МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 514.1 + 514.7

Чикин Владимир Максимович

Деформации метрик, локальные и глобальные аспекты

Специальность 1.1.3 (01.01.04) – геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Тужилин Алексей Августинович

Москва — 2022

Оглавление

Введение

Актуальность темы и степень ее разработанности

В настоящей диссертации рассматриваются топологические пространства, на которых задан функционал длины. Как известно, функционал длины задается классом допустимых кривых, длины которых можно измерять, и длиной – отображением, которое приписывает неотрицательное число каждой кривой из этого класса. Имея функционал длины, можно определить внутреннюю метрику, индуцированную этой структурой. В этом случае расстояние между любыми двумя точками будет равно точной нижней грани длин допустимых кривых, соединяющих эти точки. В свою очередь, каждая метрика индуцирует функционал длины, классом допустимых кривых которого являются непрерывные относительно метрики кривые, а длина каждой кривой определяется как точная верхняя грань длин ломаных, вписанных в эту кривую. Внутренние метрики, функционалы длины и их взаимосвязь подробно изучены, например, в [1, 2, 3, 4, 5]. Тем не менее, существует много открытых вопросов как о влиянии деформации функционала длины на соответствующую внутреннюю метрику, так и о влиянии деформации метрики на индуцированный ею функционал длины. К примеру, для многих типов пространств и типов деформаций метрики неизвестно, следует ли непрерывность расстояний из непрерывности длин кривых, а также следует ли непрерывность длин кривых из непрерывности расстояний. В настоящей работе мы рассматриваем некоторые виды деформаций функционалов длины и метрик, и исследуем взаимосвязь непрерывности длин кривых и непрерывности расстояний, а также изучаем свойства отображений "пространства метрических компактов" Громова–Хаусдорфа в себя, индуцированных деформациями метрик. В диссертации разрабатывается специальная теория деформаций внутренних метрик, которая имеет нетривиальные приложения в различных областях, таких как геометрия финслеровых и римановых многообразий, теория минимальных сетей и геометрия пространства Громова–Хаусдорфа.

Финслеровы и римановы многообразия

В качестве одного из приложений теории деформаций внутренних метрик, мы рассматриваем финслеровы многообразия, метрики которых непрерывно зависят от параметра. Первое обобщение римановой геометрии принадлежит Финслеру [6], который заменил квадрат элемента длины дуги кривой произвольной однородной функцией от дифференциалов локальных координат точки. Некоторые вопросы финслеровой геометрии рассматривались и в работе Нётер [7]. Подробное изучение финслеровой геометрии можно найти, например, в [8, 9, 10, 11, 12].

Минимальные сети

Впервые задача о поиске минимальной сети была поставлена Ферма до 1640 года. А именно, Ферма интересовал ответ на следующий вопрос: *как расположить на плоскости точку F так, чтобы сумма расстояний от нее до трех фиксированных точек A, B и C была наименьшей?* Общая задача о поиске связной кратчайшей сети, соединяющей данное конечное множество точек плоскости, была поставлена Ярником и Кесслером в 1934. В дальнейшем эта классическая задача получила название проблема Штейнера. Для некоторых множеств специального вида на плоскости минимальные деревья Штейнера известны. К примеру, как было показано Ярником и Кесслером [18], каждая кратчайшая сеть, соединяющая множество вершин правильного n-угольника, при $n > 13$ состоит из всех сторон этого n-угольника, за исключением любой одной. Кроме того, Ярник и Кесслер построили очевидные кратчайшие сети для случаев n, равного 3, 4 и 5. Лишь в 1987 Ду и Хванг [19] завершили описание кратчайших сетей, соединяющих вершины правильных многоугольников, доказав, что для $n \geq 6$ ответ такой же, как и для $n > 13$. Рубинштейном и Томасом [20] был получен результат, описывающий кратчайшие сети для данного набора точек на окружности, а именно: если M — конечное множество точек плоскости, лежащих на окружности радиуса r, и при этом не более одной стороны многоугольника M имеет строго большую чем r длину, то минимальное дерево Штейнера для множества M представляет собой объединение всех сторон этого многоугольника, за исключением самой длинной.

Конечное множество M точек плоскости называется *зигзагом*, если существует ломаная L, множество вершин которой совпадает с M, а звенья которой "поворачивают в разные стороны". Последнее означает, что если фиксировать некоторую ориентацию ломаной L, и каждой паре последовательных векторов-звеньев ломаной L поставить в соответствие знак ориентированного угла от первого звена ко второму, то получится знакопеременная последовательность. Ду, Хванг и Венг [21] получили результаты, описывающие кратчайшие сети для зигзагов определенного типа. Под руководством Рубинштейна выполнен цикл работ [22, 23, 24], описывающих различные свойства кратчайших сетей, затягивающих конечное множество M вершин стандартной квадратной решетки. Эти работы развивают результаты, полученные в [25] и [26], в первой из которых были исследованы кратчайшие сети, затягивающие так называемые лестницы, т.е. все вершины с координатами (m, n), где $1 \leq m \leq m_0$, $n = 1, 2$, а во второй — высказана гипотеза о том, как устроены кратчайшие сети для решетки, составленной из всех вершин вида (m, n), где $1 \leq m \leq 2^k$ и $1 \leq n \leq 2^k$. Эта гипотеза была доказана в [23].

Естественным обобщением проблемы Штейнера является задача описания минимальных сетей на замкнутых двумерных многообразиях. На них возникает новый тип локально минимальных сетей — замкнутые сети, т.е. сети, все вершины которых имеют степень три и отсутствуют граничные точки. Для замкнутых локально минимальных сетей Ивановым и Тужилиным [27, 28] был получен ряд результатов. В работе Heppes [29] они были классифицированы на стандартной двумерной сфере. Классификация замкнутых локально минимальных сетей на плоских торах была получена в работе Иванова, Птициной и Тужилина [30]. Также Птициной [31, 32] была получена классификация на плоских бутылках Клейна и равногранных тетраэдрах. Ивановым и Тужилиным [33, 28], а также Вдовиной и Селивановой [34] были приведены примеры замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях постоянной отрицательной кривизны. Примеры таких сетей на поверхностях многогранников приведены в работах Стрелковой [35, 36], Иванова и Тужилина [37].

Пространство Громова–Хаусдорфа

“Пространства пространств” и “пространства подмножеств” часто возникают в различных важных приложениях, а также имеют чисто теоретическое значение и привлекают внимание самых разных специалистов на протяжении многих лет. Один из естественных подходов к изучению таких пространств — определение на них функции расстояния как “меры несхожести” соответствующих объектов. Еще в 1914 г. Ф. Хаусдорф [40] определил неотрицательную симметричную функцию на парах непустых подмножеств метрического пространства X, равную точной нижней границе таких неотрицательных чисел r, что одно множество содержится в r-окрестности другого и наоборот. Позднее Д. Эдвардс [41] и независимо М. Громов [42] обобщили конструкцию Хаусдорфа на семейство всех компактных метрических пространств, использовав их изометрические вложения во всевозможные объемлющие пространства. Полученная функция называется расстоянием Громова–Хаусдорфа, а соответствующее метрическое пространство $\mathcal{M}$ метрических компактов, рассматриваемых с точностью до изометрии, называется пространством Громова–Хаусдорфа. Как оказалось, геометрия этого пространства довольно причудлива, она активно изучается специалистами, в том числе и потому, что “пространство всех пространств” имеет ряд очевидных применений. Хорошо известно, что $\mathcal{M}$ — линейно связное, полное, сепарабельное, геодезическое метрическое пространство, не являющееся ограниченно компактным. Подробное введение в геометрию пространства Громова–Хаусдорфа можно найти в работах [1, 43].

Функции, сохраняющие метрики

Ряд интересных задач возникает при рассмотрении преобразований метрик, которые задают отображения пространства Громова–Хаусдорфа. Важным классом преобразований метрик является применение к ним так называемых функций, сохраняющих метрики. Впервые функции, сохраняющие метрики, упоминаются в [44], хотя первое детальное исследование таких функций было выполнено Т. К. Сринивасаном в 1947 г. [45]. Некоторые свойства функций, сохраняющих метрики, встречаются в классическом тексте "Общей топологии" Дж. Л. Келли [46]. К настоящему моменту получено много результатов, связанных с функциями, сохраняющими метрики, в частности изучена связь этих функций с непрерывностью и дифференцируемостью. Подробный перечень известных свойств функций, сохраняющих метрики, можно найти в монографии [47].

Цели и задачи диссертации

Настоящая диссертации посвящена развитию теории деформаций внутренних метрик, исследованию деформаций функционалов длины и внутренних метрик и изучению связи непрерывности длин кривых и непрерывности расстояний при этих деформациях. Основной целью исследования является вывод условий, достаточных для непрерывности расстояний при наличии непрерывности длин кривых в случае деформации внутренней метрики. Еще одной целью является изучение минимальных сетей для произвольных границ в малых окрестностях точек полных римановых многообразий с помощью разработанных инструментов, а именно описание множества возможных топологических типов минимальных сетей для произвольных границ в малых окрестностях точек полных римановых многообразий, а также полное описание кратчайших сетей для достаточно малых правильных многоугольников на полных двумерных римановых многообразиях. Помимо этого, ставится задача исследования свойств отображений пространства Громова–Хаусдорфа в себя, индуцированных деформациями метрик, заданными функциями, сохраняющими метрики.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются оригинальными и получены автором самостоятельно. Исследована связь непрерывности длин кривых и непрерывности расстояний в случае однопараметрических деформаций функционалов длины. Построены примеры как компактных, так и не ограниченно компактных пространств, в которых длины кривых непрерывно зависят от параметра, но при этом функции расстояния не являются непрерывно зависящими от параметра. Сформулированы условия, которые в совокупности с непрерывностью длин кривых являются достаточными для непрерывности функции расстояния. Описаны бинарные типы минимальных деревьев Штейнера для произвольных малых границ на полных гладких римановых многообразиях. Полностью вычислены минимальные деревья Штейнера для вершин достаточно малых правильных n-угольников на полных двумерных гладких римановых многообразиях. Описан класс отображений пространства Громова–Хаусдорфа в себя, заданных функциями, сохраняющими метрики. Вычислена формула преобразования длин кривых при применении к метрике функции, сохраняющей метрики. Получен критерий непрерывности длин кривых при деформациях метрик, заданных зависящими от параметра функциями, сохраняющими метрики.

Положения, выносимые на защиту

Следующие результаты являются основными и выносятся на защиту:

1. Существуют как компактные, так и не ограниченно компактные пространства с внутренней метрикой, индуцированной функционалом длины, зависящим от параметра, такие, что длины кривых непрерывно зависят от параметра, в то время как расстояния между некоторыми точками не являются непрерывно зависящими от

этого параметра. Получен набор условий, накладываемых на функционалы длины, достаточных для непрерывности расстояний между точками в соответствующей внутренней метрике как для случая компактов, так и для случая произвольных пространств. На компактных финслеровых и римановых многообразиях в случае непрерывной зависимости соответствующей (финслеровой или римановой) метрики от параметра выполнены достаточные условия непрерывности расстояний между точками относительно этого параметра. На полных финслеровых и римановых многообразиях в случае непрерывной зависимости соответствующей метрики от параметра расстояния между любыми точками непрерывно зависят от этого параметра.

2. Множество бинарных типов кратчайших сетей для произвольной достаточно малой границы на гладком полном римановом многообразии вложено во множество бинарных типов кратчайших сетей для этой границы относительно некоторой евклидовой метрики. Для фиксированных $n \in \mathbb{N}$ и точки на гладком полном двумерном римановом многообразии существует такая окрестность U этой точки, что для любого множества из n точек V, лежащего в U, кратчайшая сеть, соединяющая V, лежит в выпуклой оболочке $\operatorname{conv} V$ множества V. На любом полном двумерном гладком римановом многообразии для каждого $n \geq 7$ и любой точки существует такая достаточно малая окрестность этой точки, что для вершин любого лежащего в ней правильного n-угольника с центром в этой точке кратчайшей сетью является граница этого n-угольника без его наибольшей стороны. Для данного $n \geq 7$ существует такой радиус $r_0 > 0$, что для вершин любого правильного n-угольника радиуса $r < r_0$ на двумерной сфере (а также на плоскости Лобачевского) кратчайшей сетью является граница этого n-угольника без любой его стороны.

3. Функции, сохраняющие метрики (ФСМ), определяют отображения пространства Громова–Хаусдорфа (обозначим это пространство через $\mathcal{M}$) в себя по следующему принципу: ФСМ f сопоставляет компакту (X, ρ) компакт $\big(X, f(\rho)\big)$. Непрерывные и только непрерывные ФСМ корректно задают отображения пространства $\mathcal{M}$ в себя.

Любое отображение $\mathcal{M}$ в себя, индуцированное непрерывной ФСМ, является непрерывным. Отображение $\mathcal{M}$ в себя, индуцированное некоторой ФСМ, является липшицевым тогда и только тогда, когда липшицевой является соответствующая ему ФСМ, причем константы Липшица этих отображений равны. Отображение $\mathcal{M}$ в себя, индуцированное непрерывной монотонной ФСМ, является гомеоморфизмом на образ. Отображение $\mathcal{M}$ в себя, индуцированное непрерывной ФСМ, производная которой в нуле меньше 1, имеет единственную неподвижную точку — одноточечное пространство.

4. Если непрерывная ФСМ f имеет в нуле конечную производную $f'(0)$, то при ее применении к произвольной метрике множество спрямляемых кривых не изменится, а длина каждой кривой умножится на $f'(0)$. ФСМ, производная которой в нуле конечна, переводит внутренние метрики во внутренние тогда и только тогда, когда она является линейным отображением, т.е. имеет вид $f(t) = kt$ при некотором $k > 0$.

5. Пусть при любом $s \in [0,1]$ функция $f(t,s)$ от переменной $t \geq 0$ является непрерывной ФСМ, $f'(t,s)$ – частная производная функции f по первой переменной, (X,ρ) – компактное метрическое пространство и ρ_s, $s \in [0,1]$ – однопараметрическое семейство метрик, определяемое равенством $\rho_s = f(\rho, s)$. Если $f'(0,s) < +\infty$ для любого $s \in [0,1]$, то все пространства (X,ρ_s) обладают одним и тем же множеством спрямляемых кривых. При этом, для каждой фиксированной кривой γ ее длина непрерывно зависит от s тогда и только тогда, когда $f'(0,s)$ является непрерывной функцией от s.

Методы исследования

В диссертации используются методы математического анализа, метрической геометрии, дифференциальной геометрии, топологии, евклидовой геометрии, теории графов и теории минимальных сетей.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации представляют интерес для специалистов в области минимальных сетей, вариационного исчисления, дифференциальной геометрии и метрической геометрии. Разработанные техники могут быть использованы для эффективного анализа деформаций различных метрик и функционалов, а также для поиска минимальных сетей в различных пространствах для различных границ.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и опубликованы в 3 статьях [48, 49, 50], в том числе 3 статьях по теме диссертации, из которых 3 опубликованы в рецензируемых научных журналах, входящих в базы данных Scopus, Web of Science и RSCI. Результаты диссертации были представлены на следующих научных семинарах и конференциях:

- XXII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов-2015”, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 13 – 17 апреля 2015
- XXIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов-2016”, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 11 – 15 апреля 2016
- Семинар “Узлы и теория представлений” под руководством проф. В. О. Мантурова, Д. П. Ильютко и И. М. Никонова, МГУ, 2016
- Международная конференция “Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна - 2016”, Воронеж, Россия, 25 – 31 января 2016
- Международная конференция “Геометрический анализ и его приложения”, Волгоград, Россия, 30 мая – 3 июня 2016

- Международная научная конференция “Методы современного математического анализа и геометрии и их приложения”, Воронеж, Россия, 23 – 25 декабря 2016
- Семинар “Геометрия в целом” под руководством проф. И. Х. Сабитова, МГУ, 5 мая 2017
- Петербургский геометрический семинар им. А. Д. Александрова под руководством проф. Ю. Д. Бураго, Санкт-Петербург, Россия, 3 декабря 2020
- Семинар “Дискретная геометрия и геометрия чисел” под руководством проф. Н. П. Долбилина, проф. Н. Г. Мощевитина и проф. М. Д. Ковалева, МГУ, 23 марта 2021
- Семинар “Теория экстремальных сетей” под руководством проф. А. А. Тужилина и проф. А. О. Иванова, МГУ, 2017–2021

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Текст работы изложен на 89 страницах. Список литературы содержит 47 наименований.

В первой главе даются необходимые определения и предварительные сведения из теории функционалов длины и внутренних метрик, теории минимальных сетей, теории функций, сохраняющих метрики, а также приводятся предварительные сведения о пространстве Громова–Хаусдорфа.

Во второй главе диссертации изучаются однопараметрические деформации внутренних метрик. Мы предполагаем наличие функционалов длины, непрерывно зависящих от параметра, и рассматриваем внутренние метрики, порожденные этими функционалами длины. Мы изучаем дополнительные условия, которых будет достаточно для непрерывности расстояний. В работе приводятся примеры однопараметрических семейств как не локально компактных, так и компактных метрических пространств, в которых длины кривых непрерывно зависят от параметра, а функции расстояния – нет. Помимо этого, в работе приводится ряд специальных условий, достаточных для непрерывности расстояний в совокупности с ограниченной компактностью пространства, и ряд специальных условий, достаточных для непрерывности расстояний в случае произвольного метрического пространства с внутренней метрикой.

В качестве приложения, в диссертации рассматриваются финслеровы многообразия, метрики которых непрерывно зависят от параметра. В работе показывается, что на таких компактных финслеровых многообразиях выполнены достаточные условия непрерывности расстояния, из чего следует, что функция расстояния на таких многообразиях также непрерывно зависит от параметра. Последний результат обобщается на полные финслеровы многообразия. Поскольку финслеровы многообразия являются обобщением римановых многообразий, в качестве следствия мы получаем, что на компактных римановых многообразиях, метрики которых непрерывно зависят от параметра, выполнены достаточные условия непрерывности расстояния, а также получаем, что на полных римановых многообразиях, метрики которых непрерывно зависят от параметра, расстояния между точками непрерывно зависят от этого параметра.

В третьей главе настоящей работы изучается приложение разработанной теории деформаций внутренних метрик к решению задач из теории минимальных сетей. С помощью разработанных техник получен результат, описывающий типы минимальных сетей для произвольных малых границ на полном римановом многообразии. В качестве следствия из этого результата, в диссертации полностью описаны кратчайшие сети, соединяющие вершины достаточно малых правильных $n-$угольников на полных римановых многообразиях для $n \geq 7$. Помимо прочего, в работе получено полное описание типов кратчайших деревьев, лежащих в достаточно малых шаровых окрестностях точек полных римановых многообразий постоянной секционной кривизны. Еще одна серия новых результатов, приводимых в диссертации, касается обобщения известной теоремы о минимальных деревьях Штейнера на евклидовой плоскости, утверждающей, что такие деревья всегда лежат в выпуклой оболочке своей границы. В работе показывается, что аналогичный результат имеет место для достаточно малых окрестностей двумерных римановых многообразий, а также для открытых двумерных полусфер и для плоскости Лобачевского.

В четвертой главе изучаются преобразования метрических пространств, индуцированные функциями, сохраняющими метрики. Показывается, что непрерывные функции (и только непрерывные), сохраняющие метрики, корректно определяют отображения пространства Громова–Хаусдорфа в себя, причем эти отображения обладают рядом интересных свойств, в частности они непрерывны и являются липшицевыми отображениями метрических пространств тогда и только тогда, когда липшицевыми являются соответствующие функции, сохраняющие метрики. В главе описываются образы этих отображений и показывается, что такие отображения сохраняют топологические свойства. Также в этой главе изучаются однопараметрические деформации произвольных метрик, заданные функциями, сохраняющими метрики, и доказывается критерий непрерывности длин кривых при таких деформациях метрик.

Благодарности

Автор искренне благодарит своего научного руководителя профессора А. А. Тужилина и профессора А. О. Иванова за постановки задач, плодотворные обсуждения и поддержку.

Глава 1

Основные понятия и предварительные сведения

1.1 Функционалы длины и внутренние метрики

Определим необходимые объекты и перечислим их известные свойства, основываясь на теории функционалов длины из [1]. Пусть X – хаусдорфово топологическое пространство, а l_t, $t \in [0, 1]$, – семейство функционалов длины, заданное на нем. Наличие функционала длины подразумевает фиксацию в пространстве X некоторого класса допустимых кривых, на которых определен функционал длины. Класс допустимых кривых содержится во множестве всех непрерывных кривых в X и должен быть замкнутым относительно сужений и склейки кривых, а также относительно замен параметра специального типа. Для каждого естественного класса допустимых кривых имеется свой собственный класс допустимых замен параметра. Например, для класса всех непрерывных путей это гомеоморфизмы, для класса кусочно-гладких путей – диффеоморфизмы. По определению требуется лишь, чтобы класс допустимых замен параметра включал в себя все линейные функции. Различные примеры функционалов длины и соответствующих классов допустимых кривых рассмотрены в [1].

Мы будем считать, что все функционалы семейства l_t, $t \in [0, 1]$, определены на одном и том же классе допустимых кривых. Также мы будем считать, что для любой допустимой кривой γ ее длина $l_t(\gamma)$ конечна и непрерывно зависит от t (кривые конечной длины называются *спрям-*

ляемыми). Для каждого значения $t \in [0,1]$ определим на X внутреннюю метрику ρ_t, порожденную функционалом длины l_t. Напомним, что в этом случае расстояние $\rho_t(A,B)$ между любыми двумя точками A и B из пространства X равно точной нижней грани длин $l_t(\gamma)$ всех допустимых кривых γ, соединяющих точки A и B. Будем считать, что при каждом $t \in [0,1]$ для любых двух точек пространства X существует соединяющая их допустимая кривая конечной длины, что означает конечность всех метрик семейства ρ_t, $t \in [0,1]$. В свою очередь, каждая из метрик ρ_t индуцирует функционал длины $\hat{l}_t$, классом допустимых кривых которого являются все непрерывные кривые относительно метрики ρ_t, а длина $\hat{l}_t(\gamma)$ каждой кривой γ определяется как точная верхняя грань длин ломаных, вписанных в эту кривую, см. [1]:

$$\hat{l}_t(\gamma) = \sup_{A_1A_2\ldots A_n\subset\gamma} \sum_{i=1}^{n-1} \rho_t(A_i, A_{i+1}).$$

Хорошо известно, что функционал длины $\hat{l}_t$ определен на любой допустимой кривой конечной длины и не превосходит на ней функционала длины l_t. Напомним, что функционал длины l называется *полунепрерывным снизу* на пространстве допустимых кривых, если поточечная сходимость последовательности допустимых кривых γ_i к допустимой кривой γ влечет неравенство $\liminf_{i\to\infty} l(\gamma_i) \geq l(\gamma)$. Хорошо известно, что функционал длины, индуцированный некоторой метрикой, является полунепрерывным снизу на пространстве непрерывных относительно этой метрики кривых. Также хорошо известно, что если функционал длины l является полунепрерывным снизу на пространстве своих допустимых кривых, то на всех допустимых кривых он совпадает с функционалом длины $\hat{l}$, индуцированным внутренней метрикой ρ, которая была порождена изначальным функционалом длины l. Доказательство этих утверждений можно найти в [1]. Таким образом, если при каждом $t \in [0,1]$ функционал l_t является полунепрерывным снизу на пространстве допустимых кривых, то при каждом $t \in [0,1]$ функционал l_t совпадает с функционалом $\hat{l}_t$ на всех допустимых для функционала l_t кривых.

