц $N_t(y, \omega)$ в точках $y \in \mathbb{Z}$. Однако, $N_t(y, \omega)$ есть случайная величина и трудно поддается исследованию. Поэтому обычно рассматривают среднюю численность частиц [4; 7]:

$$m_1(t, x, y, \omega) = \mathbb{E}_x N_t(y, \omega),$$

где \mathbb{E}_x — математическое ожидание при условии, что в момент времени $t = 0$ на решетке находится одна частица в точке x .

Через F_μ мы далее обозначаем функцию распределения $\mu(x)$. Нас интересует вероятность $P(\Lambda, \kappa, F_\mu)$ реализации среды, в которой имеет место экспоненциальный рост $m_1(t, x, y, \omega)$ для заданных параметров Λ , κ и F_μ . Такой экспоненциальный рост мы будем называть «надкритичностью». Формальное определение выглядит следующим образом:

$$P(\Lambda, \kappa, F_\mu) = \mathbb{P} \left\{ \omega \in \Omega : \exists \lambda, C(x, y) > 0 : \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_1(t, x, y, \omega)}{C(x, y)e^{\lambda t}} = 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{Z} \right\},$$

где $C(x, y) = C(x, y, \omega, \Lambda, \kappa, F_\mu)$, $\lambda = \lambda(\omega, \Lambda, \kappa, F_\mu)$. Заметим, что мы требуем экспоненциального роста средней популяции частиц одновременно во всех точках решетки. Однако далее мы покажем, что это условие эквивалентно экспоненциальному росту хотя бы в одной точке. Интуитивно говоря, экспоненциальный рост в одной точке «распространяется» на всю решетку с помощью случайного блуждания.

Цель этой главы — оценить $P(\Lambda, \kappa, F_\mu)$ как функцию от Λ , κ, F_μ . Для этого мы вначале воспользуемся стандартным подходом, описанным, напр., в [7; 8], и запишем для $m_1(t, x, y, \omega)$ задачу Коши:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_1(t, x, y, \omega)}{\partial t} &= (\kappa \Delta m_1)(t, x, y, \omega) + V(x, \omega) m_1(t, x, y, \omega), \\ m_1(0, x, y) &= \delta_y(x). \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\kappa \Delta f(x) = \frac{\kappa}{2d} \sum_{|x'-x|=1} (f(x') - f(x))$ — разностный лапласиан на \mathbb{Z} , а знаком $|\cdot|$ обозначается расстояние по решетке по l_1 норме. Здесь и далее считаем, что все операторы определены на $l_2(\mathbb{Z})$.

Введем случайный самосопряженный оператор $H(\omega) = \kappa \Delta + V(x, \omega)$, и перепишем задачу Коши в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_1(t, x, y, \omega)}{\partial t} &= H(\omega) m_1(t, x, y, \omega), \\ m_1(0, x, y) &= \delta_y(x), \end{aligned} \tag{2.3}$$

В задачах такого вида поведение m_1 , а, значит и $P(\Lambda, \kappa, F_\mu)$, зависит от структуры спектра оператора $H(\omega)$. Поэтому, по сути, настоящая глава посвящена исследованию спектра случайного оператора $H(\omega)$. В разделах 2.2 и 2.3 показано, что спектр $\sigma(H(\omega))$ состоит из неположительной неслучайной части и может содержать положительное случайное собственное значение. В разделе 2.4 выводится условие, при котором $P(\Lambda, \kappa, F_\mu) = 1$. Нарушение этого условия рассматривается

в разделах 2.4 и 2.5, где приводятся нижние и верхние оценки для $P(\Lambda, \kappa, F_\mu)$. Основные доказательства приводятся в тексте главы после соответствующих утверждений, а вспомогательные — в разделе 2.7.

2.2 Неслучайная часть спектра эволюционного оператора

Результаты этого и следующего разделов мы получили при помощи техники, описанной в [20]. В этих разделах мы доказываем результаты для задачи Коши в произвольной размерности $d \in \mathbb{N}$, хотя для изучения нашей модели достаточно случая $d = 1$. Как и в первой главе, рассмотрим следующую задачу Коши для $m_1(t, x, y, \omega)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_1(t, x, y, \omega)}{\partial t} &= (\kappa \Delta m_1)(t, x, y, \omega) + V(x, \omega) m_1(t, x, y, \omega), \\ m_1(0, x, y) &= \delta_y(x), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\kappa \Delta f(x) = \frac{\kappa}{2d} \sum_{|x'-x|=1} (f(x') - f(x))$ — дискретный оператор Лапласа на \mathbb{Z}^d , а знак $|\cdot|$ обозначает расстояние на решетке по норме l_1 .

Для удобства рассуждений введем оператор усреднения:

$$(\kappa \bar{\Delta} f)(x) = \frac{\kappa}{2d} \sum_{|x'-x|=1} f(x'),$$

где $\kappa \bar{\Delta} f(x) = \frac{\kappa}{2d} \sum_{|x'-x|=1} f(x')$. Оператор Лапласа $\kappa \Delta$ можно представить как разность оператора усреднения и оператора умножения:

$$(\kappa \Delta f)(x) = \kappa \bar{\Delta} f(x) - \kappa f(x).$$

Рассмотрим упрощенный оператор $H_\mu(\omega)$, для которого интенсивность деления в нуле отсутствует, а интенсивность гибели в нуле $\mu(0, \omega)$ определяется так же, как $\mu(x, \omega)$ для $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

$$H_\mu(\omega) = \kappa \Delta - \mu(x, \omega) = \kappa \bar{\Delta} - \kappa - \mu(x, \omega).$$

Оператор $H(\omega)$ можно рассматривать как случайное одноточечное возмущение оператора $H_\mu(\omega)$ в нуле. Поэтому существенные спектры этих операторов совпадают [23]:

$$\sigma_{ess}(H(\omega)) = \sigma_{ess}(H_\mu(\omega))$$

Более того, одноточечное возмущение может дать не более одного положительного собственного значения. Таким образом, первая задача состоит в исследовании существенного спектра оператора $H_\mu(\omega)$.

Для удобства мы приведём формулировки лемм из работ [21; 23], которые понадобятся для изучения спектра оператора $H_\mu(\omega)$.

Лемма 6 (см., например, [23]). *Число λ принадлежит существенному спектру оператора H_μ , если мы можем построить последовательность «почти собственных функций», т.е.:*

$$\exists \{f_n \in l_2(\mathbb{Z}^d) : \|f_n\| = 1, (f_n, f_m) = \Delta(n, m), \|H_\mu f_n - \lambda f_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}. \quad (2.5)$$

Лемма 7 (см., например, [21]). *Спектр оператора $\kappa\Delta$ равен $[-2\kappa; 0]$. Для собственного значения $\lambda \in [-2\kappa; 0]$ существует представление*

$$\lambda = \frac{\kappa}{d} \sum_{i=1}^d \cos(\varphi_i) - \kappa,$$

для некоторых $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$, $\varphi_i \in [-\pi, \pi]$. Соответствующая функция $\psi_\lambda(x) = \exp\{i(\vec{\varphi}, x)\}$ является собственной функцией для λ . Как следствие, спектр оператора $\kappa\bar{\Delta}$ равен $[-\kappa; \kappa]$.

Используя эти леммы и схему доказательства из [20], мы получаем следующий результат.

Лемма 8. *Спектр оператора $H_\mu(\omega)$ почти наверное состоит только из существенной части, которая равна отрезку $[-2\kappa - c; 0]$.*

Доказательство. Оператор $H_\mu(\omega)$ является суммой оператора усреднения $\kappa\bar{\Delta}$ и оператора умножения на функцию $-\mu(x, \omega) - \kappa$. В силу леммы 7, оператор $\kappa\bar{\Delta}$ имеет спектр, равный $[-\kappa; \kappa]$, и норму, равную κ . В свою очередь, спектр оператора умножения на функцию $-\mu(x, \omega)$ равен замыканию множества значений этой функции. Для почти наверное (п.н.) любого ω это замыкание равно интервалу $[-c; 0]$ в силу определения $\mu(x, \omega)$. Поэтому спектр итогового оператора $-\mu(x, \omega) - \kappa$ равен $[-\kappa - c; -\kappa]$.

Оператор $H_\mu(\omega)$ можно рассматривать как возмущение самосопряженного оператора $-\mu(x, \omega) - \kappa$ самосопряженным оператором $\kappa\bar{\Delta}$. В этом случае, согласно теории возмущений [24], спектр оператора H_μ будет отличаться от спектра

оператора умножения $[-\kappa - c, -\kappa]$ не более чем на норму оператора усреднения, т.е. на κ , что приводит к следующему включению:

$$\sigma(H_\mu) \subseteq [-2\kappa - c; 0]. \quad (2.6)$$

Чтобы показать обратное включение, мы воспользуемся леммой 6, и для каждой $\lambda \in [-2\kappa - c; 0]$ построим последовательность «почти собственных функций» $\{f_n(x)\}$, $f_i(x) \in l_2(\mathbb{Z}^d)$. Заметим, что мы строим функцию-последовательность для каждого фиксированного ω , т.е. $\{f_n(x)\} = \{f_n(x, \omega)\}$.

Представим λ в виде $\lambda = a + b$, $a \in [-2\kappa; 0]$ $b \in [-c; 0]$. Нам нужно построить f_n такое, чтобы приближения $\kappa\Delta f_n \approx a f_n$ и $-\mu(x, \omega) f_n \approx b f_n$ были верными в некотором смысле. Так как в таком случае в некотором смысле верно

$$(\kappa\Delta - \mu(x, \omega)) f_n \approx (a + b) f_n = \lambda f_n.$$

Условие $\kappa\Delta f_n \approx a f_n$ требует, чтобы функция была «почти везде» подобна $\exp\{i(\vec{\varphi}, x)\}$ из Леммы 7 с подходящим $\vec{\varphi}$. Условие $-\mu(x, \omega) f_n \approx b f_n$ требует, чтобы функция была ненулевой только в той области, где $-\mu(x, \omega) \approx b$.

Оказывается, что функции, удовлетворяющие обоим условиям, являются индикаторами шаров, на которых $-\mu(x, \omega) \in [b - \varepsilon; b + \varepsilon]$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Поэтому $-\mu(x, \omega) \approx b$ и оператор умножения будет действовать «почти по-собственному». Оператор перемешивания $\kappa\Delta$ будет действовать «почти по-собственному» внутри и снаружи таких шаров, но не на границе. Поэтому радиус шаров должен увеличиваться до бесконечности, чтобы «несобственное» действие $\kappa\Delta$ стремилось к нулю. Точное построение системы функций $\{f_n\}$ и доказательство того, что они являются «почти собственными функциями», приведено в приложении 2.7.1.

Подведём итог: для любой $\lambda \in [-2\kappa - c; 0]$ мы можем построить последовательность «почти собственных» функций $\{f_n\}$, а значит

$$\sigma(H_\mu) \supseteq [-2\kappa - c; 0]. \quad (2.7)$$

Включения (2.6) и (2.7) завершают доказательство леммы. □

Таким образом, результат раздела следующий:

$$\sigma(H_\mu(\omega)) = \sigma_{ess}(H_\mu(\omega)) = [-2\kappa - c; 0].$$

2.3 Случайная часть спектра эволюционного оператора

Вернемся к оператору $H(\omega) = \kappa\Delta + V(x, \omega)$. Как мы уже говорили, его можно рассматривать как случайное одноточечное возмущение ранее описанного оператора H_μ с существенным спектром $\sigma(H_\mu) = [-2\kappa - c; 0]$. По критерию Вейля [23], при компактном возмущении существенный спектр оператора не меняется, но может появиться одно положительное собственное значение, которое мы обозначим через $\lambda(\omega)$:

$$\sigma(H(\omega)) = [-2\kappa - c; 0] \cup \lambda(\omega).$$

Как мы уже упоминали в уравнении (2.3), структура $\sigma(H(\omega))$ определяет поведение ВСБ. В частности, если $\lambda(\omega) > 0$, то наблюдается экспоненциальный рост среднего числа частиц, см., например, [21]. Таким образом, исследование вероятности экспоненциального роста сводится к исследованию вероятности появления положительного собственного значения:

$$P(\Lambda, \kappa, F_\mu) = \mathbb{P} \{ \omega : \exists \lambda(\omega) \in \sigma(H(\omega)) : \lambda(\omega) > 0 \}.$$

Сформулируем задачу нахождения собственного значения $\lambda(\omega)$ с соответствующей собственной функцией $u(x)$. Заметим, что из $u(0) = 0$ следует, что $u(x) \equiv 0$. Поэтому, не ограничивая общности, пусть $u(0) = 1$:

$$\begin{aligned} (\kappa\Delta + V(x, \omega)) u(x) &= \lambda u(x), \\ u(0) &= 1. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Для удобства уравнение (2.8) можно разложить на два уравнения. При $x = 0$ оно принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} (\kappa\Delta + \Lambda - \lambda) u(0) &= 0, \\ u(0) &= 1. \end{aligned} \tag{2.9}$$

При $x \neq 0$, она принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} (\kappa\Delta - \mu(x, \omega) - \lambda) u(x) &= 0, \\ u(0) &= 1. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Для простоты формул введём следующие обозначения:

$$E = \kappa + \lambda.$$

Благодаря этим обозначениям система уравнений (2.10) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} (\kappa\bar{\Delta} - (\mu(x, \omega) + E)) u(x) &= 0, \quad x \neq 0, \\ u(0) &= 1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Перейдем к нахождению решения этой системы.

Лемма 9. *Решение системы уравнений (2.11) при $x \neq 0$ задается следующей формулой:*

$$u(x) = \sum_{\gamma: x \rightsquigarrow 0} \prod_{z \in \gamma} \left(\frac{\kappa/2d}{\mu(z, \omega) + E} \right), \quad (2.12)$$

где через $\gamma : a \rightsquigarrow b = \{a = x_1, \dots, x_n \neq b\}$ обозначим путь из точки a в точку b через соседние точки решетки, такой что: а) путь не пересекает 0; б) точка b не считается входящей в путь γ .

Решение по формуле (2.12) имеет смысл для любого $\lambda > 0$ в любой размерности $d \in \mathbb{N}$.

Первая часть леммы проверяется прямой подстановкой формулы (2.12) в задачу (2.10). Корректная определенность выражения (2.12) для любой размерности $\lambda > 0$ проверяется комбинаторными рассуждениями и асимптотическими методами. Полное доказательство леммы 9 приводится в приложении 2.7.

Замечание 1. *Лемма 9 является частным случаем популярного (особенно в физической литературе) разложения резольвенты по путям, но обычно она применяется к λ из существенного спектра лапласиана, т.е. $\lambda < 0$ в нашем случае. Для таких λ формула (2.12) некорректна из-за малых знаменателей. Поэтому приходится изучать комплексные λ и в дальнейшем переходить к пределу $\text{Im } \lambda \rightarrow 0$, подробности см., например, в лекции 6 из [20] или в [25].*

Наша цель — понять, при каких условиях существует изолированное положительное собственное значение λ_0 оператора H_μ , возмущенное потенциалом размножения $(\Lambda - \mu)\delta_0(x)$. В этом случае (2.12) хорошо определена, и лемма 9, вероятно, является новой.

Замечание 2. *Существенный спектр — это неслучайный носитель случайной спектральной меры $H_\mu(\omega)$. При условии, что с.в. $\mu(x)$ имеет абсолютно непрерывное распределение, из общей теории одномерного случайного оператора Шредингера на $l_2(\mathbb{Z})$ следует, что спектральная мера является чисто*

точечной, а собственные функции почти наверняка экспоненциально убывают (экспоненциальная локализация).

Этот результат известен с 80-х годов прошлого века, подробности см. в [20; 25–27], и мы не будем обсуждать эту тему. Наш случай — анализ спектральной бифуркации о существовании и несуществовании положительного собственного значения.

2.4 Почти наверное надкритичное поведение ВСБ

Вычислим независимый от среды интервал, в котором лежит собственное значение задачи (2.8). Для этого рассмотрим наиболее «хорошую» и наиболее «плохую» реализации сред. А именно, положим $\mu = 0$ во всех точках, а затем положим $\mu = c$ во всех точках.

Теорема 2. Величина $P(\Lambda, \kappa, F_\mu)$ равна единице тогда и только тогда, когда для параметров ВСБ выполняется следующее условие

$$\Lambda \geq \sqrt{(\kappa + c)^2 - \kappa^2} - c. \quad (2.13)$$

Если условие (2.13) выполнено, то для любой реализации сред ω собственное значение $\lambda(\omega)$ лежит в интервале

$$\lambda(\omega) \in [\sqrt{(\Lambda + c)^2 + \kappa^2} - (\kappa + c); \sqrt{\Lambda^2 + \kappa^2} - \kappa].$$

Заметим, из условия теоремы вытекает, что при $\Lambda \geq \kappa$ ВСБ гарантированно будет надкритическим. Это интуитивно верное рассуждение: если скорость размножения в нуле выше скорости выпрыгивания частиц из нуля, то ВСБ конечно будет надкритическим.

