МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Денисов Петр Васильевич

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ВРЕМЕНИ

1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических наук,
профессор
Шамолин Максим Владимирович,
кандидат физико-математических наук,
доцент
Заплетин Максим Петрович

Москва – 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1 Обзор известных результатов. Постановка задачи

Настоящая диссертационная работа посвящена изучению вопросов о нелокальном поведении (при больших значениях времени t) решения задачи Коши для параболических по И. Г. Петровскому систем уравнений в частных производных и поведения при больших t решения обобщенной задачи Коши для итерированного уравнения теплопроводности.

В качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными (в частности, уравнений и систем параболического типа) имеется множество направлений и известно великое количество фундаментальных публикаций. Остановимся, в применение к тематике диссертационной работы, на некоторых из них.

Из числа публикаций по качественной теории и постановок задач об асимптотике параболических уравнений прежде всего отметим работы А. Н. Тихонова [52], [77], В. А. Ильина [33], А. М. Ильина, А. С. Калашникова, О. А. Олейник [31], В. К. Гущина, В. П. Михайлова [11].

Особую (в том числе и для предлагаемой диссертации) важность для случая систем параболических по И. Г. Петровскому уравнений представляют собой работы С. Д. Эйдельмана [62], [63], С. Д. Эйдельмана и Ф. О. Порпера [65], С. Д. Эйдельмана [64]. Первой же работой, в которых изучалась асимптотика решений обобщенной задачи Коши для так называемого ультрапараболического уравнения, была работа Ю. Н. Дрожжинова [24].

Из авторов последнего времени отметим В. В. Городецкого [7], а также В. А. Литовченко и И. М. Довжицкой [37], где стабилизация изучалась в классах обобщенных функций.

С подробными обзорами по качественным свойствам решений параболических уравнений можно ознакомиться в статьях: А. К. Гущина, В. П. Михайлова и Л. А. Муравья [12], В. Н. Денисова и В. Д. Репникова [18], В. Н. Денисова [15].

Глубокие результаты по асимптотике решений параболических функционально-дифференциальных уравнений получены в работе А. Б. Муравника [42].

Тем не менее, необходимо отметить, что обзорные статьи [12], [18], [15] сейчас не могут претендовать на достаточную полноту, ибо с тех пор появилось немало работ, которые существенно дополняют известные до этого сведения по параболическим уравнениям.

Предел средних по t от решения задачи Коши для параболических уравнений, допускающих существование усредненных параболических уравнений с постоянными коэффициентами, изучен у В. Н. Денисова и В. В. Жикова [17].

В данном небольшом обзоре мы приводим только те публикации, появление которых стимулировало возникновение новых работ по асимптотике решений параболических уравнений.

Начало исследований асимптотического поведения решений уравнений параболического типа было положено работой А. Н. Колгоморова, И. Г. Петровского и Н. С. Пискунова [35].

Первой работой по стабилизации решения уравнения теплопроводности является работа А. Н. Тихонова [52]. Важную роль в вопросах единственности решения параболических уравнений сыграла другая работа А. Н. Тихонова [77].

В работе М. Кржижанского [69] началось изучение поведения при $t \to +\infty$ решения задачи Коши для уравнения теплопроводности, в которой построена ограниченная начальная функция, такая, что решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с этой начальной функцией не стабилизируется ни в одной точке $x \in \mathbb{E}^N$.

У В. Д. Репникова и С. Д. Эйдельмана [47] получено необходимое и достаточное условие поточечной стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. Основным инструментом доказательства служит тауберова теорема Н. Винера ([59]).

В. М. Полякова [45] впервые исследовала вопросы стабилизации параболического уравнения с переменными коэффициентами.

Ю. Н. Дрожжинов [24] изучил асимптотическое поведение решений для ультрапараболического уравнения.

А вот в работах В. Н. Денисова [13], [14] показано, что даже для решений уравнения теплопроводности в классе неограниченных функций теряется связь между усреднениями (предел которых существует и наступает стабилизация $u(x,t)$ с характеристиками роста начальных функций). В дальнейшем, в статье В. Н. Денисова [16] в классе степенным образом ограниченных функций доказано, что такая связь существует, если предположить, что решение $u(x,t)$ стабилизируется равномерно в $\mathbb{E}^N$.

Для получения необходимых и достаточных условий стабилизации решений параболического уравнения с переменным коэффициентом при $\partial u/\partial t$ А. К. Гущин и В. П. Михайлов предложили в [9], [10] усреднять этот коэффициент в метрике пространства L_1, начальная функция, при этом ограничена в $\mathbb{E}^N$.

Новый подход к решению вопросов о стабилизации решений параболических уравнений предложен В. В. Жиковым в [26], [27]. Предложенным им методом удалось решить задачу о стабилизации в классе ограниченных функций в тех случаях, когда семейство операторов, порождаемое изучаемым оператором, допускает существование усредненного оператора с постоянными коэффициентами.

Отметим статью В. Н. Денисова и В. В. Жикова [17]. В ней методом усреднения решена задача о необходимых и достаточных условиях стабилизации средних по времени t от решения задачи Коши для параболического уравнения второго порядка с ограниченной начальной функцией $u_0(x)$:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t u(x,\tau)d\tau = 0,$$

где предел является поточечным по x в $\mathbb{E}^N$.

В работе С. Д. Эйдельмана [62] изучены вопросы о стабилизации, т.е. существования предела решения

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$$

задачи Коши для параболической по И. Г. Петровскому системы уравнений с коэффициентами, зависящими от t. Здесь предполагается, что начальная вектор функция $u_0(x)$ является ограниченной в пространстве $\mathbb{E}^N$. Ответ записывается в виде предела [65] угловых предельных средних вектор функции $u_0(x)$, либо в терминах центрально симметрических средних равномерно по x в $\mathbb{E}^N$, а также в виде предельных средних по кубам K_R^x со сторонами, равными $2R$, и с центром в точке x. Доказывается в [64], что условие существования равномерного по x в $\mathbb{E}^N$ предела при $R\to+\infty$ средних по кубам K_R^x влечет за собой стабилизацию решения системы параболических по И. Г. Петровскому уравнений, коэффициенты которых либо постоянны, либо зависят от t.

В работе [49] изучаются процессы с обострением для решений квазилинейных уравнений параболического типа.

В [50] приводятся определения обобщенных решений для ряда задач математической физики и обосновываются методы их решения.

Книга [25] посвящена систематическому изучению решения задач Коши и краевых задач методами решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Книга [55] представляет собой подробное руководство по решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Учебник [40] является современным учебником по теории уравнений в частных производных. Книга же [4] является самым известным пособием по уравнениям в частных производных и математической физике.

Отметим также пособие [61], которое является конспектом лекции по уравнениям математической физики (УМФ), читавшихся на физическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова.

Книга [38] является основным руководством по преподаванию УМФ, использующим обобщенные решения. Книга же [3] служит основным учебником по решению УМФ с использованием специальной техники решений. Учебники [56], [57] служат основным руководством по решениям УМФ.

Особо отметим учебник [51] В. А. Стеклова, который является основным руководством по классическим методам УМФ. Учебник [2] дает решения основных задач УМФ. Также классический учебник [1] дает развернутое представление о методах решения УМФ классическими методами.

В книге [54] приведены подробные сведения о решениях уравнений Вольтерра и Фредгольма классическими методами.

Перечислим также несколько классических пособий, тесно связанных с используемыми методами. Так книга [48] является современным учебником по функциональному анализу. В книге [6] Дж. Голдстейна даются методы решения линейных уравнений с помощью теории групп. Пособие [43] является очень подробным учебником по теории линейных дифференциальных уравнений.

Отметим также книгу [53] Ф.Трикоми, которая является учебным пособием по уравнениям в частных производных. Книга [39] является современным учебником по теории уравнений в частных производных. А вот [30] и [60] – одни из первых статей по асимптотике при $t \to \infty$ решений задачи Коши для параболических уравнений. Более того, в работе [32] изучено эргодическое свойство неоднородных диффузионных процессов.

Упомянем также статью [26], в которой доказывается критерий стабилизации задачи Коши для параболического уравнения без младших членов. В [28] изучается асимптотика при большом времени $t \to +\infty$ решений параболических уравнений второго порядка с младшими коэффициентами.

В статье [46] получен критерий равномерной стабилизации задачи Коши для параболических уравнений. Статья [29] впервые посвящена асимптотике при большом времени t решения задачи Коши для параболических систем с растущими коэффициентами.

В [67], [72] установлена гельдеровость фундаментальных решений параболических уравнений. Впервые изучены в статье [66] параболические уравнения второго порядка с диссипативными коэффициентами.

В статье [41] получено условие о равномерной стабилизации решения первой смешанной задачи для параболического уравнения. В [8] получено условие о равномерной стабилизации решения второй смешанной задачи для параболического уравнения.

Широко известная книга [5] является учебником по эллиптическим дифференциальным уравнениям второго порядка, а [58] – учебник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Популярный курс [36] изучает уравнения в частных производных эллиптического и параболического типов.

Итак, напомним, что настоящая диссертация посвящена изучению вопросов о нелокальном поведении (при больших значениях времени t) решения задачи Коши для параболических по И. Г. Петровскому систем уравнений в частных производных и поведения при больших t решения обобщенной задачи Коши для итерированного уравнения теплопроводности.

Мы изучаем два случая:

1) систему параболических по И. Г. Петровскому уравнений с постоянными коэффициентами и без младших членов.

2) систему параболических по И. Г. Петровскому уравнений с коэффициентами, зависящими от t и содержащую младшие коэффициенты ненулевого порядка.

Кроме того, изучается поведение при $t \to +\infty$ интеграла Пуассона для итерированного уравнения теплопроводности, с начальными условиями при $t = 0$.

Все результаты данной работы являются новыми и развивают тематику о поведении решений параболических систем и параболических уравнений при $t \to +\infty$.

Дадим общее определение параболической по И. Г. Петровскому [44] системы с матрицей $A^{(k_1,...,k_N)} = A^k_{ij},\ i, j = 1, ..., m,\ k = (k_1, ..., k_N)$.

Система линейных уравнений (с неизвестными $u_1, ..., u_m$)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{0\leqslant k_1+...+k_N\leqslant 2b,\, b\in\mathbf{N}} A_{ij}^{k}(t, x_1, ..., x_N)(-i)^{|k|} \frac{\partial^k u_j}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_N^{k_N}} +$$

$$+F_i(t, x_1, ..., x_N)\,(i = 1, ..., m)$$

называется параболической по И. Г. Петровскому в точке $t^{(0)},\quad x_1^{(0)}, ..., x_N^{(0)} \in \mathbb{E}^{N+1}$, где $\mathbb{E}^{N+1}$ — линейное пространство размерности $N+1$, если при любых действительных $\alpha_1, ..., \alpha_N$, сумма квадратов которых равна 1, все корни $\lambda = \lambda_1, ..., \lambda_N$ алгебраического уравнения относительно λ

$$\det\left(\sum_{k_1+...+k_N=2b} (-i)^{|k|} A^k(t^{(0)}, x_1^{(0)}, ..., x_N^{(0)})\alpha_1^{k_1}...\alpha_N^{k_N} - \lambda E\right) = 0$$

имеют отрицательные действительные части, где E — единичная матрица размера $N \times N$.