В дальнейшем будем считать, что все метрики семейства ρ_t, $t \in [0,1]$, эквивалентны, то есть для любых $t_1, t_2 \in [0,1]$ найдутся положительные числа C_1 и C_2 такие, что имеет место неравенство $C_1\rho_{t_1} \leq \rho_{t_2} \leq C_2\rho_{t_1}$. Из этого следует, что все метрики семейства ρ_t определяют одну и ту же топологию на X. Это означает, что множество непрерывных относительно метрики кривых не меняется при переходе от одной метрики семейства ρ_t к другой. Хорошо известно, что топология индуцированной внутренней метрики может быть разве лишь тоньше, чем изначальная топология X, см. [1]. Другими словами, любое открытое множество в изначальной топологии X является открытым и в топологии построенных внутренних метрик. Также хорошо известно, что все допустимые для функционалов длины l_t кривые конечной длины непрерывны относительно внутренних метрик семейства ρ_t, см. [1]. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если последовательность кривых сходится поточечно в одной из метрик семейства ρ_t, то она сходится поточечно в каждой из метрик семейства ρ_t, а также относительно изначальной топологии пространства X.*

Доказательство. Все метрики семейства ρ_t определяют на X одну и ту же топологию, не менее тонкую, чем изначальная топология пространства X. Из этого следует, что если последовательность точек сходится в одной из метрик семейства ρ_t, то она сходится в каждой из метрик семейства ρ_t, и каждая окрестность предела последовательности в топологии внутренних метрик содержит все точки последовательности, за исключением, быть может, их конечного числа. Таким образом, из того, что любое открытое множество в изначальной топологии X является открытым и в топологии построенных внутренних метрик, следует, что данная последовательность точек также сходится и в изначальной топологии пространства X, что, в свою очередь, влечет требуемое утверждение. □

1.2 Γ-сходимость функционалов длины

Как показывается в настоящей диссертации, некоторые условия, достаточные для непрерывной зависимости внутренней метрики от параметра, можно сформулировать в терминах Г-сходимости функционалов длины. Понятие Г-сходимости было введено Эннио де Джорджи в серии работ [13], [14], [15]. Подробный обзор теории, связанной с Г-сходимостью, можно найти в [16] и [17].

Пусть S – топологическое пространство. Напомним, что функционал $f_0 : S \to [0, +\infty)$ называется *асимптотической нижней гранью* последовательности функционалов $f_n : S \to [0, +\infty)$, если для любой последовательности $s_n \in S$ такой, что $s_n \to s_0 \in S$ при $n \to \infty$, выполнено $\liminf_{n\to\infty} f_n(s_n) \geq f_0(s_0)$. При этом, если для любого $s_0 \in S$ существует последовательность $s_n \in S$, сходящаяся к s_0, такая, что $\limsup_{n\to\infty} f_n(s_n) \leq f_0(s_0)$, то эта нижняя грань называется *точной*. Последовательность функционалов f_n называется Г-*сходящейся к функционалу* f_0, если f_0 является асимптотической нижней гранью последовательности f_n, и эта нижняя грань является точной. В случае функционалов длины пространство S является пространством кривых, на котором определены функционалы. Мы выберем в качестве него пространство всех кривых, непрерывных относительно метрик семейства ρ_t.

1.3 Минимальные деревья Штейнера

Границей графа будем называть некоторое выделенное множество его вершин. В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые графы связные и имеют границы, иногда пустые. *Бинарным деревом* будем называть дерево с границей, вершины которого имеют степени 1 и 3, а граница совпадает с множеством вершин степени 1. Будем рассматривать всевозможные бинарные деревья $G_i = (Z, E_i)$ с одним и тем же множеством вершин $Z = \{1, 2, \dots, 2n - 2\}$, $M = \{1, 2, \dots, n\} \subset Z$ — множество граничных вершин (степени 1) каждого из рассматриваемых деревьев. Пусть (X, ρ_t) — метрическое пространство при каждом $t \in [0, 1]$, $\varphi \colon M \to X$ — фиксированное граничное отображение, а $\{v_1, \dots, v_n\} \subset X, v_i = \varphi(i), i = 1, \dots, n,$ — его образ.

Сетью Г *типа* G_i *с границей* φ будем называть пару $(G_i, f \colon Z \to X)$ такую, что $f|_M = \varphi$ (*тип* — это бинарное дерево с данным множеством вершин). Для сети Г полагаем $s_i = f(n + i), i = 1, ..., n - 2,$ — положения ее внутренних вершин. Заметим, что множество типов конечно — обозначим их $G_1, G_2, \ldots, G_m$. Будем называть сеть $\Gamma = (G_i, f)$ *реализацией* бинарного дерева G_i. Определим длину $\rho_t(\Gamma)$ сети $\Gamma = (G_i, f)$ в метрике ρ_t: $\rho_t(\Gamma) = \sum_{vw\in E} \rho_t\big(f(v), f(w)\big)$ — сумма расстояний между образами смежных вершин. Заметим, что длина $\rho_t(\Gamma)$ сети Γ является функцией от образов вершин, параметра t и типа G_i: $\rho_t(\Gamma) = l(t, v_1, \ldots, v_n, s_1, \ldots, s_{n-2}, G_i)$ (для удобства изложения, мы отождествим вершины графа G и их образы при реализации).

Перепишем величину $l(t, v_1, \ldots, v_n, s_1, \ldots, s_{n-2}, G)$ в виде $l(t, V, S, G)$, где $S = (s_1, \ldots, s_{n-2})$, $V = (v_1, \ldots, v_n)$. Пусть

$$l_t^{\min}(V, G) = \inf_{S\in X^{n-2}} l(t, V, S, G)$$

— точная нижняя грань длин таких сетей относительно метрики ρ_t. Там, где граничные вершины будем считать фиксированными, величину $l_t^{\min}(V, G)$ будем записывать в виде $l_t^{\min}(G)$. Сеть фиксированного типа G с фиксированным множеством граничных вершин V минимально возможной длины будем называть *минимальной параметрической сетью.* Ясно, что длина минимальной параметрической сети типа G с множеством граничных вершин V равна $l_t^{\min}(V, G)$. *Кратчайшим деревом*, или *кратчайшей сетью*, соединяющей множество V, будем называть минимальную параметрическую сеть, длина которой не превосходит длин любых других сетей, соединяющих множество V. Отметим, что для фиксированного множества граничных вершин существует лишь конечное число возможных бинарных типов. Таким образом, кратчайшая сеть, соединяющая множество V – это самая короткая сеть из всех минимальных параметрических сетей, соединяющих множество V (их может быть несколько, и в этом случае их длины будут равны). Кратчайшие сети также называются *минимальными деревьями Штейнера.*

1.4 Функции, сохраняющие метрики

Функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ называется *функцией, сохраняющей метрики* (ФСМ), если для любого метрического пространства (X, ρ) функция

$f(\rho)$ тоже будет метрикой на X. Следующие утверждения о функциях, сохраняющих метрики, можно найти в [47].

Утверждение 2. *Пусть f — ФСМ. Тогда $f^{-1}(0) = \{0\}$.*

Утверждение 3. *Любая ФСМ субаддитивна, т.е. для любых $t_1, t_2 \ge 0$ выполнено неравенство $f(t_1 + t_2) \le f(t_1) + f(t_2)$.*

Утверждение 4. *Непрерывность ФСМ на всей области определения эквивалентна ее непрерывности в нуле.*

Утверждение 5. *Пусть f — разрывная ФСМ. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое, что для любого $t > 0$ выполнено $f(t) > \varepsilon$.*

Утверждение 6. *Пусть функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ выпукла вверх и $f^{-1}(0) = \{0\}$. Тогда она является ФСМ.*

Утверждение 7. *Пусть f — непрерывная ФСМ. Тогда для любого метрического пространства (X, ρ) функция $f(\rho)$ будет определять на X ту же топологию, что и ρ.*

Утверждение 8. *Для любой ФСМ f ее производная в нуле $f'(0)$ всегда существует, $f'(0) = +\infty$, если $K_f = \emptyset$, и $f'(0) = \inf K_f$, если $K_f \ne \emptyset$, где $K_f = \{k > 0 : f(t) \le kt$ для любых $t \ge 0\}$.*

Утверждение 9. *Пусть f — ФСМ и $f'(0) < +\infty$. Тогда для любых $t_1, t_2 \ge 0$ выполнено неравенство $|f(t_1) - f(t_2)| \le f'(0) \cdot |t_1 - t_2|$, т.е. функция f является $f'(0)$-липшицевой.*

1.5 Пространство Громова–Хаусдорфа

Напомним определение пространства Громова–Хаусдорфа. Пусть X — метрическое пространство. Для каждой точки $x \in X$ и числа $r > 0$ через $U_r(x)$ будем обозначать открытый шар с центром в точке x и радиусом r; для каждого непустого $A \subset X$ и числа $r > 0$ положим $U_r(A) = \cup_{a \in A} U_r(a)$.

Для непустых $A, B \subset X$ положим

$$d_H(A, B) = \inf\bigl\{r > 0 : A \subset U_r(B),\ B \subset U_r(A)\bigr\}.$$

Полученная величина называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B*. Хорошо известно [1, 43], что расстояние Хаусдорфа, рассматриваемое на множестве всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств из X, является метрикой.

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием $d_{GH}(X, Y)$ по Громову–Хаусдорфу между X и Y* назовем точную нижнюю грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y), такая, что $d_H(X', Y') \le r$. Хорошо известно [1, 43], что на множестве $\mathcal{M}$ всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, функция d_{GH} является метрикой. В дальнейшем для удобства отождествим метрические пространства с соответствующими им классами изометрий метрических пространств.

Для вычисления расстояния Громова–Хаусдорфа удобно воспользоваться техникой соответствий. *Соответствием* между множествами X и Y называется множество $R \subset X \times Y$, удовлетворяющее следующему условию: для каждой точки $x \in X$ существует по крайней мере одна такая точка $y \in Y$, что $(x, y) \in R$, и аналогично для каждой точки $y \in Y$ существует такая точка $x \in X$, что $(x, y) \in R$.

Обозначим через ρ_X и ρ_Y метрики пространств X и Y соответственно. Если речь будет идти только об одном метрическом пространстве, то индекс у ρ будем опускать. Пусть R — соответствие между метрическими пространствами X и Y. Его *искажение* $\mathrm{dis} R$ определяется равенством

$$\mathrm{dis} R = \sup\bigl\{|\rho_X(x, x') - \rho_Y(y, y')| : (x, y), (x', y') \in R\bigr\}.$$

Хорошо известно [1, 43], что расстояние Громова–Хаусдорфа между метрическими пространствами X и Y равно

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf_R (\mathrm{dis} R),$$

где точная нижняя грань берется по всем соответствиям R между X и Y.

Глава 2

Связь непрерывности длин кривых и непрерывности расстояний

Связь непрерывности длин кривых и непрерывности расстояний между точками при деформациях метрики является нетривиальным вопросом. В этом разделе диссертации изучаются однопараметрические семейства функционалов длины, для которых длина каждой допустимой кривой непрерывно зависит от соответствующего параметра. Мы приводим примеры пространств и заданных на них функционалов длины, в которых при деформации этих функционалов длины из непрерывности изменения длин допустимых кривых не следует непрерывность изменения расстояний между точками, причем эти пространства могут быть как компактны, так и не компактны относительно соответствующих внутренних метрик.

Также в этом разделе мы изучаем условия, которых в совокупности с непрерывностью изменения длин кривых достаточно для непрерывности изменения расстояний между точками при деформации функционала длины. Как для случая произвольных пространств с внутренней метрикой, так и для ограниченно компактных пространств с внутренней метрикой, мы формулируем специальные условия, накладываемые на семейство функционалов длины, достаточные для непрерывности расстояний.

Далее, мы показываем, что эти условия выполнены на компактных финслеровых и римановых многообразиях в случае непрерывной зависимости соответствующей метрики от параметра. В качестве следствия мы получаем, что на полных финслеровых и римановых многообразиях в случае непрерывной зависимости соответствующей метрики от параметра расстояния между любыми точками непрерывно зависят от этого параметра.

2.1 Случай произвольного метрического пространства

Рассмотрим топологическое пространство X с заданным на нем семейством функционалов длины $l_t, t \in [0, 1]$, описанные в разделе 1.1. Пусть ρ_t – соответствующее семейство внутренних метрик на X. Напомним, что мы считаем метрики этого семейства эквивалентными и конечными. Также мы предполагаем, что для любой допустимой кривой γ ее длина $l_t(\gamma)$ конечна и непрерывно зависит от t.

Определение 1. Будем называть семейство функционалов длины l_t *глобально непрерывным*, если выполнено следующее условие: пусть $\mathfrak{F}_{a,t}$ — множество кривых γ таких, что $l_t(\gamma) \leq a$. Тогда для любого $a > 0$, любого $t_0 \in [0, 1]$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех t, удовлетворяющих неравенству $|t - t_0| < \delta$, выполнено соотношение $\mathfrak{F}_{a,t} \subset \mathfrak{F}_{(1+\varepsilon)a,t_0}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены перечисленные выше условия, а также семейство функционалов длины l_t является глобально непрерывным. Тогда для любых A, $B \in X$ функция $\rho_t(A, B)$ непрерывно зависит от t.*

Доказательство. Будем считать, что A и B не совпадают (случай $A = B$ тривиальный). Рассматриваемые метрики внутренние, следовательно $\rho_t(A, B) = \inf_\gamma l_t(\gamma)$, где точная нижняя грань берется по всем кривым γ, соединяющим A и B. Докажем непрерывность $\rho_t(A, B)$ в некоторой точке $t_0 \in [0, 1]$. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ найдется соединяющая точки A и B кривая γ', удовлетворяющая неравенству $|l_{t_0}(\gamma') - \rho_{t_0}(A, B)| < \varepsilon/2$. В свою очередь, из того, что длина $l_t(\gamma')$ этой кривой непрерывно зависит от t, следует существование $\delta > 0$ такого, что для всех t, удовлетворяющих неравенству $|t - t_0| < \delta$, выполнено $|l_t(\gamma') - l_{t_0}(\gamma')| < \varepsilon/2$. В результате имеем:

$$\rho_t(A, B) = \inf_{\gamma} l_t(\gamma) \le l_t(\gamma')$$

что означает полунепрерывность сверху.

Пусть полунепрерывности снизу нет, то есть существует $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{t_n\} \in [0, 1]$, сходящаяся к t_0, такие, что $\rho_{t_n}(A, B) < \rho_{t_0}(A, B) - \varepsilon$. Рассмотрим последовательность кривых $\{\gamma_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, соединяющих A и B, таких, что $l_{t_n}(\gamma_n) - \rho_{t_n}(A, B) < \varepsilon/2$, а, следовательно, $l_{t_n}(\gamma_n) < \rho_{t_0}(A, B) - \varepsilon/2 = q$. Последнее неравенство означает, что $\gamma_n \in \mathfrak{F}_{q,t_n}$. Согласно условию глобальной непрерывности, для $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4q}$ найдется $\delta_1 > 0$ такое, что для всех t', удовлетворяющих неравенству $|t' - t_0| < \delta_1$, выполнено $\mathfrak{F}_{q,t'} \subset \mathfrak{F}_{(1+\varepsilon_1)q,t_0} = \mathfrak{F}_{\rho_{t_0}(A,B)-\varepsilon/4,t_0}$. Осталось заметить, что существует натуральное число m такое, что $|t_m - t_0| < \delta_1$, то есть $\gamma_m \in \mathfrak{F}_{q,t_m} \subset \mathfrak{F}_{\rho_{t_0}(A,B)-\varepsilon/4,t_0}$, откуда вытекает выполнение неравенства $l_{t_0}(\gamma_m) \le \rho_{t_0}(A, B) - \varepsilon/4$ — противоречие с определением внутренней метрики: $\rho_{t_0}(A, B) = \inf_\gamma l_{t_0}(\gamma)$. Полунепрерывность снизу доказана. □

Утверждение 10. *Условие глобальной непрерывности не вытекает из остальных условий. Более того, если все условия, кроме условия глобальной непрерывности выполнены, то расстояние может быть разрывным.*

Доказательство. Приведем пример множества X и семейства метрик ρ_t на нем, для которых выполнены все условия, кроме глобальной непрерывности. Рассмотрим двумерную сферу и две диаметрально противоположные точки A и B на ней. Выделим на ней счетное количество половин больших окружностей — дуг, соединяющих A и B, и обозначим их γ_k, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k$, а длина непрерывной кривой γ', осуществляющей гомеоморфизм с образом, лежащей целиком на некоторой дуге γ_k, в метрике ρ_t равна $l_t(\gamma') = \big(2 + \cos(tk)\big)\frac{\alpha}{\pi}$, где α — величина угла, под которым видна γ' из центра сферы (ясно, что $l_t(\gamma_k) = 2 + \cos(tk)$) (рис. 2.1).

Таким образом, при каждом $t_0 \in [0, 1]$ мы получаем конечную внутреннюю метрику на X: $\rho_t(C, D) = \inf_\gamma l_t(\gamma)$, где точная нижняя грань берется по всем кривым γ, соединяющим C и D, лежащим в X (заметим, что в этой метрике длины кривых в точности такие, какими мы их определили изначально). При этом, длины кривых непрерывно зависят от t.

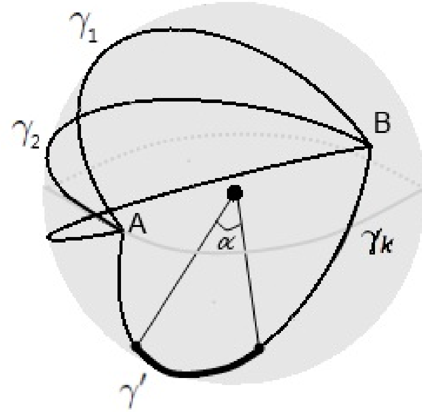

Рис. 2.1: Пример: невыполнение условия глобальной непрерывности при наличии остальных условий.

Рассмотрим $a = 2$, $\varepsilon = 1/4$, $t_0 = 0$. Тогда в любой δ-окрестности t_0 найдется $t_\delta = \pi/m$ (при достаточно большом $m \in \mathbb{N}$) такое, что в метрике ρ_{t_δ} длина кривой γ_m равна $l_{t_\delta}(\gamma_m) = 2 + \cos(t_\delta m) = 1 \le 2 = a$, в то время как в метрике ρ_{t_0} ее длина равна $l_{t_0}(\gamma_m) = 2 + \cos(t_0 m) = 3 > 5/2 = (1+\varepsilon)a$. Это означает, что $\gamma_m \in \mathfrak{F}_{a,t_\delta}$, но $\gamma_m \notin \mathfrak{F}_{(1+\varepsilon)a,t_0}$, то есть существуют сколь угодно близкие к t_0 числа t_δ такие, что $\mathfrak{F}_{a,t_\delta} \not\subset \mathfrak{F}_{(1+\varepsilon)a,t_0}$ — условие глобальной непрерывности не выполнено.

Покажем, что расстояние $\rho_t(A, B)$ между точками A и B разрывно по t в нуле. Действительно, $\rho_0(A, B) = 3$, так как $l_0(\gamma_k) = 3$ для любого натурального k, но для каждого $t \in (0, 1]$ найдется $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\cos(tk) < 0$, а значит $\rho_t(A, B) \le l_t(\gamma_k) = 2 + \cos(tk) < 2$. Отметим, что в любой окрестности точек A и B содержатся бесконечные последовательности, из которых нельзя выбрать сходящиеся подпоследовательности, а значит, пространство X не является ограниченно компактным. $\square$

Таким образом, из непрерывной зависимости изменения длин кривых не вытекает непрерывность расстояния между точками во время деформации соответствующей внутренней метрики. Добавление условия глобальной непрерывности обеспечивает непрерывность расстояния, однако это условие носит глобальный характер, является громоздким и проверка его выполнения в частных случаях затруднительна. Возникает вопрос: что еще можно потребовать для обеспечения непрерывности расстояния? Достаточно ли будет выполнения каких-либо естественных свойств пространства, например, компактности? Далее в работе мы покажем, что непрерывности длин кривых и компактности пространства не достаточно для непрерывности расстояний между точками, и сформулируем достаточные условия непрерывности расстояний для случая ограниченно компактных пространств.

2.2 Возможные типы функционалов длины

Под сходимостью последовательностей кривых будем иметь в виду поточечную сходимость относительно метрик семейства ρ_t, $t \in [0, 1]$. Отметим, что сходящаяся последовательность допустимых кривых, вообще говоря, не обязана сходиться к допустимой кривой, и даже к кривой, непрерывной относительно метрик семейства ρ_t. Сформулируем специальные условия, которые могут быть наложены на семейство функционалов длины l_t.

Определение 2. Будем называть семейство функционалов длины l_t *семейством типа* 1, если при каждом $t \in [0, 1]$ функционал l_t является полунепрерывным снизу на пространстве допустимых кривых.

Определение 3. Будем называть семейство функционалов длины l_t *семейством типа* 2, если для любой последовательности допустимых кривых γ_n, и любых чисел t_n таких, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, из того, что последовательность чисел $l_{t_n}(\gamma_n)$ ограничена, следует, что последовательность чисел $l_{t_0}(\gamma_n)$ тоже ограничена.

Из эквивалентности метрик семейства ρ_t следует, что X должно быть ограниченно компактно или же нет относительно всех метрик семейства ρ_t одновременно. В предыдущем разделе 2.1 приводится пример однопараметрического семейства функционалов длины l_t на топологическом пространстве X, для которого выполнены перечисленные выше условия, любые две метрики из соответствующего семейства внутренних метрик ρ_t эквивалентны, семейство функционалов длины l_t является семейством типов 1 и 2, но расстояние между некоторыми точками разрывно по t. В этом примере метрические пространства (X, ρ_t) не являются ограниченно компактными. Далее мы покажем, что в случае ограниченно компактных, и даже компактных метрических пространств перечисленных выше условий не достаточно для непрерывности функции расстояния. Сформулируем еще два условия, которые могут быть наложены на семейство функционалов длины l_t. В дальнейшем мы покажем, что в совокупности с некоторыми из предыдущих условий эти условия являются достаточными для непрерывной зависимости функции расстояния от параметра. Напомним, что через $\hat{l}_t$ мы обозначаем функционал длины, индуцированный внутренней метрикой ρ_t, который в общем случае не совпадает с изначальным функционалом длины l_t.