Доказательство теоремы. Рассмотрим уравнение (2.9):

$$\begin{aligned} (\kappa\Delta + \Lambda - \lambda) u(0) &= 0, \\ u(0) &= 1. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Учитывая обозначение $E = \kappa + \lambda$, его можно переписать следующим образом:

$$(\kappa\bar{\Delta}u)(0) + \Lambda - E = 0. \quad (2.15)$$

В размерности $d = 1$ выражение (2.15) принимает более простой вид:

$$\frac{\varkappa}{2}(u(1) + u(-1)) + \Lambda = E.$$

Более того, если μ равно некоторой константе во всех точках, то $u(1) = u(-1)$ и выражение еще более упрощается:

$$\varkappa u(1) + \Lambda = E. \quad (2.16)$$

Заметим, что для произвольной среды ω решение $u(1)$ ограничено сверху и снизу решениями для сред, в которых $\mu \equiv 0$ и $\mu \equiv c$. Найдем эти оценки.

Пусть $\mu(x, \omega)$ равно некоторой постоянной c_1 во всех точках. В этом случае $u(1)$ определяется по уравнению (2.12) следующим образом:

$$u(1) = \sum_{\gamma:1 \rightarrow 0} \prod_{z \in \gamma} \left(\frac{\varkappa/2}{\mu(z, \omega) + E} \right) = \sum_{\gamma:1 \rightarrow 0} \prod_{z \in \gamma} \left(\frac{\varkappa/2}{E + c_1} \right) = \sum_{\gamma:1 \rightarrow 0} \prod_{z \in \gamma} \left(\frac{\varkappa/2}{E_1} \right), \quad (2.17)$$

где $E_1 = E + c_1$.

Рассуждения с использованием принципа отражения, как в доказательстве леммы 9 (см. подраздел 2.7.2), позволяют нам точно выписать ряд в выражении (2.17). Сначала вычислим $L(1,0,n)$, то есть количество путей, которые начинаются в 1, заканчиваются в 0, содержат n точек и не пересекаются с 0. Заметим, что $L(1,0,1) = 1$, а для остальных нечетных n согласно рассуждениям (2.38) в подразделе 2.7.2 верно следующее:

$$L(1,0,n) = C_{n-1}^{\frac{n-1}{2}} - C_{n-1}^{\frac{n+1}{2}} = \frac{2}{n+1} C_{n-1}^{\frac{n-1}{2}}, \quad n = 3, 5, \dots$$

Таким образом, выпишем $u(1)$ из выражения (2.17):

$$\begin{aligned} u(1) &= \sum_{\gamma:1 \rightarrow 0} \prod_{z \in \gamma} \left(\frac{\varkappa/2}{E_1} \right) = \sum_{n=1,3,\dots} L(1,0,n) \cdot \left(\frac{\varkappa/2}{E_1} \right)^n \\ &= \sum_{n=1,3,\dots} \frac{2}{n+1} C_{n-1}^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{\varkappa/2}{E_1} \right)^n = \sum_{m=0,2,\dots} \frac{2}{m+2} C_m^{m/2} \cdot \left(\frac{\varkappa/2}{E_1} \right)^{m+1} \\ &= \frac{\varkappa/2}{E_1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{C_{2k}^k}{1+k} \right) \cdot \left(\frac{\varkappa/2}{E_1} \right)^{2k}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Для удобства обозначим $\frac{\varkappa/2}{E_1}$ через a . Коэффициент $\frac{C_{2k}^k}{1+k}$ является числом Каталана, поэтому ряд (2.18) может быть вычислен точно, см. например, [28]:

$$u(1) = a \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{C_{2k}^k}{1+k} \right) \cdot a^{2k} = a \frac{1 - \sqrt{1 - 4a^2}}{2a^2} = \frac{1}{2a} - \sqrt{\frac{1}{4a^2} - 1} = \frac{E_1}{\varkappa} - \sqrt{\left(\frac{E_1}{\varkappa}\right)^2 - 1}. \quad (2.19)$$

Таким образом, выражение (2.16) принимает следующий вид:

$$E = \Lambda + E_1 - \sqrt{E_1^2 - \varkappa^2}.$$

Мы используем обозначение E , и выражение принимает вид:

$$E = \Lambda + (E + c_1) - \sqrt{(E + c_1)^2 - \varkappa^2}.$$

Отсюда мы можем вычислить, что

$$\Lambda + c_1 = \sqrt{(E + c_1)^2 - \varkappa^2}$$

или, наконец,

$$\lambda = \sqrt{(\Lambda + c_1)^2 + \varkappa^2} - (c_1 + \varkappa).$$

Подстановка $c_1 = 0$ и $c_1 = c$ завершает доказательство леммы. \square

Замечание 3. Теорему можно доказать гораздо проще — достаточно решить задачу Коши (2.8) для $\mu \equiv c$ при помощи преобразования Фурье. Однако, разработанная нами техника подсчета рядов поможет в задаче из раздела 2.6, в которой решение методом Фурье получить не удалось.

2.5 Верхняя оценка вероятности надкритичности ВСБ

В разделе 2.4 мы выяснили, что при условии $\Lambda \geq \sqrt{(\varkappa + c)^2 - \varkappa^2} - c$ ВСБ является п.н. надкритическим, т.е. $P(\Lambda, \varkappa, F_\mu) = 1$. Цель этого и следующего разделов — дать предположить оценки $P(\Lambda, \varkappa, F_\mu)$ при нарушении этого условия.

Чтобы получить оценку сверху, зафиксируем неслучайную «бедную» среду и выясним, когда она не порождает положительного собственного значения. Более бедные среды также не порождают собственных значений. Если вероятность порождения семейства бедных сред равна P_1 , то $P(\Lambda, \kappa, F_\mu) < 1 - P_1$. Мы рассмотрим простейший случай: среду, которая принимает некоторые отрицательные значения в точках, соседних с нулем.

Лемма 10. *Рассмотрим среду ω_1 , в которой соседние с нулем точки имеют интенсивности смерти, равные μ_1 и μ_{-1} . Положительное собственное значение в этой среде существует тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:*

$$\Lambda > \frac{\mu_1}{1 + \sigma\mu_1} + \frac{\mu_{-1}}{1 + \sigma\mu_{-1}}, \quad (2.20)$$

где $\sigma = \frac{1}{\kappa/2}$.

Изложим общую идею доказательства. Задача на собственные значения для рассматриваемой среды имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} (\kappa\Delta + V(x, \omega)) u(x) &= \lambda u(x), \\ u(0) &= 1, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где

$$V(x, \omega) = \begin{cases} \Lambda, & x = 0; \\ -\mu_1, & x = 1; \\ -\mu_{-1}, & x = -1; \\ 0, & |x| \geq 2. \end{cases}$$

В приложении 2.7.3 мы покажем, что $\psi(x)$ имеет следующий вид:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ C_1 e^{-kx}, & x \geq 1; \\ C_{-1} e^{kx}, & x \leq -1, \end{cases} \quad (2.22)$$

где $C_{\pm 1}$ и k - некоторые положительные константы.

Подставим (2.22) в (2.21) и выведем условие, эквивалентное существованию положительного собственного значения λ с соответствующей собственной

функцией ψ_λ . Оказывается, что это и есть условие (2.21), что завершает доказательство леммы. Доказательство является довольно техническим и приводится в приложении 2.7.3.

Теперь рассмотрим множество сред, ограниченных сверху средой ω_1 :

$$\Omega_1 = \{\omega \in \Omega : \mu(1, \omega) = \mu_1, \mu(-1, \omega) = \mu_{-1}\}.$$

В силу ограничения сверху, среднее число частиц в неслучайной среде ω_1 п.н. больше, чем среднее число частиц популяции в любой среде из Ω_1 . Предположим, что условие (2.20) выполняется для ω_1 . В этом случае ничего нельзя сказать о собственных значениях сред из Ω_1 . Предположим, что условие (2.20) не выполняется для ω_1 . Тогда, согласно предыдущей лемме 10, не существует положительного собственного значения для ω_1 и, следовательно, не существует положительного собственного значения для всех сред из Ω_1 .

Обозначим событие «условие (2.20) выполнено» через A и запишем предыдущее рассуждение более формально:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\exists \lambda(\omega) > 0\} &= \mathbb{P}\{\exists \lambda(\omega) > 0 | A\} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\{\exists \lambda(\omega) > 0 | \bar{A}\} \mathbb{P}(\bar{A}) \\ &= \mathbb{P}\{\exists \lambda(\omega) > 0 | A\} \mathbb{P}(A) + 0 \cdot \mathbb{P}(\bar{A}) \leq \mathbb{P}(A). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Согласно лемме 10, событие «условие (2.20) выполнено» для случайной среды записывается следующим образом:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left\{\Lambda > \frac{\xi_1}{1 + \sigma \xi_1} + \frac{\xi_2}{1 + \sigma \xi_2}\right\},$$

где ξ_i - независимые копии $\mu(x, \omega)$. Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Верна следующая оценка сверху:*

$$P(\Lambda, \kappa, F_\mu) \leq \mathbb{P}\left\{\Lambda > \frac{\xi_1}{1 + \sigma \xi_1} + \frac{\xi_2}{1 + \sigma \xi_2}\right\},$$

где ξ_i - независимые копии $\mu(x, \omega)$.

2.6 Нижняя оценка вероятности надкритичности ВСБ

Первый способ получить нижнюю оценку для $P(\Lambda, \kappa, F_\mu)$ — рассмотреть некоторую удобную функцию $\psi(x)$ и исследовать квадратичную форму

$(H(\omega)\psi, \psi)$. Если для некоторого $a > 0$ квадратичная форма $(H(\omega)\psi, \psi)$ положительна с вероятностью p_a , то оператор $H(\omega)$ имеет положительное собственное значение с вероятностью p_a как минимум. Мы взяли простую функцию $\psi(x) = 2^{-a|x|}$, $x \in \mathbb{Z}$, провели описанные рассуждения и получили следующую теорему.

Теорема 4. *Верна следующая оценка снизу:*

$$P(\Lambda, \kappa, F_\mu) \geq \max_{a \in (0; \infty)} \mathbb{P} \left(\omega : \Lambda > \kappa \frac{(2^a - 1)}{(2^a + 1)} + \sum_{\substack{x=-\infty; \\ x \neq 0}}^{\infty} \frac{\mu(x, \omega)}{4^{|x|}} \right).$$

В частности, для $a = 1$:

$$P(\Lambda, \kappa, F_\mu) \geq \mathbb{P} \left(\omega : \Lambda > \frac{\kappa}{3} + \sum_{\substack{x=-\infty; \\ x \neq 0}}^{\infty} \frac{\mu(x, \omega)}{4^{|x|}} \right).$$

Доказательство теоремы требует прямого исследования квадратичной формы $(H(\omega)\psi, \psi)$ для функции $\psi(x) = 2^{-a|x|}$, $x \in \mathbb{Z}$, что является технической задачей, и, поэтому, помещено в приложение 2.7.4.

Второй способ получения верхней оценки $P(\Lambda, \kappa, F_\mu)$ использует идеи леммы 10. Рассмотрим неслучайную среду убийств упрощенной формы, которая может образовывать «острова» вокруг нуля без гибели. Для этой среды изучим задачу на собственные значения, а затем обобщим вывод на все среды, которые «лучше» рассматриваемой.

Отдельно заметим, изначально мы предполагали, что $\mu(x, \omega)$ — абсолютно непрерывная с.в. и, поэтому, не может обращаться в ноль с положительной вероятностью. Однако, все полученные ранее в главе результаты верны и в случае, если $\mu(x, \omega)$ — смесь абсолютно непрерывной и дискретной с.в., с условием, что абсолютно непрерывная компонента обладает положительной плотностью на отрезке $[0; c]$. Это рассуждение позволяем нам расширить класс рассматриваемых случайных величин и, тем самым, говорить о наличии ненулевой вероятности $P(\mu(x, \omega) = 0)$.

Обозначим вероятность принятия убывающей средой нулевого значения $P(\mu(x, \omega) = 0)$ через p . Случайные величины $\mu(x, \omega)$ могут образовывать «остров» вокруг нуля с вероятностью p^{2l} . Обозначим такой случай через Ω_l :

$$\Omega_l = \{ \omega \in \Omega : \mu(i, \omega) = 0, \forall i \in -l, \dots, l \}.$$

Воспользуемся идеей из леммы 10 и рассмотрим неслучайную среду ω_l следующего вида:

$$\mu(x, \omega_l) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in -l, \dots, l; \\ c & \text{для } x \notin -l, \dots, l. \end{cases}$$

Среда ω_l допускает вычисление условия на положительность собственного значения соответствующего оператора, которое представлено следующей леммой. Доказательство леммы носит технический характер и поэтому помещено в подраздел 2.7.5. Отдельно заметим, нам не удалось решить эту задачу при помощи преобразования Фурье и мы используем примененное в лемме 2 представление решения задачи Коши через ряд по путям.

Лемма 11. *Если положительное собственное значение существует для всех $\omega \in \Omega_l$, то оно ограничено снизу решением относительно λ следующего уравнения:*

$$\frac{2\alpha\kappa}{1 + \sqrt{1 - 4\alpha^2}} + \kappa\alpha^{2l} \cdot R(\alpha, \beta) + \Lambda - \kappa - \lambda = 0, \quad (2.24)$$

где $\alpha = \frac{\kappa/2}{\kappa+\lambda}$, $\beta = \frac{\kappa/2}{c+\kappa+\lambda}$, а выражение R определяется следующим образом:

$$R(\alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} (\beta^{2k+1} - \alpha^{2k+1}) C_{k+l}, \quad (2.25)$$

где C_n обозначает n -е число Каталана. Если ряд в уравнении (2.25) не сходится, то существует $\omega \in \Omega_l$, для которого не существует положительного собственного значения.

Теперь, используя лемму 11, найдем наименьшее положительное число \hat{l} такое, что уравнение (2.24) имеет положительное решение. По лемме, все среды $\Omega_{\hat{l}}$ будут иметь положительные собственные значения. Поэтому вероятность $P(\Lambda, \kappa, F_\mu)$ по крайней мере равна вероятности порождения среды из $\Omega_{\hat{l}}$ или, что эквивалентно, вероятности порождения \hat{l} -острова. Наконец, вероятность порождения \hat{l} -острова равна $p^{2\hat{l}} = (\mathbb{P}\{\mu(x, \omega) = 0\})^{2\hat{l}}$, что приводит к следующей теореме.

Теорема 5. *Существует следующая оценка снизу:*

$$P(\Lambda, \kappa, F_\mu) \geq (\mathbb{P}\{\mu(x, \omega) = 0\})^{2\hat{l}},$$

где $\hat{l} \in \mathbb{N}$ - наименьшее число, для которого выражение, описанное ниже, имеет положительное решение. Если такого \hat{l} не существует, то $P(\Lambda, \kappa, F_\mu) = 0$.

$$\frac{2\alpha\kappa}{1 + \sqrt{1 - 4\alpha^2}} + \kappa\alpha^{2l} \cdot R(\alpha, \beta) + \Lambda - \kappa - \lambda = 0, \quad (2.26)$$

где $\alpha = \frac{\kappa/2}{\kappa+\lambda}$, $\beta = \frac{\kappa/2}{c+\kappa+\lambda}$, а выражение R определяется следующим образом:

$$R(\alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} (\beta^{2k+1} - \alpha^{2k+1}) C_{k+l}, \quad (2.27)$$

где C_n обозначает число Каталана.

На первый взгляд, теорема 5 бесполезна из-за своей чрезмерной сложности. Однако, в отличие от теоремы 4, она предлагает численный алгоритм для оценки $P(\Lambda, \kappa, F_\mu)$, основанный не на методе Монте-Карло. Более того, этот алгоритм будет работать быстро благодаря экспоненциально быстрой сходимости рядов, используемых в теореме.

Таким образом, в этой главе мы предложили подходы, которые могут быть использованы для анализа ВСБ в случайной среде убивающей среде с единственным центром размножения. Получено условие п.н. сверхкритичности ВСБ. В случае нарушения этого условия получены нижние и верхние оценки для вероятности сверхкритичности. Точность найденных оценок исследована в следующей главе методом Монте-Карло. Заметим, все полученные оценки могут быть улучшены: в теореме 3 можно рассматривать не две, а несколько точек в окрестности нуля, в теореме 4 можно рассматривать функцию более общего вида, а в теореме 5 можно рассматривать остров, состоящий из точек с малой, но ненулевой положительной интенсивностью смерти.

2.7 Приложение

2.7.1 Доказательство леммы 8

Напомним, нам нужно доказать включение $\sigma(H_\mu) \supseteq [-2\kappa - c; 0]$. Воспользуемся леммой 6, и для каждой $\lambda \in [-2\kappa - c; 0]$ построим последовательность

«почти собственных функций» $\{f_n(x)\}$, $f_i(x) \in L_2(\mathbb{Z}^d)$. Заметим, что мы строим функцию последовательности для каждого фиксированного ω , т.е. $\{f_n(x)\} = \{f_n(x, \omega)\}$.

Представим λ в виде $\lambda = a + b$, $a \in [-2\kappa; 0]$ $b \in [-c; 0]$. Построим f_n такое, что в некотором смысле $\kappa\Delta f_n \approx a f_n$ и одновременно $-\mu(x, \omega) f_n \approx b f_n$. Тогда

$$(\kappa\Delta - \mu(x, \omega)) f_n \approx (a + b) f_n = \lambda f_n.$$

Условие $\kappa\Delta f_n \approx a f_n$ требует, чтобы функция была «почти везде» подобна $\exp\{i(\vec{\varphi}, x)\}$ из Леммы 7 с подходящим $\vec{\varphi}$. Условие $-\mu(x, \omega) f_n \approx b f_n$ требует, чтобы функция была ненулевой только в той области, где $-\mu(x, \omega) \approx b$.