Для параболических систем корректно поставлена задача Коши для положительных t в классе ограниченных функций с достаточно гладкими начальными данными при $t = 0$. Корректность сохраняется также в классе функций, возрастающих при $x_1 + ... + x_N \to \infty$ не быстрее, чем $e^{(x_1^2+\cdots+x_N^2)\frac{2b}{2b-1}}$, где $2b$ — порядок системы.

2 Определения и основные результаты

В настоящей работе мы рассмотрим необходимые и достаточные условия существования предела при $t \to +\infty$ средних по времени от решения задачи Коши для параболической по И. Г. Петровскому системы уравнений, с ограниченной вектор функцией $u_0(x)$, т.е.

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t u(x, \tau)d\tau = 0$$

равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Этот вопрос был изучен нами в работе [20]. Отметим, что необходимость в теоремах 1–4 мы доказываем далее без применения тауберовой теоремы

Винера [59]. В настоящей работе мы изучим вопрос о существовании предела при $t \to +\infty$ средних Чезаро по t от $u(x,t)$ порядка α:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\alpha+1}{t} \int\limits_0^t \left(1-\frac{\tau}{t}\right)^\alpha u(x,\tau)d\tau = 0$$

равномерно по x в $\mathbb{E}^N$ от решения задачи Коши для параболической по И. Г. Петровскому системы уравнений. Мы изучим сначала случай, когда коэффициенты параболической по И. Г. Петровском системы уравнений постоянны, а затем случай, когда коэффициенты системы зависят от t.

В начале первой главы настоящей работы мы рассмотрим [20], [1–A] более простой случай параболической по И. Г. Петровскому системы дифференциальных уравнений, без младших коэффициентов:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k|=2b} A_k D^k u, x \in \mathbb{E}^N, t > 0, \tag{1}$$

где A_k — квадратные матрицы размера $m \times m$, имеют постоянные коэффициенты, и для решения системы (1) выполняются начальные условия при $t = 0$:

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{E}^N, \tag{2}$$

где

$$u_0(x) = (u_0^1(x), ..., u_0^m(x)) \tag{3}$$

— заданная ограниченная и непрерывная в $\mathbb{E}^N$ вектор функция (верхний индекс в (3) обозначает номер компоненты вектор-функции $u_0(x)$), здесь D^k означает

$$(-i)^k \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_N^{k_N}},$$
$$k = k_1 + k_2 + ... + k_N.$$

В работе [62] С. Д. Эйдельман доказал, что для матрицы Грина (фундаментального решения) системы (1)

$$G(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{\mathbb{E}^N} \exp\Big[i(x,y) - t \sum_{|k|=2b} A_k y_1^{k_1} y_2^{k_2} ... y_N^{k_N}\Big] dy \tag{4}$$

справедлива оценка:

$$\Big|\frac{\partial^k G(x,t)}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_N^{k_N}}\Big| < C_1 t^{-\frac{N+k}{2b}} \exp\Big[- C_2 (|x| t^{-\frac{1}{2b}})^q\Big], \tag{5}$$

где

$$(x,y) = (x_1 y_1 + ... + x_N y_N), |x| = [x_1^2 + ... + x_N^2]^{1/2},$$

$$q = \frac{2b}{2b-1}, C_1 > 0, C_2 > 0.$$

Хорошо известно [63], [65], что в классе единственности решение задачи Коши (1), (2), построенное по ограниченной начальной вектор-функции $u_0(x)$ представимо в виде интеграла Пуассона:

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{E}^N} G(x-\xi,t) u_0(\xi) d\xi, \tag{6}$$

$$d\xi = d\xi_1 d\xi_2 ... d\xi_N.$$

Так как единичная матрица E очевидно удовлетворяет системе (1) дифференциальных уравнений, то отсюда следует равенство

$$\int\limits_{\mathbb{E}^N} G(x-\xi,t) d\xi = E. \tag{7}$$

Далее мы сформулируем (см. [20]) основные результаты для решений параболической по И. Г. Петровскому системы (1), (2), а затем перенесем полученные результаты на случай параболической по И. Г. Петровскому системы с младшими коэффициентами, вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant 2b} A_k(t) D^k u, x \in \mathbb{E}^N, t > 0, \tag{8}$$

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{E}^N, \tag{9}$$

и в которых $A_k(t)$ — квадратные матрицы размера $m \times m$, элементы которой зависят только от времени t, $u_0(x)$ — ограниченная начальная вектор-функция.

Доказательства результатов о решениях системы (1), (2) остаются в силе и для решений параболической по И. Г. Петровскому системы уравнений (8), (9) для матрицы Грина, для которой справедливы оценки [65]:

$$|D^m G(x,t)| \leqslant C_m a(t)^{-N-m} \exp[-C(|x| a^{-1}(t))^q], \tag{10}$$

где $a(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ (см. [8]),

$$q = \frac{2b}{2b-1}, C_m > 0, C > 0.$$

Об этом мы подробнее остановимся в разделе 1.4 главы 1.

Для формулировки основных результатов для решений системы (1), (2) нам потребуется ряд определений, которые будут также использоваться в дальнейшем и для решений системы (8), (9).

Будут изучаться необходимые и достаточные условия существования предела средних по времени t от решения задачи (1), (2)

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t u(x,\tau) d\tau = 0 \tag{11}$$

равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Замечание. Вопросы существования предела (11) были впервые изучены в работе [20].

Будут также изучаться необходимые и достаточные условия существования предела при $t \to +\infty$, средних Чезаро по t порядка $\alpha \geqslant 0$ от решения системы (1), (2)

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\alpha+1}{t} \int\limits_0^t (1-\frac{\tau}{t})^\alpha u(x,\tau)d\tau = 0 \tag{12}$$

равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Перейдем к определению различных усреднений начальной вектор функции $u_0(x)$.

Определение 1. Будем говорить, что ограниченная вектор функция $u_0(x)$ имеет равномерные предельные средние, равные вектору с нулевыми компонентами, по кубам K_R^x, если для любого $\varepsilon > 0$, и всякого куба K_R^x со стороной равной $2R$, и центром в точке x, $x = (x_1, \ldots, x_N)$, справедливо неравенство

$$\left| \frac{1}{(2R)^N} \int\limits_{K_R^x} u_0(y)dx \right| < \varepsilon \tag{13}$$

при всех $R > R_0$ и всех x в $\mathbb{E}^N$.

Замечание. Условие, что средние (11) (или (12)), по времени t от $u(x,t)$ равны нулю, не является ограничением общности, так как всегда можно, если $u(x,t) \to l, t \to \infty$, где $l \neq 0$, заменить $u(x,t)$ на $u(x,t) - -l$, и тогда, в силу линейности пределов (11), (12) получим, что предельное значение (11) или (12) равно $0 = (0, ..., 0) \in E^m$.

Аналогично замечание относится к пределу средних от $u_0(x)$ по кубам K_R^x.

Определение 2. Будем говорить, что ограниченная вектор-функция $u_0(x)$ имеет равномерные предельные средние по шарам

$$B_R^x = \Big(y : \, |x-y| \leq R\Big)$$

с центром в точке x радиуса R, если существует нулевой предел шаровых средних (14) вектор функции $u_0(x)$, при $R \to \infty$, равномерно по x в $\mathbb{E}^N$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $R_0(\varepsilon) > 0$, такое, что при всех $R > R_0(\varepsilon)$ и всех x из $\mathbb{E}^N$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{N}{w_N R^N} \int\limits_{B_R^x} u_0(y)dy \right| < \varepsilon, \tag{14}$$

где

$$w_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(\frac{N}{2})}$$

— площадь поверхности сферы радиуса один в $\mathbb{E}^N$,

$$\frac{w_N R^N}{N}$$

— объем шара радиуса R в $\mathbb{E}^N$.

Сформулируем ряд результатов.

Теорема 1. *Если начальная вектор-функция $u_0(x)$ ограничена и непрерывна в $\mathbb{E}^N$, тогда для того, чтобы существовал предел (11) средних по времени t от решения задачи (1), (2) равномерно по x в $\mathbb{E}^N$, необходимо и достаточно, чтобы существовал предел решения задачи (1), (2)*

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0, \tag{15}$$

равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Теорема 1 впервые сформулирована в [20].

Аналогичная теорема (теорема 4) справедлива и для средних Чезаро (12) порядка α по t от решения задачи Коши для системы (1), (2).

Теорема 2. *Пусть начальная вектор-функция $u_0(x)$ ограничена и непрерывна в $\mathbb{E}^N$, $\alpha \geqslant 0$ — некоторое число. Для того, чтобы существовал предел (12) средних по t Чезаро порядка $\alpha \geqslant 0$ от решения задачи (1), (2) равномерно по x в $\mathbb{E}^N$, необходимо и достаточно, чтобы решение $u(x,t)$ задачи (1), (2) стабилизировалось к нулю, т.е. существовал предел (15) равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.*

При $\alpha = 0$ теорема 2 переходит в теорему 1.

Теоремы 1 и 2 вместе дают критерий существования пределов (11) и (12) в терминах существования предела (15) самого решения $u(x,t)$ задачи (1), (2).

Представляет интерес выразить критерий существования пределов (11) и (12) в терминах поведения различных средних от начальной вектор функции $u_0(x)$.

Теорема 3. *Если начальная вектор – функция $u_0(x)$ ограничена и непрерывна в $\mathbb{E}^N$, тогда, для того, чтобы существовал равномерный по x в $\mathbb{E}^N$*

предел (12) средних Чезаро порядка $\alpha \geqslant 0$ от решения задачи (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы начальная вектор – функция $u_0(x)$ имела предел (13) средних по кубам K_R^x, равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Теорема 4. *Если начальная вектор – функция $u_0(x)$ ограничена и непрерывна в $\mathbb{E}^N$, тогда для того, чтобы существовал равномерный по x в $\mathbb{E}^N$ предел (12) средних Чезаро порядка $\alpha > 0$ от решения задачи (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы начальная вектор функция $u_0(x)$ имела предел (14) средних по шарам B_R^x равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.*

Теоремы 1 и 2 дают критерий стабилизации средних по времени (11) и средних по времени (12) в терминах стабилизации решения $u(x,t)$ задачи (1), (2), т.е. предела (14).

Теорема 3 дает исчерпывающее решение проблемы равномерной по x в $\mathbb{E}^N$ стабилизации средних Чезаро (12) от решения задачи (1), (2) в терминах существования предела (13) средних по кубам K_R^x начальной вектор функции $u_0(x)$, равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Теорема 4 дает исчерпывающее решение проблемы равномерной по x в $\mathbb{E}^N$ стабилизации средних Чезаро по t порядка α от решения задачи (1), (2) в терминах существования предела (14) шаровых средних начальной вектор – функции $u_0(x)$, равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Эти результаты переносятся на случай системы параболических по И. Г. Петровскому уравнений (8), (9).

В главе 2 изучается вопросы об асимптотическом поведении при $t \to \infty$ решения итерированного уравнения теплопроводности.

Пусть $x = (x_1, ..., x_N)$ точка N-мерного евклидова пространства $\mathbb{E}^N$.