Определение 4. Будем называть семейство функционалов длины l_t *семейством типа* 3, если для любой сходящейся последовательности допустимых кривых γ_n такой, что $l_{t_0}(\gamma_n) < C$, и любых чисел t_n таких, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, выполнено следующее соотношение: $l_{t_n}(\gamma_n) - l_{t_0}(\gamma_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Определение 5. Будем называть семейство функционалов длины l_t *семейством типа* 4, если для любой последовательности допустимых кривых γ_n, сходящейся к некоторой кривой γ_0, непрерывной относительно метрик семейства ρ_t, $t \in [0, 1]$, и любых чисел t_n таких, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, выполнено неравенство $\liminf_{n\to\infty} l_{t_n}(\gamma_n) \geq \hat{l}_{t_0}(\gamma_0)$.

Утверждение 11. *Из определения семейства функционалов длины типа* 3 *вытекает условие непрерывности по* t *длины каждой допустимой кривой.*

Доказательство. Для фиксированной допустимой кривой γ рассмотрим последовательность кривых $\gamma_n = \gamma, n \in \mathbb{N}$. Данная последовательность сходится, и применение к ней условия из определения семейства типа 3 дает непрерывность длины $l_t(\gamma)$ кривой γ по t. □

Отметим, что определение семейств функционалов типа 4 напоминает понятие Γ-сходимости функционалов. Сформулируем еще два условия, которые могут быть наложены на семейство функционалов длины l_t.

Определение 6. Будем называть семейство функционалов длины l_t *семейством типа* 5, если для любых чисел t_n таких, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, функционал $\hat{l}_{t_0}$ является асимптотической нижней гранью последовательности функционалов $\hat{l}_{t_n}$.

Определение 7. Будем называть семейство функционалов длины l_t *семейством типа* 6, если при фиксированной сходящейся последовательности кривых γ_n и фиксированном числе $t_0 \in [0, 1]$ величины $\liminf_{n\to\infty} \hat{l}_{t_n}(\gamma_n)$ равны для различных последовательностей чисел t_n, сходящихся к t_0 при $n \to \infty$.

Утверждение 12. *Семейство функционалов длины типов* 1 *и* 5 *является семейством функционалов длины типа* 4.

Доказательство. Рассмотрим последовательность чисел t_n таких, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, и последовательность допустимых кривых γ_n, сходящуюся к некоторой кривой γ_0. По условию, функционал $\hat{l}_{t_0}$ является асимптотической нижней гранью последовательности функционалов $\hat{l}_{t_n}$, и, следовательно, выполнено неравенство $\liminf_{n\to\infty} \hat{l}_{t_n}(\gamma_n) \geq \hat{l}_{t_0}(\gamma_0)$. Это неравенство равносильно неравенству $\liminf_{n\to\infty} l_{t_n}(\gamma_n) \geq \hat{l}_{t_0}(\gamma_0)$, поскольку значения функционалов $\hat{l}_{t_n}$ и l_{t_n} совпадают на допустимых кривых в силу того, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 1. Это означает, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 4. □

Утверждение 13. *Семейство функционалов длины типа* 6 *является семейством функционалов длины типа* 5.

Доказательство. Рассмотрим последовательность чисел t_n таких, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, и последовательность кривых γ_n, сходящуюся к некоторой кривой γ_0. Из условия следует, что $\liminf_{n\to\infty} \hat{l}_{t_n}(\gamma_n) = \liminf_{n\to\infty} \hat{l}_{t_0}(\gamma_n)$. При этом, функционал $\hat{l}_{t_0}$ является полунепрерывным снизу на пространстве кривых, непрерывных относительно внутренних метрик семейства ρ_t, как функционал, индуцированный внутренней метрикой. Из этого следует, что $\liminf_{n\to\infty} \hat{l}_{t_0}(\gamma_n) \geq \hat{l}_{t_0}(\gamma_0)$. В результате, мы получаем, что $\liminf_{n\to\infty} \hat{l}_{t_n}(\gamma_n) \geq \hat{l}_{t_0}(\gamma_0)$, что означает, что функционал $\hat{l}_{t_0}$ является асимптотической нижней гранью последовательности функционалов $\hat{l}_{t_n}$. □

Таким образом, если от семейства функционалов длины l_t типа 1 потребовать, чтобы для любых чисел t_n, стремящихся к t_0 при $n \to \infty$, функционал $\hat{l}_{t_0}$ являлся Г-пределом последовательности функционалов $\hat{l}_{t_n}$, то это семейство будет являться семейством типа 4. При этом, требование точности нижней грани в определении Г-сходимости является избыточным. Как мы покажем далее, из этого следует, что требования такой Г-сходимости в совокупности с некоторыми базовыми условиями было бы достаточно для непрерывной зависимости функции расстояния от параметра.

2.3 Пример разрывного расстояния при наличии непрерывности длин кривых в случае компактного пространства

Утверждение 14. *Существуют хаусдорфово топологическое пространство X и однопараметрическое семейство функционалов длины l_t на нем, $t \in [0, 1]$, такие, что*

- *все метрики соответствующего семейства внутренних метрик ρ_t эквивалентны,*
- *для любого $t \in [0, 1]$ пространства (X, ρ_t) компактны и линейно связны,*
- *длины всех допустимых кривых непрерывно зависят от параметра t,*
- *семейство функционалов длины l_t является семейством типов 1 и 2,*
- *семейство функционалов длины l_t не является семейством типов 3 и 4,*
- *расстояние $\rho_t(A, B)$ разрывно по t между некоторой парой точек A и B.*

Доказательство. Пусть X – двумерная сфера, половина большой окружности которой равна 3, ρ_0 – стандартная внутренняя метрика на ней, A и B – диаметрально противоположные точки, и $\rho_0(A,B) = 3$. Рассмотрим последовательность различных кратчайших геодезических $\gamma_k, k \in \mathbb{N}$, соединяющих A и B, монотонно сходящуюся к некоторой кратчайшей геодезической γ_0, отличной от всех γ_k. Обозначим через Ω множество сферических ломаных относительно метрики ρ_0, образованных конечными наборами сферических отрезков, не лежащих на γ_0. Определим на X семейство функционалов длины $l_t, t \in [0,1]$, с классом допустимых кривых Ω. Пусть длина l_t сферического отрезка $\gamma \in \Omega$, образ которого целиком лежит в образе $\operatorname{Im}\gamma_k$ некоторой кривой γ_k, равна $l_t(\gamma) = \frac{1}{3}(2+\cos(kt))l_0(\gamma)$, где $l_0(\gamma)$ – длина сферического отрезка γ, посчитанная относительно метрики ρ_0. Ясно, что $l_t(\gamma_k) = (2+\cos(kt))$. Для сферических отрезков, не лежащих ни на каких γ_k, определим длину l_t независимой от t и равной длине, посчитанной относительно метрики ρ_0. Далее, длину l_t любой сферической ломаной из Ω определим по аддитивности.

Для удобства, множество кривых, соединяющих A и B, будем обозначать $\{\gamma : A \sim B\}$. Имея длины l_t всех кривых $\gamma \in \Omega$ при каждом $t \in [0,1]$, для каждой пары точек A, B определим $\rho_t(A,B)$ как точную нижнюю грань длин l_t кривых $\gamma \in \Omega$, соединяющих A и B: $\rho_t(A,B) = \inf_{\gamma\in\Omega,\gamma:A\sim B} l_t(\gamma)$. Заметим, что определенная таким образом функция ρ_0 совпадает с метрикой ρ_0, введенной ранее. Покажем, что при каждом $t \in [0,1]$ построенная функция ρ_t – метрика на X. Симметричность и положительно определенность очевидны. Для любых трех точек $A, B, C \in X$ сумма $\rho_t(A,B) + \rho_t(B,C)$ равна сумме

$$\inf_{\gamma\in\Omega,\gamma:A\sim B} l_t(\gamma) + \inf_{\gamma\in\Omega,\gamma:B\sim C} l_t(\gamma),$$

что равно $\inf l_t(\gamma)$, где точная нижняя грань берется по всем кривым $\gamma \in \Omega, \gamma : A \sim C$, проходящим через B. Последняя величина, в свою очередь, больше либо равна $\inf_{\gamma\in\Omega,\gamma:A\sim C} l_t(\gamma) = \rho_t(A,C)$, из чего следует неравенство треугольника для ρ_t.

Из определения семейства функционалов длины l_t следует, что для любых $\gamma \in \Omega$ и $t \in [0,1]$ выполняется неравенство $\frac{l_0(\gamma)}{3} \le l_t(\gamma) \le l_0(\gamma)$, откуда следует, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 2. Также это означает, что при каждом $t \in [0,1]$ выполнено неравенство $\frac{\rho_0}{3} \leq \rho_t \leq \rho_0$, откуда следует эквивалентность любых двух метрик семейства ρ_t. При этом, из того, что метрическое пространство (X, ρ_0) является компактным, следует, что для любого $t \in [0,1]$ метрические пространства (X, ρ_t) компактны, поскольку они обладают той же самой топологией. Линейная связность метрических пространств (X, ρ_t) очевидна. Для каждой кривой $\gamma \in \Omega$ функция $l_t(\gamma)$ равна конечной сумме длин l_t сферических отрезков. По построению эти длины непрерывно зависят от t, в результате чего функция $l_t(\gamma)$ непрерывно зависит от t для каждой допустимой кривой γ.

Пусть $\gamma \in \Omega$ – сферический отрезок, который полностью лежит на геодезической γ_m из последовательности $\gamma_k, k \in \mathbb{N}$, и не содержит точек A и B, а $A_1 A_2 \ldots A_n$ – вписанная в γ ломаная. Через d обозначим точную нижнюю грань расстояний ρ_0 между точками образа кривой γ и точками образов кривых из последовательности γ_k, отличных от γ_m. Как известно, кривая γ_m не является предельной для множества остальных кривых из последовательности γ_k, а потому из замкнутости образов кривых γ_k и кривой γ следует, что d положительно.

Будем считать, что размер звеньев ломаной $A_1 A_2 \ldots A_n$ не превосходит d в метрике ρ_0. Обозначим подотрезок отрезка γ между A_i и A_{i+1} через γ' и зафиксируем произвольное $t \in [0,1]$. Отметим, что $l_t(\gamma') \leq l_0(\gamma') = \rho_0(A_i, A_{i+1}) \leq d$. Длина l_t каждой допустимой кривой, которая соединяет A_i и A_{i+1} и имеет общие точки с другими геодезическими из последовательности γ_k, больше d. Из того, что $l_t \leq l_0$, а также из того, что для сферических отрезков, не лежащих ни на каких γ_k, длины l_t и l_0 равны, следует, что длина l_t каждой допустимой кривой, которая соединяет A_i и A_{i+1} и не имеет общих точек с другими геодезическими из последовательности γ_k, не превосходит $l_t(\gamma')$. Таким образом, длина каждого звена $\rho_t(A_i, A_{i+1})$ будет равна длине l_t подотрезка γ между A_i и A_{i+1} при каждом $t \in [0,1]$. Из аддитивности длины l_t следует, что

$$\hat{l}_t(\gamma) = \sup_{A_1 A_2 \ldots A_n \subset \gamma} \sum_{i=1}^{n-1} \rho_t(A_i, A_{i+1}) = l_t(\gamma).$$

Случай, в котором сферический отрезок $\gamma \in \Omega$ полностью лежит на одной из геодезических последовательности γ_k, и может содержать точки A и B, получается из предыдущего случая предельным переходом.

Пусть $\gamma \in \Omega$ – сферический отрезок, не пересекающийся даже по своему концу ни с одной кривой $\gamma_k, k \in \mathbb{N}$, а также с кривой γ_0. Пусть также $A_1A_2 \dots A_n$ – вписанная в γ ломаная. Аналогично, через d обозначим точную нижнюю грань расстояний ρ_0 между точками образа кривой γ и точками образов кривых $\gamma_k, k \in \mathbb{N}$, и кривой γ_0. Из замкнутости образов кривых γ_k, γ_0 и γ следует, что d положительно. При размере звеньев ломаной $A_1A_2 \dots A_n$ меньшем, чем d, длина каждого звена $\rho_t(A_i, A_{i+1})$ будет равна $\rho_0(A_i, A_{i+1})$, в связи с чем длина $\hat{l}_t(\gamma)$ будет равна $l_0(\gamma)$, которая, в свою очередь, на таком сферическом отрезке по построению равна $l_t(\gamma)$. Случай, когда сферический отрезок $\gamma \in \Omega$ пересекается с некоторой $\gamma_k, k \in \mathbb{N}$, или с γ_0 только по своему концу, получается из предыдущего случая предельным переходом. Совпадение $\hat{l}_t$ и l_t на остальных кривых из Ω следует из аддитивности функционала длины.

Таким образом, при каждом $t \in [0, 1]$ значения функционалов l_t и $\hat{l}_t$ совпадают на всех кривых из класса Ω. При этом, при каждом $t \in [0, 1]$ функционал $\hat{l}_t$ является полунепрерывным снизу на пространстве непрерывных относительно ρ_0 кривых, как функционал длины, порожденный внутренней метрикой ρ_t, эквивалентной ρ_0. Это означает, что сходимость последовательности кривых γ_i к кривой γ влечет неравенство $\liminf_{i\to\infty} \hat{l}(\gamma_i) \geq \hat{l}(\gamma)$. В частности, сходимость последовательности кривых γ_i из Ω к кривой γ из Ω влечет неравенство $\liminf_{i\to\infty} l(\gamma_i) \geq l(\gamma)$, поскольку все кривые из Ω являются непрерывными относительно ρ_0, и на них значения функционалов l_t и $\hat{l}_t$ совпадают при каждом $t \in [0, 1]$. В результате, мы показали, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 1.

По построению, последовательность геодезических γ_k является сходящейся к γ_0 последовательностью допустимых кривых, где γ_0 – непрерывная относительно ρ_0 кривая, не содержащаяся в классе допустимых кривых. Рассмотрим последовательность чисел $t_n = \frac{\pi}{n}, n \in \mathbb{N}$, которая сходится к $t_0 = 0$ при $n \to \infty$:

$$l_{t_n}(\gamma_n) - l_0(\gamma_n) = \left(2 + \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{n}\right)\right) - 3 = 1 - 3 = -2 \not\to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

следовательно, семейство функционалов длины l_t не является семейством типа 3. Более того, $l_{t_n}(\gamma_n) = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, а потому величина $\liminf_{n\to\infty} l_{t_n}(\gamma_n)$ равна 1. Таким образом, неравенство $\liminf_{n\to\infty} l_{t_n}(\gamma_n) \geq \hat{l}_0(\gamma_0)$ не выполнено, поскольку величина $\hat{l}_0(\gamma_0)$ равна 3, следовательно, семейство функционалов длины l_t не является семейством типа 4. Заметим также, что $\rho_{t_n}(A, B) \leq l_{t_n}(\gamma_n) = 1$, но $\rho_0(A, B) = 3$, из чего следует, что расстояние между точками A и B разрывно по t при $t = 0$. $\square$

Следствие 1. Требования непрерывной зависимости от t длин всех допустимых кривых и принадлежности семейства функционалов длины семействам типов 1 и 2 недостаточно для непрерывной зависимости внутренней метрики ρ_t от параметра t в случае компактности (X, ρ_t) при каждом $t \in [0, 1]$.

Следствие 2. Семейство функционалов длины типов 1 и 2 не обязательно является семейством типа 3 или типа 4 в случае непрерывной зависимости от t длин всех допустимых кривых и компактности (X, ρ_t) при каждом $t \in [0, 1]$.

2.4 Достаточные условия для непрерывности расстояний в случае ограниченно компактных пространств с внутренней метрикой

Как и ранее, мы предполагаем, что все метрики семейства ρ_t эквивалентны и конечны, а длины всех допустимых кривых непрерывно зависят от t.

Теорема 2. *Расстояние $\rho_t(A, B)$ между любыми двумя точками $A, B \in X$ полунепрерывно сверху по t.*

Доказательство. Рассматриваемые метрики ρ_t внутренние, следовательно, имеет место равенство $\rho_t(A, B) = \inf_\gamma l_t(\gamma)$, где точная нижняя грань берется по всем допустимым кривым γ, соединяющим A и B. Докажем полунепрерывность $\rho_t(A,B)$ сверху в некоторой точке $t_0 \in [0,1]$. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ найдется соединяющая точки A и B кривая γ, удовлетворяющая неравенству $|l_{t_0}(\gamma) - \rho_{t_0}(A,B)| < \varepsilon/2$. В свою очередь, из того, что длина $l_t(\gamma)$ этой кривой непрерывно зависит от t, следует существование $\delta > 0$ такого, что для всех t, удовлетворяющих неравенству $|t - t_0| < \delta$, выполнено неравенство $|l_t(\gamma) - l_{t_0}(\gamma)| < \varepsilon/2$. В результате, для любого $\varepsilon > 0$ мы можем подобрать такое $\delta > 0$, что при $|t - t_0| < \delta$ будет выполнено

$$\rho_t(A,B) = \inf_{\gamma} l_t(\gamma) \leq l_t(\gamma) < l_{t_0}(\gamma) + \varepsilon/2 < \rho_{t_0}(A,B) + \varepsilon,$$

что и означает полунепрерывность сверху. □

Теорема 3. *Пусть метрические пространства (X, ρ_t) ограниченно компактны для любого $t \in [0,1]$, а семейство функционалов длины l_t является семейством типов 1, 2 и 3. Тогда расстояние $\rho_t(A,B)$ между любыми двумя точками $A, B \in X$ непрерывно зависит от t.*

Доказательство. Полунепрерывность расстояния по t сверху вытекает из теоремы 2. Пусть полунепрерывности расстояния по t снизу нет, тогда существуют $\varepsilon > 0$, числа t_n такие, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, и точки $A, B \in X$ такие, что $\rho_{t_n}(A,B) < \rho_{t_0}(A,B) - \varepsilon$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим последовательность допустимых кривых γ_n, соединяющих A и B, таких, что $l_{t_n}(\gamma_n) - \rho_{t_n}(A,B) < \varepsilon/2$, и, следовательно, $l_{t_n}(\gamma_n) < \rho_{t_0}(A,B) - \varepsilon/2 = C_1$. Из того, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 2, следует, что существует число $C_2 > 0$, для которого $l_{t_0}(\gamma_n) < C_2$ при любом $n \in \mathbb{N}$. В метрике ρ_{t_0} рассмотрим замкнутый шар K с центром в точке A и радиусом C_2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ образ кривой γ_n полностью лежит в шаре K, поскольку ее длина $l_{t_0}(\gamma_n)$ меньше C_2. В силу ограниченной компактности (X, ρ_{t_0}) шар K является компактом в метрике ρ_{t_0}, в связи с чем из теоремы Арцела-Асколи следует, что из последовательности кривых γ_n в компакте K можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к некоторой кривой γ_0, соединяющей точки A и B. Кривая γ_0 является непрерывной относительно метрик семейства ρ_t, но не обязательно является допустимой. Перейдем к этой подпоследовательности – для каждой кривой из нее неравенство $l_{t_n}(\gamma_n) < C_1$ останется верным.

Из того, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 1, следует, что при каждом $t \in [0,1]$ функционал l_t является полунепрерывным снизу на пространстве допустимых кривых, и, следовательно, при каждом $t \in [0,1]$ функционал l_t совпадает с функционалом $\hat{l}_t$ на всех допустимых для функционала l_t кривых. В свою очередь, при каждом $t \in [0,1]$ функционал $\hat{l}_t$ является полунепрерывным снизу на пространстве кривых, непрерывных относительно метрики ρ_t, как функционал длины, порожденный внутренней метрикой ρ_t. Это означает, что найдется $n_1 \in \mathbb{N}$ такое, что при $n > n_1$ выполнено неравенство $\hat{l}_{t_0}(\gamma_n) > \hat{l}_{t_0}(\gamma_0) - \varepsilon/8$. Учитывая, что для каждого $t \in [0,1]$ функционалы l_t и $\hat{l}_t$ совпадают на всех допустимых кривых, мы получаем, что при $n > n_1$ выполнено неравенство $l_{t_0}(\gamma_n) > \hat{l}_{t_0}(\gamma_0) - \varepsilon/8$. При этом, из того, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 3, следует, что найдется $n_2 \in \mathbb{N}$ такое, что при $n > n_2$ выполнено неравенство $|l_{t_n}(\gamma_n) - l_{t_0}(\gamma_n)| < \varepsilon/8$. Из этого следует, что при $n > \max(n_1, n_2)$ выполнено неравенство $l_{t_n}(\gamma_n) > \hat{l}_{t_0}(\gamma_0) - \varepsilon/4$, но $l_{t_n}(\gamma_n) < C_1$, откуда $\hat{l}_{t_0}(\gamma_0) < C_1 + \varepsilon/4 < \rho_{t_0}(A,B)$ – противоречие. Полунепрерывность расстояния снизу показана. □

Теорема 4. *Пусть метрические пространства (X, ρ_t) ограниченно компактны для любого $t \in [0,1]$, а семейство функционалов длины l_t является семейством типов 2 и 4. Тогда расстояние $\rho_t(A,B)$ между любыми двумя точками $A, B \in X$ непрерывно зависит от t.*

Доказательство. Полунепрерывность расстояния по t сверху вытекает из теоремы 2. Пусть полунепрерывности расстояния по t снизу нет, тогда существуют $\varepsilon > 0$, числа t_n такие, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, и точки $A, B \in X$ такие, что $\rho_{t_n}(A,B) < \rho_{t_0}(A,B) - \varepsilon$. Рассмотрим последовательность допустимых кривых γ_n, соединяющих A и B, таких, что $l_{t_n}(\gamma_n) - \rho_{t_n}(A,B) < \varepsilon/2$, и, следовательно, таких, что $l_{t_n}(\gamma_n) < \rho_{t_0}(A,B) - \varepsilon/2 = C_1$. Из того, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 2, следует, что существует число $C_2 > 0$ такое, что $l_{t_0}(\gamma_n) < C_2$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Аналогично доказательству теоремы 3, рассмотрим в метрике ρ_{t_0} замкнутый шар с центром в точке A и радиусом C_2, который является компактом в силу ограниченной компактности (X, ρ_{t_0}) и содержит образы всех кривых из последовательности γ_n. По теореме Арцела-Асколи мы можем перейти от последовательности γ_n к ее подпоследовательности, сходящейся к некоторой кривой γ_0. Кривая γ_0 является непрерывной относительно метрик семейства ρ_t, но не обязательно является допустимой. Из того, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 4, следует, что выполнено неравенство $\liminf_{n\to\infty} l_{t_n}(\gamma_n) \geq \hat{l}_{t_0}(\gamma_0)$. При этом, $l_{t_n}(\gamma_n) < C_1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, следовательно, $\hat{l}_{t_0}(\gamma_0) \leq C_1 = \rho_{t_0}(A, B) - \varepsilon/2$ – противоречие. Полунепрерывность расстояния снизу показана. □

Теорема 5. *Пусть метрические пространства* (X, ρ_t) *ограниченно компактны для любого* $t \in [0, 1]$*, а семейство функционалов длины* l_t *является семейством типов* 1, 2 *и* 5*. Тогда расстояние* $\rho_t(A, B)$ *между любыми двумя точками* $A, B \in X$ *непрерывно зависит от* t*.*

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из утверждения 12 и теоремы 4. □

Теорема 6. *Пусть метрические пространства* (X, ρ_t) *ограниченно компактны для любого* $t \in [0, 1]$*, а семейство функционалов длины* l_t *является семейством типов* 1, 2 *и* 6*. Тогда расстояние* $\rho_t(A, B)$ *между любыми двумя точками* $A, B \in X$ *непрерывно зависит от* t*.*

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из утверждения 13 и теоремы 5. □

2.5 Обратная задача: непрерывность длин кривых в случае наличия непрерывности расстояний

Задача исследования непрерывности длин кривых в случае непрерывной зависимости расстояний от параметра является в общем случае нетривиальной. В этом разделе мы обсудим ограничения, накладываемые на семейства метрик, непрерывно зависящие от параметра, а также рассмотрим случай конечномерных нормированных пространств, норма которых непрерывно зависит от параметра.