Функция-кандидат, удовлетворяющая обоим условиям, выглядит следующим образом:

$$f_n(x) = f_n(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt{|B_n(\omega)|}} \exp\{i(\vec{\varphi}, x)\} I\{B_n(\omega)\},$$

где случайное множество $B_n(\omega) = B_n$ содержит точки $x \in \mathbb{Z}^d$, такие, что $-\mu(x, \omega) \in [b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}]$, а множитель $1/\sqrt{|B_n|}$ нужен для нормализации функции.

Лемма 6 дополнительно требует ортогональности почти собственных функций. Отсюда следует, что $B_m \cap B_n = \emptyset$ для $n \neq m$. Более того, в доказательстве выяснится, что заранее необходимо, чтобы $|B_n| \rightarrow \infty$. Покажем существование необходимых множеств $\{B_n\}$.

Зададим произвольное число n . Напомним, что плотность $-\mu(x, \omega)$ положительна на интервале $[-c; 0]$. Согласно лемме Бореля-Кантелли, для произвольной реализации ω существует система непересекающихся шаров $\{C_i(n)\}_{i=1}^\infty$, состоящих из точек решетки $x \in \mathbb{Z}^d$ таких, что:

$$x \in C_i(n) \Rightarrow -\mu(x, \omega) \in \left[b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right], \quad (2.28)$$

$$|C_i(n)| \rightarrow \infty \quad \text{for } i \rightarrow \infty.$$

Теперь система множеств $\{B_n\}$ может быть построена по индукции. Пусть система $\{B_n\}$ построена до числа k . Построим систему $\{C_i(k+1)\}$, описанную выше. В качестве множества B_{k+1} возьмем любое множество $\subset \{C_i(k+1)\}$, которое дальше от нуля, чем все точки из B_1, \dots, B_n . Таким образом, индукция завершена и система $\{B_n\}$ построена.

Проверим, что функции $\{f_n\}$ являются почти собственными функциями. Сначала рассмотрим действие оператора $\varkappa\Delta$ на функции f_n :

$$\varkappa\Delta f_n = \frac{1}{\sqrt{|B_n|}} \varkappa\Delta \exp\{i(\vec{\varphi}, x)\} I\{B_n\}.$$

Если точки $x-1, x, x, x+1$ лежат внутри B_n , то оператор перемешивания действует на его собственную функцию:

$$\varkappa\Delta f_n(x) = a \frac{1}{\sqrt{|B_n|}} \exp\{i(\vec{\varphi}, x)\} = a f_n(x).$$

Если все точки $x-1, x, x+1$ лежат вне B_n , то оператор перемешивания действует на нулевую функцию, а также $\varkappa\Delta f_n(x) = 0 = a f_n(x)$.

Пусть хотя бы одна из их точек $x-1, x, x+1$ лежит на границе B_n . В этом случае после применения оператора остается ненулевая функция f_n^{res} :

$$\varkappa\Delta f_n(x) = a f_n(x) + f_n^{res}(x). \quad (2.29)$$

Функция f_n^{res} отражает «ошибку» оператора на границе B_n по отношению к оператору умножения на a . Эта функция ненулевая только в конечном числе точек C_d , зависящем от размерности, но не от n . Норма f_n^{res} ограничена сверху $C_d/\sqrt{|B_n|}$, которая стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Теперь рассмотрим действие оператора $-\mu(x, \omega)$ на функцию f_n . На области $\{B_n\}$ функция $-\mu(x, \omega)$ принимает значения в интервале $[b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}]$, так что:

$$\begin{aligned} -\mu(x, \omega) f_n(x) &= -\mu(x, \omega) \frac{1}{\sqrt{|B_n|}} \exp\{i(\vec{\varphi}, x)\} I\{B_n\} \\ &= b \frac{1}{\sqrt{|B_n|}} \exp\{i(\vec{\varphi}, x)\} I\{B_n\} + g_n^{res}(x) = b f_n(x) + g_n^{res}(x). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Функция g_n^{res} отражает «ошибку» оператора на области B_n по отношению к оператору умножения на b . Норма g_n^{res} ограничена сверху величиной $1/n$, которая стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Складывая вместе выражения (2.29) и (2.30), получаем:

$$\|H_\mu f_n - \lambda f_n\| = \|(a+b)f_n - (a+b)f_n + f_n^{res} + g_n^{res}\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, $\{f_n\}$ - искомая последовательность почти собственных функций, а $\lambda \in \sigma(H)$. Число λ было взято произвольно из интервала $[-2\varkappa - c, 0]$, следовательно:

$$\sigma(H_\mu) \supseteq [-2\varkappa - c; 0], \quad (2.31)$$

что завершает доказательство леммы. \square

2.7.2 Доказательство леммы 9

Напомним формулировку леммы 9:

Решение уравнения (2.11) при $x \neq 0$ дается следующей формулой:

$$u(x) = \sum_{\gamma: x \rightsquigarrow 0} \prod_{z \in \gamma} \left(\frac{\kappa/2d}{\mu(z, \omega) + E} \right), \quad (2.32)$$

где по $\gamma : a \rightsquigarrow b = \{a = x_1, \dots, x_n \neq b\}$ обозначается путь из точки a в точку b через соседние точки решетки, причем: а) путь не пересекает 0; б) точка b не считается включенной в путь γ . Решение по формуле (2.32) имеет смысл для любого $\lambda > 0$ в любой размерности $d \in \mathbb{N}$.

Заметим, что для пути $\gamma : x \rightsquigarrow 0$ символ $|\gamma|$ обозначает длину пути в смысле «количество точек в γ , исключая нуль» или «количество шагов от x до 0», что одно и то же. Для простоты обозначений докажем лемму для случая одномерной решетки $d = 1$. Исследуем действие оператора $\kappa\bar{\Delta}$ на функцию $u(x)$, когда $x \neq 0$:

$$\kappa\bar{\Delta}u(x) = \frac{\kappa}{2} (u(x+1) + u(x-1)), \quad (2.33)$$

Заметим, что множество путей $\gamma : x \rightsquigarrow 0$, входящих в $u(x)$, распадается на два подмножества: пути $\gamma_+ : x \rightsquigarrow x+1 \rightsquigarrow 0$ и пути $\gamma_- : x \rightsquigarrow x-1 \rightsquigarrow 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{\gamma} (\cdot) = \frac{\kappa/2}{\mu(x, \omega) + E} \sum_{\gamma_+} (\cdot) + \frac{\kappa/2}{\mu(x, \omega) + E} \sum_{\gamma_-} (\cdot) \\ &= \frac{\kappa/2}{\mu(x, \omega) + E} (u(x+1) + u(x-1)). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Или, что то же самое:

$$u(x+1) + u(x-1) = \frac{\mu(x, \omega) + E}{\kappa/2} u(x). \quad (2.35)$$

Объединив (2.33) и (2.35), получим:

$$\kappa\bar{\Delta}u(x) = \frac{\kappa}{2} (u(x+1) + u(x-1)) = (\mu(x, \omega) + E)u(x). \quad (2.36)$$

В силу (2.36) доказательство леммы в одномерном случае закончено:

$$(\kappa\bar{\Delta} - (\mu(x, \omega) + E))u(x) = (\mu(x, \omega) + E)u(x) - (\mu(x, \omega) + E)u(x) = 0.$$

В многомерном случае рассуждения остаются точно такими же, за исключением того, что выражение (2.34) будет содержать пути по всем точкам решетки, соседним с x .

Теперь покажем корректность (2.32) для любого $\lambda > 0$. Для простоты мы вновь сначала рассмотрим одномерный случай $d = 1$. Исследуем сходимость ряда (2.32). Заметим, что следующая оценка верхней границы верна и достижима:

$$u(x) = \sum_{\gamma: x \rightsquigarrow 0} \prod_{z \in \gamma} \left(\frac{\kappa/2}{\mu(z, \omega) + E} \right) \leq \sum_{\gamma: x \rightsquigarrow 0} \prod_{z \in \gamma} \left(\frac{\kappa}{2E} \right) = \sum_{\substack{\gamma: x \rightsquigarrow 0, \\ |\gamma|=n}} \left(\frac{\kappa}{2E} \right)^n L(x, 0, n), \quad (2.37)$$

где $L(x, 0, n)$ — количество путей вида $x \rightsquigarrow 0$, содержащих n точек. Заметим, что если четность x и n не совпадает, то $L(x, 0, n)$ сходится к нулю.

Не ограничивая общности, предположим, что $x > 0$. Нахождение $L(a, b, k)$ — стандартная задача для применения принципа отражения к дискретным случайным блужданиям. Ответ заключается в следующем:

$$L(a, b, k) = C_k^{\frac{k+b-a}{2}} - C_k^{\frac{k+b+a}{2}}, \quad a, b, n > 0.$$

Поэтому:

$$L(x, 0, n) = L(x, 1, n-1) = C_{n-1}^{\frac{n-x}{2}} - C_{n-1}^{\frac{n+x}{2}} = c_1 x^{c_2} 2^n, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.38)$$

где c_1 и c_2 — положительные константы.

Таким образом, ряды в неравенствах (2.37) являются геометрическими рядами:

$$\sum_{\substack{\gamma: x \rightsquigarrow 0, \\ |\gamma|=n}} \left(\frac{\kappa}{2E} \right)^n L(x, 0, n) < c_3 + c_4 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\kappa}{2E} \right)^i \cdot 2^i, \quad (2.39)$$

где c_3 и c_4 — положительные константы.

Ряд (2.39) сходится, когда $\kappa/E < 1$. Что, учитывая обозначение $E = \kappa + \lambda$, может быть переписано следующим образом:

$$\lambda > 0.$$

В случае $d > 1$ оценка (2.37) принимает следующий вид:

$$u(x) = \sum_{\gamma: x \rightsquigarrow 0} \prod_{z \in \gamma} \left(\frac{\kappa/2d}{\mu(z, \omega) + E} \right) \leq \sum_{\gamma: x \rightsquigarrow 0} \prod_{z \in \gamma} \left(\frac{\kappa}{2dE} \right) = \sum_{\substack{\gamma: x \rightsquigarrow 0, \\ |\gamma|=n}} \left(\frac{\kappa}{2dE} \right)^n L(x, 0, n), \quad (2.40)$$

где снова C_n — число путей γ длины n , где длина отсчитывается относительно нуля, а на путь накладываются условия из леммы 9.

Рассмотрим $n \gg x$, так как сходимость ряда (2.40) зависит только от них. Заметим, что при $n \gg x$ число траекторий $L(x,0,n) \sim L(0,0,n)$, $n \rightarrow \infty$. Обозначим через $L_0(0,0,n)$ число траекторий, начинающихся и заканчивающихся в нуле без условия непересечения нуля. Случай пересечения траектории с нулевой точкой в размерности $d > 1$ редок, поэтому $L(0,0,n) \sim L_0(0,0,n)$, $n \rightarrow \infty$.

Зафиксируем d движений «вверх» вдоль каждой из координат. Каждый путь в $L_0(0,0,n)$ определяется только $n/2$ шагами, каждый из которых может иметь одно из одномерных движений по координате, т.е:

$$L_0(0,0,n) = d^{n/2} C_n^{n/2} \sim (2\sqrt{d})^n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Действуя как в одномерном случае, получаем, что ряд в оценке (2.40) является геометрическим рядом:

$$\sum_{\substack{\gamma: x \rightarrow 0, \\ |\gamma|=n}} \left(\frac{\kappa}{2dE} \right)^n L(x,0,n) < c_5 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\kappa}{2dE} \right)^n \cdot (2\sqrt{d})^n, \quad (2.41)$$

где c_5 - положительная константа. Ряд (2.41) сходится, когда $\kappa/\sqrt{d}E < 1$. Что с учетом обозначения $E = \kappa + \lambda$ может быть переписано следующим образом:

$$\lambda > \kappa \left(\frac{1}{\sqrt{d}} - 1 \right).$$

Поэтому для $\lambda > 0$ ряд сходится, что завершает доказательство леммы. \square

2.7.3 Доказательство леммы 10

Напомним формулировку леммы 10:

Рассмотрим среду ω_1 , в которой соседние с нулем точки имеют интенсивности гибели, равные μ_1 и μ_{-1} . Положительное собственное значение в этой среде существует тогда и только тогда, когда:

$$\Lambda > \frac{\mu_1}{1 + \sigma\mu_1} + \frac{\mu_{-1}}{1 + \sigma\mu_{-1}},$$

где $\sigma = \frac{1}{\kappa/2}$ для $z \in \mathbb{R}$.

Задача на собственные значения для рассматриваемой среды имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} (\kappa\Delta + V(x, \omega)) u(x) &= \lambda u(x), \\ u(0) &= 1, \end{aligned} \quad (2.42)$$

где

$$V(x, \omega) = \begin{cases} \Lambda, & x = 0; \\ -\mu_1, & x = 1; \\ -\mu_{-1}, & x = -1; \\ 0, & |x| \geq 2. \end{cases}$$

Сначала покажем, как выглядит собственная функция для этой задачи в общем виде. Мы будем использовать прямое и обратное дискретные преобразования Фурье, см. например, [21]. Преобразование Фурье функции f определяется следующим образом:

$$\tilde{f}(\theta) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{i\theta x} f(x).$$

Обратное преобразование Фурье определяется следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta) e^{-i\theta x} d\theta.$$

Запишем для оператора H задачу на собственные значения λ с соответствующей собственной функцией u :

$$\kappa\Delta u(x) + \Lambda\delta_0(x)u(x) - \mu_{-1}\Delta_{-1}(x)u(x) - \mu_1\Delta_1(x)u(x) = \lambda u(x). \quad (2.43)$$

После применения преобразования Фурье выражение (2.43) принимает вид

$$\kappa(\cos(\theta) - 1)\tilde{u}(x) + \Lambda u(0) - \mu_{-1}u(-1)e^{-i\theta} - \mu_1u(1)e^{i\theta} - \lambda\tilde{u}(x).$$

Преобразование Фурье собственной функции $\tilde{u}(x)$ имеет следующий вид:

$$\tilde{u}(x) = \frac{\Lambda u(0) - \mu_{-1}u(-1)e^{-i\theta} - \mu_1u(1)e^{i\theta}}{\lambda + \kappa - \kappa \cos \theta},$$

и, наконец, решение $u(x)$ может быть представлено в виде

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Lambda u(0) - \mu_{-1}u(-1)e^{-i\theta} - \mu_1u(1)e^{i\theta}}{\lambda + \kappa - \kappa \cos \theta} e^{-i\theta x} d\theta.$$

Вычисляя здесь интеграл для $x \geq 1$, получаем:

$$u(x) = -\mu_{-1}u(-1)\frac{w^{x-1}}{r} + \Lambda u(0)\frac{w^x}{r} - \mu_1u(1)\frac{w^{x+1}}{r}, \quad (2.44)$$

где $r = \sqrt{\lambda(\lambda + 2\kappa)}$ и $w = \frac{\lambda + \kappa - r}{\kappa}$.

Выражение (2.44) можно переписать в более удобной форме:

$$u(x) = w^x \left(-\mu_{-1}u(-1)\frac{1}{wr} + \Lambda u(0)\frac{1}{r} - \mu_1u(1)\frac{w}{r} \right) = B_1 \cdot e^{-kx}, \quad (2.45)$$

где $B_1 = \left(-\mu_{-1}u(-1)\frac{1}{wr} + \Lambda u(0)\frac{1}{r} - \mu_1u(1)\frac{w}{r} \right)$ и $e^{-k} = w$. Функция w^x убывает с ростом x до бесконечности, так как $u \in L_2(\mathbb{Z})$, поэтому $k > 0$.

Проделаем то же самое для $x \leq 1$ и положим $f(0) = 1$ по норме. Получаем, что собственная функция должна иметь следующий вид:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ C_1 e^{-kx}, & x \geq 1; \\ C_{-1} e^{kx}, & x \leq -1, \end{cases}$$

где $C_{\pm 1}$ и k - положительные константы. Покажем, что для этой функции существует положительное собственное значение тогда и только тогда, когда выполняется условие леммы.