Введем обозначения для следующих множеств в $\mathbb{E}^{N+1}$.

$$(t \geqslant 0) = ((x,t) : \, x \in \mathbb{E}^N, \, t \geqslant 0),$$

$$(t > 0) = ((x,t) : \, x \in \mathbb{E}^N, \, t > 0).$$

Пусть символ Ω обозначает оператор теплопроводности

$$\Omega = \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right), \text{ где } \Delta = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \text{— оператор Лапласа в } \mathbb{E}^N.$$

Символ $\Omega^{(p)}$, где $p \in N, p \geqslant 2$ — обозначает результат p-кратного повторного применения оператора Ω к функции $u(x,t)$ из класса $C^{2p,p}(t > 0)$, где $C^{2p,p}(t > 0)$ — класс функций $u(x,t)$, имеющих непрерывные производные по

x до порядка $2p$ включительно и непрерывные производные по t до порядка p включительно в $(t > 0)$ (см. [71], с. 266). Считаем, что нулевая степень оператора Ω совпадает с тождественным оператором:

$$\Omega^{(0)}u \equiv u \text{ в } (t > 0).$$

Рассмотрим задачу о нахождении функции $u(x,t)$ из класса $C^{2p,p}(t > 0)$ такой, что справедливо итерированное уравнение теплопроводности

$$\Omega^{(p)}u(x,t) = 0 \text{ в } (t > 0), p \geqslant 2,\ p \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

и выполняются следующие условия при $t = 0$

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = f_0(x), \Omega^{(k)}u(x,t)|_{t=0} = f_k(x),\ k = 1, 2, ..., p-1, \tag{17}$$

где $f_k(x)$, $k = 0, 2, ..., p-1$, — заданные функции из класса $C(\mathbb{E}^N)$, для которых выполняются условия А. Н. Тихонова [77], для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $C(\varepsilon) > 0$, что при всех x из $\mathbb{E}^N$ справедливо неравенство

$$|f_k(x)| < C(\varepsilon)e^{\varepsilon|x|^2},\ k = 0, 2, ..., p-1. \tag{18}$$

Итерированное уравнение теплопроводности впервые изучено в работе ([71], с. 243–332), где установлено, что при сформулированных условиях существует и единственно решение задачи (16), (17), при этом справедлива формула (обобщенная формула Пуассона [71], с. 264–268):

$$u(x,t) = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi}\sqrt{t}\right)^N} \int\limits_{\mathbb{E}^N} e^{-\frac{r^2}{4t}} F(y,t)dy, \tag{19}$$

где

$$F(x,t) = f_0(x) - \frac{t}{1}f_1(x) + ... + \frac{(-1)^{p-1}t^{p-1}}{(p-1)!}f_{p-1}(x), r^2 = |x-y|^2. \tag{20}$$

Используем далее обозначение $u_l(x,t)$ для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с начальной функцией $f_l(x)$:

$$\Omega u_l(x,t) = 0, u_l(x,0) = f_l(x), l = 0, ..., p-1, \tag{21}$$

и запишем решение задачи (16), (17) в виде

$$u(x,t) = \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-1)^l}{l!} t^l u_l(x,t). \tag{22}$$

Если в формулах (21) функции $f_l(x)\,(l=0,...,p-1)$ являются гармоническими функциями в $\mathbb{E}^N$, т.е. $f_l(x)\in C^{(2)}(\mathbb{E}^N)$ и

$$\Delta f_l(x)=0, x\in\mathbb{E}^N,$$

то, как легко видеть, решение задачи (16), (17) имеет вид

$$u(x,t)=\sum_{l=0}^{p-1}\frac{t^l}{l!}f_l(x)(-1)^l. \tag{23}$$

Ясно,что для решения (23) задачи (16), (17) стабилизация

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t)$$

не имеет места.

Поэтому представляет интерес изучение стабилизации не самого решения $u(x,t)$ задачи (16), (17), а изучение равностабилизации, т.е. стабилизации к нулю разности

$$\lim_{t\to\infty}[u(x,t)-V(x,t,\alpha)]=0 \tag{24}$$

для некоторой подобранной функции $V(x,t,\alpha)$.

При фиксированных x из $\mathbb{E}^N$ рассмотрим шаровые средние Рисса [18] порядка $\alpha\geqslant 0$ от функции $\varphi(x)\in C(E)$:

$$S_R^\alpha\varphi_0(x)=\frac{C}{R^N}\int\limits_{r\leqslant R}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^\alpha\varphi(y)dy, \tag{25}$$

где

$$C=\frac{2}{w_NB(N/2,\alpha+1)}, w_N=\frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}. \tag{26}$$

Для фиксированных $x\in\mathbb{E}^N, t>0, \alpha\geqslant 0$ рассмотрим функцию

$$V(x,t,\alpha)=\sum_{l=0}^{p-1}\frac{(-1)^l}{l!}t^lS^\alpha_{2\sqrt{t}\sqrt{\alpha}}f_l(x)=$$

$$=\frac{2}{B(N/2,\alpha+1)\alpha^{N/2}w_N}\int\limits_{|\sigma|\leqslant\sqrt{\alpha}}\left(1-\frac{|\sigma|^2}{\alpha}\right)^\alpha\sum_{l=0}^{p-1}\frac{(-1)^lt^l}{l!}f_l(x+2\sqrt{t}\sigma)d\sigma= \tag{27}$$

$$=\frac{C}{\alpha^{N/2}}\int\limits_{|\alpha|\leqslant 1}\left(1-\frac{|\sigma|^2}{\alpha}\right)^\alpha F(x+2\sqrt{t}\sigma,t)d\sigma,$$

где F — функция (20).

Совершая замену переменных по формулам

$$y_k = x_k + 2\sqrt{t}\sigma, k = 1, ..., N,$$

представим решение $u(x,t)$ задачи (16), (17) в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{E}^N} e^{-|\sigma|^2} \Big[\sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-1)^l}{l!} t^l f_l(x + 2\sqrt{t}\sigma) \Big] d\sigma. \qquad (28)$$

Пусть все начальные функции $f_l(x), l = 0, ..., p-1$, (17) имеют на бесконечности не более чем степенной рост, т.е.

$$|f_l(x)| \leqslant M(1 + |x|^m), m > 0, M > 0. \qquad (29)$$

Имеет место следующее утверждение [21], [22], [2–A].

Теорема 1. *Если выполняются условие роста (29) для функций $f_l(x), l = 0, ..., l-1$, и*

$$\alpha(t) = t^{m+p-1}, \qquad (30)$$

где $\alpha(t)$ — порядок средних Рисса (27), p — порядок уравнения (1), m — степень роста в оценке (29), тогда решение $u(x,t)$ задачи (16), (17) и функция $v(x,t,\alpha(t))$, определяемая равенством (27), равностабилизируется при $t \to \infty$ равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{E}^N$ со скоростью, не меньше, чем $t^{-m/2}$, т.е.

$$\sup_K |u(x,t) - V(x,t,\alpha(t)| \leqslant Ct^{-\frac{m}{2}}. \qquad (31)$$

Эта теорема дает утверждение о стабилизации функции $V(x,t,\alpha(t))$, если известно, что стабилизируется решение $u(x,t)$ для начальных условий (17).

Верно и обратное утверждение. Скорость равностабилизации (31) является точной по порядку $t^{-m/2}$.

В разделе 2 главы 2 мы изучим поведение при $t \to +\infty$ решений $u(x,t)$ для другой постановки задачи Коши для итерированного уравнения теплопроводности.

Пусть как и выше $\Omega = \Delta - \partial/\partial t$ — оператор теплопроводности. Символ $\Omega^{(p)}u, p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2$, обозначает результат p-кратного повторного применения оператора Ω к функции $u(x,t)$ из класса $C^{2p,p}(t > 0)$ (см. [71], N. Nicolescu, с. 257–264).

Рассмотрим задачу: найти функции $u(x,t)$ из $C^{2p,p}(t>0)$, для которой справедливо уравнение

$$\Omega^{(p)}u(x,t)=0 \text{ в } (t>0) \tag{32}$$

и начальные условия

$$u(x,0)=\varphi_0(x),\ \frac{\partial^i u}{\partial t^i}(x,0)=\varphi_i(x), x\in\mathbb{E}^N\,(i=1,...,p-1), \tag{33}$$

где функции $\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_{p-1}(x)$ удовлетворяют условиям:

1)$\varphi_i^{(k)}(x)\,k=1,...,p-1)$ из класса $C^{2(p-k-1)}(\mathbb{E}^N)$;

2) существуют две положительные постоянные M и K, для которых $|\varphi_i^{(k)}(x)|<M\exp(K|x|^2), i=0,1,...,p-2, k=0,1,...,p-1$.

В работе [71] (M. Nicolescu) были изучены свойства решений уравнения (32), в частности, было установлено существование, единственность решения задачи Коши (32), (33) и получено интегральное представление этой задачи

$$u(x,t)=\sum_{l=0}^{p-1}\frac{t^l}{l!}\sum_{k=0}^{l}(-1)^k C_l^k\frac{\partial^k u_{l-k}(x,t)}{\partial t^k}, \tag{34}$$

где

$$C_l^k=\frac{l!}{k!(l-k)!},$$

$$u_l(x,t)=\frac{1}{(2\sqrt{\pi}\sqrt{t})^N}\int\limits_{E^N}\varphi_l(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}dy, \tag{35}$$

$$|x-y|=\left[\sum_{k=0}^N (x_k-y_k)^2\right]^{1/2}$$

— решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\Omega u_l(x,t)=0, \text{ в } (t>0), u_l(x,0)=\varphi_l(x), x\in\mathbb{E}^N. \tag{36}$$

Нашей целью является изучение стабилизации для решения задачи Коши (32), (33) при $p\geqslant 2$. Конечно это свойство решения задачи (32), (33) не может быть таким, как и для решения (35) задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Действительно, если функции $\varphi_i(x) \in C^2(\mathbb{E}^N)$ и гармоничны в $\mathbb{E}^N$, т.е.

$$\Delta\varphi_i(x) = 0\, (i = 0, 1, ..., p-1),$$

то решение задачи (32), (33) имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{t^i}{i!}\varphi_i(x).$$

Ясно, что в этом случае стабилизация решения задачи (32), (33) не имеет места, но при этом у всех $\varphi_i(x)\,(i = 0, ..., p-1)$ существуют пределы шаровых средних

$$\lim_{R\to\infty} S_R^\alpha \varphi_i(x) = \varphi_i(x),$$

в силу гармоничности функции $\varphi_i(x)$.

Поэтому будем изучать стабилизацию не самого решения $u(x,t)$ задачи (32), (33), а стабилизацию некоторого усреднения $u(x,t)$ по времени t.

При $R > 0, x \in \mathbb{E}^N$, рассмотрим шаровые средние Рисса порядка $\alpha \geqslant 0$ функции $\varphi_i(x)$:

$$S_R^\alpha \varphi_i(x) = \frac{2}{w_N B(N/2, \alpha+1) R^N} \int\limits_{r \leqslant R} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^\alpha \varphi_i(y) dy. \tag{37}$$

Предположим, что $\beta \geqslant p-1$, где p — порядок уравнения (32), и введем следующие усреднения типа Рисса по времени t порядка β от решения $u(x,t)$ задачи (32), (33):

$$S(x,t,\beta,u) = \frac{2}{B(\frac{p}{2}, \beta+1) t^p} \int\limits_0^t \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^{p-1} \Big[\tau^{p-1}(1 - \frac{\tau^2}{t^2})^\beta\Big] u(x,\tau) d\tau. \tag{38}$$

Интегрируя $p-1$ раз по частям в (38), получим:

$$S(x,t,\beta,u) = \frac{2}{B(\frac{p}{2}, \beta+1) t^p} \int\limits_0^t \tau^{p-1}\Big(1 - \frac{\tau^2}{t^2}\Big)^\beta \times$$

$$\times \Big[\frac{\partial^{p-1} u(x,t)}{\partial \tau^{p-1}}\Big] d\tau. \tag{39}$$

Теорема. *Пусть $\beta \geqslant p-1$ и функции $\varphi_l(x)\,(l = 0, 1, ..., p-1)$ имеют пределы шаровых средних Рисса (37) порядков $\alpha_l \geqslant 0, l = 0, ..., p-1$,*

$$\lim_{R\to\infty} S_R^{\alpha_l} \varphi_l(x) = A_l(x)\, (l = 0, 1, ..., p-1) \tag{50}$$

равномерно по x на компакте K в $\mathbb{E}^N$.