Рассмотрим множество X и семейство метрик ρ_t на нем такое, что расстояние $\rho_t(A, B)$ между любыми двумя точками A и B непрерывно зависит от параметра $t \in [0, 1]$. Проанализируем необходимость ограничений на метрики.

Замечание 1. 1) При разных t метрики ρ_t могут определять различные топологии.

2) Данное отображение $\gamma\colon [a, b] \to X$ может быть непрерывным при одних t и разрывным при других.

3) Метрика ρ_t может быть внутренней при одних t и не быть при других.

4) Метрическое пространство (X, ρ_t) может быть линейно связным при одних t и не быть таковым при других.

Пример. Пусть X — плоскость, ρ_0 — евклидова метрика на ней, $\rho_1(A, B) = 1$ для любых неравных $A, B \in X$, а $\rho_t = t\rho_1 + (1 - t)\rho_0$. Ясно, что ρ_t — метрика, и $\rho_t(A, B)$ между любыми двумя точками A и B непрерывно зависит от параметра t. Однако, метрическая топология, порожденная ρ_1, дискретна, а порожденная ρ_0 — нет. Функция $\gamma\colon [a, b] \to X$, непрерывно (относительно метрики ρ_0) отображающая отрезок $[a, b]$ в некоторый отрезок плоскости, не является непрерывной относительно метрики ρ_1: в этой метрике одноточечное множество открыто, но его прообраз открытым не является. Ясно, что метрическое пространство (X, ρ_0) — линейно связное со внутренней метрикой. Но метрика ρ_1 не является внутренней, а метрическое пространство (X, ρ_1) — линейно связным, так как относительно метрики ρ_1 не существует кривых в X, соединяющих различные точки.

Пусть $(X, ||\cdot||_t)$ — конечномерное нормированное пространство при любом $t \in [0, 1]$, а норма $||x||_t$ любого элемента $x \in X$ непрерывно зависит от t. Расстояние между элементами определяется как норма их разности: $\rho_t(A, B) = ||A - B||_t$. Ясно, что все метрики ρ_t задают одну топологию. В этом случае длины кривых непрерывно зависят от t.

Теорема 7. *Пусть $\gamma\colon [a,b] \to X$ — кривая. Тогда ее длина конечна или бесконечна одновременно по отношению ко всем метрикам семейства. Более того, если длина $l_t(\gamma)$ кривой γ относительно метрики ρ_t конечна, то эта длина непрерывно зависит от t.*

Доказательство. Рассмотрим единичную сферу S_0 в метрике ρ_{t_0}. Она компактна, так как пространство X — конечномерное. Рассмотрим функцию, определенную на $\big(X \setminus 0\big) \times [0,1]$:

$$f(x,t) = \frac{||x||_t}{||x||_{t_0}}.$$

Она непрерывна на компакте $S_0 \times [0,1]$, а, значит, принимает на нем наименьшее и наибольшее значения. Пусть $m = \min\big\{f(x,t) \mid x \in S_0,\, t \in [0,1]\big\}$ и $M = \max\big\{f(x,t) \mid x \in S_0,\, t \in [0,1]\big\}$. Таким образом, для $x \in S_0$ и $t \in [0,1]$ выполнено неравенство $m||x||_{t_0} \le ||x||_t \le M||x||_{t_0}$. Положительная однородность распространяет это неравенство на все пространство. Так как длина кривой γ есть точная верхняя грань длин вписанных в нее ломаных, а длина ломаной есть сумма расстояний, то для длины кривой γ выполнено соответствующее неравенство: $m\, l_{t_0}(\gamma) \le l_t(\gamma) \le M\, l_{t_0}(\gamma)$. Из этого следует, что длина кривой γ конечна или бесконечна одновременно по отношению ко всем метрикам семейства.

Из равномерной непрерывности функции $f(x,t)$ на компакте $S_0 \times [0,1]$ следует, что для фиксированного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, для которого при всех t, удовлетворяющих неравенству $|t - t_0| < \delta$, выполнено $|f(x,t) - f(x,t_0)| \le \varepsilon$ для любых $x \in S_0$. Учитывая то, что $f(x,t_0) = 1$, получаем соотношение $|f(x,t) - 1| \le \varepsilon$, то есть

$$(1-\varepsilon)||x||_{t_0} \le ||x||_t \le (1+\varepsilon)||x||_{t_0}.$$

Из положительной однородности следует, что для фиксированного $\varepsilon > 0$ данное неравенство выполнено при $x \in X$ и $|t - t_0| < \delta$. Таким образом, для длины кривой γ выполнено неравенство $(1-\varepsilon)l_{t_0}(\gamma) \le l_t(\gamma) \le (1+\varepsilon)l_{t_0}(\gamma)$, или $\big|l_{t_0}(\gamma) - l_t(\gamma)\big| \le \varepsilon l_{t_0}(\gamma)$, из которого вытекает непрерывность функции $l_t(\gamma)$ в случае ее конечности. $\square$

2.6 Непрерывность расстояния в случае полных римановых и финслеровых многообразий

Рассмотрим k-мерное компактное связное гладкое многообразие M с заданой на его касательном расслоении TM функцией $F_t(x,\xi), x \in M, \xi \in T_xM$, которая является финслеровой метрикой на M при каждом $t \in [0,1]$ и непрерывно зависит от параметра t. Как известно, при каждом фиксированном $t \in [0,1]$ функция $F_t(x,\xi)$ является гладкой функцией на $TM \setminus \{0\}$ и положительно однородной функцией по ξ: $F_t(x,\lambda\xi) = \lambda F_t(x,\xi)$ для любых $\lambda > 0$ и $\xi \neq 0$. Мы будем рассматривать финслеровы метрики, которые являются нормами на касательных пространствах T_xM для всех $x \in M$. Для каждого $t \in [0,1]$ финслерова метрика $F_t(x,\xi)$ определяет функционал длины, классом допустимых кривых которого является класс кусочно-гладких кривых. Для удобства мы будем рассматривать кривые, параметризованные отрезком $[0,1]$. Длина кусочно-гладкой кривой $\gamma : [0,1] \to M$ в финслеровой метрике $F_t(x,\xi)$ равна

$$l_t(\gamma) = \int_0^1 F_t(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))ds.$$

Легко показать, что длина каждой кусочно-гладкой кривой в финслеровой метрике F_t непрерывно зависит от t.

Утверждение 15. *Пусть $\gamma\colon [0,1] \to M$ — кусочно-гладкая кривая. Тогда $l_t(\gamma)$ является непрерывной функцией параметра t.*

Доказательство. Рассмотрим разбиение кривой γ на последовательные кривые γ_i, образы которых лежат в некоторых картах. Длина $l_t(\gamma_i)$ каждого участка кривой γ_i непрерывно зависит от t, поскольку в соответствующей карте она представляется в виде определенного интеграла от функции, непрерывно зависящей от параметра t. Непрерывность длины $l_t(\gamma)$ кривой γ вытекает из аддитивности функционала длины. $\square$

В силу связности многообразия при каждом фиксированном $t \in [0,1]$ для любых двух точек из M найдется кусочно-гладкая кривая конечной длины, соединяющая их. Обозначим через $\rho_t, t \in [0,1]$, соответствующее семейство внутренних метрик на M. Хорошо известно, что внутренняя метрика, индуцированная финслеровым функционалом длины, определяет на гладком многообразии топологию, которая совпадает с изначальной топологией этого многообразия, см. [1]. Таким образом, все метрики ρ_t определяют одну и ту же топологию на M, причем эта топология совпадает с изначальной топологией пространства M. При этом, метрики семейства ρ_t не обязаны быть эквивалентными на всем многообразии. В дальнейшем нам будет необходимо лишь то, чтобы многообразие M было ограниченно компактным при каждом $t \in [0, 1]$, и позже мы потребуем это непосредственно. Как известно, из того, что при любых фиксированных $t \in [0, 1]$ и $x \in M$ функция $F_t(x, \cdot)$ является нормой на касательном пространстве $T_x M$, следует, что соответствующий функционал финслеровой длины l_t является полунепрерывным снизу на пространстве кусочно-гладких кривых в M, см. [1]. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 16. *Непрерывно зависящее от t семейство финслеровых метрик F_t на гладком многообразии M задает семейство функционалов длины типа* 1.

Утверждение 17. *Если гладкое многообразие M – компактно, то для любых $t_0 \in [0, 1]$ и $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $|t - t_0| < \delta$ для любой пары $(x, \xi), \xi \neq 0$, принадлежащей касательному расслоению TM, будет выполнено неравенство*

$$\left| \frac{F_t(x, \xi)}{F_{t_0}(x, \xi)} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Зафиксируем t_0 и рассмотрим функцию, определенную на $(TM \setminus T_0) \times [0, 1]$, где T_0 – нулевое сечение TM:

$$f(x, \xi, t) = \frac{F_t(x, \xi)}{F_{t_0}(x, \xi)}.$$

Она непрерывна, а значит, равномерно непрерывна на компакте $SM \times [0, 1]$, где SM – сферизация касательного расслоения в метрике F_{t_0}. Таким образом, для $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех t, удовлетворяющих неравенству $|t - t_0| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x, \xi, t) - f(x, \xi, t_0)| < \varepsilon$ при любых $(x, \xi) \in SM$. Учитывая, что

$f(x, \xi, t_0) = 1$, мы получаем соотношение $|f(x, \xi, t) - 1| < \varepsilon$. Таким образом, из того, что $f(x, \lambda\xi, t) = f(x, \xi, t)$ при $\lambda > 0$, следует требуемое утверждение. □

Утверждение 18. *Непрерывно зависящее от t семейство финслеровых метрик F_t на гладком компактном многообразии M задает семейство функционалов длины типа 2.*

Доказательство. Пусть $\gamma_n : [0, 1] \to M, n \in \mathbb{N}$, – последовательность кусочно-гладких кривых, а числа $t_0, t_n, n \in \mathbb{N}$, таковы, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$ и $l_{t_n}(\gamma_n) < C_1$ для некоторой константы $C_1 > 0$. Зафиксируем произвольное ε, удовлетворяющее неравенству $0 < \varepsilon < 1$. Из утверждения 17 следует, что для ε найдется $\delta > 0$ такое, что при $|t - t_0| < \delta$ неравенство $1 - \varepsilon < \frac{F_t(x,\xi)}{F_{t_0}(x,\xi)}$ будет выполнено для любой пары $(x, \xi) \in TM, \xi \neq 0$. В силу того, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, существует $N \in \mathbb{N}$, что при $n > N$ выполнено неравенство $|t_n - t_0| < \delta$. Таким образом, для любых $n > N$ и $s \in [0, 1]$ выполнено неравенство

$$F_{t_0}(\gamma_n(s), \dot{\gamma}_n(s)) < \frac{F_{t_n}(\gamma_n(s), \dot{\gamma}_n(s))}{1 - \varepsilon}.$$

Проинтегрируем это неравенство по s на отрезке $[0, 1]$:

$$l_{t_0}(\gamma_n) = \int_0^1 F_{t_0}(\gamma_n(s), \dot{\gamma}_n(s))ds < \int_0^1 \frac{F_{t_n}(\gamma_n(s), \dot{\gamma}_n(s))}{1 - \varepsilon}ds = \frac{l_{t_n}(\gamma_n)}{1 - \varepsilon} < \frac{C_1}{1 - \varepsilon},$$

то есть последовательность чисел $l_{t_0}(\gamma_n), n \in N$, ограничена. □

Утверждение 19. *Непрерывно зависящее от t семейство финслеровых метрик F_t на гладком компактном многообразии M задает семейство функционалов длины типа 3.*

Доказательство. Пусть $\gamma_n : [0, 1] \to M, n \in \mathbb{N}$, – сходящаяся последовательность кусочно-гладких кривых, их длины в метрике F_{t_0} ограничены единой константой $C > 0$, а числа $t_0, t_n, n \in \mathbb{N}$, таковы, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $F_{t_0}(x, \xi) > 0$ для любой пары $(x, \xi) \in TM, \xi \neq 0$, из утверждения 17 следует, что найдется $\delta > 0$ такое, что при $|t - t_0| < \delta$ для любой пары $(x, \xi) \in TM, \xi \neq 0$, будет выполнено неравенство $|F_t(x,\xi) - F_{t_0}(x,\xi)| < \varepsilon F_{t_0}(x,\xi)$. Рассмотрим такое $N \in \mathbb{N}$, что при $n > N$ выполнено неравенство $|t_n - t_0| < \delta$. В результате, для любых $n > N$ и $s \in [0,1]$ имеет место неравенство

$$|F_{t_n}(\gamma_n(s), \dot{\gamma}_n(s)) - F_{t_0}(\gamma_n(s), \dot{\gamma}_n(s))| < \varepsilon F_{t_0}(\gamma_n(s), \dot{\gamma}_n(s)).$$

Рассмотрим модуль разности длин кривой γ_n относительно метрик F_{t_n} и F_{t_0} при $n > N$:

$$|l_{t_n}(\gamma_n) - l_{t_0}(\gamma_n)| = \left| \int_0^1 F_{t_n}(\gamma_n(s), \dot{\gamma}_n(s)) - F_{t_0}(\gamma_n(s), \dot{\gamma}_n(s)) ds \right| <$$

$$< \int_0^1 |F_{t_n}(\gamma_n(s), \dot{\gamma}_n(s)) - F_{t_0}(\gamma_n(s), \dot{\gamma}_n(s))| ds <$$

$$< \varepsilon \int_0^1 F_{t_0}(\gamma_n(s), \dot{\gamma}_n(s)) ds = \varepsilon l_{t_0}(\gamma_n) < \varepsilon C.$$

Это означает, что $|l_{t_n}(\gamma_n) - l_{t_0}(\gamma_n)| \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

Утверждение 20. *Непрерывно зависящее от t семейство финслеровых метрик F_t на гладком компактном многообразии M задает глобально непрерывное семейство функционалов длины 1.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные $t_0 \in [0,1]$ и $\varepsilon > 0$. Пусть $\varepsilon_1 = 1 - \frac{1}{1+\varepsilon}$. Отметим, что $\varepsilon_1 > 0$. Из утверждения 17 следует, что для ε_1 найдется $\delta > 0$ такое, что при $|t - t_0| < \delta$ неравенство $1 - \varepsilon_1 < \frac{F_t(x,\xi)}{F_{t_0}(x,\xi)}$ будет выполнено для любой пары $(x,\xi) \in TM, \xi \neq 0$. Пусть при некотором t таком, что $|t - t_0| < \delta$, кривая $\gamma(s) \colon [0,1] \to M$ лежит в $\mathfrak{F}_{a,t}$, то есть

$$l_t(\gamma) = \int\limits_0^1 F_t(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds \leq a.$$

Рассмотрим ее длину в метрике F_{t_0}:

$$l_{t_0}(\gamma) = \int\limits_0^1 F_{t_0}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds \leq \int\limits_0^1 \frac{F_t(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))}{1 - \varepsilon_1} ds \leq \frac{a}{1 - \varepsilon_1} = (1+\varepsilon)a.$$

Это в точности означает, что $\gamma \in \mathfrak{F}_{(1+\varepsilon)a, t_0}$. Утверждение доказано. $\square$

Теорема 8. *Пусть гладкое финслерово многообразие M компактно, а его метрика F_t непрерывно зависит от параметра $t \in [0,1]$. Тогда расстояние $\rho_t(A,B)$ между любыми двумя точками $A, B \in M$ непрерывно зависит от t.*

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из утверждений 16, 18, 19 и теоремы 3. Другой способ доказательства – с помощью утверждения 20 и теоремы 1, все условия которой также были непосредственно проверены. □

Для того, чтобы воспользоваться свойствами непрерывных на компакте функций, мы оттолкнулись от компактных финслеровых многообразий. Теорема 8 может быть распространена на ограниченно компактные финслеровы многообразия. Отметим, что ограниченная компактность конечномерного финслерова многообразия равносильна условию его полноты. Идея доказательства непрерывности расстояния в этом случае проста: мы рассмотрим достаточно большой компактный шар, содержащий точки A и B, и сведем задачу к случаю компактного многообразия.

Теорема 9. *Пусть M – гладкое связное многообразие, а функция F_t непрерывно зависит от параметра $t \in [0,1]$ и является финслеровой метрикой на M при каждом $t \in [0,1]$. Если финслерово многообразие (M, F_t) является полным метрическим пространством при каждом $t \in [0,1]$, то расстояние $\rho_t(A,B)$ между любыми двумя точками $A, B \in M$ непрерывно зависит от t.*

Доказательство. Докажем непрерывность $\rho_t(A,B)$ в некоторой точке $t_0 \in [0,1]$. В силу связности многообразия существует кусочно-гладкая кривая $\gamma_1 : [0,1] \to M$ такая, что $\gamma_1(0) = A$, $\gamma_1(1) = B$. Функция $l_t(\gamma_1) = \int_0^1 F_t(\gamma_1(s), \dot{\gamma}_1(s))ds$ непрерывна по переменной t на отрезке $[0,1]$, в следствие чего величина $m = \max_{t\in[0,1]} l_t(\gamma_1)$ конечна. Рассмотрим замкнутый шар $K = \{x \in M | \rho_{t_0}(A,x) \le m+1\}$, который является компактом, так как M полное. Если K совпал с M, то утверждение сводится к случаю компактного многообразия и вытекает из теоремы 8. Иначе, рассмотрим множество кривых L, образы которых лежат в K, один конец которых совпадает с A, а другой лежит на границе ∂K. Если $\gamma \in L$ –

кривая и P – ее конец, лежащий на ∂K, то $l_{t_0}(\gamma) \geq \rho_{t_0}(A, P) = m + 1$. Покажем, что существует $\delta > 0$ такое, что при $|t - t_0| < \delta$ выполнено $l_t(\gamma) > m$ для любой кривой $\gamma \in L$.

Предположим, что это не так, и существуют числа t_n такие, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$ для некоторого t_0, и для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует кривая γ_n такая, что $l_{t_n}(\gamma_n) \leq m$. Заметим, что K является компактным финслеровым многообразием, финслерова метрика F_t на котором непрерывно зависит от t, и образы кривых γ_n полностью лежат в K. Рассмотрим ограничение семейства функционалов длины l_t на K. Классом допустимых кривых этого ограничения является множество кусочно-гладких кривых, образы которых полностью лежат в K. Из утверждения 18 следует, что семейство функционалов длины l_t, ограниченное на компакт K, является семейством типа 2, а, значит, существует константа $C > 0$ такая, что $l_{t_0}(\gamma_n) < C$ для любого $n \in \mathbb{N}$. В силу того, что K – компакт, из теоремы Арцела-Асколи следует, что в метрике F_{t_0} из последовательности кривых γ_n можно извлечь сходящуюся подпоследовательность кривых. Перейдем к этой подпоследовательности – для каждой кривой из нее неравенство $l_{t_n}(\gamma_n) \leq m$ останется верным. Таким образом, γ_n – сходящаяся последовательность кривых в компакте K, длины которых в метрике F_{t_0} ограничены общей константой. Из утверждения 19 следует, что семейство функционалов длины l_t, ограниченное на K, является семейством типа 3, и, значит, $l_{t_n}(\gamma_n) - l_{t_0}(\gamma_n) \to 0$ при $n \to \infty$, что противоречит неравенствам $l_{t_0}(\gamma_n) \geq m + 1$ и $l_{t_n}(\gamma_n) \leq m$, которые должны были быть верны для любого $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим кривую $\gamma : [0, 1] \to M, \gamma(0) = A, \gamma(1) = B$, образ которой не лежит в K. Пусть $s_0 = \inf\{s | s \in [0, 1], \gamma(s) \notin K\}$. Ограничение кривой γ на отрезок $[0, s_0]$ – это кривая из L, а значит, $l_t(\gamma|_{[0,s_0]}) > m$ при $|t - t_0| < \delta$. Из этого следует, что $l_t(\gamma) > l_t(\gamma|_{[0,s_0]}) > m$ при $|t - t_0| < \delta$. При этом, точная нижняя грань длин всех кривых, соединяющих A и B, не превосходит m в каждой метрике F_t, $t \in [0, 1]$, а значит при $|t - t_0| < \delta$ она совпадает с точной нижней гранью длин кривых, соединяющих A и B, образы которых лежат в K. Определим $\rho_t^K(A, B) = \inf l_t(\gamma)$, где точная нижняя грань берется по всем кусочно-гладким соединяющим A и B кривым γ, образы которых лежат в K. Из теоремы 8 следует, что

$\rho_t^K(A,B)$ непрерывно по t, так как K – компакт. При этом, мы показали, что $\rho_t^K(A,B) = \rho_t(A,B)$ при $|t - t_0| < \delta$, а значит, $\rho_t(A,B)$ непрерывно в точке t_0. $\square$

Как известно, финслерова метрика является обобщением римановой метрики, где общее определение длины касательного к многообразию вектора не обязательно задается в виде квадратичного корня из симметричной билинейной формы, как это делается в римановом случае. Таким образом, результаты, полученные для финслеровых многообразий, имеют место и в случае римановых многообразий. Действительно, пусть дано k-мерное гладкое связное риманово многообразие M с метрикой ds_t^2, непрерывно зависящей от параметра $t \in [0,1]$. Подразумевается, что ds_t^2 – риманова метрика при каждом $t \in [0,1]$ и в каждой точке $x \in M$ компоненты метрического тензора $g_{ij}^t(x)$ в каждых локальных координатах непрерывно зависят от t. Аналогично, для любой пары точек $A, B \in M$ расстояние $\rho_t(A,B)$ между ними в метрике ds_t^2 определяется как точная нижняя грань длин $l_t(\gamma)$ посчитанных относительно метрики ds_t^2 кусочно-гладких кривых γ, соединяющих A и B.