Запишем задачу (2.42) для точки $x \in [2; \infty)$:

$$\frac{\kappa}{2}\psi(x+1) + \frac{\kappa}{2}\psi(x-1) - \kappa\psi(x) = \lambda\psi(x);$$

Отсюда мы можем вычислить, что

$$\lambda = \frac{\kappa}{2} \left(e^{-k} + e^k - 2 \right) = \kappa (\cosh k - 1) = 2\kappa \sinh^2(k/2) = k^2 + O(k^4), \quad k \rightarrow 0.$$

В частности, когда $\lambda \rightarrow 0+$, из условия $k > 0$ следует, что $k \rightarrow 0+$, то есть

$$\lambda \rightarrow 0+ \Rightarrow e^k \rightarrow 1+. \quad (2.46)$$

Теперь запишем задачу (2.42) для точки $x = 1$:

$$\frac{\kappa}{2}\psi(2) + \frac{\kappa}{2}\psi(0) - \kappa\psi(1) - \mu\psi(1) = \lambda\psi(1).$$

Отсюда мы можем вычислить, что

$$C_1 = \frac{1}{1 + e^{-k} \frac{\mu_1}{\kappa/2}}.$$

Для простоты обозначим $\frac{1}{x/2}$ через σ . Проведем аналогичные рассуждения для $x = -1$, получим:

$$C_{\pm 1} = \frac{1}{1 + \sigma \mu_{\pm 1} e^{-|k|}}.$$

Наконец, запишем задачу (2.42) для $x = 0$:

$$\frac{\kappa}{2} \psi(1) + \frac{\kappa}{2} \psi(-1) - \kappa \psi(0) + \lambda \psi(0) = \lambda \psi(0).$$

Отсюда мы можем вычислить, что

$$(C_1 + C_{-1} - 1) e^{-k} + \sigma \Lambda - e^k = 0$$

или, наконец,

$$e^{2k} - \sigma \Lambda e^k - \left(\frac{1}{1 + \sigma \mu_1 e^{-k}} + \frac{1}{1 + \sigma \mu_{-1} e^{-k}} - 1 \right) = 0.$$

Сначала, для простоты, положим $\mu = \mu_{-1} = \mu_1$, обозначим e^k через z и получим следующее выражение:

$$z^2 - \sigma \Lambda z - \frac{2}{1 + \sigma \mu \frac{1}{z}} + 1 = 0$$

или

$$z^3 - z^2 \sigma (\Lambda - \mu) - z (\sigma^2 \Lambda \mu + 1) + \sigma \mu = 0. \quad (2.47)$$

Задача состоит в том, чтобы выписать условия на Λ , μ и σ , которые гарантируют положительность λ . Воспользуемся выражением (2.46) и заметим, что (2.47) - гладкая функция относительно z , поэтому мы можем положить $z = 1$, чтобы найти предельное решение при $z \rightarrow 1+$:

$$1 - \sigma (\Lambda - \mu) - (\sigma^2 \Lambda \mu + 1) + \sigma \mu = 0 \Leftrightarrow \Lambda = \frac{2\mu}{1 + \sigma \mu}.$$

Собственное значение $\lambda > 0$ существует, когда это условие нарушается в «сверхкритическую сторону», т.е.

$$\Lambda > \frac{2\mu}{1 + \sigma \mu}.$$

Мы получаем условия леммы в предположении $\mu_1 = \mu_{-1}$.

В случае неравенства μ_1 и μ_{-1} тот же метод решения дает условие леммы:

$$\Lambda > \frac{\mu_1 + \mu_{-1} + 2\sigma \mu_1 \mu_{-1}}{(1 + \sigma \mu_1)(1 + \sigma \mu_{-1})}. \quad \square$$

2.7.4 Доказательство теоремы 4

Рассмотрим функцию $\psi(x) = 2^{-a|x|}$. Обозначим $\varphi(x) = (H(\omega)\psi)(x)$ и непосредственно вычислим квадратичную форму $(\varphi, \psi) = (\varphi(x, \omega), \psi(x))$. Сначала вычислим функцию $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} \varphi(x, \omega) &= \kappa \Delta \psi(x) + \Lambda \delta_0(x) \psi(x) - (1 - \delta_0(x)) \mu(x, \omega) \psi(x) \\ &= \frac{\kappa}{2} (\psi(x+1) + \psi(x-1) + 2\psi(x)) + \Lambda \delta_0(x) \psi(0) - (1 - \delta_0(x)) \mu(x, \omega) \psi(x). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Подставим в (2.48) выражение для $\psi(x)$ и рассмотрим отдельно точки 0 и $x > 0$:

$$\varphi(0, \omega) = \frac{\kappa}{2} (2^{-a} + 2^{-a} - 2) + \Lambda = \kappa(2^{-a} - 1) + \Lambda; \quad (2.49)$$

$$1831(x, \omega) = \frac{\kappa}{2} (2^{-a} \cdot 2^{-ax} + 2^a \cdot 2^{-ax} - 2 \cdot 2^{-ax}) - \mu(x, \omega) 2^{-ax} = \quad (2.50)$$

$$\frac{\kappa}{2} 2^{-ax} (2^{-a} + 2^a - 2) - \mu(x, \omega) 2^{-ax}. \quad (2.51)$$

Используя (2.49) и (2.51), вычисляем требуемую квадратичную форму:

$$\begin{aligned} (\varphi(x, \omega), \psi(x)) &= \sum_{\substack{x=-\infty; \\ x \neq 0}}^{\infty} \varphi(x) \psi(x) + \varphi(0) \psi(0) \\ &= \sum_{\substack{x=-\infty; \\ x \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{\kappa}{2} 2^{-a|x|} (2^{-a} + 2^a - 2) - \mu(x, \omega) 2^{-a|x|} \right) \cdot 2^{-a|x|} + \kappa(2^{-a} - 1) + \Lambda \\ &= \frac{\kappa}{2} (2^{-a} + 2^a - 2) \sum_{\substack{x=-\infty; \\ x \neq 0}}^{\infty} 2^{-2a|x|} - \sum_{\substack{x=-\infty; \\ x \neq 0}}^{\infty} \frac{\mu(x, \omega)}{2^{2a|x|}} + \kappa(2^{-a} - 1) + \Lambda \\ &= -\kappa \frac{2^{-a} - 1}{(2^{-a} + 1)2^a} + \kappa(2^{-a} - 1) + \Lambda - \sum_{\substack{x=-\infty; \\ x \neq 0}}^{\infty} \frac{\mu(x, \omega)}{2^{2a|x|}} \\ &= -\kappa \frac{(2^a - 1)}{(2^a + 1)} + \Lambda - \sum_{\substack{x=-\infty; \\ x \neq 0}}^{\infty} \frac{\mu(x, \omega)}{2^{2a|x|}}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Если $(\varphi(x, \omega), \psi(x)) > 0$, то в силу раздела 2.3, оператор $H(\omega)$ имеет положительное собственное значение. Учитывая выражение (2.52), условие положительности квадратичной формы можно переписать в следующем виде:

$$\Lambda > \kappa \frac{(2^a - 1)}{(2^a + 1)} + \sum_{\substack{x=-\infty; \\ x \neq 0}}^{\infty} \frac{\mu(x, \omega)}{2^{2a|x|}}.$$

Подставив $a = 1$, получим:

$$\Lambda > \frac{\varkappa}{3} + \sum_{\substack{x=-\infty; \\ x \neq 0}}^{\infty} \frac{\mu(x, \omega)}{4^{|x|}}. \quad \square$$

2.7.5 Доказательство леммы 11

Напомним формулировку леммы:

Рассмотрим множество Ω_l , включающее среды, которые имеют l -окрестности около нуля:

$$\Omega_l = \{\omega \in \Omega : \mu(i, \omega) = 0, \forall i \in -l, \dots, l\}.$$

Если положительное собственное значение существует для всех $\omega \in \Omega_l$, то оно ограничено снизу решением относительно λ следующего уравнения:

$$\frac{2\alpha\varkappa}{1 + \sqrt{1 - 4\alpha^2}} + \varkappa\alpha^{2l} \cdot R(\alpha, \beta) + \Lambda - \varkappa - \lambda = 0,$$

где $\alpha = \frac{\varkappa/2}{\varkappa+\lambda}$, $\beta = \frac{\varkappa/2}{c+\varkappa+\lambda}$, а выражение R определяется следующим образом:

$$R(\alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\beta^{2k+1} - \alpha^{2k+1} \right) C_{k+l}, \quad (2.53)$$

где C_n обозначает число Каталана. Если ряд в уравнении (2.53) не сходится, то существует $\omega \in \Omega_l$, для которого не существует положительного собственного значения.

Доказательство. Для удобства доказательства перепишем формулу (9) для $d = 1$:

$$u(x) = \sum_{\gamma: x \rightsquigarrow 0} \prod_{z \in \gamma} \left(\frac{\varkappa/2}{\mu(z, \omega) + E} \right). \quad (2.54)$$

В силу уравнения (2.16) нас интересует величина $u(1)$, для которой важны пути от 1 до 0. По условию леммы, для любого $\omega \in \Omega_l$ существует l -остров вокруг нуля. Поэтому каждая траектория из 1 в 0 длиной меньше $2l$ не покидает этот остров, а каждая траектория длиной больше $2l$ должна провести в нем не

менее $2l$ шагов. Мы делим все траектории на два семейства: траектории длиной меньше или равной $2l$ и траектории длиной больше $2l$. Вклад каждой из меньших траекторий в сумму (2.54) в точности равен $\left(\frac{\kappa/2}{0+E}\right)^{|\gamma|}$. Вклад каждой из больших траекторий в сумму (2.54) не меньше $\left(\frac{\kappa/2}{0+E}\right)^{2l} \cdot \left(\frac{\kappa/2}{c+E}\right)^{|\gamma|-2l}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} u(1) &= \sum_{\gamma:1 \rightarrow 0} \prod_{z \in \gamma} \left(\frac{\kappa/2}{\mu(z, \omega_l) + E} \right) \\ &\geq \sum_{\substack{\gamma:1 \rightarrow 0, \\ |\gamma| < 2l}} \left(\frac{\kappa/2}{0+E} \right)^{|\gamma|} L(0,1,|\gamma|) + \sum_{\substack{\gamma:1 \rightarrow 0, \\ |\gamma| \geq 2l}} \left(\frac{\kappa/2}{0+E} \right)^{2l} \left(\frac{\kappa/2}{c+E} \right)^{|\gamma|-2l} L(0,1,|\gamma|). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Перепишем уравнение (2.55), введя обозначения $\alpha = \frac{\kappa/2}{E}$, $\beta = \frac{\kappa/2}{c+E}$:

$$u(1) \geq \sum_{\substack{\gamma:1 \rightarrow 0, \\ |\gamma| < 2l}} \alpha^{|\gamma|} L(0,1,|\gamma|) + \sum_{\substack{\gamma:1 \rightarrow 0, \\ |\gamma| \geq 2l}} \alpha^{2l} \beta^{|\gamma|-2l} L(0,1,|\gamma|). \quad (2.56)$$

Упростим уравнение (2.56) так, как это сделано в (2.18), получив следующее:

$$\begin{aligned} u(1) &\geq \sum_{k=0}^{l-1} \alpha^{2k+1} C_k + \alpha^{2l} \sum_{k=l}^{\infty} \beta^{2k+1-2l} C_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{2k+1} C_k + \alpha^{2l} \sum_{k=l}^{\infty} \left(\beta^{2k+1-2l} - \alpha^{2k+1-2l} \right) C_k. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Используя (2.19) и (2.57), получаем:

$$u(1) \geq \frac{2\alpha}{1 + \sqrt{1 - 4\alpha^2}} + \alpha^{2l} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\beta^{2k+1} - \alpha^{2k+1} \right) C_{k+l}. \quad (2.58)$$

Подстановка (2.58) в (2.16) завершает доказательство леммы. \square

Глава 3. Моделирование ветвящихся случайных блужданий в случайной среде

Эта глава содержит описание и результаты численного моделирования ВСБ описанных в главах 1 и 2. Цель численного моделирования — исследовать, какие качественные и количественные результаты, предсказанные теорией ВСБ можно наблюдать на конечных временах. Насколько нам известно, подобных исследований для случайной среды проведено не было.

3.1 Моделирование в однородной случайной среде

Первая часть главы относится к модели ВСБ в однородной случайной среде, описанной в главе 1. Мы приведем два алгоритма: первый моделирует ВСБ как систему частиц и использует наивную Монте–Карло оценку характеристик этой системы. Второй — напрямую оценивает представление Фейнмана–Каца при помощи методов Монте-Карло. Первый алгоритм потенциально позволяет оценивать произвольные характеристики системы, однако его реализация оказалась технически очень сложной. В частности, мы смогли достаточно точно оценить только общие средние численности частиц. Вторым алгоритмом позволило точно оценить локальные средние численности и исследовать их асимптотики, но не позволяет исследовать другие характеристики ВСБ.

3.1.1 Перемежаемость поля замороженных моментов

Мы начнем объяснение явления перемежаемости с примера, приведенного в работе [3]. Пусть ξ_i — н.о.р.с.в., ξ_1 принимает равновероятно значения 0 и 2. Рассмотрим процесс $\xi(N)$, определенный следующим образом

$$\xi(N) := \prod_{j=1}^N \xi_j = \xi_1 \xi_2 \dots \xi_N.$$

Этот процесс является крайне неоднородным: в каждый момент «времени» только одна из его 2^N возможных траекторий является положительной.

Заметим, что

$$\mathbb{E}\xi = 1, \quad \mathbb{E}\xi^2 = 2^N$$

Моменты процесса плохо описывают поведение его траекторий. В частности, основной вклад в моменты вносит редкая реализация случайного процесса. Введем дополнительно величину, отражающую скорость роста моментов процесса:

$$\lambda^p := \frac{\log_2(\mathbb{E}\xi^p)}{N} = p - 1$$

Видно, что скорость роста моментов растет с номером момента p . Про такой случай иногда говорят «отсутствует регулярность роста моментов».

Рассмотренный модельный пример есть простейшее приближение к мультипликативным процессам, одним из которых является ВСБ. Поэтому возникает вопрос о существовании перемежаемости поля замороженных моментов, т.е., вопрос о том, адекватно ли усреднение по среде $\langle m_1(t, x, y, \omega) \rangle$ отражает самое поле моментов $m_1(t, x, y, \omega)$. Для ответа на введем формальное определение перемежаемости согласно [4].

Для функций $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, будем писать, что $f \ll g$, если $g(t) - f(t) \rightarrow \infty$, при $t \rightarrow \infty$.

Пусть $\{\eta(t, x); x \in \mathbb{Z}^d\}$ есть семейство неотрицательных пространственно однородных случайных полей и

$$\Lambda_p(t) = \ln \langle \eta(t, 0)^p \rangle < \infty, \quad t \geq 0, p \in \mathbb{N}.$$

Поля $\{\eta(t, x); x \in \mathbb{Z}^d\}$ называются перемежаемыми, если

$$\Lambda_1(t) \ll \frac{\Lambda_2(t)}{2} \ll \frac{\Lambda_3(t)}{3} \ll \dots \quad (3.1)$$

Заметим, что если ляпуновские экспоненты

$$\lambda_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Lambda_p(t)}{t}, p \in \mathbb{N}$$

существуют и

$$\lambda_1 < \frac{\lambda_2}{2} < \frac{\lambda_3}{3} < \dots, \quad (3.2)$$

то условие (3.1) будет выполнено.

Напомним, согласно первой главе, для потенциала с вейбулловским хвостом верно:

$$\ln \langle m_n^p(t, x, y) \rangle \sim c(np)^{\alpha/(\alpha-1)} t^{\alpha/(\alpha-1)},$$

для потенциала с гумбелевским хвостом верно:

$$\ln \langle m_n^p(t, x, y) \rangle \sim \alpha^{-1} pnt \ln(pnt).$$

Для вейбулловского случая ляпуновские экспоненты выглядят следующим образом:

$$\frac{\lambda_p}{p} = \frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \langle m_n^p(t, x, y) \rangle}{t} = \frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c(np)^{\alpha/(\alpha-1)} t^{\alpha/(\alpha-1)}}{t} = c_2 p^{\frac{1}{\alpha-1}} t^{\frac{1}{\alpha-1}}. \quad (3.3)$$

Отсюда следует, что $\frac{\lambda_p}{p} < \frac{\lambda_{p+1}}{p+1}$, следовательно условие 3.2 выполнено, и, следовательно, поле моментов $m_n(t, x, y, \omega)$ перемежаемо для любого $n \in \mathbb{N}$.

Для гумбелевского случая ляпуновские экспоненты выглядят следующим образом:

$$\frac{\lambda_p}{p} = \frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \langle m_n^p(t, x, y) \rangle}{t} = \frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{-1} pnt \ln(pnt)}{t} = c \ln(pnt). \quad (3.4)$$

Отсюда вновь следует, что $\frac{\lambda_p}{p} < \frac{\lambda_{p+1}}{p+1}$, следовательно условие 3.1 выполнено, и, следовательно, вновь поле моментов $m_n(t, x, y, \omega)$ перемежаемо для любого $n \in \mathbb{N}$.

Цель первой части настоящей главы — показать, что перемежаемость ВСБ в случайность вейбулловской или гумбелевской среде может наблюдаться уже на конечных временах, а также исследовать влияние перемежаемости на Монте-Карло оценки асимптотик отождженных моментов.

3.1.2 Наивное моделирование

Напомним описание ВСБ как системы частиц, эволюция которых описывается набором экспоненциальных и полиномиальных случайных величин. Для удобства введем среднее время ожидания $\tau(x)$ в произвольной точке $x \in \mathbb{Z}^d$:

$\tau(x) = (\kappa + \lambda(x, \omega) + \mu(x, \omega))^{-1}$. С точки зрения такого подхода эволюция частицы, находящейся в точке x выглядит следующим образом. Частица, которая находится в точке $x \in \mathbb{Z}^d$, ждёт экспоненциально распределенное время с параметром $\tau(x)^{-1}$, а затем мгновенно делится, исчезает или перемещается равновероятно в одну из соседних точек решетки. Выбор из этих трёх событий производится с соответствующими вероятностями $\lambda(x, \omega)\tau(x)$, $\mu(x, \omega)\tau(x)$ и $\kappa\tau(x)$. Эволюция частиц происходит независимо друг от друга и от всей предыстории.