Тогда решение $u(x,t)$ задачи (32), (33) имеет предел средних типа Рисса (39) по t порядка $\beta \geqslant p-1$

$$\lim_{t\to\infty} S(x,t,\beta,\varphi) = A_{p-1}(x)$$

равномерно по x на компакте K в $\mathbb{E}^N$, при этом существует предел

$$\lim_{t\to\infty}[S(x,t,\beta,\varphi) - u_{p-1}(x,t)] = 0$$

равномерно по x на компакте K в $\mathbb{E}^N$.

ГЛАВА 1
ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ПО И. Г. ПЕТРОВСКОМУ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ. ВОПРОСЫ СТАБИЛИЗАЦИИ СРЕДНИХ ПО ВРЕМЕНИ

1.1 Основные оценки фундаментального решения. О средних Чезаро от решения системы (1), (2)

В этой главе в начале будет изучено поведение при $t \to \infty$ решений и их усреднений по t для параболической по И. Г. Петровскому системы уравнений с постоянными коэффициентами [68]

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{|k|=2b} A_k D^k u(x,t), x \in \mathbb{E}^N, t > 0, \tag{1}$$

удовлетворяющей начальным условиям

$$u(x,0) = u_0(x), x \text{ из } \mathbb{E}^N. \tag{2}$$

Здесь, как и выше,

$$D^k = (-i)^k \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ... \partial x_N^{k_N}}, k = k_1 + k_2 + ... + k_N,$$

A_k — квадратная матрица размера $m \times m$ с постоянными коэффициентами.

Пусть начальная вектор-функция

$$u_0(x) = (u_0^1(x), u_0^2(x), ..., u_0^m(x))$$

является ограниченной и непрерывной в $\mathbb{E}^N$. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$|u_0^i(x)| < 1, i = 1, ..., m. \tag{3}$$

Верхний индекс i обозначает номер i компоненты вектора $u_0(x)$.

С. Д. Эйдельман в [62] доказал, что для фундаментального решения (матрица Грина) $G(x,t)$ системы (1)

$$G(x,t) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{\mathbb{E}^N} \exp\left[i(x,y) - t \sum_{|k|=2b} A_k y_1^{k_1}, ..., y_N^{k_N} \right] dy \tag{4}$$

справедлива оценка

$$\Big|\frac{\partial^k G(x,t)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_N^{k_N}}\Big| <$$

$$< C_1 t^{-\frac{N+k}{2b}} \exp\Big(-C_2\Big(\frac{|x|}{t^{1/2b}}\Big)^q\Big), k = k_1 + k_2 + ... + k_N, \tag{5}$$

где

$$(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_Ny_N, |x| = (x_1^1 + x_2^2 + ... + x_N^N)^{1/2},$$

$$q = \frac{2b}{2b-1}, C_1 > 0, C_2 > 0.$$

Если начальная вектор-функция

$$u_0(x) = (u_0^1(x), u_0^2(x), ..., u_0^m(x))$$

ограничена и непрерывна в $\mathbb{E}^N$, то решение задачи Коши (1), (2) существует, единственно и представимо в виде интеграла Пуассона [64]

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{E}^N} G(x-\sigma,t)u_0(\sigma)d\sigma, \tag{6}$$

где

$$d\sigma = d\sigma_1, d\sigma_2, ..., d\sigma_N.$$

Так как едининичная матрица $\mathbb{E}$ удовлетворяет системе (1), то очевидно равенство

$$\int\limits_{\mathbb{E}^N} G(x-\sigma,t)d\sigma = E.$$

Изучим вопрос о существовании предела при $t \to +\infty$ средних Чезаро по t порядка $\alpha \geqslant 0$ от решения $u(x,t)$ системы (1), (2):

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\alpha+1}{t}\int\limits_0^t \Big(1-\frac{\tau}{t}\Big)^{\alpha} u(x,\tau)d\tau = 0 \tag{7}$$

равномерно по x во всем $\mathbb{E}^N$.

Замечание. Средние Чезаро по t порядка $\alpha \geqslant 0$ от $u(x,t)$ являются регулярным методом суммирования расходящихся интегралов (см. [59]).

Изучение таких средних по времени t имеет смысл, так как:

1. Этот метод суммирования является более общим, чем обыкновенная сходимость, например, предел

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_0^t \sin\lambda\tau d\tau, \lambda > 0,$$

не существует, тогда как существует предел

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_0^t \left(1-\frac{\tau}{t}\right)\sin\lambda\tau d\tau =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{\sin\lambda t}{t\lambda^2}\right) = \frac{1}{\lambda} > 0.$$

2. Метод суммирования Чезаро согласован с обычной сходимостью, в том смысле, что, если интеграл сходится, то он является суммируемым методом Чезаро (C,α) и, притом, сходится к тому же пределу (см. [59], с. 142–145).

Если решение $u(x,t)$ суммируется методом Чезаро (C,α) по t, где $\alpha \geqslant 0$, то $u(x,t)$ суммируется методом Чезаро (C,β) по t для всех $\beta > \alpha$, к тому же самому значению.

Эти простейшие, очевидные свойства метода суммирования Чезаро хорошо известны (см. [59]).

Замечание. Так как предполагается, что начальная вектор – функция $u_0(x), |u_0| < 1$ ограничена в $\mathbb{E}^N$, то ограниченным является и решение $u(x,t)$ системы (1), (2).

Равномерный предел (7) ограниченных решений $u(x,t)$ тоже является ограниченной вектор-функцией, тогда, не ограничивая общности, будем считать далее, что предел (7) равен 0, ибо, если предел (7) равен $B, B \neq 0$, то всегда можно рассмотреть разность $u(x,t) - B$, для которой из линейности предела (7) вытекает, что можно положить $B = 0$.

1.2 Формулировка результатов для случая параболической по И. Г. Петровскому системы уравнений с постоянными коэффициентами

Теорема 1. *Если начальная вектор-функция $u_0(x)$ ограничена и непрерывна в $\mathbb{E}^N$, тогда для того, чтобы существовал предел средних по времени от решения $u(x,t)$ задачи (1), (2), (см. [20], [21])*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t u(x,\tau)d\tau = 0 \tag{8}$$

равномерно по x в $\mathbb{E}^N$, необходимо и достаточно, чтобы решение $u(x,t)$ задачи (1), (2) стабилизировалось к нулю равномерно по x в $\mathbb{E}^N$, т.е. существовал предел

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0 \tag{9}$$

равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Теорема 2. *Если начальная вектор-функция $u_0(x)$ ограничена и непрерывна в $\mathbb{E}^N$, $\alpha \geqslant 0$ — некоторое число. Для того, чтобы существовал нулевой предел (7) средних Чезаро порядка $\alpha \geqslant 0$ по t от решения $u(x,t)$ задачи (1), (2) равномерно по x в $\mathbb{E}^N$, необходимо и достаточно, чтобы решение $u(x,t)$ задачи (1), (2) стабилизировалось к нулю, т.е. существовал предел (9) равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.*

При $\alpha = 0$ теорема 2 переходит в теорему 1.

Теорема 1 и 2 впервые дают критерий существования пределов (7) и (8) равномерно по x в $\mathbb{E}^N$ в терминах равномерной в $\mathbb{E}^N$ стабилизации решения $u(x,t)$ задачи (1), (2), т.е. в терминах предела (9).

Теорема 1 впервые была сформулирована в работе [20].

Представляет интерес выразить критерий существования пределов (7) и (8) в терминах существования пределов различных средних от начальной вектор функции $u_0(x)$.

С этой целью мы рассмотрим два самых распространенных метода усреднения начальной вектор функции $u_0(x)$:

1) предельное равномерное среднее от начальной вектор функции $u_0(x)$ по N-мерным кубам K_R^x, со сторонами, равными $2R$ и с центром куба в точке x , т.е. предел

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{(2R)^N}\int\limits_{K_R^x}u_0(y)dy=0 \tag{10}$$

равномерно по x в $\mathbb{E}^N$;

2) предел шаровых средних от вектор функции $u_0(x)$:

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{C_1}{R^N}\int\limits_{r\leqslant R}u_0(y)dy=0, \tag{11}$$

где

$$C_1=\frac{N}{w_N}, w_N=\frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}, r=|x-y|, \tag{12}$$

равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Теорема 3. *Если вектор функция $u_0(x)$ ограничена и непрерывна в $\mathbb{E}^N$, тогда для того, чтобы существовал равномерно по x в $\mathbb{E}^N$ нулевой предел (7) средних Чезаро по t порядка $\alpha\geqslant 0$ от решения $u(x,t)$ задачи (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы начальная вектор функция $u_0(x)$ имела равномерное по x в $\mathbb{E}^N$ предельное среднее (10) по кубам K_R^x со стороной, равной $2R$ и с центром в точке x, т.е. если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $R_0(\varepsilon)>0$, что для всякого куба K_R^x со стороной $2R$ и с центром в точке x справедливо неравенство*

$$\left|\frac{1}{(2R)^N}\int\limits_{K_R^x}u_0(y)dy\right|<\varepsilon$$

при всех x из $\mathbb{E}^N$ и всех $R>R_0(\varepsilon)$.

Теорема 4. *Если начальная вектор функция $u_0(x)$ ограничена и непрерывна в $\mathbb{E}^N$, тогда для того, чтобы существовал равномерно по x в $\mathbb{E}^N$ нулевой предел (7) средних Чезаро по t порядка $\alpha>0$ от решения задачи (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы начальная вектор функция $u_0(x)$ имела предел (11) шаровых средних равномерно по x в $\mathbb{E}^N$, т.е. если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $R_0(\varepsilon)>0$, что для всякого шара $B_R^x=(y:\ |x-y|\leqslant R)$*

с центром в точке x и радиуса R, справедливо неравенство

$$\left| \frac{C_1}{R^N} \int\limits_{B_R^x} u_0(y)dy \right| < \varepsilon$$

для всех x из $\mathbb{E}^N$ и всех $R > R_0(\varepsilon)$.

Отметим, что теоремы 1–4 в сторону достаточности представляют собой теоремы абелева типа ([59], с. 189–190), и их доказательства проводятся стандартными методами. Этими обстоятельствами мы воспользуемся в дальнейшем.

Теоремы 1–4 в сторону необходимости представляют собой теоремы тауберова типа ([59], с.189-190), Тауберовыми условиями в этих теоремах являются условия ограниченности и непрерывности в $\mathbb{E}^N$ начальной вектор функции $u_0(x)$ и условия существования равномерного по x в $\mathbb{E}^N$ предела (7), или, соответственно (8).