Через $||\xi||_t$ обозначим норму вектора ξ, принадлежащего касательному расслоению TM к многообразию M, относительно метрики ds_t^2 . В локальных координатах $(x_1, \ldots, x_k)$, определенных в некоторой карте, эта норма записывается следующим образом:

$$||\xi||_t = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{k} g_{ij}^t(x_1, \ldots, x_k)\xi^i\xi^j},$$

где $x = (x_1, \ldots, x_k)$ – точка приложения вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$, а значит, она непрерывно зависит от t, поскольку g_{ij}^t непрерывно зависят от t. Рассмотрим на многообразии M семейство финслеровых метрик, заданных следующим равенством:

$$F_t(x,\xi) = ||\xi||_t, t \in [0,1].$$

По построению, финслерова метрика F_t непрерывно зависит от параметра $t \in [0,1]$. При этом, финслерова метрика F_t и риманова метрика ds_t^2 определяют одну и ту же функцию расстояния ρ_t и один и тот же функционал длины l_t на многообразии M. Таким образом, из утверждений 15, 16, 18, 19, 20 и теоремы 9 вытекают аналогичные результаты для римановой метрики:

Утверждение 21. *Пусть* $\gamma\colon [0,1] \to M$ *— кусочно-гладкая кривая. Тогда* $l_t(\gamma)$ *является непрерывной функцией параметра* t.

Утверждение 22. *Непрерывно зависящее от* t *семейство римановых метрик* ds_t^2 *на гладком компактном многообразии* M *задает семейство функционалов длины типа* 1.

Утверждение 23. *Непрерывно зависящее от* t *семейство римановых метрик* ds_t^2 *на гладком компактном многообразии* M *задает семейство функционалов длины типа* 2.

Утверждение 24. *Непрерывно зависящее от* t *семейство римановых метрик* ds_t^2 *на гладком компактном многообразии* M *задает семейство функционалов длины типа* 3.

Утверждение 25. *Непрерывно зависящее от* t *семейство римановых метрик* ds_t^2 *на гладком компактном многообразии* M *задает глобально непрерывное семейство функционалов длины.*

Теорема 10. *Пусть* M *– гладкое связное риманово многообразие, и его метрика* ds_t^2 *непрерывно зависит от параметра* $t \in [0,1]$. *Если риманово многообразие* (M, ds_t^2) *является полным метрическим пространством при каждом* $t \in [0,1]$, *то расстояние* $\rho_t(A,B)$ *между любыми двумя точками* $A, B \in M$ *непрерывно зависит от* t.

Глава 3

Минимальные деревья Штейнера в малых окрестностях точек римановых многообразий

Естественная непрерывная параметризация римановой метрики на многообразии определяет непрерывную зависимость длин кривых от параметра, в то время как длины минимальных сетей определяются как суммы расстояний между инцидентными вершинами. Как известно из предыдущего раздела диссертации, если многообразие является полным, то расстояния между любыми двумя точками на нем будут непрерывно зависеть от параметра. Пользуясь этим выводом, в этом разделе работы мы доказываем непрерывность длины минимального параметрического дерева заданного типа для заданной границы на римановом многообразии при непрерывном изменении римановой метрики. Мы воспользуемся свойствами этой непрерывности для изучения минимальных сетей, в частности, для поиска минимальных деревьев Штейнера для конкретных границ. В отличие от евклидова случая, на гладких римановых многообразиях минимальные деревья Штейнера для конкретных границ практически не известны. Основная цель этого раздела — определить типы минимальных деревьев Штейнера, соединяющих вершины достаточно малой произвольной границы на римановом многообразии.

Основной результат этой главы описывает бинарные типы минимальных деревьев Штейнера для произвольных малых границ на римановом многообразии. В качестве приложения основного результата, мы решаем задачу поиска минимальных деревьев Штейнера для некоторых конкретных границ. Мы определяем правильный многоугольник на римановом многообразии, и, пользуясь основной теоремой, описываем конкретные бинарные типы, реализующие минимальные деревья Штейнера для вершин достаточно малого правильного многоугольника на многообразии. Как следствие, мы показываем, что на любом полном двумерном гладком римановом многообразии для каждого $n \geq 7$ существует достаточно малая окрестность точки X_0, такая, что для любого лежащего в ней правильного n-угольника с центром в X_0 минимальным деревом Штейнера является граница этого n-угольника без его наибольшей стороны.

3.1 Непрерывность длин минимальных параметрических сетей в ограниченно компактных пространствах

Пусть (X, ρ_t) — метрическое пространство при каждом $t \in [0, 1]$. Напомним, что длину сети Γ типа G с граничными вершинами $v_i \in X, i = 1, \ldots, n$, и внутренними вершинами $s_i \in X, i = 1, ..., n-2$, в метрике ρ_t мы обозначаем через $l(t, v_1, \ldots, v_n, s_1, \ldots, s_{n-2}, G)$. Для удобства, мы будем записывать величину $l(t, v_1, \ldots, v_n, s_1, \ldots, s_{n-2}, G)$ в виде $l(t, V, S, G)$, где $S = (s_1, \ldots, s_{n-2})$ – множество внутренних вершин сети, и $V = (v_1, \ldots, v_n)$ – множество граничных вершин сети. Также напомним, что длину минимальной параметрической сети типа G с множеством граничных вершин V мы обозначаем через $l_t^{\min}(V, G)$:

$$l_t^{\min}(V, G) = \inf_{S \in X^{n-2}} l(t, V, S, G).$$

В случаях, когда граничные вершины фиксированы, величину $l_t^{\min}(V, G)$ мы будем записывать в виде $l_t^{\min}(G)$, а величину $l(t, V, S, G)$ – в виде $l(t, S, G)$.

Утверждение 26. *Пусть X и Y — метрические пространства, Y — компактно, а $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда функции $g(x) = \inf_{y \in Y} f(x, y)$ и $h(x) = \sup_{y \in Y} f(x, y)$ — непрерывны.*

Доказательство. Пусть функция $g(x)$ разрывна в точке x^*. Рассмотрим последовательность $x_i \in X$, $i \in \mathbb{N}$, $x_i \to x^*$ при $i \to \infty$, такую, что для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнено $|g(x_i) - g(x^*)| > \varepsilon$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Далее, в силу компактности Y, рассмотрим точку $y^* \in Y$ и последовательность $y_i \in Y$, $i \in \mathbb{N}$, такие, что $g(x^*) = f(x^*, y^*)$ и $g(x_i) = f(x_i, y_i)$, и в последовательности y_i, $i \in \mathbb{N}$, выделим сходящуюся к некоторой точке y' подпоследовательность (без ограничения общности, будем считать, что $y_i \to y'$ при $i \to \infty$). Таким образом, $|f(x^*, y') - f(x^*, y^*)| \geq \varepsilon$, а в силу того, что $g(x^*) = f(x^*, y^*)$, имеем $f(x^*, y') \geq f(x^*, y^*) + \varepsilon$, следовательно, при $i > I_1$ для некоторого $I_1 \in \mathbb{N}$ выполнено $f(x_i, y_i) > f(x^*, y^*) + \varepsilon/2$. При этом, при $i > I_2$ для некоторого $I_2 \in \mathbb{N}$ выполнено $f(x_i, y^*) < f(x^*, y^*) + \varepsilon/2$. В итоге, при $i > \max(I_1, I_2)$ выполняется $f(x_i, y^*) < f(x_i, y_i)$, что противоречит выбору y_i. Таким образом, $g(x)$ — непрерывная функция. Аналогично показывается непрерывность $h(x)$. □

Теорема 11. *Пусть ρ_t — непрерывное семейство метрик на X (для любых $x, y \in X$ функция $\rho_t(x, y)$ непрерывна по $t \in [0, 1]$). Пусть при всех t пространство (X, ρ_t) ограниченно компактно. Тогда длина каждой минимальной параметрической сети $l_t^{\min}(V, G)$ непрерывно зависит от t.*

Доказательство. Из условия следует, что $l(t, V, S, G)$ непрерывна по переменным V, S и по переменой t. При этом, точная нижняя грань $l_t^{\min}(V, G) = \inf_{S \in X^{n-2}} l(t, V, S, G)$ достигается в силу того, что X — ограниченно компактно при всех $t \in [0, 1]$. Искомый результат следует из утверждения 26. □

3.2 Типы минимальных деревьев Штейнера в малых окрестностях точек полных римановых многообразий

В дальнейшем мы будем рассматривать гладкое связное полное риманово многообразие M_k размерности k. Рассмотрим однопараметрическое непрерывное по t семейство ds_t^2 римановых метрик на M_k, $t \in [0, 1]$, такое, что при любом t рассматриваемое метрическое пространство является полным. Через $\rho_t(A, B)$ будем обозначать расстояние между точками $A, B \in M_k$ относительно метрики ds_t^2. Из результатов предыдущей главы (утверждение 21 и теорема 10) следует, что длина $l_t(\gamma)$ любой кусочно-гладкой спрямляемой кривой γ и расстояние $\rho_t(A, B)$ зависят от t непрерывно. Таким образом, из теоремы 11 вытекает следующий результат.

Следствие 3. Величина $l_t^{\min}(V, G)$ непрерывно зависит от t в случае полного риманова многообразия.

Далее, докажем несколько утверждений, необходимых для доказательства основной теоремы этой главы.

Утверждение 27. *Пусть $l_c(t, S, G)$ — длина реализации графа G относительно метрики $c^2 \cdot ds_t^2, c > 0$. Обозначим $l_{c,t}^{\min}(G) = \inf_{S \in M_k^{n-2}} l_c(t, S, G)$. Тогда $l_{c,t}^{\min}(G) = c \cdot l_t^{\min}(G)$.*

Доказательство. Если $\gamma(t)\colon [a, b] \to M_k$ — кусочно-гладкая кривая, а $l_{c,t}(\gamma)$ — ее длина относительно метрики $c^2 \cdot ds_t^2$, то

$$l_{c,t}(\gamma) = \int\limits_a^b c|\dot{\gamma}(t)|_{ds_t^2} dt = c \cdot l_t(\gamma).$$

При этом, расстояние между точками — это точная нижняя грань длин кусочно-гладких кривых, соединяющих эти точки, а длина реализации графа — это сумма расстояний между определенными вершинами, откуда следует, что $l_c(t, S, G) = c \cdot l(t, S, G)$. Таким образом,

$$l_{c,t}^{\min}(G) = \inf_{S \in M_k^{n-2}} l_c(t, S, G) = \inf_{S \in M_k^{n-2}} c \cdot l(t, S, G) = c \cdot l_t^{\min}(G),$$

Из чего следует требуемое равенство $l_{c,t}^{\min}(G) = c \cdot l_t^{\min}(G)$. □

Обозначим через $d_t(D)$ диаметр подмножества $D \subset M_k$ относительно метрики ds_t^2.

Утверждение 28. *Если D — компакт, то величина $d_t(D)$ непрерывно зависит от t.*

Доказательство. По определению $d_t(D) = \sup_{x,y\in D}\{\rho_t(x,y)\}$. При этом, $\rho_t(x,y)$ непрерывна по совокупности своих переменных. В силу компактности D требуемое вытекает из утверждения 26. $\square$

Величину $d_{max}(D) = \max_{t\in[0,1]} d_t(D)$ будем называть *максимальным диаметром* компакта D. В силу предыдущего утверждения она определяется корректно.

Утверждение 29. *Пусть $D \subset M_k$, D — компакт. Тогда для фиксированных $t, t_0 \in [0,1]$ существует $C > 0$ такое, что для любых точек $x, y \in D$ выполнено $\rho_t(x,y) < C\rho_{t_0}(x,y)$.*

Доказательство. Известно, что метрики ρ_{t_0} и ρ_t задают одну и ту же топологию. Это значит, что биективное отображение метрических пространств $f\colon (D,\rho_{t_0}) \to (D,\rho_t)$, переводящее все точки в себя, является непрерывным. Действительно, прообраз открытого относительно ρ_t множества U открыт относительно ρ_{t_0}, так как совпадает с U. Поскольку D — компакт, то отображение f является $C-$липшицевым для некоторой константы C, то есть $\rho_t(x,y) < C\rho_{t_0}(x,y)$ для любых точек $x, y \in D$. $\square$

Утверждение 30. *Пусть $D \subset M_k$, D — компакт, $X \in D$. Тогда для заданного $\varepsilon > 0$ существует компакт D_0, содержащий точку X и лежащий в D, такой, что $d_{max}(D_0) < \varepsilon$.*

Доказательство. Зафиксируем $t_0 \in [0,1]$. В соответствии с утверждением 29 для некоторого $t \in [0,1]$ найдется $C > 0$ такое, что $\rho_t(x,y) < C\rho_{t_0}(x,y)$ для любых точек $x, y \in D$. Пусть B_r — компактный шар радиуса r с центром в точке X относительно метрики ρ_{t_0}, лежащий в D. Заметим, что $d_t(B_r) \le Cd_{t_0}(B_r)$, следовательно, выбрав r таким, чтобы $d_{t_0}(B_r) < \frac{\varepsilon}{2C}$, получим, что $d_t(B_r) < \varepsilon$. Таким образом, для каждого $t' \in [0,1]$ существует компакт $D_{t'}$, содержащий точку X и лежащий в D, для которого выполнено $d_{t'}(D_{t'}) < \varepsilon$. Следовательно, в силу непрерывности $d_t(D_{t'})$ по переменной t, у каждого t' существует окрестность $U(t') \subset [0,1]$ такая, что при $t \in U(t')$ выполнено $d_t(D_{t'}) < \varepsilon$. В силу компактности отрезка $[0,1]$ выделим его конечное покрытие этими окрестностями $U_1, \ldots, U_l$. Пересечение соответствующих этим окрестностям компактов $D_1, \ldots, D_l$ является компактом, содержащим точку X.

Назовем его D_0. Каждое t принадлежит некоторой окрестности U_i из конечного покрытия отрезка, а, значит, $d_t(D_0) \le d_t(D_i) < \varepsilon$. Следовательно, для любого $t \in [0,1]$ диаметр $d_t(D_0) < \varepsilon$, из чего следует, что $d_{max}(D_0) < \varepsilon$. $\square$

Пусть $O \in M_k$ и $x^1, \dots, x^k$ — локальные координаты в некоторой окрестности W точки O, такие, что $O = (0, \dots, 0)$, и в этих координатах множество W — звездно, т.е. для любой точки $(x_*^1, x_*^2, \dots, x_*^k) \in W$ и для любого $C \in [0,1]$ точка $(C\,x_*^1, C\,x_*^2, \dots, C\,x_*^k)$ корректно определена и лежит в W. Пусть метрика многообразия ds_1^2, заданная на карте W, в данных координатах задается матрицей $g_{ij}^1(x^1, x^2, \dots, x^k)$. Пусть также в карте W заданы n граничных точек.

Рассмотрим произвольный компактный шар D относительно метрики ds_1^2 с центром в O, содержащийся в W. Пусть S — его граница, которая, в свою очередь, тоже является компактом. Для компакта D', содержащегося в D, рассмотрим величину $L(D') = \inf\{d_t(x,y) \Big| x \in D', y \in S, t \in [0,1]\}$. Заметим, что если $D_1 \subset D_2$, то $L(D_1) \ge L(D_2)$. Рассмотрим некоторый компакт D', для которого $L(D') > 0$. Из утверждения 30 следует, что существует компакт D_0, вложенный в D', такой, что $(n-1)d_{max}(D_0) < L(D') \le L(D_0)$. Пусть данные n граничных точек лежат в D_0.

Заметим, что длина любого минимального остовного дерева, соединяющего данную границу, относительно любой метрики семейства ds_t^2, $t \in [0,1]$ не превосходит $(n-1)d_{max}(D_0)$, при этом длина любой сети, соединяющей данную границу и выходящей за пределы D, больше $L(D_0)$. Таким образом, кратчайшие сети, соединяющего данную границу, содержатся среди сетей, лежащих полностью в D. Это заключение позволяет в дальнейшем перейти к рассмотрению сетей, полностью лежаших в карте W, и провести доказательство теоремы 12 в координатах этой карты.

Рассмотрим на W евклидову метрику, индуцированную евклидовой метрикой касательного пространства к многообразию M_k в точке O. Ясно, что для евклидовой метрики при преобразовании подобия границы типы минимальных деревьев Штейнера не меняются. Пусть минимальные деревья Штейнера для данной границы в этой евклидовой метрике известны, а $G_1, \dots, G_p$ — их типы (их может быть несколько). *Операцией сжатия в C раз* назовем изменение данной границы, точки которой имели координаты $(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^k), i = 1, \dots, n$, на границу, точки которой имеют координаты $(x_i^1, x_i^2, \dots x_i^k)/C, i = 1, \dots, n$. Теперь мы сформулируем основной результат главы и приведем его доказательство.

Теорема 12. *Существует окрестность U точки O такая, что для каждого граничного множества из n точек, содержащегося в U, найдется $C_0 > 0$ такое, что для этого граничного множества, сжатого в C раз при каждом $C > C_0$, типы минимальных деревьев Штейнера относительно метрики ds_1^2 принадлежат множеству $\{G_1, \dots, G_p\}$.*

Доказательство. Пусть окрестность U совпадает с внутренностью построенного выше компакта D_0. Рассмотрим непрерывную по t гомотопию метрики

$$g_{ij}^t(x^1, x^2, \dots, x^k) = g_{ij}^1(tx^1, tx^2, \dots, tx^k),\ t \in [0, 1]. \tag{3.2.1}$$

При $t = 1$ — это исходная метрика ds_1^2. Метрика $g_{ij}^0(x^1, x^2, \dots, x^k)$ задается постоянной матрицей Q_0, равной матрице метрики многообразия в точке O. Матрица Q_0 — положительно определенная, симметрическая, невырожденная, а, значит, метрика $g_{ij}^0(x^1, x^2, \dots, x^k)$ — евклидова. Таким образом, в рассматриваемой метрике, при $t = 0$, $G_1, \dots, G_p$ — типы минимальных деревьев Штейнера для данной границы. В результате, для данной границы выполнено

$$l_0^{\min}(G_1) = l_0^{\min}(G_2) = \dots l_0^{\min}(G_p) < l_0^{\min}(G'),$$

для любого типа G', отличного от $G_1, \dots, G_p$.

Так как функция $l_t^{\min}(G)$ непрерывна по t, то существует $t_0 > 0$ такое, что при $t < t_0$, при каждом $i = 1, \dots, p$, и каждом бинарном типе $G' \notin \{G_i\}_{i=1}^p$ выполняется $l_t^{\min}(G_i) < l_t^{\min}(G')$, так как таких бинарных типов — конечное количество.

Положим $C_0 = 1/t_0$. Покажем, что при $C > C_0$ для данной границы, сжатой в C раз, выполнено утверждение теоремы. Положим $t = 1/C$ и заметим, что $t = 1/C < 1/C_0 = t_0$.

Пусть $(x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^k), i = 1, \ldots, n,$ — координаты точек исходной границы. Ясно, что $(x_i^1, x_i^2, \ldots x_i^k)/C, i = 1, \ldots, n,$ — координаты точек сжатой границы. Введем новые координаты $(u^1, u^2, \ldots, u^k) : u^j = C\, x^j, j = 1, \ldots, k.$

Заметим, что в новой системе координаты точек сжатой границы равны $(u_i^1, u_i^2, \ldots, u_i^k) = (C \cdot x_i^1, C \cdot x_i^2, \ldots, C \cdot x_i^k)/C = (x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^k)$, а метрика ds_1^2 в новых координатах примет вид

$$ds_1^2 = \sum_{i,j=1}^{k} g_{i\,j}^1(x)\, dx^i\, dx^j = t^2 \sum_{i,j=1}^{k} g_{i\,j}^1(t\,u)\, du^i\, du^j =$$

$$= t^2 \sum_{i,j=1}^{k} g_{ij}^t(u)\, du^i\, du^j = t^2 ds_t^2.$$

то есть совпадет с метрикой $t^2 \cdot ds_t^2$. Итак, в новой системе координат мы имеем границу с исходными координатами и метрику $t^2 \cdot ds_t^2$ при $t < t_0$. Как было отмечено ранее, для этой границы при таких t выполнено

$$l_t^{\min}(G_i) < l_t^{\min}(G'),\ i = 1, \ldots, p,\ \text{тогда при } a > 0$$

$$a \cdot l_t^{\min}(G_i) < a \cdot l_t^{\min}(G'),\ i = 1, \ldots, p, \text{что равносильно}$$

$$l_{a,t}^{\min}(G_i) < l_{a,t}^{\min}(G'),\ i = 1, \ldots, p,\ \text{при } a > 0,\ \text{в частности, при } a = t.$$

Из этого следует, что в старой системе координат для сжатой границы и метрики ds_1^2 выполнено

$$l_1^{\min}(G_i) < l_1^{\min}(G'),\ i = 1, \ldots, p,$$

так как это — одно и то же соотношение, записанное в разных системах координат. Значит, при $C > C_0$ для данной границы, сжатой в C раз, типы минимальных деревьев Штейнера принадлежат множеству $\{G_1, \ldots, G_p\}$. □

Пусть ds_0^2 — евклидова метрика в карте W, а F — семейство граничных множеств, лежащих в карте W, полученных из фиксированной n-точечной границы B_0 всевозможными вращениями вокруг точки $O = (0, \ldots, 0)$ и гомотетиями с центром в O в координатах $x^1, \ldots, x^k$, относительно метрики ds_0^2 (все границы из F “подобны” относительно евклидовой метрики).

Теорема 13. *Существует такая окрестность U точки O, что для любой границы $B \subset U, B \in F$, множество типов кратчайших (в метрике многообразия) деревьев, соединяющих B, содержится среди типов кратчайших (в евклидовой метрике) деревьев, соединяющих множество $B \in F$ в евклидовой метрике.*

Доказательство. Рассмотрим гомотопию метрики 3.2.1. Пусть $D \subset W$ — замкнутый шар с центром в нуле относительно метрики ds_0^2, а $F_0 \subset F$ — семейство граничных множеств в W, полученных из границы B_0 всевозможными вращениями вокруг точки O относительно метрики ds_0^2. Пусть Ω — множество типов кратчайших деревьев, соединяющих B_0 в метрике ds_0^2. Можем считать, что $B_0 \in D^n$ (а, значит, и $B \in D^n$ для любого $B \in F_0$). Таким образом, в силу равномерной непрерывности функции $l_t^{\min}(V, G)$ на компакте $[0,1] \times D^n$, для заданного $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0 > 0$ такое, что при $|t| < \delta_0$ выполнено неравенство $\left|l_t^{\min}(V, G) - l_0^{\min}(V, G)\right| < \varepsilon$ для любого типа G и любой границы $V = B$, $B \in F_0$ (так как бинарных типов G — конечное количество). Заметим, что Ω — множество типов кратчайших деревьев (в евклидовой метрике), соединяющих границу B для любой $B \in F$, а длины минимальных параметрических сетей одного и того же типа (в евклидовой метрике) для всех границ $B \in F_0$ равны. Пусть $\varepsilon_0 = \min_{G \in \Omega,\, G' \notin \Omega}\left|l_0^{\min}(B^0, G') - l_0^{\min}(B^0, G)\right|$. Выберем $\varepsilon = \varepsilon_0/3$, тогда для соответствующего $\delta > 0$ при $|t| < \delta$ получим, что в метрике ds_t^2 для любой границы $B \in F_0$, множество типов кратчайших деревьев, соединяющих B, содержится в Ω. Тогда, согласно теореме 12, для каждой границы $B \in F_0$, сжатой в C раз при $C > C_0 = 1/\delta$, типы минимальных деревьев Штейнера (относительно метрики ds_1^2) принадлежат множеству Ω. Это и означает существование окрестности U точки O такой, что для любой границы $B \subset U, B \in F$, множество типов кратчайших деревьев, соединяющих B, содержится среди типов кратчайших деревьев, соединяющих множество $B \in F$ в евклидовой метрике. $\square$

3.3 Минимальные деревья Штейнера для правильных многоугольников на римановых многообразиях

Рассмотрим касательное пространство к многообразию M_k в точке O и выберем в нем двумерную плоскость Π. Определим множество вершин правильного n-угольника с центром в O на многообразии M_k как образ множества вершин правильного n-угольника с центром в O, лежащего в плоскости Π, при экспоненциальном отображении (таким образом, мы определяем правильный многоугольник на многообразии лишь в некоторой окрестности точки O; экспоненциальное отображение позволяет рассматривать в этой окрестности евклидову метрику). *Радиусом* правильного многоугольника на многообразии будем называть расстояние от любой его вершины до его центра.