Фиксируем длину временного интервала $[0, T_{max}]$, на котором выполняется моделирование и размерность целочисленной решетки d . Мы отказались от динамического выделения памяти под решетку и работаем с конечной, достаточно большой решеткой, за пределы которой ВСБ скорее всего не выйдет в течение времени T_{max} . Эта конечная решетка обозначается ниже через \mathcal{Z}^d . Считаем, что распределение случайных полей \mathcal{L} и \mathcal{M} задано заранее. Например, можно использовать модель главы 1 и полагать, что они образованы независимыми одинаково распределенными величинами $\mu(x, \omega)$ и $\lambda(x, \omega)$.

Историю эволюции ВСБ можно описать при помощи множества списков, каждый которых состоит из четырёх элементов $(k, t_b(k), t_d(k), x_k)$. Каждый список описывает частицу, помеченную уникальным номером k , которая рождается в точке $x \in \mathcal{Z}^d$ в момент $t_b(k)$ и «эволюционирует» в момент $t_d(k)$. В течение интервала времени $[t_b(k), t_d(k)]$ эта частица находится в точке x_k . Под эволюцией мы подразумеваем скачок в другую точку, деление частицы надвое или смерть. Для удобства мы рассматриваем переход частицы в другую вершину как гибель частицы в начальной точке и рождение новой частицы в точке назначения. При описании алгоритма для простоты мы будем опускать символ ω в описании реализаций полей \mathcal{L} и \mathcal{M} .

В теоретической части работы мы полагали, что начальный момент времени существует единственная точка, расположенная в некотором узле решетки $x \in \mathbb{Z}^d$. Не ограничивая общности, в этой главе мы предполагаем, что в начальный момент времени существует единственная точка, расположенная в нуле. Соответственно начальное состояние ВСБ состоит из одного элемента $(1, t_b(1), t_d(1), x(1)) = (1, 0, NA, (0, \dots, 0))$. Символом «NA» (*недоступно*) мы обозначаем время смерти, которое еще не известно. Далее, если есть хотя бы одна частица с $t_d = NA$, то алгоритм выполняет шаг. На каждом шаге алгоритма среди всех частиц с $t_d = NA$ выбирается и обрабатывается частица с наимень-

шим значением t_b . Пусть эта частица описывается вектором $(k, t_b(k), NA, x_k)$. Выбранная частица обрабатывается в соответствии со следующими правилами:

1. Переменной $t_d(k)$ присваивается значение $t_b(k) + \text{Exp}(\tau(x_k)^{-1})$.
2. Производится выбор одного из трех типов эволюции: деления надвое, исчезновения или прыжка с соответствующими вероятностями $\lambda(x_k)\tau(x_k)$, $\mu(x_k)\tau(x_k)$ и $\kappa\tau(x_k)$.
3. Если на шаге 2 выбран «прыжок», то равновероятно выбирается одна из соседних вершин рядом с x_k , обозначаемая x_{k+1} . К набору списков добавляется новая частица-список $(k + 1, t_d(k), NA, x_{k+1})$.
4. Если на шаге 2 выбрано «деление», то к набору списков добавляются две частицы-списка $(k + 1, t_d(k), NA, x_k)$ и $(k + 2, t_d(k), NA, x_k)$.
5. Если на шаге 2 выбрано «исчезновение», то к набору списков ничего не добавляется.

Алгоритм перестает работать, если не осталось частиц с $t_d = NA$ или если все частицы имеют $t_d > T_{max}$. Кроме того, мы обязаны прервать алгоритм, если в общей сложности на решетке находится достаточно большое число частиц. Мы обязаны использовать правило остановки, поскольку время обработки данных растет экспоненциально в силу экспоненциального роста количества частиц. Время такого прерывания работы алгоритма обозначается через T_{stop} . T_{stop} может быть значительно меньше, чем T_{max} , особенно в случае случайной среды, когда интенсивность деления может случайно оказаться намного выше интенсивности смерти.

При моделировании мы изучали только общее число частиц на решетке в момент времени t , обозначаемое как $N(t)$. Оно определяется как количество частиц, существующих в момент времени t , т.е. $N(t) = \sum_k \mathbb{I}\{t \in [t_b(k), t_d(k)]\}$, где \mathbb{I} — это индикатор. В силу случайности среды значение $N(t)$ почти наверное не будет испытывать критическое поведение и будет либо экспоненциально расти, либо экспоненциально падать. Мы предположили, что если число частиц достигает 1000, то $N(t)$ испытывает экспоненциальный рост, и влиянием случайности можно пренебречь. Чтобы предсказать количество частиц после T_{stop} , мы использовали обобщенную линейную регрессию с экспонентой в качестве функции связи. Регрессионная модель формулируется следующим образом:

$$\log N(t) = \alpha t + \varepsilon_t,$$

где ε_t — случайные ошибки с равной дисперсией. Для обучения модели мы использовали только $t > T_{100}$, где T_{100} — время первого появления сотни частиц на решетке. Общее количество частиц на отрезке T_{stop}, T_{max} было предсказано на основе подогнанной модели.

Предположение о том, что экспоненциальная регрессия является хорошим приближением общего числа частиц, нуждается в проверке. Для этого мы использовали 1000 смоделированных траекторий ВСБ в однородной, неслучайной среде с интенсивностями $\lambda = 2$ и $\mu = 1$. Из сгенерированных записей эволюцией этой модели ВСБ были отобраны только те, где общее число частиц достигло 1000. Фактические значения $N(t)$ сравнивались с регрессионным предсказанием для временного интервала $[T_{100}, T_{stop}]$ и после рассчитывался коэффициент детерминации (R^2). Среднее значение R^2 оказалось равным 0.996, наименьший R^2 был равен 0.982. В случае случайной среды для фиксированного ω случайная среда является «замороженной», т.е. неслучайной. Поэтому качество экспоненциальной аппроксимации в случайной среде должно быть сравнимо с качеством аппроксимации в неслучайной среде. Мы проверили эту сопоставимость, выполнив описанную ранее оценку R^2 на 50 однородных замороженных случайных средах, используя 1000 траекторий на каждой среде. Интенсивности были равны $\lambda = Weib(2, 2.26)$ и $\mu = Weib(1, 2.26)$. Для полученных 50000 траекторий были выбраны только те, где общее число частиц достигало 1000. Среднее значение R^2 оказалось равным 0,998, а наименьший R^2 был равен 0,992. Мы пришли к выводу, что полученные коэффициенты детерминации свидетельствуют о достаточном качестве аппроксимации. Поэтому мы использовали экспоненциальную регрессию как часть алгоритма моделирования $N(t)$.

Описанный выше алгоритм генерирует значение $N(t)$ на временном интервале $[0, T_{max}]$ для заранее заданных начальных условий. Включая реализации $\mathcal{L}(\omega)$ и $\mathcal{M}(\omega)$ Рассмотрим M запусков алгоритма моделирования с результатами $N(t, \omega)_1, \dots, N(t, \omega)_M$. Чтобы вычислить замороженные моменты общей численности частиц $m_n(t, \omega)$, можно применить метод Монте-Карло:

$$\hat{m}_n(t, \omega) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M N_i^n(t, \omega).$$

Это значение сходится к истинному $m_n(t, \omega)$ в соответствии с законом больших чисел при $M \rightarrow \infty$. В нашей работе мы положили M равным 1000.

Соответственно, оценить отождненные моменты можно вновь с помощью метода Монте-Карло усреднив M_1 сгенерированных замороженных моментов $\hat{m}_n(t, \omega_i)$ для различных ω_i :

$$\langle \widehat{m}_n^p(t, \omega) \rangle = \frac{1}{M_1} \sum_{k=1}^{M_1} \hat{m}_n^p(t, \omega_k).$$

В нашей работе мы положили M_1 равным 250. Мы предполагали, что если интересующие нас эффекты будут недостаточно заметны, то можно увеличить выборку величин $\widehat{m}_n^p(t)$ за счет увеличения M_1 , без переоценки ранее оцененных $\langle \widehat{m}_n^p(t) \rangle$. Однако оказалось, что для наблюдения интересующих эффектов выборки размером 250 достаточно.

Следует подчеркнуть, что в неслучайной среде величина $m_n(t, \omega)$ не является случайной. Поэтому формально метод Монте-Карло можно остановить на первом шаге и M симуляциях. Однако для удобства сравнения случайных и неслучайных сред мы использовали второе усреднение, как и в случайном случае. Для БРВ в неслучайной среде мы определяем «псевдо-отождненные» моменты $\widehat{[m_n^p(t)]}$ следующим образом:

$$\widehat{[m_n^p(t)]} = \frac{1}{M_1} \sum_{k=1}^{M_1} \hat{m}_n^p(t).$$

Заметим, что и оценка $\widehat{[m_n^p(t)]}$ и оценка $\hat{m}_n^p(t)$ нормально распределены, $\widehat{[m_n^p(t)]} \xrightarrow{\text{п.н.}} m_n^p$ и $\hat{m}_n^p(t) \xrightarrow{\text{п.н.}} m_n^p$ при $M \rightarrow \infty$ и $M_1 \rightarrow \infty$. Отдельно заметим, если гипотеза о нормальности величины $\hat{m}_n^p(t)$ не отвергается, то метод Монте-Карло реализован правильно.

3.1.3 Результаты наивного моделирования

Напомним, что во всех моделях мы предполагаем, что случайное блуждание является простым и симметричным. Кроме того, для удобства, предположим, что интенсивность блуждания \varkappa во всех рассматриваемых моделях равна 1.

Мы рассмотрели десять различных моделей ВСБ, которые представлены в таблице 1. Точки, в которых либо интенсивность размножения, либо интенсивность гибели не равны нулю мы будем называть источниками. Для простоты во

всех моделях интенсивности источников являются либо одинаковыми константами, либо н.о.р.с.в. случайными величинами. Модели 1 и 3 представляют собой надкритические ВСБ в неоднородной и однородной неслучайной среде на \mathbb{Z} . В этих моделях мы положили интенсивность умирания равной 1, а интенсивность расщепления равной 2. В таких моделях первый момент испытывает экспоненциальный рост. Модели 1 и 3 спарены с моделями 2 и 4 соответственно. В моделях 2 и 4 источники располагаются так же, как и в моделях 1 и 3, но интенсивности являются случайными величинами, распределенными согласно распределению Вейбулла. Интенсивности случайного размножения и гибели выбираются таким образом, чтобы их средние значения были равны таковым в неслучайной среде: $\mathbb{E}(\text{Weib}(2,1.13)) \approx 1$ и $\mathbb{E}(\text{Weib}(2,2.26)) \approx 2$. Кроме того, обе рассматриваемые случайные величины имеют гауссовский правый хвост. Их разность также имеет гауссовский правый хвост, что было проверено численно. Заметим, что для случайных интенсивностей понятие «критических» значений не существует. Однако для удобства в дальнейшем мы называем ВСБ в случайных средах «надкритическим», если для каждого x : $\mathbb{E}\lambda(x) > \mathbb{E}\mu(x)$ и «критическим», если для каждого x : $\mathbb{E}\lambda(x) = \mathbb{E}\mu(x)$. Модель 5 представляет собой критическое ВСБ в неслучайной однородной среде, сопряженную с моделью 6 — «критическим» ВСБ в случайной среде. На примере моделей 5 и 6 мы покажем различие в понятии «критический процесс» в зависимости от случайности среды. Наконец, модели 7-10 представляют собой надкритические случайные и неслучайные ВСБ на \mathbb{Z}^3 . Первая задача этих моделей — показать, что интересующие нас эффекты не зависят от размерности целочисленной решетки. Вторая задача — продемонстрировать относительное влияние конфигурации источника на скорость роста моментов общего числа частиц. Теоретические результаты для случая нескольких источников приведены, например, в [29; 30].

Начнем с графического представления результатов. На рисунках 3.1 и 3.2 приведены оценки первого момента общего числа частиц для модели 1 и 2 в момент времени $t = 2.5$. Момент $t = 2.5$ выбран из-за визуально заметного проявления перемежаемости. При $t > 2.5$ графическое представление замороженных моментов в случайной среде становится неинформативным из-за высоких пиков. Поведение оценок замороженных моментов резко отличается в случайном и неслучайном случаях. В неслучайной среде оценки первого момента похожи на реализацию нормально распределенной случайной величины. Нормальность мы подтвердили тестом Шапиро-Уилка ($p = 0,17$). Как мы уже отмечали в разделе

Номер модели и описание ВСБ	Размерность решетки d	Координаты источников	Интенсивность деления $\tilde{\xi}_+$	Интенсивность смерти $\tilde{\xi}_-$
1. Неслучайное, надкритическое, неоднородная	1	$x = 0$	2	1
2. Случайное, «надкритическое», неоднородная	1	$x = 0$	Weib(2,2.26)	Weib(2,1.13)
3. Неслучайное, надкритическое, homogeneous	1	каждая точка	2	1
4. Случайное, «надкритическое», homogeneous	1	каждая точка	Weib(2,2.26)	Weib(2,1.13)
5. Неслучайное, критическое, homogeneous	1	каждая точка	1	1
6. Случайное, «критическое», homogeneous	1	каждая точка	Weib(2,1.13)	Weib(2,1.13)
7. Неслучайное, надкритическое, симплекс со стороной $\sqrt{2}$	3	(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)	2	1
8. Неслучайное, надкритическое, симплекс со стороной $2\sqrt{2}$	3	(2,0,0), (0,2,0), (0,0,2)	2	1
9. Случайное, «надкритическое», симплекс со стороной $\sqrt{2}$	3	(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)	Weib(2,2.26)	Weib(2,1.13)
10. Случайное, «надкритическое», симплекс со стороной $2\sqrt{2}$	3	(2,0,0), (0,2,0), (0,0,2)	Weib(2,2.26)	Weib(2,1.13)

Таблица 1 — Рассматриваемые модели.

3.1.2, этот результат был ожидаемым и подтвердил правильность реализации метода Монте-Карло. В случае случайной среды распределение замороженных моментов содержит редкие реализации большого размера. Это является проявлением перемежаемости поля замороженных моментов. На рисунках **3.3** и **3.4** представлены аналогичные оценки для моделей в однородной среде. Эти рисунки подтверждают наличие перемежаемости на конечных временах.

Однако графический анализ не очень удобен, поэтому необходимо было получить некоторую численную оценку перемежаемости. Для этого мы использовали описанную в разделе **3.1.1** интерпретацию перемежаемости как наличия «высоких пиков». Перемежаемость приводит к невозможности хорошего описания случайной величины ее моментами, так как основной вклад в моменты случайной величины вносит небольшое число редких событий. Наш случай подразумевает, что основной вклад в первый отоженный момент вносит малое число больших замороженных первых моментов. Мы решили оценить это влияние, рассмотрев «урезанные на 1% моменты». Значение урезанного на 1% момента определяется как среднее значение, оцененное по выборке без наименьших и

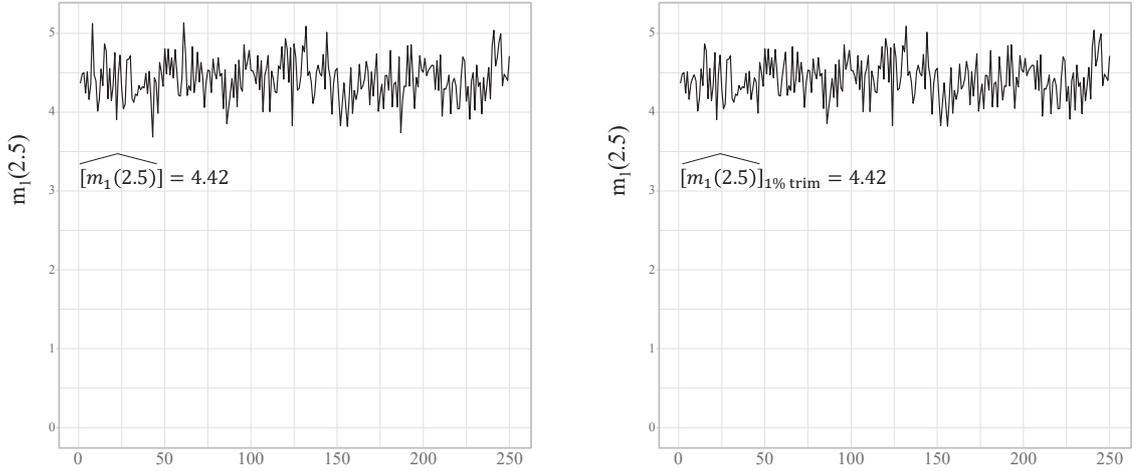


Рисунок 3.1 — Оценки и урезанные оценки (правая панель) первого момента общего числа частиц в неоднородном неслучайном ВСБ.

наибольших 1% наблюдений. Заметим, однопроцентная урезка эквивалентна удалению двух наибольших и двух наименьших из 250 замороженных моментов и последующему усреднению. Урезанные выборки и соответствующие им урезанные моменты показаны на рисунках 3.1–3.4 на правых панелях. Урезанное среднее значение в случае неоднородной неслучайной среды уменьшилось на 36% по сравнению с исходным значением. Напротив, та же величина в случайной среде изменилась только во втором десятичном разряде или меньше чем на 0.01%. Аналогичный результат наблюдается и для однородных сред. Поэтому необходимо подчеркнуть, что перемежаемость возникает не только в однородной, но и в неоднородной среде, имеющей только один источник ветвления.