При доказательстве необходимости в теоремах 1–4 мы не используем тауберову теорему Винера ([59], с. 352–354).

Замечание 1. Вместо изучения средних Чезаро (7) порядка $\alpha \geqslant 0$ по t от решения $u(x,t)$ задачи (1), (2) мы можем аналогично, при тех же условиях на вектор функцию $u_0(x)$, изучить метод стабилизации средних Рисса порядка $\alpha \geqslant 0$ по t от $u(x,t)$ [23], [23]:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{2}{B(1/2, \alpha+1)t} \int\limits_0^t \left(1 - \frac{\tau^2}{t^2}\right)^\alpha u(x,\tau)d\tau = 0 \tag{13}$$

равномерно по x в $\mathbb{E}^N$. При этом мы получим соответствующие аналоги теорем 1–4, в которых существование предела (7) равномерно по x в $\mathbb{E}^N$ следует заменить на существование равномерного в $\mathbb{E}^N$ предела (13).

Замечание 2. Аналогично, вместо предела (7) средних Чезаро от $u(x,t)$ мы можем при тех же условиях на начальную вектор-функцию $u_0(x)$ изучить процесс стабилизации средних Абеля по t от решения $u(x,t)$ задачи (1), (2):

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\tau}{t}} u(x,\tau)d\tau = 0 \tag{14}$$

равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

1.3 Доказательство теорем 1–4

Прежде чем приступить к доказательству теорем, рассмотрим вопрос о применении оценки (5) из введения для получения оценок решения $u(x,t)$ задачи (1), (2).

При $k=0$ оценка (5) из введения приобретает вид

$$|G(x,t)| < C_1 t^{-\frac{N}{2b}} \exp\left[-C_2\Big(\frac{|x|}{t^{1/2b}}\Big)^q\right], \tag{15}$$

где

$$q = \frac{2b}{2b-1}, q>0, C_2>0, C_1>0.$$

Отметим, что правая часть (15) по переменной $x \in \mathbb{E}^N$ является радиальной функцией.

Рассмотрим интеграл (6) и сделаем под знаком интеграла Пуассона замену переменных

$$\sigma_i = x_i + t^{1/2b} y_i, i=1,...,N.$$

Тогда получим, что интеграл (6) можно записать в виде

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{E}^N} G(yt^{1/2b},t) u_0(x+t^{1/2b}y) dy. \tag{16}$$

Применяя справа в формуле (16) оценку (15), будем иметь:

$$|u(x,t)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{E}^N} |G(yt^{1/2b},y)||u_0(x+t^{1/2b}y)| dy. \tag{17}$$

Фиксируем положительное число B и разобьем интеграл (17) на два интеграла.

Выбор числа B будет далее уточнен:

$$|u(x,t)| \leqslant \int\limits_{|y|\leqslant B} |G(yt^{1/2b},t)||u_0(x+2\sqrt{t}y)| dy +$$

$$+ \int\limits_{|y|>B} |G(yt^{1/2b},t)||u_0(x+t^{1/2b}y)| dy = I_1 + I_2. \tag{18}$$

Фиксируем $\varepsilon_0 > 0$, применим оценку (15) и, считая число $B > 0$ достаточно большим, получим неравенство

$$|I_2| \leqslant M_1 \int\limits_{|y|>B} e^{-C_2|y|^q} dy < \frac{\varepsilon_0}{8}, \tag{19}$$

в силу абсолютной сходимости интеграла, где

$$M_1 = C_1 \cdot \sup_{\mathbb{E}^N} |u_0(x)|, q = \frac{2b}{2b-1}.$$

Оценивая интеграл I_1 справа в (18), получим:

$$|I_1| \leqslant M_1 \int\limits_{|y|\leqslant B} e^{-C_2|y|^q} dy \leqslant M_1 B^N. \tag{20}$$

Таким приёмом оценки интеграла Пуассона (6) мы будем пользоваться в дальнейшем.

Доказательство теоремы 1.

Достаточность.

Предположим, что $u_0(x)$ — ограниченная и непрерывная в $\mathbb{E}^N$ вектор-функция, и что существует предел (9) решения $u(x,t)$ задачи (1), (2):

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \tag{21}$$

равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Докажем, что тогда существует предел следующих средних по времени t от решения задачи (1), (2):

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t u(x,\tau) d\tau = 0 \tag{22}$$

равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Так как предел (21) является равномерным по x в $\mathbb{E}^N$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $d = d(\varepsilon)$ такое,что при всех $t > d$ справедливо неравенство

$$|u(x,t)| < \varepsilon/2 \tag{23}$$

для всех $x \in \mathbb{E}^N$.

Из ограниченности $u_0(x), x \in \mathbb{E}^N$, получим для решения $u(x,t)$ задачи (1), (2), представимого формулой (6), следующее неравенство:

$$|u(x,t)| \leqslant M \tag{24}$$

для всех $x \in \mathbb{E}^N$ и всех $t > 0$.

Представив интеграл слева в (22) в виде суммы двух интегралов, имеем:

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t u(x,\tau)d\tau = \frac{1}{t}\int\limits_0^d u(x,\tau)d\tau + \frac{1}{t}\int\limits_d^t u(x,\tau)d\tau = K_1 + K_2, \tag{25}$$

где $0 < d < t$.

Пусть $t > d$, тогда получим из (25), (23), (24) следующие простые неравенства:

$$|K_1| < \frac{M_1 d}{t}, \tag{26}$$

где

$$M_1 = \sup_{x\in\mathbb{E}^N,\, t>0} |u(x,t)|,$$

$$|K_2| < \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_d^t < \frac{\varepsilon}{2}\frac{t-d}{t} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{27}$$

Выберем теперь t из условия

$$\frac{M_1 d}{t} < \frac{\varepsilon}{2},$$

т.е. из неравенства

$$t > \frac{2M_1 d}{\varepsilon}, \tag{28}$$

тогда из равенства (25) и неравенств (26), (27), (28) получим:

$$\Big|\frac{1}{t}\int\limits_0^t u(x,\tau)d\tau\Big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

при всех $t > \frac{2M_1 d}{\varepsilon}$ равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Достаточность в теореме 1 доказана.

Необходимость.

Пусть $u_0(x)$ — ограниченная и непрерывная в $\mathbb{E}^N$ вектор-функция, и существует предел (22) средних по времени t от решения задачи (1), (2) равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Докажем, что тогда существует предел (21) решения $u(x,t)$ равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Предположим противное, т.е. что решение $u(x,t)$ задачи (1), (2) не имеет равномерного в $\mathbb{E}^N$ предела (21). Это означает, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и любых положительных t_k, $k = 1, 2, ...$ найдутся $t > t_k$ и такие точки $x^k = (x_1^k, x_2^k, ..., x_N^k)$, что, по крайней мере, для одной из компонент вектор функции $u(x,t)$ (например для $u^1(x,t)$) справедливо неравенство

$$|u^1(x^k, t_k))| \geqslant \varepsilon_0. \tag{29}$$

Докажем, что тогда не существует нулевого предела (22) средних по времени t равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Для доказательства (29) достаточно показать, что найдется компонента $u_0^1(x)$ начальной вектор-функции $u_0(x)$, положительное $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $R > 0$ найдутся $R_k > R$ и точки $x^k = (x_1^k, ..., x_N^k)$, для которых справедливы неравенства

$$\left| \frac{1}{(2R_k)^N} \int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} u_0^1(\xi) d\xi \right| > \varepsilon_0 > 0. \tag{30}$$

Используя (30), докажем, что тогда соответствующая компонента средних по времени

$$W^1(x, t_k) = \frac{1}{t_k} \int\limits_0^{t_k} u^1(x, \tau) d\tau \tag{31}$$

не стремится к нулю при $t_k \to \infty$.

Замечание. **1.** Хорошо известно, что существование предела

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{(2R)^N} \int\limits_{K_R^x} u_0(x) dx = 0 \tag{32}$$

равномерно по x в $\mathbb{E}^N$ влечет за собой существование равномерного в $\mathbb{E}^N$ предела (22) (см. [64], с. 349).

2. Существование равномерного по x в $\mathbb{E}^N$ предела (32), как хорошо известно [52], влечет за собой существование равномерного по x в $\mathbb{E}^N$ предела (21) решения задачи (1), (2) (см. [64], с. 349–351).

Напомним, что мы предложили противное, т.е. что не существует предел (21), равномерный по x в $\mathbb{E}^N$.

Итак, покажем, что из (30) следует, что $W^1(x,t)$ в (31) не стремится к нулю при $t \to \infty$.

Выберем последовательность времен

$$t_k = \Big(\frac{\varepsilon_0 R_k}{4B^{N+1}mN}\Big)^{2b} \to +\infty, \tag{33}$$

где R_k — некоторая последовательность, стремящаяся к бесконечности, а число $B > 0$ — постоянная, которая будет выбрана далее.

Усредним функцию (31) $W^1(x,t)$ по кубу $K_{R_k}^{x^k}$, следующим образом:

$$|\Delta| = \left|\frac{1}{(2R)^N}\int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} W^1(x,t_k)dx\right|, \tag{34}$$

где t_k — последовательность (33).

Далее,

$$|\Delta| = \Big|\frac{1}{2t_k}\int\limits_0^{t_k} d\tau \frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} dx \int\limits_{E^N}\sum_{j=1}^m G_{1j}(x-\xi,\tau)\times$$

$$\times[u_0^j(x) + u_0^j(\xi) - u_0^j(x)]d\xi\Big|,$$

и учитывая, что

$$\int\limits_{\mathbb{E}^N}\sum_{j=1}^m G_{1j}(x-\xi,\tau)d\xi = 1,$$

и производя замену переменных

$$\xi_k = x_k + y_k\tau^{1/2}$$

в интеграле по ξ, получаем:

$$|\Delta| = \left|\frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} W^1(x,\tau_k)dx\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} u_0(\xi)d\xi + \frac{1}{t_k}\int\limits_0^{t_k}\tau^{N/2b}d\tau \int\limits_{|y|\leqslant B}\sum_{j=1}^m G_{1j}(y\tau^{1/2b},\tau)dy\right|\times$$

$$\times \left[\frac{1}{(2R_k)^N} \int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} (u_0^j(x - y\tau^{1/2b}) - u_0^j(x))dx) \right] +$$

$$+\frac{1}{t^k} \int\limits_0^{t_k} \tau^{N/2b} d\tau \int\limits_{|y| \geqslant B} \sum_{j=1}^m G_{1j}(y\tau^{1/2b}, \tau) d\tau \times$$

$$\times \left[\frac{1}{(2R_k)^N} \int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} [u_0^j(x - y\tau^{1/2b}) - u_0^j(x)]dx) \right] = |L_1 + L_2 + L_3|. \qquad (35)$$

Применяя справа в (35) обратное неравенство треугольника, получим неравенство

$$|\Delta| = \left| \frac{1}{(2R_k)^N} \int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} W^1(x, L_k) \right| \geqslant |L_1| - |L_2| - |L_3|, \qquad (36)$$

где

$$|L_1| = \left| \frac{1}{(2R_k)^N} \int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} u_0^j(\xi) d\xi \right| > \varepsilon_0 > 0,$$

в силу (30).