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — вершины правильного многоугольника на многообразии, O — его центр. Рассмотрим сеть, соединяющую $A_1, A_2, \dots, A_n$, тип которой — бинарное дерево с вершинами $\{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_{n-2}\}$ (B_i — внутренние вершины сети) и множеством ребер $\big\{(B_i, B_{i+1}), i = 1, \dots, n-3, (B_j, A_{j+1}), j = 1, \dots, n-2, (B_1, A_1), (B_{n-2}, A_n)\big\}$. Обозначим этот тип через G_1 (рис. 3.1). Заметим, что граница многоугольника без стороны A_1A_n — сеть бинарного типа G_1 (некоторые ребра вырождены). Тогда кратчайшее дерево в классе сетей бинарного типа G_1 является минимальным деревом Штейнера относительно евклидовой метрики. В случаях $n = 3$, 4, 5 это проверяется непосредственно. Случай $n \geq 6$ вытекает из следующей теоремы.

Теорема 14. (*Jarnik, Kössler [18], Du, Hwang, Weng [19]*) *При $n \geq 6$ минимальным деревом Штейнера для вершин правильного n-угольника на евклидовой плоскости является его граница без любой стороны.*

Заметим, что при $n \geq 6$ существует еще $n-1$ бинарное дерево, изоморфное G_1 (обозначим их $G_2, \dots, G_n$), такое, что граница многоугольника без стороны A_iA_{i+1} есть кратчайшее дерево в классе сетей бинарного типа G_{i+1}, $i = 1, \dots, n-1$, относительно евклидовой метрики (при $n = 3$ тип, реализующий минимальное дерево Штейнера, единствен-

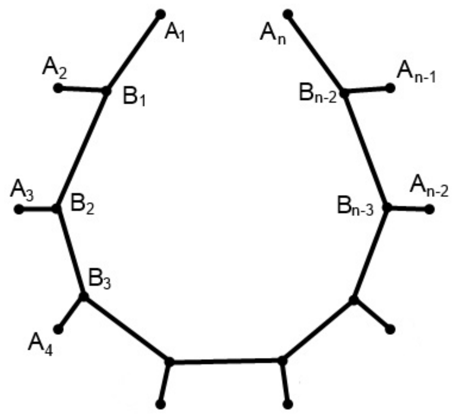

Рис. 3.1: Граф G_1.

ный; при $n = 4$ их два; при $n = 5$ их 5, но в этих случаях минимальные деревья Штейнера не являются границами без стороны). Обозначим через Ω_n множество типов, реализующих минимальные деревья Штейнера для вершин правильного n-угольника в евклидовой метрике ($\Omega_n = \{G_1, \ldots, G_n\}$). Из теорем 13 и 14 получается следующий вывод.

Следствие 4. Для данного n существует $r_0 > 0$ такое, что для вершин любого правильного n-угольника с центром в O и радиусом $r < r_0$ на римановом многообразии M_k типы минимальных деревьев Штейнера принадлежат множеству Ω_n.

В дальнейшем будем рассматривать двумерное полное гладкое риманово многообразие M_2. Мы покажем, что при $n \geq 7$ для каждой точки $O \in M_2$ существует $r_0 > 0$ такое, что кратчайшей сетью, соединяющей вершины любого правильного n-угольника с центром в O и радиусом $r < r_0$ является граница правильного n-угольника без наибольшей его стороны. Расстояние между точками A, $B \in M_2$ будем обозначать $\rho(A, B)$. Будем говорить, что множество V точек многообразия *выпукло*, если каждая пара его точек содержится в V вместе с любой кратчайшей кривой, соединяющей эти точки. *Выпуклой оболочкой* $\operatorname{conv} V$ множества V будем называть наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее V.

В первую очередь, заметим, что для каждой точки $X \in M_2$ существует $r_X > 0$ такое, что при $r < r_X$ окрестность $U(X, r) = \{Y \in$

$M_2 \big| \rho(X,Y) < r\}$ гомеоморфна $\mathbb{R}^2$ и является выпуклой, причем любые две точки A, $B \in U(X,r)$ соединены единственной геодезической, лежащей в $U(X,r)$, и ее длина равна $\rho(A,B)$. Данный результат можно найти в [38, § 3, теорема 3.6]. Эту геодезическую будем называть отрезком, соединяющим A и B. Для каждой точки $X \in M_2$ будем обозначать $U(X) = U(X,r)$ при некотором $0 < r < r_X$.

Рассмотрим замкнутую кривую γ без самопересечений, образ которой находится в $U(X)$. По теореме Жордана, кривая γ делит $U(X)$ на две области. Областью, ограниченной кривой γ, будем называть ту из них, что не прилегает к $\partial U(X)$. *Многоугольником* в $U(X)$ будем называть замыкание области, ограниченной некоторой кусочно-геодезической замкнутой кривой без самопересечений.

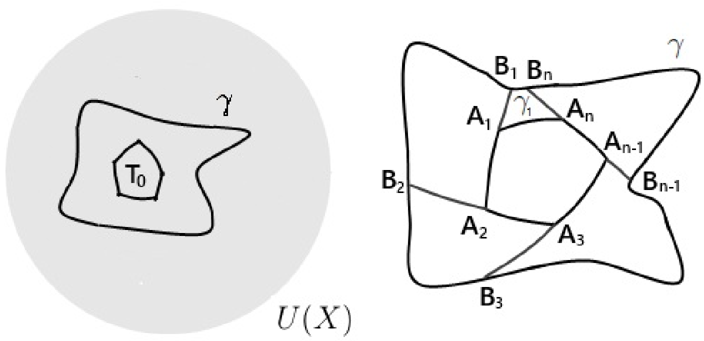

Рис. 3.2: Периметр T_0 не больше длины кривой γ.

Утверждение 31. *Пусть γ — замкнутая кривая без самопересечений в $U(X)$, и в области, ограниченной кривой γ, лежит выпуклый многоугольник T_0 (его вершины и стороны могут принадлежать образу кривой γ). Тогда периметр многоугольника T_0 не превосходит длины кривой γ, причем равенство достигается лишь тогда, когда граница многоугольника совпадает с образом этой кривой.*

Доказательство. При обходе вдоль границы многоугольника T_0 назовем его вершины $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (рис. 3.2). Продолжим отрезок A_1A_2 за вершину A_1, а отрезок $A_{n-1}A_n$ за вершину A_n. В силу выпуклости T_0, рассматриваемые продолжения либо пересекутся друг с другом (в этом случае мы получим выпуклый многоугольник с $n-1$ вершиной, периметр которого больше периметра T_0, так как сторона A_1A_n многоугольника T_0 — кратчайшая; проделаем с ним то же самое), либо каждое пересечет кривую γ. Первое пересечение продолжения отрезка A_1A_2 с кривой γ назовем B_1, а первое пересечение продолжения отрезка $A_{n-1}A_n$ с кривой γ назовем B_n. Точки B_1 и B_n делят кривую γ на две части. Ту часть, которая в объединении с отрезками $B_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-2}A_{n-1}, A_{n-1}B_n$ является замкнутой кривой (без самопересечений), ограничевающей область, в которой содержится T_0, назовем γ_1 (вырожденный случай — B_1 совпадает с B_n, и γ_1 вырождается в точку). Фигуру, границей которой является эта замкнутая кривая, а T_0 лежит внутри нее, назовем T_1. Длина границы T_1 не меньше периметра T_0, так как сторона A_1A_n многоугольника T_0 — кратчайшая, причем равенство достигается лишь тогда, когда кривая γ_1 совпадает со стороной A_1A_n многоугольника T_0. Далее, продолжим отрезок A_2A_3 за вершину A_2 до первого пересечения с кривой γ, которое назовем B_2. Аналогично, рассмотрим фигуру T_2, содержащую фигуру T_1, граница которой отличается от границы T_1 тем, что отрезок A_2B_1 заменен на объединение отрезка A_2B_2 и соответствующей части кривой γ, соединяющей B_1 и B_2. Длина границы T_2 не меньше длины границы T_1, так как отрезок A_2B_1, принадлежащий ∂T_1, является кратчайшей. Продолжая этот процесс, на $n-1$ шаге мы рассмотрим фигуру T_{n-1}, граница которой — объединение части кривой γ и отрезка $B_{n-1}B_n$ (длина этой границы не меньше длин границ фигур T_k при $k < n-1$). Так как этот отрезок — кратчайшая, то длина всей кривой γ не меньше длины границы T_{n-1}. Таким образом, мы показали, что длина кривой γ не меньше периметра T_0, и равенство достигается лишь тогда, когда граница многоугольника T_0 совпадает с образом этой кривой.

$\square$

Утверждение 32. *Пусть V — конечное множество точек в $U(X)$. Тогда выпуклая оболочка* $\operatorname{conv} V$ *этого множества является выпуклым многоугольником (возможно, вырожденным).*

Доказательство. Случай, в котором все точки множества V лежат на одной геодезической, является тривиальным. Пусть все точки множества V не лежат на одной геодезической. Рассмотрим интервал геодезической, концы которого лежат на $\partial U(X)$. Он делит $U(X)$ на две области.

Объединение одной области с этим интервалом геодезической будем называть *полуокрестностью*. Заметим, что полуокрестность является выпуклой. Отрезок, соединяющий пару точек из V, будем называть *граничным*, если он не проходит через другие точки множества V, и все точки множества V лежат в одной из двух полуокрестностей, образованных геодезической, являющейся продолжением этого отрезка.

Заметим, что каждая точка множества V либо не является концом никакого граничного отрезка, либо является концом ровно двух граничных отрезков. Действительно, пусть AB — граничный отрезок, A, $B \in V$. Рассмотрим некоторую точку $C \in V$. Если отрезок AC не является граничным, то в полуокрестности, образованной продолжением этого отрезка, и не содержащей точку B, лежит некоторая точка C_1 множества V. Перейдем к ее рассмотрению и проделаем ту же процедуру. Заметим, что в полуокрестности, образованной продолжением отрезка AC_1, и содержащей точку B, лежит точка C. Так как множество V конечно, через конечное количество шагов мы придем к рассмотрению некоторой точки C_0 такой, что отрезок AC_0 является граничным, $B \neq C_0$. При этом ясно, что точка A не может являться концом трех граничных отрезков. Действительно, в таком случае продолжение одного из них разделяло бы различные концы двух других.

Рассмотрим граничный отрезок A_0A_1 и полуокрестность Q_0, образованную продолжением этого отрезка, содержащую все точки множества V. Пусть A_1A_2 — второй граничный отрезок, концом которого является точка A_1. Добавим к отрезку A_0A_1 отрезок A_1A_2, и назовем γ_1 кусочно-геодезическую кривую, образом которой является их объединение. Пересечение Q_0 и полуокрестности, образованной продолжением отрезка A_1A_2, содержащей все точки множества V, назовем Q_1. Продолжая данную процедуру, на некотором шаге мы получим замкнутую кусочно-геодезическую кривую γ_k без самопересечений, и множество Q_k, являющееся выпуклым как пересечение выпуклых полуокрестностей. При этом Q_k является замыканием области, ограниченной γ_k. Таким образом, Q_k является выпуклым многоугольником с границей γ_k, вершины которого — некоторые точки множества V, и все точки из V содержатся в Q_k. Из этого следует, что $\operatorname{conv} V \subseteq Q_k$. При этом, образ γ_k лежит в

$\operatorname{conv} V$, так как является объединением отрезков, соединяющих точки из V. Любая внутренняя точка $F \in Q_k$ также лежит в $\operatorname{conv} V$, так как лежит на некотором отрезке, концы которого лежат на γ_k. Таким образом, $Q_k \subseteq \operatorname{conv} V$. Это означает, что Q_k совпадает с $\operatorname{conv} V$.

$\square$

Теорема 15. *Для фиксированных $n \in \mathbb{N}$ и точки $X \in M_2$ существует ее окрестность $U_0(X)$ такая, что для любого множества из n точек V, содержащегося в $U_0(X)$, кратчайшая сеть, соединяющая V, лежит в выпуклой оболочке* conv V *множества V.*

Доказательство. Рассмотрим окрестность $U(X)$, используемую в утверждении 31. Обозначим ее радиус через r. Рассмотрим также окрестность $U_0(X, r_0) = \{Y \in M_2 \big| \rho(X, Y) < r_0\}$ при некотором r_0, удовлетворяющем неравенству $(2n-3)\, r_0 < r$. Для любого множества V, состоящего их n точек и содержащегося в $U_0(X)$, длина любого минимального остовного дерева, соединяющего V, не превосходит $2\,(n-1)\, r_0$, следовательно, по определению r_0, она меньше, чем $r - r_0$. Таким образом, длина любого минимального остовного дерева, соединяющего V, строго меньше, чем длина любой сети, соединяющей V, образ которой не содержится полностью в $U(X)$, так как эта длина больше или равна $r - r_0$. Из этого следует, что образ кратчайшей сети, соединяющей любое $n-$точечное множество V, содержащееся в $U_0(X)$, полностью лежит в $U(X)$. В дальнейшем будем рассматривать только сети, образы которых лежат в $U(X)$.

В соответствии с утверждением 32 выпуклая оболочка conv V множества V является выпуклым многоугольником, обозначим его через M. Пусть H — сеть типа дерево, соединяющая множество V, не лежащая в M, ребра которой — отрезки. Покажем, что существует более короткая сеть. Для удобства изложения будем отождествлять сеть и ее образ на многообразии.

Пусть H целиком содержится в $U(X)$. Пусть Q — вершина сети H, не лежащая в M. Множество всех точек первого входа в M путей из Q к вершинам V по ребрам сети H обозначим E. Из Q выходит не менее двух ребер сети H, а, значит, существуют две различные вершины множества V такие, что пути до них от вершины Q содержат эти ребра соответственно, следовательно, множество E содержит хотя бы две точки. Пусть K, $N \in E$. Кривую, которая соединяет точки K и N и лежит в сети H (такая кривая единственна, так как тип сети — дерево), назовем γ. Заметим, что эта кривая полностью не лежит в M. Точки K и N разбивают границу M на две ломаных. Ту из них, что в объединении с кривой γ дает замкнутую кривую, не разделяющую внутренность M и границу $\partial U(X)$, назовем γ_0. Будем говорить, что кривая γ_0, лежащая на ∂M, *соответствует* паре K, $N \in E$ (рис. 3.3).

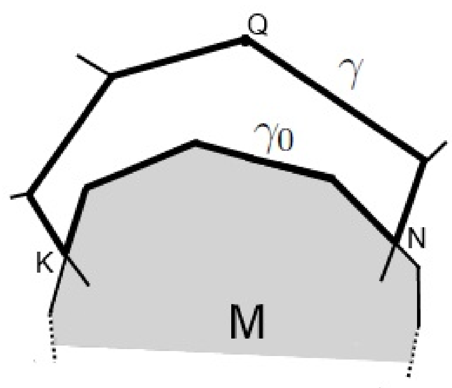

Рис. 3.3: кривая γ_0, соответствующая паре K, $N \in E$.

Рассмотрим точку $K \in E$. Пусть она лежит на ребре AB многоугольника M и не совпадает с B. Пересечение малой окрестности точки K, не содержащей других точек из E, с отрезком KB назовем l. Пусть E_1 — множество точек $N_i \in E$ таких, что кривые, лежащие на ∂M и соответствущие парам K, N_i, содержат отрезок l, а $E_2 = E \setminus E_1$. Для любых двух кривых, соответствующих парам K, N_i и K, N_j при N_i, $N_j \in E_1$, образ одной из них содержит в себе образ другой. Аналогичное верно для E_2. Таким образом, в силу конечности E, выберем в E_1 точку N_1 такую, что образ кривой, соответствующей паре K, N_1, содержит в себе образы кривых, соответствующих всем парам K, N_i при $N_i \in E_1$. Выберем точку $N_2 \in E_2$ с аналогичным свойством. Если E_1 пусто, то вместо N_1 выберем K, причем $K \neq N_2$, так как E содержит хотя бы две точки. Таким образом, образ кривой, соответствующей паре N_1, $N_2 \in E$, содержит в себе образ соответствующей кривой для любой другой пары точек из E. Будем считать, что K и N, рассмотренные ранее — и есть пара точек N_1, $N_2 \in E$.

Заметим, что у каждого пути от точки Q до некоторой точки множества V по сети H точка первого входа в M лежит на γ_0, так как лежит на некоторой соответствующей кривой, образ которой содержится в образе γ_0. Таким образом, в сети H участок γ с выходящими из него путями до γ_0 можно заменить на кривую γ_0, и получится более короткая сеть. Действительно, в области, ограниченной кривой $\gamma \cup KN$, лежит выпуклый многоугольник с границей $\gamma_0 \cup KN$. Согласно утверждению 31, его периметр меньше длины кривой $\gamma \cup KN$ (она лежит в $U(X)$). Это означает, что длина γ больше длины γ_0. Таким образом, после описанной выше замены действительно получится более короткая сеть, и эта сеть соединяет вершины V.

$\square$

Следствие 5. Пусть многообразие M_2 гомеоморфно $\mathbb{R}^2$, любые две точки $A, B \in M_2$ соединены единственной геодезической, длина которой равна $\rho(A, B)$, а V — конечное множество точек из M_2. Тогда кратчайшая сеть, соединяющая V, лежит в выпуклой оболочке $\operatorname{conv} V$ множества V.

Замечание 2. Примером таких многообразий являются евклидова плоскость и плоскость Лобачевского.

Следствие 6. Пусть конечное множество точек двумерной сферы V содержится в открытой полусфере S. Тогда кратчайшая сеть, соединяющая V, лежит в выпуклой оболочке $\operatorname{conv} V$ множества V.

Доказательство. Полусфера S является шаровой окрестностью некоторой точки X, и может быть рассмотрена в качестве $U(X)$. Достаточно показать, что образ кратчайшей сети, соединяющей V, полностью лежит в S.

Пусть сеть H, соединяющая V, не лежит целиком в S. Часть этой сети, лежащую в дополнении S, заменим на ее отражение относительно ∂S, в результате чего получим сеть H_1 той же длины, лежащую в замыкании S. При этом, все вершины сети H_1, лежащие на ∂S — либо вершины степени 2 (соединив двух соседей каждой такой вершины сферическим отрезком, и убрав эти вершины и выходящие из нее ребра, мы перейдем к не более длинной сети без вершин степени 2 на ∂S), либо вершины степени 3, причем среди ребер, выходящих из такой вершины, найдется пара ребер, угол между которыми меньше $\frac{2\pi}{3}$, а это значит, что эту сеть можно сделать короче. $\square$

Для доказательства следующего результата воспользуемся теоремой, доказанной Александровым.

Теорема 16. (*Александров [39]*) *Если кривизна риманова многообразия R_m размерности m не больше k, то углы треугольника в R_m не больше соответствующих углов треугольника с теми же длинами сторон в плоскости постоянной кривизны k.*

Положим $C_l(X) = \{Y \in M_2 \big| \rho(X,Y) = l\}$. Ясно, что при достаточно малых $l > 0$ множество $C_l(X)$ является образом замкнутой кривой без самопересечений. В таком случае будем называть $C_l(X)$ *окружностью с центром в X и радиусом l*, а $D_l(X) = \{Y \in M_2 \big| \rho(X,Y) \le l\}$ — *кругом с центром в X и радиусом l*. Кривизну многообразия в точке $Y \in M_2$ будем обозначать $K(Y)$.

Утверждение 33. *Пусть $X \in M_2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $l_X > 0$ такое, что при любом $l < l_X$ для любых двух точек A, $B \in C_l(X)$ углы $\angle XAB$ и $\angle XBA$ треугольника AXB отличаются от $\frac{\pi - \angle AXB}{2}$ меньше, чем на ε.*

Доказательство. Рассмотрим некоторую шаровую окрестность $\tilde{U}(X)$ точки X, в которой кривизна ограничена: $|K(Y)| < K_0$ при некотором $K_0 > 0$ для любой точки $Y \in M_2$. Ясно, что существует l_0 такое, что при любом $l < l_0$ выполнено $D_l(X) \subset \tilde{U}(X)$.

Рассмотрим две точки A, $B \in C_l(X)$. Вершины треугольника с теми же длинами сторон, что и у треугольника XAB, но лежащего в плоскости постоянной кривизны K_0 (на сфере кривизны K_0, которую будем обозначать через S_{K_0}), назовем X_1, A_1 и B_1 соответственно. Треугольник XAB лежит в $\tilde{U}(X)$, значит, по теореме Александрова, его углы не больше соответствующих углов треугольника $X_1A_1B_1$. При этом, углы

$\angle A_1$ и $\angle B_1$ треугольника $X_1A_1B_1$ равны, так как это — равнобедренный треугольник на сфере.

Далее, для фиксированного $\varepsilon > 0$ выберем положительное число $l_X < l_0$ так, чтобы при любом $l < l_X$ площадь S круга $D_l(X)$ и площадь S_1 круга радиуса l на S_{K_0} были меньше $\frac{\varepsilon}{2K_0}$. По теореме Гаусса-Бонне, для треугольников XAB и $X_1A_1B_1$ выполнены следующие соотношения:

$$\pi + \int\limits_{\triangle XAB} K d\sigma = \angle X + \angle A + \angle B,$$

$$\pi + \int\limits_{\triangle X_1A_1B_1} K_0 d\sigma_1 = \angle X_1 + \angle A_1 + \angle B_1,$$

где $d\sigma$ и $d\sigma_1$ — формы площади на $\tilde{U}(X)$ и S_{K_0} соответственно.