В качестве меры перемежаемости введем величину $R(t)$, которая оценивает, насколько сильно первый отожденный момент зависит в момент времени t от редких реализаций поля:

$$R(t) = \begin{cases} \frac{\widehat{[m_1(t)]}}{[m_1(t)]_{\text{урезка на 1\%}}}, & \text{для неслучайной среды,} \\ \frac{\langle \widehat{m_1(t)} \rangle}{\langle [m_1(t)]_{\text{урезка на 1\%}} \rangle}, & \text{для случайной среды.} \end{cases}$$

Мы оценили $R(10)$ для всех моделей из таблицы 1, и результаты приведены в таблице 2. Как видно, для моделей с неслучайной средой $R(10)$ принимает значения, равные 1 с точностью до третьего знака после запятой. В свою очередь, для моделей со случайной средой это соотношение существенно больше 1. Таким образом, для всех размерностей и конфигураций источников предположение о случайности ожидаемо меняет поведение ВСБ. При сравнении пары моделей

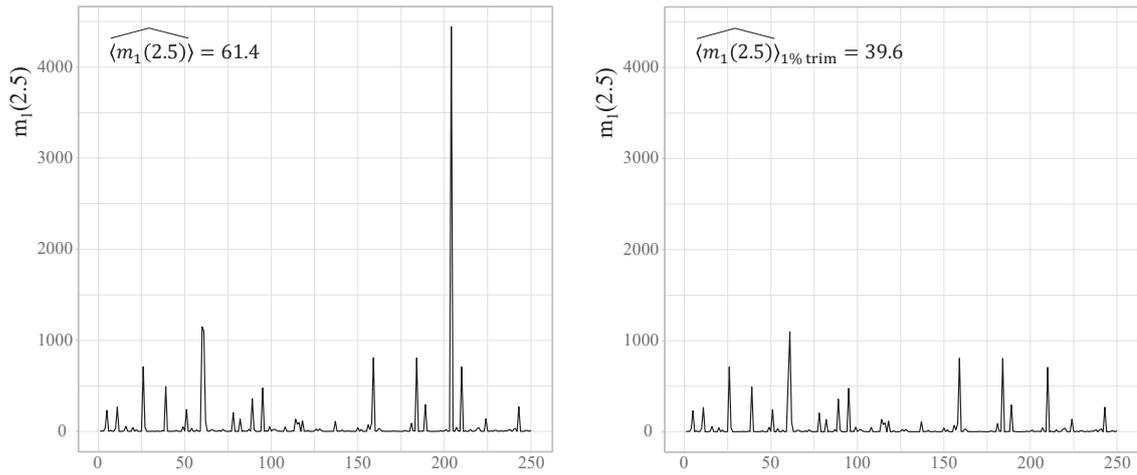


Рисунок 3.2 — Оценки и урезанные оценки (правая панель) первого момента общего числа частиц в неоднородном случайном ВСБ.

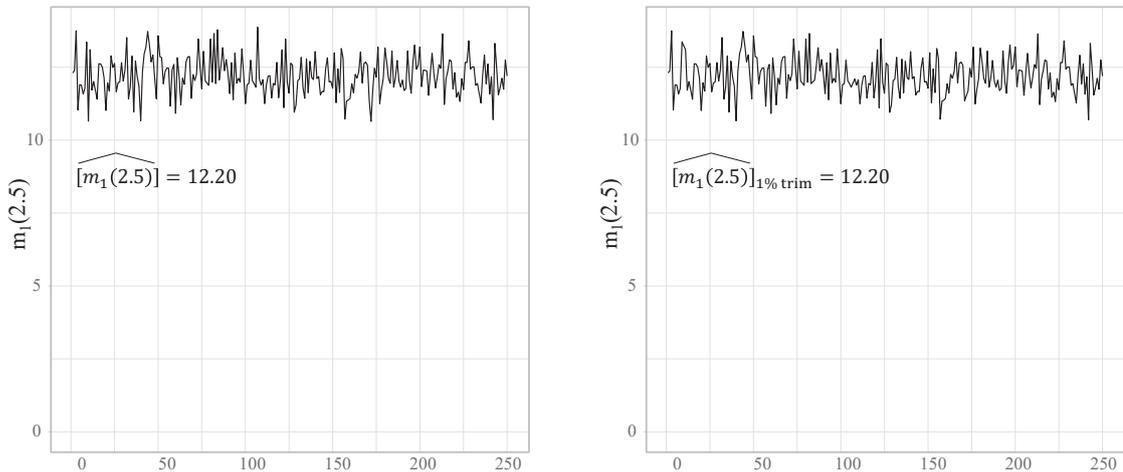


Рисунок 3.3 — Оценки и урезанные оценки (правая панель) первого момента общего числа частиц в однородном неслучайном ВСБ

1–2 с парой 3–4 можно заметить, что однородная среда в надкритическом случае дает больший рост моментов. Этот результат ожидаем: в однородной среде случайное блуждание лишь незначительно задерживает ветвление, перемещая частицу от одного центра ветвления к другому. В то время как в неоднородной среде случайное блуждание может существенно задержать ветвление, заставляя частицу блуждать за пределами источника. Этот эффект особенно важен в пространствах размерности более 3, где простое симметричное блуждание может «навсегда удалить» точку из источника ветвления. Более подробно этот эффект рассмотрен в [21]. На примере моделей 5 и 6 проиллюстрирован теоретический результат о понятии «критических значений» ВСБ. Эти значения являются

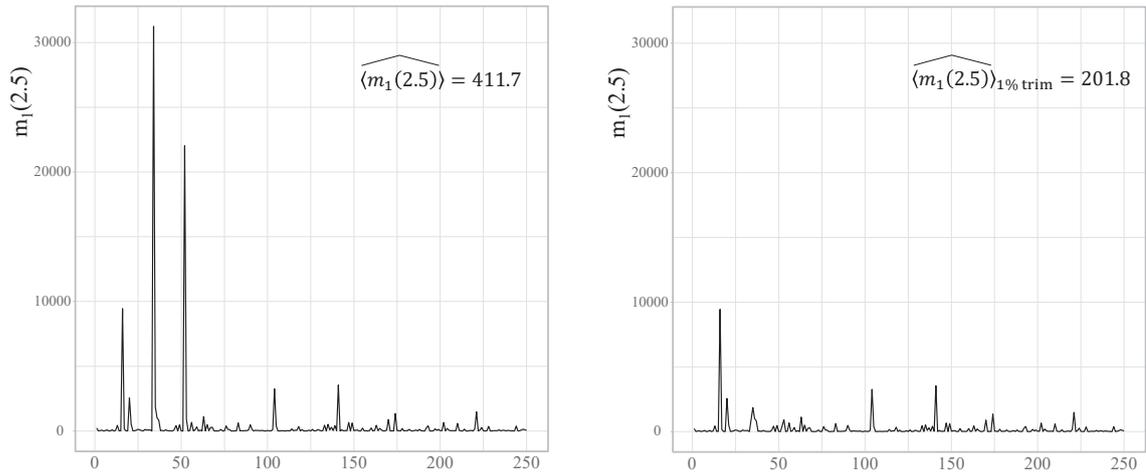


Рисунок 3.4 — Оценки и урезанные оценки (правая панель) первого момента общего числа частиц в однородном случайном ВСБ.

существенной характеристикой процесса в неслучайной среде, и в то же время они никак не проявляются в неслучайной среде.

Отдельно отметим еще один полученный результат. На рисунке 3.5 представлены результаты для ВСБ в случайной гумбелевской среде и в отдельной неслучайной реализации гумбелевской среды. Правая часть рисунка соответствует случаю, когда интенсивности деления и гибели определены в каждой точке решетки, левая часть — случаю, когда деление и гибель возможны только в нуле. Как показало моделирование, величина $R_k(t)$ растет, что свидетельствует о перемежаемости в случае случайной среды. Было проведено численное исследование $R_k(t)$, которое показало, что для всех $k \in [1; 50]$ величина $R_k(t)$ монотонно растет в случайной среде.

Наконец, модели 7–10 показывают, что скорость роста моментов также зависит от конфигурации источников. Для наглядности мы представили оценки моментов для моделей 7–10 на рис 3.6. Видно, что конфигурация определяет показатель экспоненты в асимптотике первого момента как в случайных, так и в неслучайных средах. Причем влияние конфигурации представляется очевидным: чем дальше друг от друга находятся источники, тем медленнее рост.

Отметим, что свойство «высоких пиков» поля моментов формально не является характеристикой перемежаемости и представляет собой следствие, вытекающее из определения. Формально следует исследовать нерегулярность роста моментов. В частности, как мы показали в разделе 3.1.1 для ВСБ в случайной среде справедливо следующее свойство: $\langle m_1(t) \rangle^2 \ll \langle m_1^2(t) \rangle$, так как

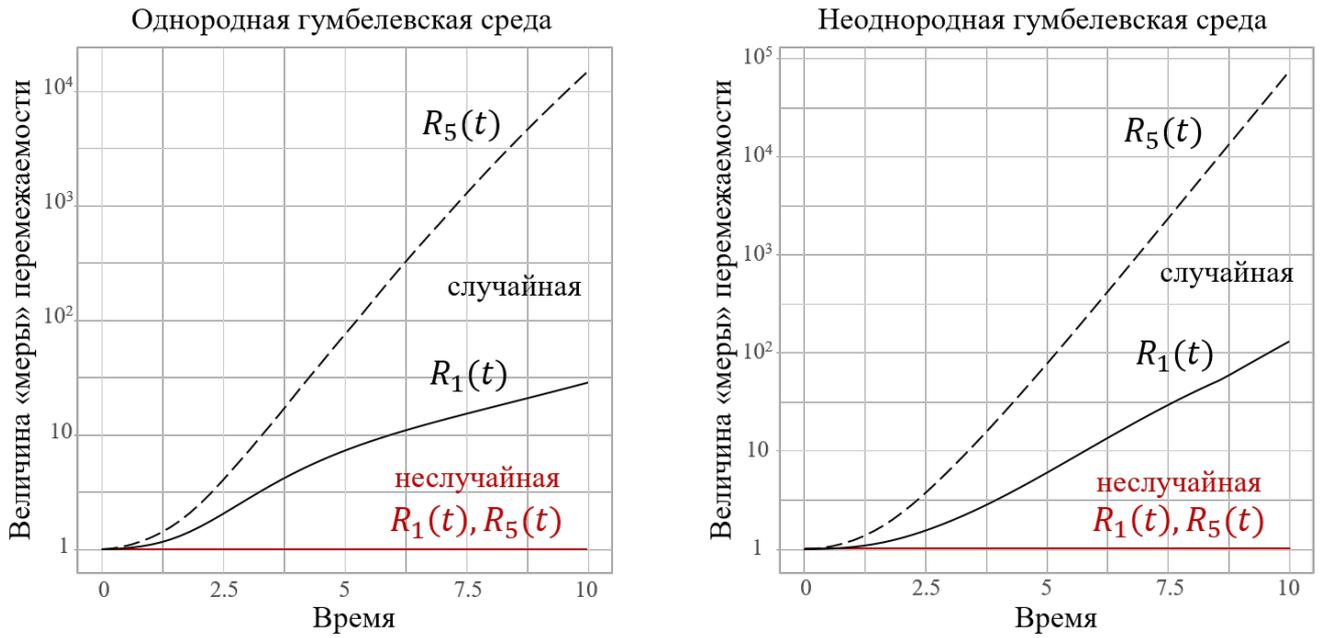


Рисунок 3.5 — Оценка меры перемежаемости для ВСБ в различных средах.

Номер модели и описание	$\widehat{[m_1(10)]}$ или $\langle \widehat{m_1(10)} \rangle$	$\widehat{[m_1(10)]}_{1\% \text{ trim}}$ или $\langle \widehat{m_1(10)} \rangle_{1\% \text{ trim}}$	$R(10)$
1. Неслучайная, надкритическая, неоднородная	111.0	110.9	1.00
2. Случайная, «надкритическая», неоднородная	$6.5 \cdot 10^{12}$	$4.9 \cdot 10^{10}$	131
3. Неслучайная, надкритическая, однородная	$2.5 \cdot 10^4$	$2.5 \cdot 10^4$	1.00
4. Случайная, «надкритическая», однородная	$6.3 \cdot 10^{16}$	$2.2 \cdot 10^{15}$	28
5. Неслучайная, критическая, однородная	0.997	0.997	1.00
6. Случайная, «критическая», однородная	59.8	44.7	1.3
7. Неслучайная, надкритическая, simplex with the side of $\sqrt{2}$	17.5	17.5	1.00
8. Неслучайная, надкритическая simplex with the side of $2\sqrt{2}$	3.1	3.1	1.00
9. Случайная, «надкритическая», simplex with the side of $\sqrt{2}$	$1.3 \cdot 10^{20}$	$2.3 \cdot 10^{13}$	$5.3 \cdot 10^6$
10. Случайная, «надкритическая», simplex with the side of $2\sqrt{2}$	$1.2 \cdot 10^{15}$	$2.3 \cdot 10^4$	5.1

Таблица 2 — Результаты моделирования

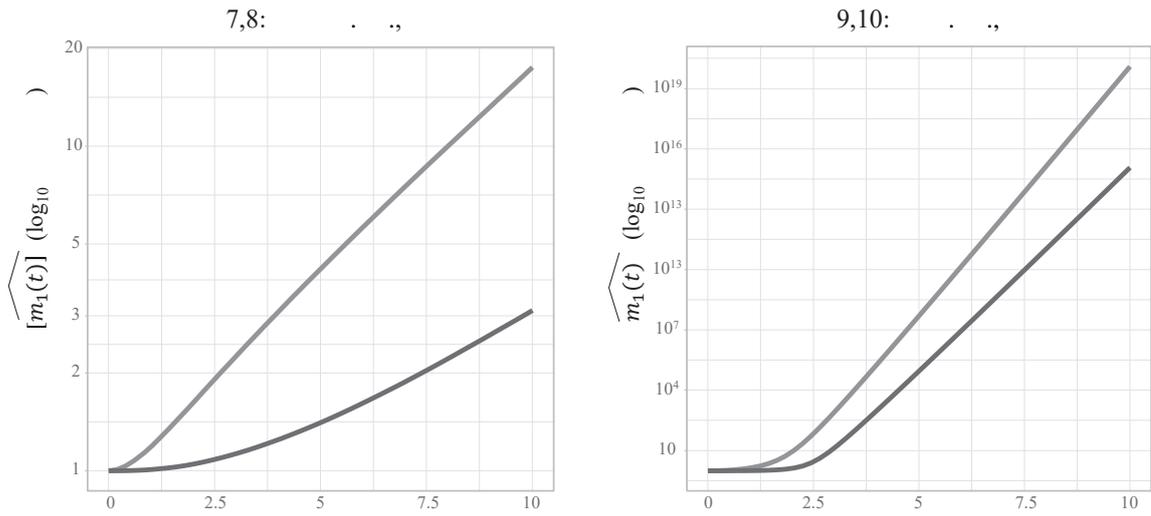


Рисунок 3.6 — Моменты и отоженные моменты в моделях 7–10

$t \rightarrow \infty$. Переформулируем это свойство в терминах логарифмов: $\log_{10}\langle m_1^2(t) \rangle - \log_{10}\langle m_1(t) \rangle^2 > C$, так как $t \rightarrow \infty, C \in \mathbb{R}_+$. Заметим, что на практике нельзя показать, что константа C в точности равна нулю. Можно лишь проверить гипотезу о том, что $C = 0$, но для этого необходимо сгенерировать выборку отоженных оценок, что вычислительно сложно. В данной работе мы оценивали неравномерность роста только для полученной оценки отоженного момента. На рисунке 3.7 приведены графики для отоженных моментов в случае случайной и неслучайной среды. Для неслучайной среды обе логарифмические величины ведут себя одинаково с разницей менее 0.005. В то время как для случайной среды постоянная C стабилизируется на уровне примерно 5.1. Рисунок и оценки подтверждают, что мы можем качественно наблюдать явление перемежаемости и количественно оценить степень нерегулярности роста моментов.

Заклучим: перемежаемость может наблюдаться в случайных средах даже на конечных временных интервалах. Метод Монте-Карло может быть использован в качестве исследовательского инструмента для ВСБ с произвольными распределениями интенсивностей ветвлений и структур полей. Однако в случайных средах оценки моментов становятся неустойчивыми из-за наличия перемежаемости.