Выберем теперь число $B > 0$ настолько большим, что бы

$$|L_3| < \frac{\varepsilon_0}{4}. \qquad (37)$$

Это можно сделать в силу оценки (19).

В самом деле, учитывая, что

$$|u_0^j(x - y\tau^{1/2b}) - u_0(x)| < 2$$

для всех x, y из $\mathbb{E}^N$ и для всех $t > 0$, и получаем:

$$|L_3| \leqslant t_k^{N/2b} \int\limits_{|y \geqslant B|} \sum_{j=1}^m \left| G_{1j}(y\tau^{1/2b}, \tau_k) \right| dy < \frac{\varepsilon_0}{4}, \qquad (38)$$

где

$$\tau^{1/2b} \leqslant t_k^{1/2b}.$$

Тогда оценка (37) доказана.

Докажем, что

$$|L_2| < \frac{\varepsilon_0}{4}. \tag{39}$$

В самом деле, так как функция $u_0^j(x - \tau^{1/2b}y)$ отличается от функции $u_0^j(x)$ на множестве, имеющим меру, не превосходящую $2^N N R_k^{N-1} B t_k^{1/2b}$ при $0 < \tau < t_k$, то

$$\left| \frac{1}{(2R_k)^N} \int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} (u_0(x - y\tau^{1/2b}) - u_0(y))dy) \right| <$$

$$< \frac{NBt_k^{1/2b}}{R_k}. \tag{40}$$

Так как, в силу оценок (20) и (40), и в силу выбора t_k по формуле (33), получим:

$$|L_2| < \frac{NB \cdot t_k^{1/2b}}{R_k} mB^N =$$

$$= \frac{mNB^{N+1}}{R_k} \cdot \frac{\varepsilon_0 R_k}{4B^{N+1}mN} = \frac{\varepsilon_0}{4}. \tag{41}$$

Из оценок (39), (40), (41) и из оценки (30) получаем, что

$$\left| \frac{1}{(2R_k)^N} \int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} (W^1(x, t_k)dx) \right| > \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Из неравенства (36) следует, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ нашлась такая последовательность времен t_k из (33), $t_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, и такая последовательность точек x^k, для которой

$$\left| \frac{1}{(2R_k)^N} \int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} W^1(x, t_k)dx \right| > \frac{\varepsilon_0}{2}, \tag{42}$$

где $W^1(x, t_k)$ — из (31).

Из (42) вытекает, что для любого как угодно большого времени $T > 0$ можно указать такие $t_k > T$, и также точки x_0^k, лежащие внутри куба $K_{R_k}^{x^k}$, для которых

$$\left| W^1(x_0^k, t_k) \right| > \frac{\varepsilon_0}{2},$$

т.е. доказано, что функция $W^1(x,t)$ не стремится к нулю, при $t \to \infty$.

Полученное противоречие доказывает необходимость в теореме 1.

Доказательство теоремы 2.

Достаточность.

Предположим, что $u_0(x)$ — ограниченная и непрерывная в $\mathbb{E}^N$ вектор-функция, и что существует предел (21) решения задачи (1), (2) равномерно по x в $\mathbb{E}^N$. Докажем, что тогда существует предел средних Чезаро по t порядка $\alpha \geqslant 0$ от решения задачи (1), (2):

$$\lim_{t\to+\infty} W^{\alpha}(x,t) \equiv$$

$$\equiv \lim_{t\to+\infty} \frac{\alpha+1}{t} \int\limits_0^t \left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha} u(x,\tau)d\tau = 0 \tag{43}$$

равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Так как решение задачи (1), (2) является ограниченным:

$$|u(x,t)| \leqslant M \tag{44}$$

для всех x из $\mathbb{E}^N$ и для всех $t > 0$, и по условию существует предел (21), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $d = d(\varepsilon) > 0$ такие, что при $t > d$ справедливо неравенство

$$|u(x,t))| < \frac{\varepsilon}{2(\alpha+1)} \tag{45}$$

для всех x из $\mathbb{E}^N$.

Предположим, что $t > d$ и разобьем интеграл справа в (43) на два:

$$W^{\alpha}(x,t) = \frac{\alpha+1}{t}\int\limits_0^d \left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha} u(x,\tau)d\tau + \frac{\alpha+1}{t}\int\limits_d^t \left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha} u(x,\tau)d\tau =$$

$$= K_1 + K_2. \tag{46}$$

Из (45) получим оценку для K_2 в (46):

$$|K_2| < \frac{t-d}{t}\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2},\ t > d(\varepsilon). \tag{47}$$

Оценим слагаемое K_1 в (46):

$$|K_1| < M_1 \frac{d}{t}, \tag{48}$$

где

$$M_1 = (\alpha + 1)M.$$

Выберем t так, чтобы

$$M_1 \frac{d}{t} < \frac{\varepsilon}{2},$$

т.е. чтобы

$$t > \frac{2M_1 d}{\varepsilon}. \quad (49)$$

Из (46), (47) и для t из неравенства (49) получим, что

$$|W^\alpha(x,t)| < \varepsilon \quad (50)$$

для всех x из $\mathbb{E}^N$.

Достаточность в теореме 2 доказана.

Необходимость.

Пусть $u_0(x)$ — ограниченная и непрерывная в $\mathbb{E}^N$ вектор-функция, и существует предел (43) средних Чезаро по t порядка $\alpha > 0$ от решения задачи (1), (2) равномерно по x в $\mathbb{E}^N$. Докажем, что тогда существует предел (21) решения задачи (1), (2) равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Предположим противное, т.е. что решение $u(x,t)$ не имеет равномерного в $\mathbb{E}^N$ предела (21). Это означает, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ найдётся последовательность $t_k \to +\infty$ при $k \to \infty$ и такие точки $x^k = (x_1^k, x_2^k, ..., x_N^k)$, для которых, по крайней мере, для одной из компонент решения на $u(x,t)$ (например, для $u^1(x,t)$) справедливо неравенство

$$|u^1(x^k, t_k)| \geqslant \varepsilon_0 > 0. \quad (51)$$

Докажем, что тогда не существует нулевого предела (43) при $t \to \infty$ средних Чезаро $W^\alpha(x, t^k)$.

Для доказательства этого достаточно показать, что найдутся: положительные $\varepsilon_0 > 0$, компонента $u_0^1(x)$ начальной вектор функции $u_0(x)$ такие, что для любого $R > 0$ найдутся такие $R_k > R, k = 1, 2, ..., N...$ и точки $x^k = (x_1^k, x_2^k, ..., x_N^k)$, для которых справедливо неравенство

$$\left| \frac{1}{(2R_k)^N} \int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} u_0^1(\xi) d\xi \right| \geqslant \varepsilon > 0. \quad (52)$$

Используя (52), докажем, что соответствующая компонента $W_1^\alpha(x,t_k)$ средних Чезаро (43) порядка α не стремится к нулю при $t_k \to +\infty$.

Рассмотрим последовательность времен t_k, определенных равенством (33), где R_k — некоторая последовательность такая, что $R_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Усредним функцию $W^\alpha(x,t_k)$ по кубу $K_{R_k}^{x^k}$ следующим образом:

$$|\Delta| = \left| \frac{1}{(2R_k)^N} \int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} W^\alpha(x,t_k)dx \right| =$$

$$= \Big| \frac{\alpha+1}{t_k} \int\limits_0^{t_k} \Big(1-\frac{\tau}{t}\Big)^\alpha d\tau \Big[\frac{1}{(2R_k)^N} \int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} dx \int\limits_{\mathbb{E}^N} \sum_{j=1}^m G_{1j}(x-\xi,\tau) \times$$

$$\times [u_0^j(x) + u_0^j(\xi) - u_0^j(x)] d\xi dx \Big] \Big|. \tag{53}$$

Под знаком интеграла в (53), по $\mathbb{E}^N$ сделаем замену переменных

$$\xi_i = x_i + y_i \tau^{1/2b}, i = 1,2,...,N,$$

$$d\xi_i = \tau^{1/2b} dy_i, d\xi = \tau^{N/2} dy,$$

и, учитывая, что

$$\int\limits_{\mathbb{E}^N} \sum_{j=1}^m G_{1j}(x-\xi,\tau)d\xi = 1, \tag{54}$$

получим из (54) равенство, разбивая интеграл по $\mathbb{E}^N$ на два, по шару $|y| \leqslant B$ и по его дополнению $|y| > B$:

$$|\Delta| = \Big| \frac{1}{(2R_k)^N} \int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} u_0^1(\xi)d\xi + \frac{\alpha+1}{t_k} \int\limits_0^{t_k} \tau^{N/2b} d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{|y|\leqslant B} \sum_{j=1}^N G_{1j}(y\tau^{1/2b},\tau)dy \Big[\frac{1}{(2R_k)^N} \int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} (u_0^j(x+y\tau^{1/2b}) - u_0^j(x))dx \Big] +$$

$$+ \frac{\alpha+1}{t_k} \int\limits_0^{t_k} \tau^{N/2b} d\tau \int\limits_{|y|>B} \sum_{j=1}^N G_{1j}(y\tau^{1/2b},\tau)dy \times$$

$$\times\Big[\frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K_{R_k}^{x^k}}(u_0^j(x-y\tau^{1/2b})-u_0^j(x))dx\Big]\Big| =$$

$$= \Big|M_1+M_2+M_3\Big|. \tag{55}$$

Применяя в правой части (55) обратное неравенство треугольника, получим из (55) неравенство

$$|\Delta| = \Big|M_1+M_2+M_3\Big| \geqslant |M_1|-|M_2|-|M_3|. \tag{56}$$

Для M_1 имеем из (52) оценку:

$$|M_1| > \varepsilon_0 > 0. \tag{57}$$

Оценим слагаемое M_3 в (56) и докажем сначала, что

$$|M_3| < \frac{\varepsilon_0}{4}. \tag{58}$$

В силу выбора достаточно большой постоянной $B>0$ из (19), получим (58). Такой выбор $B>0$ возможен, так как абсолютно сходится интеграл в (19), в силу оценки (5) из введения и в силу ограниченности вектор функции $u_0(x)$:

$$|u_0^j(x+y\tau^{1/2b})-u_0^j(x)| \leqslant 2.$$

Так как функция $u_0^j(x+y\tau^{1/2b})$ отличается от функции $u_0^j(x)$ на множестве, имеющим меру, не превосходящую

$$2^N N R_k^{N-1} B t_k^{1/2b}$$

при

$$0<\tau<t_k,$$

то получим оценку

$$\left|\frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K_{R_k}^{x^k}}[(u_0^j(x+y\tau^{1/2b})-u_0^j(x))]dx\right| <$$

$$< \frac{NBt_k^{1/2b}}{R_k}. \tag{59}$$

Учитывая выбор времен t_k из (33), из оценок (20) и (59), имеем:

$$|M_2| < \frac{NBR_k\varepsilon_0 mB^N}{R_k\cdot 4B^{N+1}mN} = \frac{\varepsilon_0}{4}. \tag{60}$$

Из оценок (59), (60) мы получим требуемую оценку:

$$|M_2| < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Из (56), (57), (58) и (60) получаем оценку снизу:

$$|\Delta| = \left| \frac{1}{(2R_k)^N} \int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} W_1^{\alpha}(x, t_k) dx \right| > \frac{\varepsilon_0}{4}. \tag{61}$$

Из (61) следует, что для любого как угодно большого по времени $T > 0$ можно указать такие $t_k > T$ и также точки x_0^k, лежащие внутри куба $K_{R_k}^{x^k}$, для которых

$$|W^{\alpha}(x_0^k, t_k)| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2} > 0,$$

т.е. доказано, что средние Чезаро (43) $W_1^{\alpha}(x, t)$ не стремятся к нулю при $t \to \infty$, что противоречит условию существования предела (43). Полученное противоречие доказывает необходимость в теореме 2.