В силу выбора l_X, имеем:

$$\left|\int\limits_{\triangle XAB} K d\sigma\right| \leq \int\limits_{\triangle XAB} |K| d\sigma < K_0 S < \varepsilon/2, \text{ а также } \left|\int\limits_{\triangle X_1A_1B_1} K_0 d\sigma_1\right| < \varepsilon/2.$$

Таким образом, $|\pi - \angle X - \angle A - \angle B| < \varepsilon/2$ и $|\pi - \angle X_1 - \angle A_1 - \angle B_1| < \varepsilon/2$. Это означает, что сумма $\angle X + \angle A + \angle B$ отличается от суммы $\angle X_1 + \angle A_1 + \angle B_1$ не более, чем на ε. Учитывая тот факт, что $\angle X_1 \geq \angle X$, $\angle A_1 \geq \angle A$, $\angle B_1 \geq \angle B$ и $\angle A_1 = \angle B_1$, получим, что углы $\angle A$ и $\angle B$ отличаются друг от друга не более, чем на ε. Это означает, что углы $\angle A$ и $\angle B$ отличаются от величины $\frac{\angle A + \angle B}{2}$ не более, чем на $\varepsilon/2$. В свою очередь, величина $\frac{\angle A + \angle B}{2}$ отличается от $\frac{\pi - \angle X}{2}$ на величину $\frac{1}{2} \int\limits_{\triangle XAB} K d\sigma$, абсолютное значение которой, как нам известно, меньше $\varepsilon/4$. Таким образом, углы $\angle A$ и $\angle B$ треугольника AXB отличаются от $\frac{\pi - \angle AXB}{2}$ меньше, чем на ε. Что и требовалось. $\square$

Следствие 7. Пусть $X \in M_2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $r' > 0$ такое, что при $n \geq 3$ и любом $r < r'$ все углы любого правильного $n-$угольника с центром в X и радиусом r отличаются от $\frac{(n-2)\pi}{n}$ меньше, чем на ε.

Доказательство. Согласно утверждению 33, для фиксированного ε выберем $r' > 0$ так, чтобы при любом $r < r'$ для любых двух точек A, $B \in C_r(X)$ углы $\angle XAB$ и $\angle XBA$ треугольника AXB отличались от $\frac{\pi - \angle AXB}{2}$ меньше, чем на $\varepsilon/2$.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — вершины правильного многоугольника с центром в X и радиусом $r < r'$, $n \geq 3$. Углы $\angle A_1XA_2$ и $\angle A_2XA_3$ равны $\frac{2\pi}{n}$ по определению правильного многоугольника. Таким образом, углы $\angle A_1A_2X$ и $\angle XA_2A_3$ отличаются от $\frac{(n-2)\pi}{2n}$ меньше, чем на $\varepsilon/2$, следовательно, угол $\angle A_1A_2A_3$ отличается от $\frac{(n-2)\pi}{n}$ меньше, чем на ε. Аналогично, каждый угол данного правильного многоугольника отличается от $\frac{(n-2)\pi}{n}$ меньше, чем на ε. □

Теорема 17. *Для точки $O \in M_2$ и данного $n \geq 7$ существует такое $r_0 > 0$, что для вершин любого правильного n-угольника с центром в O и радиусом $r < r_0$ на полном римановом многообразии M_2 минимальным деревом Штейнера является граница этого n-угольника без его наибольшей стороны.*

Доказательство. В соответствии со следствием 4 и теоремой 15, существует $r_1 > 0$ такое, что для вершин правильного $n-$угольника с центром в O и радиусом $r < r_1$ минимальные деревья Штейнера, соединяющие их, лежат в выпуклой оболочке этих вершин, а их типы принадлежат множеству Ω_n. При этом, в соответствии со следствием 7, существует $r_2 > 0$ такое, что все углы любого правильного $n-$угольника с центром в O и радиусом $r < r_2$ отличаются от $\frac{(n-2)\,\pi}{n}$ меньше, чем на $\frac{1}{42}\,\pi$. Заметим, что при $n \geq 7$ выполнено $\frac{(n-2)\,\pi}{n} \geq \frac{5}{7}\,\pi$, и, значит, величина каждого угла правильного $n-$угольника с центром в O и радиусом $r < r_2$ больше $\frac{5}{7}\,\pi - \frac{1}{42}\,\pi = \frac{29}{42}\,\pi > \frac{2}{3}\,\pi$. Таким образом, граница такого многоугольника без любой стороны — действительно локально-минимальная сеть. В результате, достаточно показать, что существует $r_0 < \min\{r_1, r_2\}$ такое, что не существует минимальных параметрических деревьев бинарных типов из Ω_n, соединяющих вершины правильного $n-$угольника с центром в O и радиусом $r < r_0$, отличных от границ этого многоугольника без соответствующих сторон.

Пусть, как и ранее, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — вершины правильного многоугольника с центром в O, r — его радиус, $r < \min\{r_1, r_2\}$. Для определенности, рассмотрим тип $G_1 \in \Omega_n$. Рассматриваемый правильный $n-$угольник обозначим через M, а сеть, совпадающую с границей M без стороны A_1A_n, через H_0. Рассмотрим локально-минимальную сеть H типа G_1, соединяющую вершины M. Ее внутренние вершины, как и ранее, обозначим через $B_1, B_2, \ldots, B_{n-2}$. Пусть внутренние вершины сети H лежат в многоугольнике M (рис. 3.4), т.е. в выпуклой оболочке его вершин (лишь в этом случае сеть H может оказаться кратчайшей). Покажем, что при достаточно малом радиусе эта сеть обязательно совпадает с H_0 (других локально-минимальных сетей типа G_1 нет).

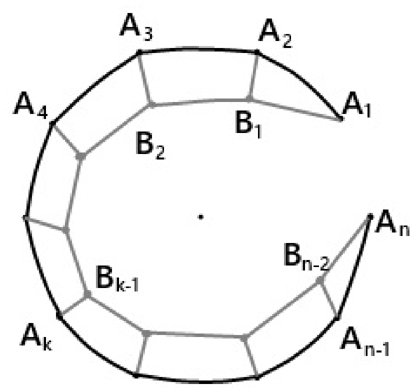

Рис. 3.4: Сеть типа G_1, соединяющая вершины правильного многоугольника.

Многоугольник $A_1B_1B_2\ldots B_{n-3}B_{n-2}A_n$ обозначим через T. Вершину A_i многоугольника M будем называть соответствующей вершине B_{i-1} многоугольника T при $i = 2, \ldots, n-1$, вершине A_1 при $i = 1$ и A_n при $i = n$. Если вершина B_i не совпадает с точкой A_{i+1}, то угол многоугольника T при вершине B_i равен $\frac{2\pi}{3}$, так как H — локально-минимальная сеть, и, следовательно, меньше угла многоугольника M при вершине A_{i+1}, так как его углы больше $\frac{2\pi}{3}$. Если вершина B_i совпадает с точкой A_{i+1}, то угол многоугольника T при вершине B_i не больше угла M при вершине A_{i+1}, так как все внутренние вершины сети H лежат либо во внутренности, либо на границе M. Если сеть H отличается от H_0, то некоторая вершина B_k не совпадает с точкой A_{k+1}.

Как известно, кривизна полного многообразия в каждом круге ограничена. Таким образом, существует $K_0 > 0$ такое, что $|K(X)| < K_0$ для $X \in D_{r_2}(X)$. По теореме Гаусса-Бонне, для многоугольников M и T выполнены следующие соотношения:

$$(n-2)\,\pi + \int\limits_M K d\sigma = \sum_{i=1}^{n} \angle A_i,$$

$$(n-2)\,\pi + \int\limits_T K d\sigma = \sum_{i=1}^{n-2} \angle B_i + \angle B_1 A_1 A_n + \angle B_{n-2} A_n A_1,$$

где $d\sigma$ — форма площади на M_2.

Вычтем из первого выражения второе (многоугольник T лежит внутри многоугольника M), и получим:

$$\int\limits_{M \setminus T} K d\sigma = \Big(\sum_{i=1}^{n} \angle A_i\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{n-2} \angle B_i + \angle B_1 A_1 A_n + \angle B_{n-2} A_n A_1\Big).$$

Заметим, что правая часть есть сумма разностей соответствующих углов многоугольников M и T соответственно. Все эти разности неотрицательные, а так как все углы многоугольника M больше $\frac{29}{42}\,\pi$, то разность угла многоугольника M при вершине A_{k+1} и угла при соответствующей вершите B_k многоугольника T больше величины $\frac{29}{42}\,\pi - \frac{2}{3}\,\pi = \frac{1}{42}\,\pi$. Таким образом,

$$\int\limits_{M \setminus T} K d\sigma > \frac{1}{42}\,\pi.$$

При этом ясно, что

$$K_0\, S_M > \int\limits_{M \setminus T} K d\sigma,$$

где S_M — площадь многоугольника M. Остается заметить, что при радиусе $r < r_0$ при некотором r_0 площадь S_M многоугольника M меньше $\frac{1}{42\,K_0}\pi$, а, значит, при $r < r_0$ единственной локально-минимальной сетью типа G_1 является H_0, так как все внутренние вершины B_i должны совпадать с соответствующими вершинами A_{i+1}. Это означает, что H_0 — это минимальное параметрическое дерево типа G_1, и других минимальных параметрических деревьев нет. Что и требовалось.

□

3.4 Минимальные деревья Штейнера для правильных многоугольников на римановых многообразиях постоянной кривизны

Пусть M_k — риманово многообразие постоянной кривизны. Рассмотрим шаровую окрестность U точки O. Любое ортогональное преобразование касательного пространства к M_k в этой точке определяет преобразование окрестности U, сохраняющее метрику многообразия (а, значит, и метрику 3.2.1 при любом $t \in [0, 1]$). В частности, преобразования окрестности U, переводящие множество вершин правильного многоугольника с центром в O в себя, соответствующие вращению в плоскости Π, являются изометриями. Это означает, что на многообразиях постоянной кривизны все углы и все стороны правильного многоугольника равны между собой. Такими изометриями можно перевести минимальное параметрическое дерево любого типа из Ω_n в минимальное параметрическое дерево любого другого типа из Ω_n. При этом, два правильных многоугольника одного радиуса переводятся друг в друга с помощью изометрий, в результате чего последующие оценки не зависят от точки O многообразия. Для того, чтобы оценка радиуса была независима от точки, требуется, чтобы для некоторого r' в каждой точке многообразия корректно определялись правильные n-угольники радиусов меньше r' с центрами в этих точках. Для этого рассмотрим многообразия постоянной кривизны, радиус инъективности r_i которых положителен. Таким образом, для любой точки многообразия шаровая окрестность с центром в этой точке и радиусом $r < r_i$ диффеоморфна соответствующей шаровой окрестности начала координат касательного пространства в этой точке того же радиуса (диффеоморфизм задается экспоненциальным отображением). Отсюда вытекает следующий результат.

Следствие 8. Для данного n существует $r_0 > 0$ такое, что для вершин любого правильного n-угольника и радиусом $r < r_0$ на полном римановом многообразии постоянной кривизны M_k с положительным радиусом инъективности множество типов минимальных деревьев Штейнера совпадает с Ω_n.

Таким образом, из следствия 8 и теоремы 17 вытекают следующие результаты.

Следствие 9. Для данного $n \geq 7$ существует такое $r_0 > 0$, что для вершин любого правильного n-угольника радиуса $r < r_0$ на двумерной сфере минимальным деревом Штейнера является граница этого n-угольника без любой его стороны.

Следствие 10. Для данного $n \geq 7$ существует такое $r_0 > 0$, что для вершин любого правильного n-угольника радиуса $r < r_0$ на плоскости Лобачевского минимальным деревом Штейнера является граница этого n-угольника без любой его стороны.

Замечание 3. На плоскости Лобачевского при $n < 7$ граница правильного $n-$угольника без какой-либо стороны не является локально-минимальной сетью.

Доказательство. Сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского равна $\pi - s$, где s — его площадь, значит, сумма углов $n-$угольника равна $(n-2)\pi - S$, где S — площадь этого $n-$угольника. Так как углы правильного $n-$угольника равны между собой, то при $n < 7$ они всегда меньше $\frac{2\pi}{3}$. □

Тем не менее, на плоскости Лобачевского при $n < 7$ минимальные параметрические деревья в классах сетей бинарных типов из Ω_n являются кратчайшими при достаточно малом радиусе многоугольника. В силу полноты плоскости Лобачевского, точная нижняя грань функции длины сети достигается. Таким образом, минимальными деревьями Штейнера являются сети типов из Ω_n, внутренние ребра которых не вырождаются, так как в противном случае сеть содержит вершины степени большей 3. Некоторые граничные ребра этих сетей могут быть вырождены.

Глава 4

Функции, сохраняющие метрики, и пространство Громова–Хаусдорфа

В этой главе диссертации изучаются свойства отображений пространства Громова–Хаусдорфа в себя, индуцированных функциями, сохраняющими метрики. Мы показываем, что непрерывные (и только непрерывные) функции, сохраняющие метрики, корректно задают отображения пространства Громова–Хаусдорфа в себя и при этом эти отображения наследуют различные свойства соответствующих функций, сохраняющих метрики. К примеру, эти отображения являются непрерывными отображениями метрических пространств, а также липшицевыми тогда и только тогда, когда таковыми являются соответствующие им функции, сохраняющие метрики. Также в главе описываются образы этих отображений и показывается, что такие отображения сохраняют топологические свойства.

Один из важных вопросов, который возникает при изучении деформаций метрик, — исследование поведения длин кривых. Как нам уже известно, непрерывность изменения длин кривых при деформации метрики не равносильна непрерывности изменения функции расстояния при этой деформации и помимо непрерывности длин кривых для непрерывности функции расстояния требуются нетривиальные дополнительные условия. В этой главе показывается, что при применении к метрике непрерывных функций, которые сохраняют метрики и производная в нуле которых конечна, множество спрямляемых кривых не изменяется, а также приводится формула преобразования длин кривых при таких деформациях метрик. В качестве следствия из этой формулы мы получаем критерий непрерывности длин кривых при деформациях произвольных метрик, заданных функциями, которые сохраняют метрики и зависят от параметра.

4.1 Отображения пространства Громова–Хаусдорфа, индуцированные функциями, сохраняющими метрики

Напомним, что через $\mathcal{M}$ мы обозначаем пространство Громова–Хаусдорфа – пространство всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, относительно метрики Громова–Хаусдорфа d_{GH}. Также напомним, что искажение соответствия R между двумя метрическими пространствами мы обозначаем через $\operatorname{dis} R$. Далее мы покажем, какие ФСМ корректно определяют отображение $\mathcal{M}$ в себя, а также докажем ряд свойств этих отображений.

Утверждение 34. *Если ФСМ f непрерывна, а метрическое пространство (X, ρ) компактно, то и $\big(X, f(\rho)\big)$ компактно.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}, n \in \mathbb{N}$, — произвольная последовательность точек из X. В силу компактности (X, ρ) в последовательности $\{x_n\}$ существует подпоследовательность $\{x_{i_n}\}$, сходящаяся относительно метрики ρ к некоторой точке $x_0 \in X$. Это означает, что $\rho(x_{i_n}, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$, откуда следует, что $f\big(\rho(x_{i_n}, x_0)\big) \to f(0) = 0$ при $n \to \infty$ в силу непрерывности f. Таким образом, в произвольной последовательности $\{x_n\}, n \in \mathbb{N}$, найдется подпоследовательность $\{x_{i_n}\}$, сходящаяся относительно метрики $f(\rho)$ к некоторой точке из X. Это означает компактность $\big(X, f(\rho)\big)$. $\square$

Утверждение 35. *Пусть f — разрывная ФСМ. Тогда существует компактное метрическое пространство (X, ρ), такое, что метрическое пространство $\big(X, f(\rho)\big)$ уже не является компактным.*

Доказательство. Подойдет любой компакт, содержащий счетную последовательность различных точек. В таком случае в силу утверждения 5 в метрическом пространстве $\bigl(X, f(\rho)\bigr)$ найдется бесконечная ε-сеть для некоторого $\varepsilon > 0$, а это означает, что $\bigl(X, f(\rho)\bigr)$ не является компактом. $\square$

Из утверждения 34 следует, что для непрерывной ФСМ f корректно определено отображение $\mathrm{F}: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, сопоставляющее компакту (X, ρ) компакт $\bigl(X, f(\rho)\bigr)$: $\mathrm{F}\bigl((X, \rho)\bigr) = \bigl(X, f(\rho)\bigr)$.

Ясно, что если метрические пространства X_1 и X_2 изометричны, то изометричны $\mathrm{F}(X_1)$ и $\mathrm{F}(X_2)$. При этом из утверждения 35 следует, что *непрерывные функции и только они* корректно определяют такое отображение F пространства $\mathcal{M}$ в себя. Отображение $\mathrm{F}: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ будем называть *отображением, индуцированным ФСМ f*.

4.2 Связь функций, сохраняющих метрики, и индуцированных ими отображений пространства Громова–Хаудорфа

Напомним, что диаметр метрического пространства X мы обозначаем через $d(X)$.

Теорема 18. *Любое отображение $\mathrm{F}: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, индуцированное некоторой непрерывной ФСМ f, является непрерывным отображением метрических пространств.*

Доказательство. Покажем непрерывность отображения F в произвольной точке $X \in \mathcal{M}$. Для некоторого $\delta_0 > 0$ рассмотрим U_0 — δ_0-окрестность точки X в $\mathcal{M}$. В силу свойства расстояния Громова–Хаусдорфа для любого пространства $Y \in U_0$ имеет место оценка диаметра $d(Y) < d(X) + 2\delta_0$ [1, гл. 4]. Другими словами, для любых точек $y, y' \in Y$ при $Y \in U_0$ выполнено неравенство $\rho_Y(y, y') < d(X) + 2\delta_0$.

Функция $f(t)$ непрерывна, а значит, равномерно непрерывна на отрезке $[0, d(X) + 2\delta_0]$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что для любых $t_1, t_2 \in [0, d(X) + 2\delta_0]$, удовлетворяющих неравенству $|t_1 - t_2| < 2\delta$, будем иметь $|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$. Без потери общности можем считать, что $\delta < \delta_0$. Рассмотрим произвольный компакт Y из

δ-окрестности компакта X в $\mathcal{M}$: $d_{GH}\big(X,Y\big) < \delta$. По определению расстояния Громова–Хаусдорфа найдется соответствие R_0 между X и Y, такое, что $\mathrm{dis}R_0 < 2\delta$, т.е. $\sup\big\{|\rho_X(x,x') - \rho_Y(y,y')| : (x,y),(x',y') \in R_0\big\} < 2\delta$. В силу того что Y лежит в δ-окрестности X, а значит, и в U_0, для любых точек $y,y' \in Y$ имеем $\rho_Y(y,y') \in [0, d(X)+2\delta_0]$. То, что $\rho_X(x,x') \in [0, d(X)+2\delta_0]$ для любых $x,x' \in X$, очевидно. Тогда из того, что $\sup\big\{|\rho_X(x,x') - \rho_Y(y,y')| : (x,y),(x',y') \in R_0\big\} < 2\delta$, следует, что

$$\sup\Big\{\Big|f\big(\rho_X(x,x')\big) - f\big(\rho_Y(y,y')\big)\Big| : (x,y),(x',y') \in R_0\Big\} \le \varepsilon.$$

Рассмотрим расстояние Громова–Хаусдорфа между $\mathrm{F}(X)$ и $\mathrm{F}(Y)$:

$$d_{GH}\big(\mathrm{F}(X),\mathrm{F}(Y)\big) =$$

$$= \frac{1}{2}\inf_R\Big(\sup\Big\{\Big|f\big(\rho_X(x,x')\big) - f\big(\rho_Y(y,y')\big)\Big| : (x,y),(x',y') \in R\Big\}\Big) \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sup\Big\{\Big|f\big(\rho_X(x,x')\big) - f\big(\rho_Y(y,y')\big)\Big| : (x,y),(x',y') \in R_0\Big\} \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

где точная нижняя грань берется по всем соответствиям R между X и Y. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что если $d_{GH}\big(X,Y\big) < \delta$, то $d_{GH}\big(\mathrm{F}(X),\mathrm{F}(Y)\big) < \varepsilon$. Непрерывность F в произвольной точке $X \in \mathcal{M}$ доказана. □

Теорема 19. *Пусть f — непрерывная, строго монотонно возрастающая ФСМ. Тогда образ* $\mathrm{Im}\,\mathrm{F}$ *индуцированного отображения* F *— это в точности все компактные метрические пространства X, для любых трех точек x,y,z которых выполнено неравенство*

$$f^{-1}\big(\rho(x,y)\big) + f^{-1}\big(\rho(x,z)\big) - f^{-1}\big(\rho(y,z)\big) \ge 0.$$

Доказательство. Функция $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ существует и непрерывна в силу монотонности и непрерывности f. Пусть X — компактное метрическое пространство и в нем выполнено неравенство из условия. Данное неравенство означает, что функция $f^{-1}(\rho)$ удовлетворяет неравенству треугольника. При этом она симметрична, как и ρ, и положительно определена в силу того, что $f^{-1}(0) = \{0\}$. Из этого следует, что функция $f^{-1}(\rho)$ является метрикой на X, а из компактности X и непрерывности f^{-1} следует, что $\big(X, f^{-1}(\rho)\big)$ — компакт. Таким образом,

$(X,\rho) = \mathrm{F}\Big(\big(X, f^{-1}(\rho)\big)\Big)$, где $\big(X, f^{-1}(\rho)\big) \in \mathcal{M}$, т.е. X — элемент из образа $\operatorname{Im}\mathrm{F}$.

Обратно: пусть X принадлежит $\operatorname{Im}\mathrm{F}$. Это означает, что на X существует метрика ρ_0, такая, что $\mathrm{F}\big((X,\rho_0)\big) = (X,\rho)$, т.е. $\rho = f(\rho_0)$. Из этого следует, что функция $f^{-1}(\rho) = \rho_0$ является метрикой, а значит, удовлетворяет неравенству треугольника, т.е. для любых x, y и z из X выполнено неравенство $f^{-1}\big(\rho(x,y)\big) + f^{-1}\big(\rho(x,z)\big) - f^{-1}\big(\rho(y,z)\big) \geq 0$, что и требовалось. $\square$

Теорема 20. *Пусть f — непрерывная монотонная ФСМ. Тогда индуцированное отображение* $\mathrm{F}: \mathcal{M} \to \operatorname{Im}\mathrm{F}$ *является гомеоморфизмом на образ.*

Доказательство. Отображение F биективно в силу биективности отображения f. Из теоремы 18 следует, что отображения $\mathrm{F}: \mathcal{M} \to \operatorname{Im}\mathrm{F}$ и $\mathrm{F}^{-1}: \operatorname{Im}\mathrm{F} \to \mathcal{M}$ непрерывны ввиду непрерывности функций f и f^{-1}. $\square$

Теорема 21. *Отображение* $\mathrm{F}: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ *является липшицевым тогда и только тогда, когда липшицевой является соответствующая ему ФСМ $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, причем константы Липшица этих отображений равны.*

Доказательство. Покажем, что если функция f является C-липшицевой на $\mathbb{R}_+$, то отображение $\mathrm{F}: \mathcal{M} \to \operatorname{Im}\mathrm{F}$ также будет C-липшицевым. Условие C-липшицевости f означает, что для любых $t_1, t_2 \geq 0$ выполнено неравенство $|f(t_1) - f(t_2)| \leq C|t_1 - t_2|$. Таким образом, для двух компактных метрических пространств X, Y и любых точек $x, x' \in X$ и $y, y' \in Y$ выполнено неравенство

$$\Big|f\big(\rho_X(x,x')\big) - f\big(\rho_Y(y,y')\big)\Big| \leq C\big|\rho_X(x,x') - \rho_Y(y,y')\big|.$$

В результате имеет место следующая оценка расстояния Громова–Хаусдорфа между компактами $\mathrm{F}(X)$ и $\mathrm{F}(Y)$:

$$d_{GH}\big(\mathrm{F}(X), \mathrm{F}(Y)\big) =$$

$$= \frac{1}{2}\inf_R\Big(\sup\big\{\big|f\big(\rho_X(x,x')\big)-f\big(\rho_Y(y,y')\big)\big|\colon (x,y),(x',y')\in R\big\}\Big) \le$$

$$\le \frac{C}{2}\inf_R\Big(\sup\big\{|\rho_X(x,x')-\rho_Y(y,y')| : (x,y),(x',y')\in R\big\}\Big) = C d_{GH}\big(X,Y\big),$$

где в каждом случае точная нижняя грань берется по всем соответствиям R между X и Y. Таким образом, для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ выполнено неравенство $d_{GH}\big(\mathrm{F}(X),\mathrm{F}(Y)\big)\le C d_{GH}(X,Y)$, что означает C-липшицевость отображения F.