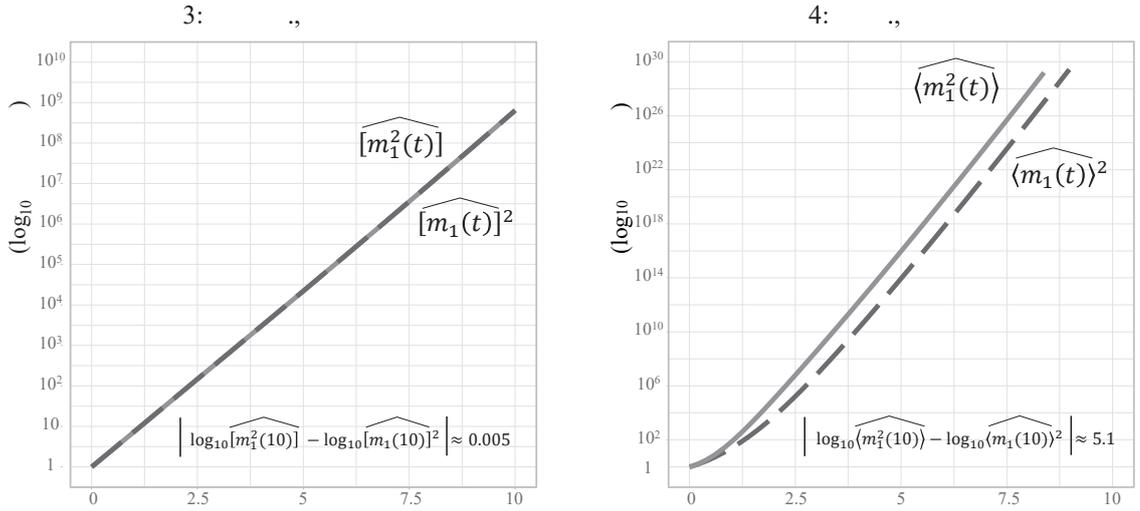


Рисунок 3.7 — Сравнение роста первых двух отождженных моментов

3.1.4 Моделирование представлений типа Фейнмана–Каца

В этом разделе мы рассмотрим второй вариант моделирования ВСБ в случайной среде. Мы откажемся от моделирования ВСБ как системы частиц, и будем оценивать непосредственно характеристики ВСБ. Наиболее интересно уже использовавшееся нами в главе 1 представление типа Фейнмана–Каца:

$$m_1(t, x, y, \omega) = \mathbb{E}_x \left[\exp \left\{ \int_0^t V(x_s, \omega) ds \right\} \delta(x_s, y) \right], \quad (3.5)$$

где x_s — случайное блуждание с генератором $\mathcal{H}\Delta$, а математическое ожидание \mathbb{E}_x вычисляется для траекторий случайного блуждания при условии старта в точке x .

Мы можем применить метод Монте–Карло и заменить математическое ожидание в формуле 3.5 на усреднение по выборке из реализаций блужданий x_s . В отличие от предыдущего моделирования блуждание x_s не испытывает экспоненциальный рост сложности подсчетов со временем, так как в нем не присутствует ветвление. Поэтому вариант моделирования в этой главе на порядок быстрее и не требует введения правил остановки для строгого учета памяти.

Мы продемонстрируем преимущество подхода из раздела 3.1.4 с наивным подходом из раздела 3.1.2 на примере локальных средних численностей частиц. Напомним, при помощи наивного подхода нам не удалось применить экспоненциальную регрессию для локальных численностей частиц $m_1(t, 0, y, \omega)$ ввиду небольшого количества частиц в точках решетки в окрестности нуля. Тем самым

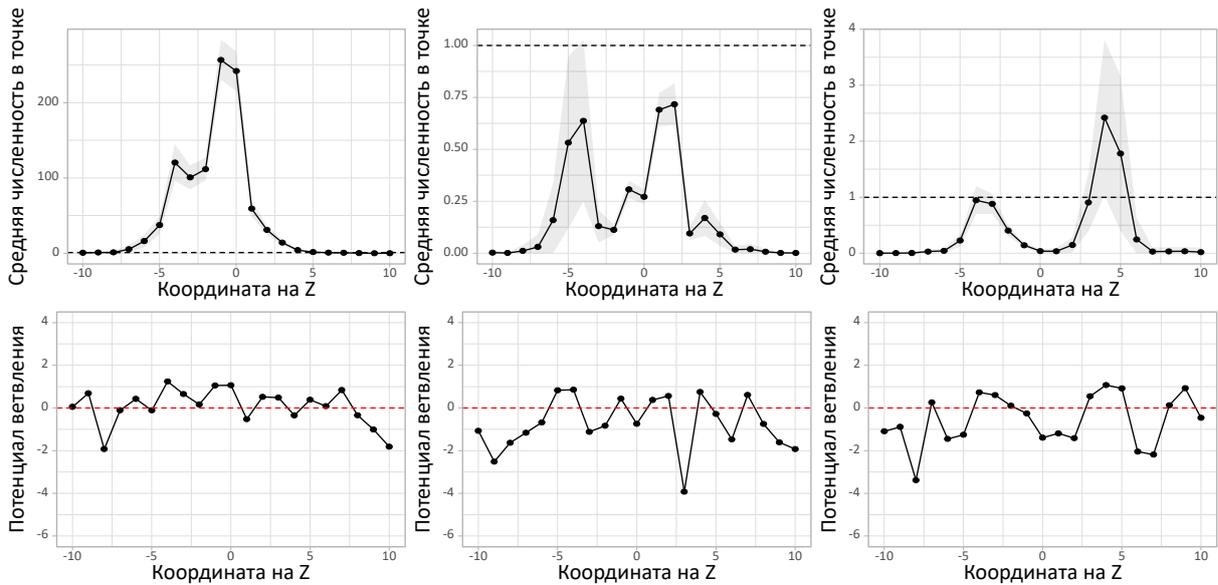


Рисунок 3.8 — Оценка $m_1(t, 0, y)$ (сверху) для различных реализаций гумбелевской среды (снизу).

мы не смогли с достаточной точностью оценить $m_1(t, 0, y, \omega)$. Для настоящего подхода результаты резко иные. Нам не только удалось оценить $m_1(t, 0, y, \omega)$ для любой $y \in \mathbb{Z}$, но и вычислить соответствующие доверительные интервалы.

Для моделирования решетка полагается одномерной, а потенциал имеет распределение Гумбеля с функцией распределения $e^{-e^{-z}}$. Заметим, что для оценки первых моментов достаточно задания случайного потенциала, и можно не задавать интенсивности размножения и гибели. На рисунке 3.8 представлены оценки $m_1(t, 0, y)$ для различных реализаций описанной среды. Серой областью показаны 95% доверительные интервалы для $m_1(t, 0, y)$ вычисленные при помощи t-статистики. Реализации сред приведены снизу рисунка, численности — сверху.

Возможность получить большую выборку замороженных моментов для произвольных времен позволила нам явно проверить, можно ли оценить точность асимптотик отождженных моментов. Мы ожидали, что в силу описанного эффекта перемежаемости, точность оценить не удастся. Дело в том, что теоретические значения асимптотик зависят от редких «высоких пиков» замороженных моментов. Однако, эти «пики» чрезвычайно редки и, поэтому, не будут наблюдаться при моделировании. Результаты оценок приведены на рисунке 3.9. Как видно, оценка асимптотики $m_1(t, 0) = m_1(t, 0, \mathbb{Z})$ по выборке даже не достигает известной нижней оценки. Увеличение размера выборки замороженных моментов улучшает точность оценки несущественно.

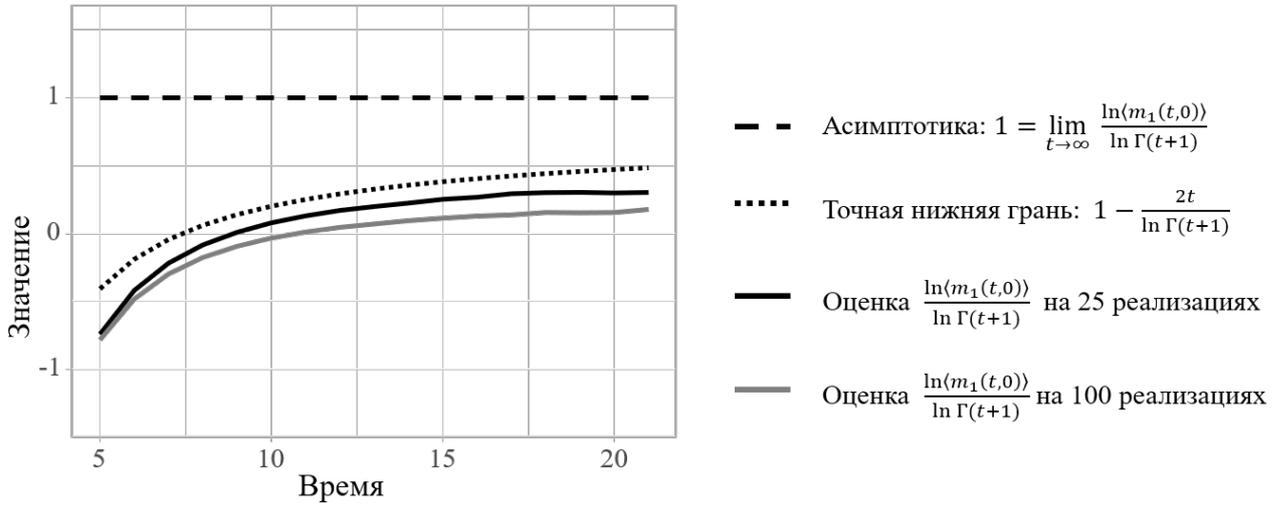


Рисунок 3.9 — Оценка асимптотики отожденной средней численности частиц для различного числа реализаций замороженных сред.

3.2 Моделирование в случайной среде с одним центром размножения

Вторая часть третьей главы посвящена численному исследованию модели ВСБ в случайной среде с единственным центром размножения из главы 2. Основная цель раздела — оценить точность выведенных в главе 2 оценок вероятности надкритичности ВСБ $P(\Lambda, \kappa, F_\mu)$.

Мы начнем с исследования теоремы 3 и численно оценим распределение $\lambda(\omega)$ для некоторых Λ, κ и для упрощенного распределения законе распределения случайной гибели:

$$\mu(x, \omega) = \begin{cases} 0, & \text{с вероятностью } p; \\ U[0,1], & \text{с вероятностью } 1 - p, \end{cases}$$

Иначе говоря, для каждого фиксированного ω надо решить систему уравнений 2.8, которую мы для удобства перепишем здесь:

$$\begin{aligned} (\kappa \Delta + V(x, \omega)) u(x) &= \lambda u(x), \\ u(0) &= 1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Опишем общую схему поиска решения этого уравнения.

1. Зафиксируем реализацию среды ω . При фиксированном λ найдем способ вычислять численное решение $\hat{u}(x, \lambda, \omega)$ задачи

$$\begin{aligned} (\kappa\Delta + \Lambda - \lambda) u(0) &= 0, \\ u(0) &= 1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

2. Численно решим относительно λ уравнение

$$\frac{\kappa}{2}(\hat{u}(1, \lambda, \omega) + \hat{u}(-1, \lambda, \omega)) + \Lambda = \lambda + \kappa. \tag{3.8}$$

Тем самым при фиксированном ω мы получим искомое решение $\lambda(\omega)$ задачи (3.6), оно же есть положительное собственное значение оператора $H(\omega)$. Если решений нет — положительных собственных значений нет.

3. Восстановление распределения $\lambda(\omega)$ разумно сделать методом Монте–Карло. Для этого вычислим решение задачи (3.6) для набора $\omega_1, \dots, \omega_K$ различных реализаций случайных сред. По полученному набору $\lambda(\omega_1), \dots, \lambda(\omega_K)$ оценим плотность распределения $\lambda(\omega)$ при помощи гистограммы. Мы решили не использовать ядерную оценку плотности, так как ожидаем большое количество локальных экстремумов, которые будут выглядеть на ядерной оценке как численные ошибки.

После вычислим решение задачи на собственное значение для набора $\omega_1, \dots, \omega_K$ различных реализаций случайных сред. Наконец, по полученному набору $\lambda(\omega_1), \dots, \lambda(\omega_K)$ построим $\hat{P}(\Lambda, \kappa, c)$ интересующей нас вероятности надкритического поведения ВСБ.

Начнем с пункта 1 и найдем алгоритм численного вычисления решения $\hat{u}(x, \lambda, \omega)$ задачи (3.7) при фиксированных ω и λ . Изначально показалось разумным искать решение подсчетом конечного числа членов ранее использованного ряда (2.12). Однако количество путей из точки n в точку 0, которые необходимо рассматривать при подсчете ряда растет как числа Каталана. То есть для n -того члена ряда понадобится обработать $O(n^{-\frac{3}{2}} \cdot 4^n)$ путей, что делает задачу невозможной при доступных нам вычислительных мощностях.

Поэтому мы решили искать решение задачи (3.7) другим алгоритмом:

1. Зафиксируем заранее точку z , достаточно далёкая от 0.
2. Построим решение слева от нуля, положив $\hat{u}(z+1) = 1$ и $\hat{u}(z+2) = 0$. Мы пользуемся тем, что при наличии положительного собственного значения в рассматриваемой задаче обязательно существует соответствующее

ему решение, экспоненциально убывающее в обе стороны см., 2.7.3 и замечание 2.

3. Решение в точке $z - 1$ вычисляется напрямую из уравнения (3.7):

$$\hat{u}(z - 1, \lambda, \omega) = \max \left(1, 2\hat{u}(z) \left(1 + \frac{\mu(z, \omega) + \lambda}{\kappa} \right) - \hat{u}(z + 1) \right).$$

Функция максимума нужна для численной устойчивости алгоритма на первых шагах. Заметим, если положительного собственного значения нет, $\hat{u}(x)$ вычисленное таким алгоритмом будет равно единице в подавляющем большинстве точек.

4. Шаг 3 повторяется до вычисления $\hat{u}(0)$.
 5. По условию задачи (3.7) значение в нуле равно 1, поэтому вычисленное $\hat{u}(x)$ нормируется на $\hat{u}(0)$.
 6. Решение $\hat{u}(x)$ слева от нуля строится повторением шагов 2–5 начиная от точки $u(-z)$.

Численное решение уравнения (3.8) мы производили при помощи стандартного алгоритма поиска корня `uniroot` из среды R. Реализация метода Монте–Карло сделана методами параллельного программирования из библиотеки `future`. Мы провели анализ алгоритма на устойчивость относительно выбора начальной точки z . Была рассмотрена модель с $\Lambda = 2$, $\kappa = 4$, так как они являлись пограничными в смысле леммы 2. В качестве μ взята бернуллиевская случайная величина с $p = 0.01$, чтобы полученная среда была сильно неоднородна. Подобный выбор Λ , κ и μ кажется «плохим» с точки зрения устойчивости алгоритма. Мы сгенерировали 1000 подобных сред. Полученные $\lambda_{50}(\omega_1), \dots, \lambda_{50}(\omega_K)$ вычисленные при $z = 50$ отличались от $\lambda_{100}(\omega_1), \dots, \lambda_{100}(\omega_K)$ вычисленных при $z = 100$ максимум на величину порядка 10^{-13} . Мы считаем, что это свидетельствует о достаточной устойчивости алгоритма относительно выбора z и в дальнейшем использовали $z = 100$ в качестве стартовой точки алгоритма.

Для первой части моделирования мы выбрали четыре среды:

1. $\Lambda = 3$, $\kappa = 4$, $p = 0.5$.
2. $\Lambda = 2$, $\kappa = 4$, $p = 0.5$.
3. $\Lambda = 1$, $\kappa = 4$, $p = 0.5$.
4. $\Lambda = 2$, $\kappa = 4$, $p = 0$.

Соответствующие случайные собственные значения будем обозначать через $\lambda_1, \dots, \lambda_4$. Первая, вторая и четвертая среды удовлетворяют условию надкритичности (2.13) из теоремы 2, поэтому ожидается, что λ_1 , λ_2 и λ_4 положительны.

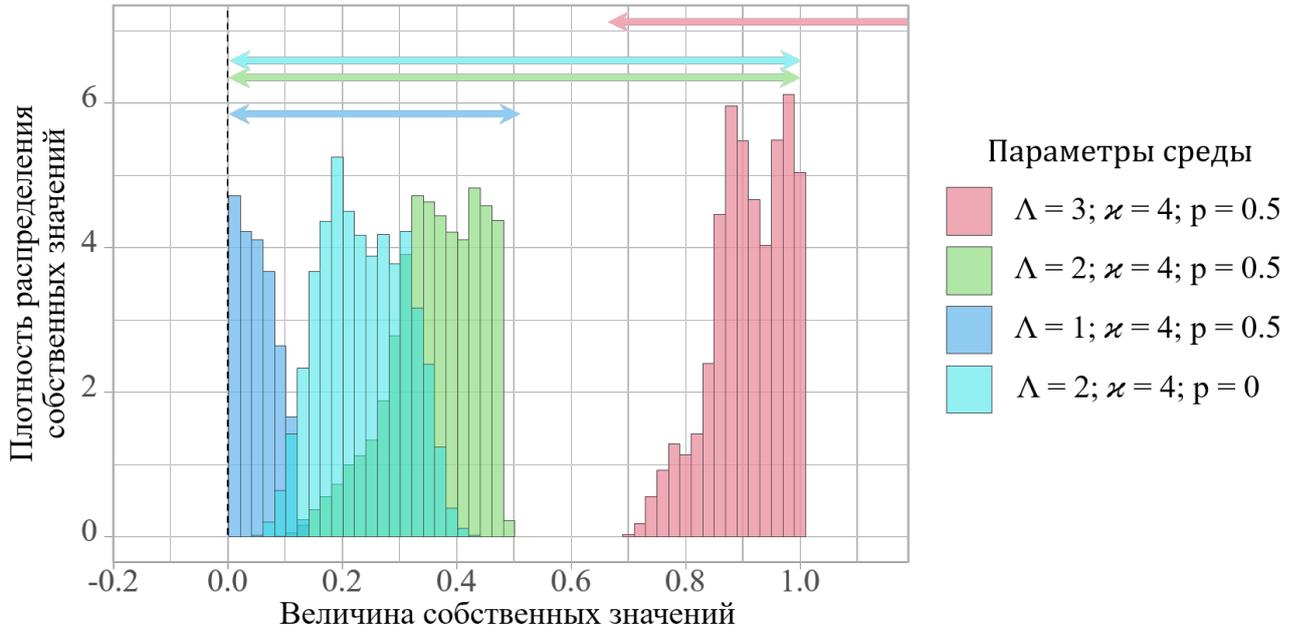


Рисунок 3.10 — Распределение собственных значений в зависимости от параметров случайной среды.