Таким образом доказано существование предела (21) решения задачи (1), (2).

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3.

Достаточность.

Вначале отметим, что эта часть доказательства теоремы 3 вытекает из хорошо известной общей теоремы о стабилизации, доказанной Ф. О. Порпером и С. Д. Эйдельманом [65]. Мы приводим доказательство ради полноты изложения.

Пусть начальная вектор-функция $u_0(x)$ ограничена и непрерывна и имеет нулевое равномерное по x в $\mathbb{E}^N$ среднее (10) по N-мерным кубам K_R^x. Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое T_1, не зависящее от x, что при $t > T_1$ справедливо неравенство

$$\Big| u(x, t) \Big| < \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{62}$$

С этой целью запишем интеграл Пуассона (6) в виде

$$u(x, t) = \int\limits_{\mathbb{E}^N} G(y, t) \frac{\partial^N}{\partial y_1, ..., \partial y_N} \left[\int\limits_0^{y_1} ... \int\limits_0^{y_N} u_0(x - \eta) d\eta \right] dy. \tag{63}$$

Интегрируя по частям в правой части и перебрасывая производные на $G(y,t)$ в (63), будем иметь:

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{E}^N} \frac{\partial^N G(y,t)}{\partial y_1, ..., \partial y_N} \left[\int\limits_0^{y_1} ... \int\limits_0^{y_N} u_0(x-\eta) d\eta \right] dy. \tag{64}$$

Все внеинтегральные слагаемые в правой части (64) обратились в нуль, в силу оценки (19).

Применяя формулу (64), выделим под знаком интеграла среднее от $u_0(x)$ по N-мерному кубу. Для этого сделаем замену переменных интегрирования в (64) по y, полагая

$$y_i = t^{1/2b} z_i, i = 1, ..., N,$$
$$dy = t^{N/2b} dz.$$

После этого разобъем интеграл на два слагаемых и воспользуемся оценками (19), (20) фундаментального решения $G(x,t)$.

При этом получим:

$$\begin{gathered} u(x,t) = C_1 \int\limits_{|z_1|<\alpha} ... \int\limits_{|z_N|<\alpha} e^{-C_2|z|^q} \Big[\frac{1}{t^{N/2b}} \times \\ \times \int\limits_0^{t^{1/2b} z_1} ... \int\limits_0^{t^{1/2b} z_N} u_0(x-\eta) d\eta dz \Big] + \\ + C_1 \int\limits_{|z_1|>\alpha} ... \int\limits_{|z_N|>\alpha} e^{-C_2|z|^q} \times \\ \times \Big[\frac{1}{t^{N/2b}} \int\limits_{z_1 - z_0}^{z_1 t^{1/2b}} ... \int\limits_0^{z_N t^{1/2b}} u_0(x-\eta) d\eta dz \Big] = I_1 + I_2. \end{gathered} \tag{65}$$

Отметим, что мы получили при этом равенство

$$\begin{gathered} |I_1| = C_1 \int\limits_{|z_1|<\alpha} ... \int\limits_{|z_N|<\alpha} e^{-C_2|z|^q} |z_1 ... z_N| \times \\ \times \left[\frac{1}{z_1 t^{1/2b} ... z_N t^{1/2b}} \int\limits_{K^{x^k}_{t^{1/2b} z}} u_0(x-\eta) d\eta dx \right] dz, \end{gathered} \tag{66}$$

т.е. мы выделили среднее $u_0(x)$ по кубу $K^x_{t^{1/2b}z}$ с центром в точке x. Выберем теперь α настолько малым, чтобы

$$|I_1| < \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{67}$$

Для завершения доказательства отметим еще, что в силу предположения о существовании нулевого равномерного по среднего от функции $u_0(x)$, можно указать такое T_1, что при $t > T_1$

$$\Big|\frac{1}{\alpha^N t^{N/2b}} \int\limits_{K^{x^k}_{\alpha t^{1/2b}}} u_0(x-\eta)d\eta\Big| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}\Big(C_1 \int\limits_{\mathbb{E}^N} e^{-C_2|z|^q}|z_1, z_2, ..., z_N|dz\Big)^{-1}. \tag{68}$$

Поэтому

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{2},$$

т.е. доказано, что

$$|u(x,t)| < \varepsilon$$

для $\forall t > T_1$ равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Достаточность доказана.

Необходимость.

Пусть начальная вектор-функция $u_0(x)$ ограничена и непрерывна в $\mathbb{E}^N$, и существует предел (43) средних Чезаро по t порядка $\alpha > 0$ от решения задачи (1), (2) равномерно по x в $\mathbb{E}^N$. Докажем, что тогда $u_0(x)$ имеет равномерный по x предел (10) средних по N-мерным кубам K^x_R.

Предположим противное, т.е. что средние по кубам

$$\frac{1}{(2R)^N}\int\limits_{K^x_R} u_0(x)dx \tag{69}$$

не имеют предела (10) равномерно по x в $\mathbb{E}^N$. Это означает, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и любых $R_k, k = 1, 2, ...,$ найдутся такие $R > R_k$ и такие точки $x^k = (x^k_1, ..., x^k_N)$, что, по крайней мере, для одной из компонент функции $u_0(x)$ (для определенности для $u^1_0(x)$) справедлива оценка

$$\left|\frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K^{x^k}_{R_k}} u^1_0(\xi)d\xi\right| > \varepsilon_0 > 0. \tag{70}$$

Докажем, что из неравенства (70) вытекает, что соответствующая компонента решения $u^1(x,t)$ задачи (1), (2) не стремится к нулю при $t \to +\infty$. В самом деле выберем последовательность $t_k \to +\infty$, $k \to \infty$ из формулы (33) и усредним $u^1(x,t)$ по кубам $K_{R_k}^{x^k}$:

$$|\Delta| = \Big| \frac{1}{(2R_k)^N} \int\limits_{K_{R_k}^{x_k}} u^1(x,t_k)dx \Big| =$$

$$= \Big| \frac{1}{(2R_k)^N} \int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} \int\limits_{E^N} \sum_{j=1}^m G_{1j}(x-\xi,\tau)d\xi \times \tag{71}$$

$$\times [u_0^j(x) + u_0^j(\xi) - u_0^j(x)]d\xi dx \Big|.$$

В интегралах справа в (71) по ξ сделаем замену переменных $\xi_j = x_j + y_j t^{1/2b}\,(j=1,...,N)$ и воспользуемся равенством

$$\int\limits_{\mathbb{E}^N} \sum_{j=1}^m G_{1j}(\xi - x, t)d\xi = 1.$$

Получим из (71) равенство

$$|\Delta| = \Big| \frac{1}{(2R_k)} \int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} u^1(x,t_k)dx \Big| =$$

$$= \Big| \frac{1}{(2R_k)^N} \int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} u_0^j(\xi)d\xi +$$

$$+ t_k^{N/2b} \int\limits_{|y|<B} \sum_{j=1}^m G_{1j}(y t_k^{1/2b}, t_k)dy \times$$

$$\times \Big(\frac{1}{(2R_k)^N} \int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} [u_0^j(x + y t_k^{1/2by}) - u_0^j(x)]dx + \tag{72}$$

$$+ t_k^{N/2b} \int\limits_{|y|>B} \sum_{j=1}^m G_{1j}(y t_k^{1/2b}, t_k)dy \Big) \times$$

$$\times \frac{1}{(2R_k)^N} \int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} [u_0^j(x - y \cdot t_k^{1/2b}) - u_0^j(x)]dx \Big| =$$

$$= |L_1 + L_2 + L_3| \geqslant |L_1| - |L_2| - |L_3|.$$

Здесь мы применим обратное неравенство треугольника. Выберем число $B > 0$ настолько большим, чтобы

$$t_k^{N/2b} \int\limits_{|y|>B} \sum_{j=1}^{m} |G_{1j}(yt_k^{1/2b}, t_k)| dy < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{73}$$

В силу сходимости интеграла (19) это возможно, т.к. справедлива оценка (5) из введения для фундаментального решения $G(x,t)$. Учитывая еще, что

$$|u_0^j(x + yt^{1/2b}) - u_0^j(x)| \leqslant 2,$$

и получим из (73) оценку

$$|L_3| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{74}$$

Докажем, что

$$|L_2| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{75}$$

Действительно, так как функции

$$u_0^j(x + yt_k^{1/2b})$$

отличаются от функций $u_0^j(x)$ на множестве, которое имеет меру не больше, чем

$$2^N N R_k^{N-1} B t_k^{1/2b},$$

то

$$\left| \frac{1}{(2R_k)^N} \int\limits_{K_{R_k}^{x_k}} [u_0^j(x - y, t_k^{1/2b}) - u_0^j(x)] dx \right| < \frac{NBt_k^{1/2b}}{R_k}. \tag{76}$$

В силу оценки (20) имеем:

$$t_k^{N/2b} \int\limits_{|y|<B} \left| \sum_{j=1}^{m} G_{1j}(yt_k^{1/2b}, t_k) \right| dy < m \cdot B^N. \tag{77}$$

Учитывая оценки (76) и (77) в слагаемом $|L_2|$ будем иметь, при выборе t_k из условия (33):

$$|L_2| < \frac{2^N N B^N R_k \cdot B m \varepsilon_0}{2^N m N \cdot R_k B^{N+1} 4} = \frac{\varepsilon_0}{4}. \tag{78}$$

Из (72), (74), (76), (78) получаем неравенство

$$\Big|\frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} u^1(x,t_k)dx\Big| > \frac{\varepsilon_0}{2} > 0. \tag{79}$$

Из (79) следует, что для как угодно большого времени T можно указать такие времена t_k и такие точки x_0^k, лежащие внутри куба $K_{R_k}^{x^k}$, для которых

$$|u^1(x_0^k,t_k)| > \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{80}$$

Мы доказали, что $u^1(x,t)$ не стремится к нулю при $t\to+\infty$, тогда как по условию теоремы 3 существует равномерный по x в $\mathbb{E}^N$ предел (21) решения задачи (1), (2).

Полученное противоречие доказывает необходимость в теореме 3.

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4.

Мы доказываем сначала *необходимость*.

Предположим, что вектор-функция $u_0(x)$ ограничена и непрерывна в $\mathbb{E}^N$, и существует предел (43) средних Чезаро по t порядка α от решения $u(x,t)$ задачи (1), (2) равномерно по x в $\mathbb{E}^N$. Докажем, что существует предел шаровых средних (11) от начальной вектор функции $u_0(x)$.