Пусть теперь отображение F является C-липшицевым, т.е. для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ выполнено неравенство $d_{GH}\big(\mathrm{F}(X),\mathrm{F}(Y)\big)\le C\, d_{GH}(X,Y)$. Рассмотрим X_0 — одноточечное метрическое пространство и $X_n, n \in \mathbb{N}$, — метрические пространства, состоящие из двух точек, расстояние между которыми равно $\frac{1}{n}$. Из формулы для расстояния Громова–Хаусдорфа между произвольным компактом и одноточечным компактом X_0 (см. [1, 43]) следуют равенства

$$d_{GH}(X_0,X_n) = \frac{1}{2}d(X_n),\ \ d_{GH}\big(\mathrm{F}(X_0),\mathrm{F}(X_n)\big)= \frac{1}{2}d\big(\mathrm{F}(X_n)\big).$$

Таким образом, $d_{GH}\big(\mathrm{F}(X_0),\mathrm{F}(X_n)\big)/d_{GH}(X_0,X_n) = d\big(\mathrm{F}(X_n)\big)/d(X_n) \to f'(0)$ при $n\to\infty$, причем этот предел всегда существует по утверждению 8. В силу C-липшицевости отображения F для любого n выполнено неравенство

$$d_{GH}\big(\mathrm{F}(X_0),\mathrm{F}(X_n)\big)/d_{GH}(X_0,X_n) \le C,$$

откуда следует, что $f'(0) \le C$. Это означает C-липшицевость функции f согласно утверждению 9. □

Из утверждений 8, 9 и теоремы 21 вытекает

Теорема 22. *Производная ФСМ f в нуле конечна тогда и только тогда, когда отображение $\mathrm{F}:\ \mathcal{M}\to\mathcal{M}$ является липшицевым, причем его константа Липшица в этом случае равна $f'(0)$.*

Пример. В силу утверждения 6 функция $f(t) = \sqrt{t}$ является ФСМ. Она не липшицева при $t \ge 0$, а значит, индуцированное ею отображение $\mathrm{F}:\ \mathcal{M}\to\mathcal{M}$ — пример не липшицева индуцированного ФСМ отображения из $\mathcal{M}$ в себя.

Теорема 23. *Пусть f — непрерывная ФСМ и $f'(0) < 1$. Тогда отображение* F *уменьшает ненулевые диаметры: если $X \in \mathcal{M}$ и $d(X) > 0$, то $d\big(\mathrm{F}(X)\big) < d(X)$.*

Доказательство. Пусть $X \in \mathcal{M}$ и $d(X) > 0$. Ясно, что тогда и $d\big(\mathrm{F}(X)\big) > 0$. Ввиду компактности $\mathrm{F}(X)$ существует пара точек $x, y \in X$, расстояние между которыми равно $d\big(\mathrm{F}(X)\big)$. По утверждению 9 при $t > 0$ выполнено неравенство $f(t) \le f'(0)t < t$. Таким образом, из того, что $f\big(\rho(x,y)\big) > 0$, следует, что $f\big(\rho(x,y)\big) < \rho(x,y) \le d(X)$, откуда $d\big(\mathrm{F}(X)\big) < d(X)$. $\square$

Следствие 11. Пусть f — непрерывная ФСМ и $f'(0) < 1$. Тогда отображение F имеет единственную неподвижную точку — одноточечное метрическое пространство.

Доказательство. Пусть X — неподвижная точка отображения F, т.е. $\mathrm{F}(X) = X$. Из теоремы 23 следует, что $d(X) = 0$, т.е. X — одноточечное метрическое пространство. $\square$

4.3 Деформации метрик, заданные функциями, сохраняющими метрики, и длины кривых

Пусть X — произвольное метрическое пространство, ρ — метрика на нем, а f — непрерывная ФСМ. Далее через $\mathrm{F}(X)$ будем обозначать метрическое пространство $\big(X, f(\rho)\big)$. Из утверждения 7 следует, что метрические пространства X и $\mathrm{F}(X)$ обладают одними и теми же топологическими свойствами. В частности, имеют место следующие утверждения.

Следствие 12. Если пространство X связно, то и пространство $\mathrm{F}(X)$ связно.

Следствие 13. Если пространство X линейно связно, то и пространство $\mathrm{F}(X)$ линейно связно.

Следствие 14. В метрических пространствах X и $\mathrm{F}(X)$ совпадают множества непрерывных кривых.

Будем обозначать длину кривой $\gamma : [0,1] \to X$ относительно метрики ρ через $l_\rho(\gamma)$. Рассмотрим взаимосвязь длин кривых в метрических пространствах X и $\mathrm{F}(X)$.

Теорема 24. *Если $f'(0) < +\infty$, то множество спрямляемых кривых относительно метрики $f(\rho)$ совпадает с множеством спрямляемых кривых относительно метрики ρ, а при переходе от ρ к $f(\rho)$ длина каждой кривой умножается на $f'(0)$: $l_{f(\rho)}(\gamma) = f'(0)l_\rho(\gamma)$. Если $f'(0) = +\infty$, то каждая спрямляемая относительно метрики ρ кривая ненулевой длины не является спрямляемой относительно метрики $f(\rho)$.*

Доказательство. Предел $f'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t}$ существует и конечен по условию, откуда при $t \to 0$ мы имеем следующее представление: $f(t) = f'(0)t + o(t)$. Рассмотрим длину произвольной кривой γ относительно метрики $f(\rho)$:

$$l_{f(\rho)}(\gamma) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\Delta_i) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} f'(0)\Delta_i = f'(0) \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = f'(0)l_\rho(\gamma),$$

где Δ_i — длины звеньев вписанной в γ ломаной, а Δ — длина наибольшего звена этой ломаной. При $f'(0) = +\infty$ из равенства $l_{f(\rho)}(\gamma) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\Delta_i)$ следует, что если кривая относительно метрики ρ имеет конечную ненулевую длину, то относительно метрики $f(\rho)$ ее длина будет равна $+\infty$. $\square$

Следствие 15. ФСМ f, производная в нуле которой конечна, переводит внутренние метрики во внутренние тогда и только тогда, когда она является линейным отображением, т.е. имеет вид $f(t) = kt$ при некотором $k > 0$.

Доказательство. Если ρ — внутренняя метрика, то для того чтобы $f(\rho)$ была внутренней, необходимо, чтобы для любых двух точек x и y из X было выполнено соотношение

$$f\big(\rho(x,y)\big) = \inf_{\gamma:x\sim y} l_{f(\rho)}(\gamma) = \inf_{\gamma:x\sim y} f'(0)l_\rho(\gamma) = f'(0) \inf_{\gamma:x\sim y} l_\rho(\gamma) = f'(0)\rho(x,y),$$

т.е. функция f должна иметь требуемый вид. Здесь через $\inf_{\gamma:x\sim y}$ мы обозначили точную нижнюю грань по множеству всех кривых, соединяющих точки x и y в X. Обратно: функции, имеющие вид $f(t) = kt$, очевидно, переводят внутренние метрики во внутренние, поскольку при переходе от ρ к $f(\rho)$ все расстояния и длины кривых умножаются на k. □

Перейдем теперь к рассмотрению однопараметрических деформаций метрик, заданных ФСМ. Рассмотрим непрерывную ФСМ $f(t, s)$, которая зависит от параметра $s \in [0, 1]$. Подразумевается, что при каждом фиксированном s функция $f(t, s)$ от переменной $t \geq 0$ является непрерывной ФСМ. Через $f'(t, s)$ будем обозначать частную производную функции f по первой переменной. Рассмотрим на X однопараметрическое семейство метрик ρ_s, $s \in [0, 1]$, которые определяются равенством $\rho_s = f(\rho, s)$. Из непрерывности f при каждом фиксированном s следует, что все метрики ρ_s, $s \in [0, 1]$, определяют на X одну и ту же топологию.

Теорема 25. *Если $f'(0, s) < +\infty$ для любого $s \in [0, 1]$, то все пространства (X, ρ_s) обладают одним и тем же множеством спрямляемых кривых. При этом для каждой фиксированной кривой γ ее длина $l_{\rho_s}(\gamma)$ непрерывно зависит от s тогда и только тогда, когда $f'(0, s)$ является непрерывной функцией от s.*

Доказательство. Для произвольной кривой γ, спрямляемой относительно ρ, из теоремы 24 имеем

$$l_{\rho_s}(\gamma) = l_{f(\rho,s)}(\gamma) = f'(0, s) l_\rho(\gamma).$$

Таким образом, если для любого $s \in [0, 1]$ выполнено $f'(0, s) < +\infty$, то кривая γ, спрямляемая относительно ρ, является спрямляемой относительно каждой из метрик ρ_s, $s \in [0, 1]$, откуда следует первое утверждение теоремы. При этом длина $l_{\rho_s}(\gamma)$ кривой γ относительно метрики ρ_s равна функции $f'(0, s)$, умноженной на постоянный коэффициент $l_\rho(\gamma)$, откуда получаем второе утверждение теоремы. □

Заключение

В настоящей диссертации рассматриваются некоторые виды деформаций функционалов длины и метрик, и изучается взаимосвязь непрерывности длин кривых и непрерывности расстояний между точками при этих деформациях. Как показано в работе, существуют примеры пространств и заданных на них функционалов длины, в которых при деформации этих функционалов длины из непрерывности изменения длин допустимых кривых не следует непрерывность изменения расстояний между точками, причем эти пространства могут быть как компактны, так и не ограниченно компактны относительно соответствующих внутренних метрик. Как для случая ограниченно компактных пространств, так и для случая произвольных пространств с внутренней метрикой, в диссертации формулируются специальные условия, которые могут быть наложены на функционалы длины, и доказывается их достаточность для непрерывности расстояний между точками соответствующих пространств. Далее, в диссертации показывается, что в случаях непрерывных деформаций римановых и финслеровых метрик на компактных многообразиях выполнены эти достаточные условия непрерывности расстояний. В качестве следствия выводится, что на полных финслеровых и римановых многообразиях в случае непрерывной зависимости соответствующей метрики от параметра расстояния между любыми точками непрерывно зависят от этого параметра.

В качестве приложения разработанных техник, в диссертации получен ряд нетривиальных результатов о минимальных деревьях Штейнера на римановых многообразиях, в частности, описаны бинарные типы минимальных сетей для произвольных малых границ на полном римановом многообразии. Также, введено понятие правильного многоугольника на полном двумерном римановом многообразии, и полностью описаны кратчайшие сети, соединяющие вершины достаточно малых правильных многоугольников. Помимо прочего, в диссертации приводится полное описание типов кратчайших деревьев, лежащих в достаточно малых шаровых окрестностях точек полных римановых многообразий постоянной секционной кривизны.

Помимо этого, в диссертации изучаются функции, сохраняющие метрики (ФСМ), и индуцируемые ими отображения пространства Громова-Хаусдорфа в себя. Показано, что непрерывные ФСМ и только они корректно определяют индуцированное отображение пространства Громова-Хаусдорфа в себя, и что такое отображение является липшицевым тогда и только тогда, когда липшицевой является соответствующая ФСМ, причем их константы Липшица совпадают. Описаны образы таких отображений пространства Громова-Хаусдорфа в себя. Показано, как изменяются длины кривых при применении отображений, индуцированных ФСМ, к метрическим компактам. Также изучаются однопараметрические деформации произвольных метрик, заданные функциями, сохраняющими метрики, и приводится критерий непрерывности длин кривых при таких деформациях метрик.

В завершение перечислим некоторые возможные перспективы дальнейших исследований:

1. Задача исследования непрерывности длин кривых при непрерывной деформации метрики в общем случае.

2. Исследование связи непрерывного изменения метрики пространства в смысле Громова-Хаусдорфа, а также в смысле Липшица и непрерывного изменения функционала длины на метрическом пространстве. Изучение необходимых и достаточных условий для непрерывного изменения функционала длины.

3. Задача исследования устойчивости локально-минимальных сетей на римановых многообразиях при непрерывных деформациях метрики.

4. Изучение минимальных деревьев Штейнера в метрических про-

странствах при движении граничного множества и деформации метрики: исследование областей конфигурационного пространства, в которых минимальные сети реализуются на одном и том же множестве бинарных типов.

Литература

[1] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии / Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. - Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[2] Gromov M. Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces / Gromov M. - Progress in Math., 152, Birkhäuser, 1999.

[3] Khamsi M.A., Kirk W.A. An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory / Khamsi M.A., Kirk W.A. - Wiley-IEEE, 2001.

[4] Busemann H. The Geometry of Geodesics / Busemann H. - Academic Press, New York, 1955.

[5] Papadopoulos A. Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature / Papadopoulos A. - IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 6, European Mathematical Society, 2005.

[6] Finsler P. Uber Kerven und Flachen in allgemeinen Raumen / Finsler P. - Basel, Verlag Birkhauser AG, 1951.

[7] Noether E. Invarianten beliebiger Differentialausdrücke / Noether E. // Nachr. Ges. Wiss. Gott., Math.-Phys. Kl., 1918, Vol. 1918, P. 37-44.

[8] Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств / Рунд Х. - Москва: Наука, 1981.

[9] Antonelli P.L. Handbook of Finsler geometry / Antonelli P.L. - Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[10] Bao D., Chern S.S., Shen Z. An Introduction to Riemann-Finsler Geometry / Bao D., Chern S.S., Shen Z. - Springer-Verlag, 2000.

[11] Shen Z. Lectures on Finsler Geometry / Shen Z. - World Scientific Publishers, 2001.

[12] Shen Z. Differential geometry of spray and Finsler spaces / Shen Z. - Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[13] De Giorgi E. Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell'area / De Giorgi E. // Rend. Mat., Ser. 8, 1975, P. 277-294.

[14] De Giorgi E., Franzoni T. Su un tipo di convergenza variazionale / De Giorgi E., Franzoni T. // Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 1975, Vol. 58, №6, P. 842-850.

[15] De Giorgi E., Spagnolo S. Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del secondo ordine / De Giorgi E., Spagnolo S. // Boll. Un. Mat. It., Ser. 8, 1973, P. 391-411.

[16] Dal Maso G. An Introduction to Gamma-Convergence / Dal Maso G. - Birkhäuser, Boston, 1993.

[17] Braides A. Gamma-convergence for beginners / Braides A. - Oxford University Press, 2002.

[18] Jarník V., Kössler. O minimálních grafech obsahujících n daných bodu / Jarník V., Kössler // PêstováníMat. (Essen), Cas, 1934, T. 63, P. 223-235.

[19] Du D.Z., Hwang F.K., Weng J.F. Steiner Minimal Trees for Regular Polygons / Du D.Z., Hwang F.K., Weng J.F. - Springer Verlag, New York, 1987.

[20] Rubinstein J.H., Thomas A.D. Graham's problem on shortest networks for points on a circle / Rubinstein J.H., Thomas A.D. // 7, Algorithmica, 1992, P. 193-218.

[21] Du D.Z., Hwang F.K., Weng J.F. Steiner Minimal Trees for points on a zig-zag lines / Du D.Z., Hwang F.K., Weng J.F. // v. 95, №4, Trans. Amer. Math. Soc., 1985, P. 149-156.

[22] Brazil M., Cole J., Rubinstein J.H., Thomas A.D., Weng J.F., Wormald N.C. Full minimal Steiner trees on lattice sets / Brazil M., Cole J., Rubinstein J.H., Thomas A.D., Weng J.F., Wormald N.C. // J. Comb. Theory Series A. 78, 1997, P. 51-91.

[23] Brazil M., Cole J., Rubinstein J.H., Thomas A.D., Weng J.F., Wormald N.C. Minimal Steiner trees for $2^k \times 2^k$ square lattices / Brazil M., Cole J., Rubinstein J.H., Thomas A.D., Weng J.F., Wormald N.C. // J. Comb. Theory Series A. 73, 1996, P. 91-110.

[24] Brazil M., Cole J., Rubinstein J.H., Thomas A.D., Weng J.F., Wormald N.C. Minimal Steiner trees for rectangular arrays of lattice points / Brazil M., Cole J., Rubinstein J.H., Thomas A.D., Weng J.F., Wormald N.C. - Research Report N 24, Dept. of Math., Univ. of Melbourne, Australia, 1995.

[25] Chung F.R.K., Graham R.L. Steiner trees for ladders / Chung F.R.K., Graham R.L. // v. 2, Ann. Disc. Math, 1978, P. 173-200.

[26] Chung F.R.K., Gardner M., Graham R.L. Steiner trees on a ckeckerboard / Chung F.R.K., Gardner M., Graham R.L. // v. 62, Math. Magazine, 1989, P. 83-96.

[27] Иванов А.О., Тужилин А.А. Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато / Иванов А.О., Тужилин А.А. // 47:2(284), УМН., 1992, P. 53-115.

[28] Иванов А.О., Тужилин А.А. Теория экстремальных сетей / Иванов А.О., Тужилин А.А. - Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2003.

[29] Heppes A. Isogotal sphеrischет Netze / Heppes A. // v. 7, Ann. Univ. Sci., Budapest, Sect. Math., 1964, P. 41-48.

[30] Иванов А.О., Птицына И.В., Тужилин А.А. Классификация замкнутых минимальных сетей на плоских двумерных торах / Иванов А.О., Птицына И.В., Тужилин А.А. // Матем. сб., 183:12, 1992, P. 3-44.

[31] Птицына И.В. Классификация замкнутых локально минимальных сетей на плоских бутылках Клейна / Птицына И.В. // Вестник МГУ, 1995, №5, P. 15-22.

[32] Птицына И.В. Классификация замкнутых минимальных сетей на тетраэдрах / Птицына И.В. // Матем. сб., 185:5, 1994, P. 11-138.

[33] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Minimal Networks. Steiner Problem and Its Generalizations / Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. - CRC Press, 1994.

[34] Вдовина А.А., Селиванова Е.Н. Локально минимальные сети на поверхностях постоянной отрицательной кривизны / Вдовина А.А., Селиванова Е.Н. // Матем. сб., 1997, №6, P. 15-17.

[35] Стрелкова Н.П. Замкнутые локально минимальные сети на поверхностях тетраэдров / Стрелкова Н.П. // Матем. сб., 202:1, 2011, P. 141-160.

[36] Стрелкова Н.П. Замкнутые локально минимальные сети на поверхностях выпуклых многогранников / Стрелкова Н.П. // Модел. и анализ информ. систем, 20:5, 2013, P. 117-147.

[37] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. The Steiner problem and its generalizations / Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. - BocaRaton, Ann Arbor, London, Tokyo: CRC Press, 1994.

[38] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии / Кобаяси Ш., Номидзу К. - Т. 1, Наука, М., 1981.

[39] Alexandroff A. Uber eine Verallgemeinerung der Riemannschen Geometrie / Alexandroff A. // №1, Acad. Wiss. Forsch. Math.,1957, P. 33-85.

[40] Hausdorff F. Grundzüge der Mengenlehre / Hausdorff F. - Leipzig: Veit, 1914 [reprinted by Chelsea in 1949].

[41] Edwards D. The Structure of Superspace / Edwards D. // Studies in Topology, Ed. by N.M. Stavrakas, K.R. Allen. N. Y.; London; San Francisco: Academic Press, Inc., 1975.

[42] Gromov M. Groups of Polynomial growth and Expanding Maps / Gromov M. // Publications Mathematiques I.H.E.S., 1981. **Vol. 53.**

[43] Иванов А.О., Тужилин. А.А. Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа: случай компактов / Иванов А.О., Тужилин. А.А. - М.: Изд-во Попечительского совета мех-мат ф-та МГУ, 2017.

[44] Wilson W.A. On certain types of continuous transformations of metric spaces / Wilson W.A. // Amer. J. Math. 1935. **57**. P. 62-68.

[45] Sreenivasan T.K. Some properties of distance functions / Sreenivasan T.K. // J. Indian Math. Soc. (N.S.) 1947. **11**. P. 38-43.

[46] Kelley J.L. General Topology / Kelley J.L. - N. Y.: Van Nostrand, 1955.

[47] Dobos J. Metric Preserving Functions / Dobos J. - Amer. Math. Soc. Kosice Technical University, 1998.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

[48] Чикин В.М. Минимальные деревья Штейнера в малых окрестностях точек римановых многообразий / Чикин В.М. // Матем. сб., 2017, Т. 208, №7. P. 145-171.

Англ. пер.: Chikin V.M. Steiner minimal trees in small neighbourhoods of points in Riemannian manifolds //Sbornik: Mathematics. – 2017. – Vol. 208. – №. 7. – P. 1049.

Журнал индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS. IF: 0.865.

[49] Чикин В.М. Функции, сохраняющие метрики, и пространство Громова—Хаусдорфа / Чикин В.М. // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, изд-во Моск. ун-та (М.), 2021, № 4, P. 11-17.

Англ. пер.: Chikin V.M. Functions Preserving Metrics, and Gromov–Hausdorff Space //Moscow University Mathematics Bulletin. – 2021. – Vol. 76. – №. 4. – P. 154-160.

Журнал индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS. IF: 0.284.

[50] Чикин В.М. Связь непрерывности длин кривых и непрерывности расстояний в случае ограниченно компактных метрических пространств // Чебышевский сборник, 2021, Т. 22, вып. 4, P. 288-304.

Журнал индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS. IF: 0.392.

Тезисы докладов

[51] Чикин В.М. Минимальные деревья Штейнера в малых окрестностях точек римановых многообразий // Материалы Международной конференции “Воронежская зимняя математическая школа имени С. Г. Крейна – 2016”, Научная книга, Воронеж, 2016, P. 430-433.

[52] Чикин В.М. Минимальные деревья Штейнера в малых окрестностях точек римановых многообразий // “Геометрический анализ и его приложения: материалы III Международной школы-конференции, г. Волгоград, 30 мая – 3 июня 2016 г.”, Федер. гос. авт. образоват. учреждение высш. образования “Волгогр. Гос ун-т”, Ин-т математики им. С.Л. Соболева Сиб. отд-ния РАН. – Волгоград: Изд-во Волгу, 2016, P. 214-216.

[53] Чикин В.М. Минимальные деревья Штейнера для малых правильных многоугольников на двумерных римановых многообразиях // Материалы молодежной международной научной конференции “Методы современного математического анализа и геометрии и их приложения”, выпуск 5, часть I, Научная книга, Воронеж, 2016, P. 326-327.