Для третьей среды ожидается, что положительное собственное значение будет существовать не всегда. Вторая и четвертая среды имеют граничные условия в смысле неравенства (2.13). Они различаются параметром p , напомним, чем он больше, тем чаще убывающая чреда отсутствует. Для четвертой среды $p = 0$ и ожидается, что распределение λ_4 более «прижато» к нулю. В то же время остальные распределения должны иметь четкие локальные экстремумы, соответствующие исчезновению убывающей среды в точках 1 и -1 . Результаты моделирования приведены на рисунке 3.10. На наш взгляд, ожидаемые результаты качественно подтвердились.

Λ	κ	$P(\mu = 0)$	П.н. надкр. (теорема 1)	МК оценка $\hat{P}(\Lambda, \kappa, c)$	Оценка снизу для $P(\Lambda, \kappa, F_\mu)$ (т.2)	Оценка снизу для $P(\Lambda, \kappa, F_\mu)$ (т.4)	Оценка сверху для $P(\Lambda, \kappa, F_\mu)$ (т.3)
3	4	0,5	есть	1	—	—	—
2	4	0,5	есть	1	—	—	—
1,9	4	0	нет	0,998	0,997	0	1
0,5	4	0,9	нет	0,643	0,520	0,018	0,939
0,5	4	0,99	нет	0,985	0,963	0,683	0,990
0,5	4	0,999	нет	0,999	0,999	0,963	0,998

Таблица 3 — Сравнение теоретических оценок вероятности надкритичности ВСБ $P(\Lambda, \kappa, F_\mu)$ и результатов Монте-Карло (МК) моделирования.

Наконец, мы оценили точность оценок величины $P(\Lambda, \kappa, F_\mu)$ из теорем 3, 4 и 5. Для этого мы рассмотрели набор сред указанный в таблице 3, для каждой из них оценили вероятность $P(\Lambda, \kappa, F_\mu)$ методом Монте–Карло, а также вычислили оценки из перечисленных теорем вновь методом Монте–Карло. Результаты представлены в таблице 3. К почти наверное надкритичным средам оценки применять бессмысленно, поэтому в этих местах стоят прочерки.

Заключение

Тематика диссертации относится к области анализа ВСБ. В диссертации изучаются характеристики ВСБ в случайной среде в различных предположениях на распределение среды. Перечислим основные результаты диссертации.

Тематика диссертации относится к области анализа ВСБ. В диссертации изучаются характеристики ВСБ в случайной среде в различных предположениях на распределение среды. Перечислим основные результаты диссертации.

Для ВСБ в многомерной случайной среде, в которой случайный потенциал имеет асимптотически гумбелевский правый хвост, без спиальной техники вычислены асимптотики усредненных по среде моментов численностей частиц. Результат сформулирован в виде теоремы. При помощи вычисленных асимптотик показано наличие перемежаемости соответствующих полей моментов. Для ВСБ по одномерной решетке в случайной убывающей среде с единственным центром размножения получен ряд оценок вероятности появления среды, в которой наблюдается экспоненциальный рост. Результат сформулирован в следующих теоремах: об условиях, при которых рассматриваемое ВСБ имеет экспоненциальный рост моментов численностей частиц с вероятностью 1; об оценке сверху вероятности появления среды, в которой наблюдается экспоненциальный рост; о двух оценках снизу для той же вероятности. Для рассмотренных в работе моделей проведены следующие симуляционные эксперименты: моделирование системы частиц методом Монте-Карло, приближенное решение дифференциальных уравнений для моментов при помощи представлений типа Фейнмана-Каца, Монте-Карло оценка плотности распределения положительного собственного значения эволюционного оператора ВСБ. При помощи этих инструментов, показано, что аналог перемежаемости для усредненных по среде моментов ВСБ в случайной однородной и неоднородной среде можно наблюдать на конечных временах. Кроме того, для ВСБ в случайной убывающей среде с единственным центром исследована точность полученных оценок вероятности появления среды, в которой наблюдается экспоненциальный рост.

Дальнейшие исследования по тематике диссертации могут проводиться в направлении вывода без спиальной техники асимптотики усредненных по среде моментов численностей частиц в более широких предположениях на случайный потенциал. Другим направлением может быть улучшение точности

оценок вероятности появления среды, в которой наблюдается экспоненциальный рост для ВСБ в случайной убивающей среде с единственным центром. Также представляется интересным проведение численного моделирования старших моментов ВСБ при помощи представления типа Фейнмана-Каца.

Благодарность. Автор благодарит научного руководителя — профессора Елену Борисовну Яровую — за постановки и обсуждение задач, а также за постоянное внимание к работе.

Список литературы

1. *König W.* The parabolic Anderson model. — Birkhäuser/Springer, [Cham], 2016. — С. 192. — (Pathways in Mathematics). — URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-33596-4>.
2. Перемежаемость пассивных полей в случайных средах / Я. Б. Зельдович [и др.] // ЖЭТФ. — 1985. — Т. 89, № 6. — С. 2061—2072.
3. Перемежаемость в случайной среде / Я. Б. Зельдович [и др.] // Успехи физических наук. — 1987. — Т. 152, № 5. — С. 3—32.
4. *Gärtner J., Molchanov S. A.* Parabolic problems for the Anderson model. I. Intermittency and related topics // Comm. Math. Phys. — 1990. — Т. 132, № 3. — С. 613—655. — URL: <https://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104201232>.
5. *Kutsenko V. A., Sokoloff D. D., Yarovaya E. B.* Instabilities in Random Media and Peaking Regimes // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2023. — Т. 136, № 4. — С. 498—508. — URL: <https://doi.org/10.1134/S1063776123040040>.
6. *Anderson P. W.* Absence of diffusion in certain random lattices // Physical review. — 1958. — Т. 109, № 5. — С. 1492. — URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.109.1492>.
7. Annealed moment Lyapunov exponents for a branching random walk in a homogeneous random branching environment / S. Albeverio [и др.] // Markov Process. Related Fields. — 2000. — Т. 6, № 4. — С. 473—516.
8. *Yarovaya E.* Symmetric branching walks in homogeneous and non homogeneous random environments // Comm. Statist. Simulation Comput. — 2012. — Т. 41, № 7. — С. 1232—1249. — URL: <https://doi.org/10.1080/03610918.2012.625856>.
9. *Harris S. C., Roberts M. I.* The many-to-few lemma and multiple spines // Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. — 2017. — Т. 53, № 1. — С. 226—242. — URL: <https://doi.org/10.1214/15-AIHP714>.

10. *Gün O., König W., Sekulović O.* Moment asymptotics for branching random walks in random environment // Electron. J. Probab. — 2013. — T. 18. — no. 63, 18. — URL: <https://doi.org/10.1214/ejp.v18-2212>.
11. *Gün O., König W., Sekulović O.* Moment asymptotics for multitype branching random walks in random environment // J. Theoret. Probab. — 2015. — T. 28, № 4. — C. 1726—1742. — URL: <https://doi.org/10.1007/s10959-014-0551-2>.
12. *Ortgiese M., Roberts M. I.* Intermittency for branching random walk in Pareto environment // Ann. Probab. — 2016. — T. 44, № 3. — C. 2198—2263. — URL: <https://doi.org/10.1214/15-AOP1021>.
13. *Molchanov S., Zhang H.* The parabolic Anderson model with long range basic Hamiltonian and Weibull type random potential // Probability in complex physical systems. T. 11. — Springer, Heidelberg, 2012. — C. 13—31. — (Springer Proc. Math.) — URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-23811-6_2.
14. *Chernousova E., Hryniv O., Molchanov S.* Branching random walk in a random time-independent environment // Math. Popul. Stud. — 2023. — T. 30, № 2. — C. 73—94. — URL: <https://doi.org/10.1080/08898480.2022.2140561>.
15. *Molchanov S., Whitmeyer J.* Spatial models of population processes // Modern problems of stochastic analysis and statistics. T. 208. — Springer, Cham, 2017. — C. 435—454. — (Springer Proc. Math. Stat.) — URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-65313-6_17.
16. *Chernousova E., Hryniv O., Molchanov S.* Population model with immigration in continuous space // Math. Popul. Stud. — 2020. — T. 27, № 4. — C. 199—215. — URL: <https://doi.org/10.1080/08898480.2019.1626189>.
17. *Карлин С., Калашников В. В.* Основы теории случайных процессов: Пер. с англ. — Мир, 1971.
18. *Makarova Y., Kutsenko V., Yarovaya E.* On Two-Type Branching Random Walks and Their Applications for Genetic Modelling // Recent Developments in Stochastic Methods and Applications: ICSM-5, Moscow, Russia, November 23–27, 2020, Selected Contributions. — Springer. 2021. — C. 255—268. — URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-83266-7_19.

19. *König W.* Branching random walks in random environment // Probabilistic structures in evolution. — EMS Press, Berlin, 2021. — C. 23–41. — (EMS Ser. Congr. Rep.) — URL: <https://doi.org/10.4171/ECR/17-1/2>.
20. *Molchanov S.* Lectures on random media // Lectures on probability theory (Saint-Flour, 1992). T. 1581. — Springer, Berlin, 1994. — C. 242–411. — (Lecture Notes in Math.) — URL: <https://doi.org/10.1007/BFb0073874>.
21. *Yarovaya E. B.* Branching random walks in an inhomogeneous medium (in Russ.) // MSU, Faculty of Mechanics and Mathematics. — 2007. — T. 104.
22. *Butler R. W.* Saddlepoint approximations with applications. T. 22. — Cambridge University Press, 2007.
23. *Akhiezer N. I., Glazman I. M.* Theory of linear operators in Hilbert space. — Dover Publications, Inc., New York, 1993. — C. 147+218.
24. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. — Springer-Verlag, Berlin, 1995. — C. 619. — (Classics in Mathematics).
25. *Aizenman M., Warzel S.* Random operators. T. 168. — American Mathematical Society, Providence, RI, 2015. — C. 326. — (Graduate Studies in Mathematics). — URL: <https://doi.org/10.1090/gsm/168>.
26. *Kunz H., Souillard B.* Sur le spectre des opérateurs aux différences finies aléatoires // Comm. Math. Phys. — 1980. — T. 78, № 2. — C. 201–246. — URL: <https://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103908590>.
27. *Carmona R., Lacroix J.* Spectral theory of random Schrödinger operators. — Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990. — C. 587. — (Probability and its Applications). — URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4488-2>.
28. *Boyadzhiev K. N.* Series with central binomial coefficients, Catalan numbers, and harmonic numbers // J. Integer Seq. — 2012. — T. 15, № 1. — C. 12.1.7.
29. *Yarovaya E. B.* Branching random walks with several sources // Mathematical Population Studies. — 2013. — T. 20, № 1. — C. 14–26. — URL: <https://doi.org/10.1080/08898480.2013.748571>.
30. *Yarovaya E. B.* Branching random walk with receding sources // Russian Mathematical Surveys. — 2018. — T. 73, № 3. — C. 549. — URL: <https://doi.org/10.1070/rm9825>.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS и RSCI

1. *Makarova Y., Kutsenko V., Yarovaya E. On Two-Type Branching Random Walks and Their Applications for Genetic Modelling // Recent Developments in Stochastic Methods and Applications. — Cham, Switzerland: Springer, 2021. — С. 255—268.*
Общий объем 0.73 а.л. / Вклад соискателя 0.29 а.л.
Постановка задач и результаты принадлежат Ю.К. Макаровой и Е.Б. Яровой. Введение модели и описание приложений (разделы 1 и 2) принадлежат В.А. Куценко.
2. *Kutsenko V., Yarovaya E. Symmetric branching random walks in random media: comparing theoretical and numerical results // Stochastic Models. — 2023. — Т. 39, №1. — 60—79.*
ИФ WoS — 0.7 / общий объем 1.10 а.л. / вклад соискателя 1.10 а.л.
Постановка задач принадлежит Е.Б. Яровой, все результаты получены В.А. Куценко самостоятельно.
3. *Куценко В. А., Соколов Д. Д., Яровая Е. Б. Неустойчивости в случайных средах и режимы с обострением // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2023. — Т. 163, №4. — 561—573.*
Kutsenko V., Sokoloff D., Yarovaya E. Instabilities in random media and peaking regimes // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2023. — Т. 136, №4. — С. 498—508.
ИФ WoS — 1.1 / общий объем 1.03 а.л. / вклад соискателя 0.95 а.л.
Постановка задач принадлежит Е.Б. Яровой и Д.Д. Соколову, введение принадлежит Д.Д. Соколову, все результаты получены В.А. Куценко самостоятельно.
4. *Куценко В. А. О моментах ветвящегося блуждания в случайной среде с гумбелевским потенциалом // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2023. — Т. 78, №4. — С. 49—53.*
Kutsenko V. A. On the Moments of Branching Random Walk in a Random Medium with a Gumbelian Potential // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2023. — Т. 78, №4. — С. 193—197.
ИФ WoS — 0.4 / общий объем 0.34 а.л. / вклад соискателя 0.34 а.л.

5. Куценко В. А., Молчанов С. А., Яровая Е. Б. Условия надкритичности для ветвящихся блужданий в случайной убивающей среде с единственным центром размножения // Успехи математических наук. — 2023. — Т. 78, №5. — 181–182.

Kutsenko V., Molchanov S., Yarovaia E., Supercriticality conditions for branching walks in a random killing environment with a single reproduction centre // Russian Math. Surveys, — 2023. — Т. 78, №5. — 961–963.

ИФ WoS — 0.9 / общий объем 0.17 а.л. / вклад соискателя 0.17 а.л.

Постановка задач принадлежит Е.Б. Яровой и С.А. Молчанову, все результаты получены В.А. Куценко самостоятельно.

6. Kutsenko V., Molchanov S., Yarovaia E. Branching Random Walks in a Random Killing Environment with a Single Reproduction Source // Mathematics. — 2024. — Т. 12, №4. — 550.

ИФ WoS — 2.4 / общий объем 1.35 а.л. / вклад соискателя 1.35 а.л.

Постановка задач принадлежит Е.Б. Яровой и С.А. Молчанову, все результаты получены В.А. Куценко самостоятельно.

Статьи в трудах научных конференций

7. Kutsenko V., Makarova Y., Yarovaia E. Model of the effect of gene recombination on lethal mutations. an approach using branching random walks // Proceedings of the 5th international conference on stochastic methods (ICSM-5). — Типография РУДН Москва, 2020. — С. 329-333.

Постановка задач и результаты принадлежат Ю.К. Макаровой и Е.Б. Яровой. Введение модели и описание приложений принадлежат В.А. Куценко

8. Куценко В.А., Яровая Е.Б. Моделирование процессов с генерацией и транспортом частиц в случайной среде // Всероссийская научная конференция Математические основы информатики и информационно коммуникационных систем сборник трудов. — Тверской государственный университет, 2021. — С. 190–198.

Постановка задач принадлежит Е.Б. Яровой, все результаты получены В.А. Куценко самостоятельно.

Тезисы докладов в материалах научных конференций.

9. Kutsenko V., Yarovaya E. Evolution Operators of Symmetric Branching Walks with Random Points Perturbation // The 5th International Workshop on Branching Processes and their Applications: Book of Abstracts — 2021. - С. 108-108.
10. Kutsenko V., Yarovaya E. Simulation of branching random walks in random media // Proceedings 63rd ISI World Statistics Congress. — 2021.
11. Kutsenko V., Yarovaya E. Comparing Numerical Results for Branching Random Walks in Non Random and Random Media // Programme and Abstracts. 14th International Conference of the ERCIM Working Group on Computational and Methodological Statistics (Virtual CMStatistics 2021), Ecosta Econometrics And Statistics.
12. Куценко В. А., Яровая Е. Б. Ветвящееся случайное блуждание в случайной среде с гумбелевским потенциалом // Тезисы докладов, представленных на Седьмой международной конференции по стохастическим методам. — Т. 67. — Теория вероятностей и ее применения, Москва. 2022. — С. 834–834.
13. Kutsenko V., Yarovaya E. Branching random walks with the generation of particles determined by Gumbel-type random potential. Simulation. // International Conference “Branching Processes, Random Walks and Probability on Discrete Structures” Book of Abstracts 2022. — С. 26–27.
14. Куценко В.А. Асимптотика моментов численностей частиц в ветвящемся случайном блуждании в случайной среде // Вторая конференция Математических центров России (7-11 ноября 2022 г.): сборник тезисов. — Издательство Московского университета, Москва. 2022. — С. 142–144.
15. Куценко В. А., Яровая Е. Б. Ветвящееся случайное блуждание в случайной убивающей среде с сильным центром размножения // Тезисы докладов, представленных на Восьмой международной конференции по стохастическим методам. — Т. 68. — Теория вероятностей и ее применения, Москва. 2023. — С. 16–16.