Предположим противное, т.е. тогда $u_0(x)$ не имеет равномерного в $\mathbb{E}^N$ предела (11) шаровых средних, т.е. предел

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{C}{R^N}\int\limits_{|x-y|\leqslant R} u_0(y)dy = 0, C=\frac{N}{w_N}, w_N=\frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} \tag{81}$$

не существует равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Это означает, что для некоторого $\varepsilon_0>0$ и любых $R_k\to+\infty$ найдутся такие $R>R_k$ и такие точки $x^k=(x_1^k,...,x_N^k)$ в шаре $B_R^{x^k}$, что, по крайней мере, для одной из компонент вектор функции $u_0(x)$ (для определенности для $u_0^1(x)$) справедливо неравенство

$$\Big|\frac{C}{R^N}\int\limits_{B_{R_k}^{x^k}} u_0^1(\xi)dx\Big| \geqslant \varepsilon > 0. \tag{82}$$

Докажем, что из неравенства (82) вытекает, что соответствующая компонента решения $u^1(x,t)$ решения задачи (1), (2) не стремится к нулю при

$t \to +\infty$. В самом деле, выберем как и выше, последовательность времен

$$t_k = \Big(\frac{\varepsilon_0 R_k}{4B^{N+1}mN}\Big)^{2b} \to +\infty, k \to +\infty,$$

где R_k — некоторая последовательность $R_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, и число $B > 0$ выберем далее.

Усредним функцию (43) $W^\alpha(x, t_k)$ по шарам $B^{x^k}_{R_k}$, следующим образом:

$$\Delta = \Big|\frac{N}{w_N R_k^N}\int\limits_{B^{x^k}_{R_k}} W^\alpha(x, t_k)dx\Big| =$$

$$\Big|\frac{\alpha+1}{t_k}\int\limits_0^{t_k}(1-\frac{\tau}{t_k})^\alpha d\tau\Big[\frac{C_1}{(R_k)^N}\int\limits_{B^{x^k}_{R_k}} dx \int\limits_{\mathbb{E}^N}\sum_{j=1}^m G_{1j}(x-\xi,\tau)\times \qquad (83)$$

$$\times(u_0^j(x) + u_0^j(\xi) - u_0^j(x))d\xi\Big]\Big|dx.$$

Под знаком интеграла в (83) по $\mathbb{E}^N$ сделаем замену переменных

$$\xi_j = x_j + y_j\tau^{1/2b}, j = 1, ..., N,$$

и учтем, что

$$\int\limits_{\mathbb{E}^N}\sum_{j=1}^m G_{1j}(x-\xi,\tau)d\xi = 1.$$

Из (83) с учетом указанной замены переменных и после разбиения интеграла по $\mathbb{E}^N$ на два интеграла, один из интегралов берется по шару $|y| \leqslant B$, а другой интеграл берется по его дополнению $|y| > B$, т.е.

$$\int\limits_{\mathbb{E}^N} dy = \int\limits_{|y|\leqslant B} dy + \int\limits_{|y|>B} dy.$$

Будем иметь:

$$|\Delta| = \Big|\frac{C_1}{(R_k)^N}\int\limits_{B^{x^k}_{R_k}} u_0(\xi)d\xi +$$

$$+\frac{\alpha+1}{t_k}\int\limits_0^{t_k}\Big(1-\frac{\tau}{t_k}\Big)^\alpha \tau^{\frac{N}{2b}}d\tau \int\limits_{|y|<B}\sum_{j=1}^m G_{1j}(y\tau^{1/2b},\tau)dy\times$$

$$\times\Big[\frac{C_1}{(R_k)^N}\int\limits_{B^{x^k}_{R_k}}(u_0^j(x+\tau^{1/2b}))-u_0^j(x)dx\Big]+ \tag{84}$$

$$+\frac{\alpha+1}{t}\int\limits_0^{t_k}(1-\frac{\tau}{t_k})^{\alpha}\tau^{N/2b}d\tau\int\limits_{|y|>B}\sum_{j=1}^m G_{1j}(y\tau^{1/2b},\tau)dy\times$$

$$\times\Big[\frac{C_1}{(R)^N}\int\limits_{B^{x^k}_{R_k}}(u_0^j(x+\tau^{1/2b}y)-u_0^j(x))dx\Big]\Big|=$$

$$=|D_1+D_2+D_3|.$$

Применим к правой части (84) обратное неравенство треугольника. Получим:

$$\Big|\frac{C_1}{R^N}\int\limits_{B^{x^k}_{R_k}}W^{\alpha}(x,t_k)dx\Big|\geqslant|D_1|-|D_2|-|D_3|. \tag{85}$$

Выберем теперь $B>0$ настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$|D_3|\leqslant\Big|\frac{\alpha+1}{t_k}\int\limits_0^{t_k}(1-\frac{\tau}{t_k})^{\alpha}d\tau\int\limits_{|y|>B}\sum_{j=1}^m\Big|G_{1j}(\tau^{1/2b}y,\tau)\Big|dy\Big|<\frac{\varepsilon_0}{8}. \tag{86}$$

Такой выбор $B>0$ возможен в силу оценки (19) и абсолютной сходимости интеграла (19). Тогда из (86) и условия $|u_0^j(x-\tau^{1/2b}y)-u_0^j(x)|\leqslant 2$ окончательно имеем:

$$|D_3|<\frac{\varepsilon_0}{4}. \tag{87}$$

Докажем, что

$$|D_2|<\frac{\varepsilon_0}{4}. \tag{88}$$

В самом деле, так как функция $u_0^j(x+\tau^{1/2b}y)$ отличается от функции $u_0^j(x)$ на множестве, которое имеет меру, не превосходящую

$$\frac{2^N NR^{N-1}Bt_k^{1/2b}}{R_k},0<\tau<t_k, \tag{89}$$

то

$$\Big|\frac{C_1}{R^N}\int\limits_{B^{x^k}_{R_k}}[u_0^j(x+\tau^{1/2b})-u_0^j(x)]dx\Big|<$$

$$<\frac{NBt_k^{1/2b}}{R_k}. \tag{90}$$

Так как в силу оценки (20), имеем оценку

$$\frac{\alpha+1}{t_k}\int\limits_0^{t_k}(1-\frac{\tau}{t_k})^{\alpha}\tau^{N/2b}d\tau\times$$

$$\times\int\limits_{|y|<B}\sum_{j=1}^{m}|G_{1j}(\tau^{1/2b},\tau)|dy<mB^N, \tag{91}$$

то перемножив (90) и (91), получим оценку

$$|D_2|<\frac{NBR_kB^N\times m\varepsilon_0}{B^{N+1}R_kmN}=\frac{\varepsilon_0}{4}. \tag{92}$$

Оценка (88) доказана.

Таким образом доказано, что для некоторого $\varepsilon_0>0$ нашлась последовательность времен $t_k\to+\infty$, $k\to+\infty$, и такая последовательность центров шаров $x^k=(x_1^k,...,x_N^k)$, что

$$\Big|\frac{C_1}{R^N}\int\limits_{B_{R_k}^{x^k}}W^{\alpha}(x,t_k)dx\Big|>\frac{\varepsilon_0}{2}>0. \tag{93}$$

Отсюда вытекает, что для как угодно большого времени T можно найти такие $t_k>T$ и такие точки x_0^k, которые находятся внутри шара $B_{R_k}^{x^k}$, для которых

$$|W^{\alpha}(x_0^k,t_k)|>\frac{\varepsilon_0}{2}>0.$$

То есть последовательность средних Чезаро (43) $W^{\alpha}(x,t)$ не сходится к нулю при $t\to\infty$.

В то время, как по условию теоремы 4, существует предел (43) средних Чезаро при $t\to+\infty$ равномерно по x в $\mathbb{E}^N$. Получили противоречие, которое доказывает справедливость теоремы 4, т.е. доказано, что существует предел (11) шаровых средних от вектор функции $u_0(x)$ равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Необходимость в теореме 4 доказана.

Теперь докажем *достаточность* в теореме 4.

Предположим, что $u_0(x)$ — ограниченная и непрерывная в $\mathbb{E}^N$ вектор-функция, и существует предел (11) шаровых средних от $u_0(x)$ равномерно по x в $\mathbb{E}^N$. Докажем, что существует предел (7) средних Чезаро по t, порядка α от решения задачи (1), (2).

Воспользуемся справедливостью леммы 2, которая доказана ниже. Тогда из существования равномерного по x в $\mathbb{E}^N$ предела средних от $u_0(x)$ по шарам B_k^x следует, что существует равный ему равномерный по x в $\mathbb{E}^N$ предел средних (10), от $u_0(x)$ по кубам K_R^x со сторонами, равными $2R$ и с центром в точке x из $\mathbb{E}^N$.

Существования равномерного по x предела средних от $u_0(x)$ по кубам K_R^x, как хорошо известно, влечет за собой существование предела (21) при $t \to \infty$ решения $u(x,t)$, равномерного по x в $\mathbb{E}^N$, т.е. мы воспользуемся тем, что тогда существует равномерный по x в $\mathbb{E}^N$ предел (7) средних Чезаро порядка α от $u(x,t)$. Для этого следует воспользоваться доказательством достаточности из теоремы 2.

Достаточность в теореме 4 доказана.

Теорема 4 полностью доказана.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Если функция $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{E}^N$, то из существования предела (10) средних по кубам K_R^x равномерно по x в $\mathbb{E}^N$ следует, что существует предел (11) средних по шарам B_R^x равномерно по x в $\mathbb{E}^N$, при этом пределы (10) и (11) совпадают.*

Доказательство. Пусть $\varphi_0(x)$ ограниченная и непрерывная в $\mathbb{E}^N$ функция, и существует предел средних (10) по кубам K_R^x со стороной, равной $2R$, и с центром в точке x. Тогда докажем, что существует равномерно по x в $\mathbb{E}^N$ предел при $t \to \infty$ решения $u(x,t)$ следующей задачи Коши для уравнения теплопроводности:

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, x \in \mathbb{E}^N, t > 0, \tag{94}$$

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{E}^N. \tag{95}$$

Известно, что при условии

$$|u_0(x)| \leqslant M, u_0(x) \in C(\mathbb{E}^N)$$

решение задач (94), (95) существует, единственно и представимо в виде интеграла Пуассона [52]:

$$u_0(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi}\sqrt{t})^N} \int\limits_{\mathbb{E}^N} u_0(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy. \tag{96}$$

Докажем, что из существования нулевого предела (10), средних функции $u_0(x)$ по кубам K_R^x равномерно по x в $\mathbb{E}^N$ вытекает, что решение $u(x,t)$ задачи Коши (94), (95) стабилизируется к нулю, т.е. существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0 \tag{97}$$

равномерно по x в $\mathbb{E}^N$ (см., например, [65], стр. 344, или см. доказательство достаточности в теореме 3 настоящей работы).

Обратно, если $\varphi(x)$ — непрерывная и ограниченная начальная функция и существует предел (97) равномерно по x в $\mathbb{E}^N$, то, как известно [10], существует нулевой предел (11) шаровых средних функции $\varphi(x)$ равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Лемма 1 доказана.

Справедливо обратное утверждение к лемме 1, которое мы приводим ради полноты изложения материала.

Лемма 2. *Если функция $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{E}^N$, то из существования предела (10) средних по шарам B_R^x равномерно по x в $\mathbb{E}^N$ следует, что существует предел (11) средних по кубам K_R^α со стороной $2R$ и с центром в точке x.*

Доказательство. Докажем, что из существования предела (11) равномерно по x в $\mathbb{E}^N$ вытекает, что существует предел (97) решения задачи Коши (94), (95). Для решения задачи (94), (95) справедливо следующее интегральное представление через средние (11) по шару B_ρ^x с центром в точке x и радиуса ρ от $\varphi(x)$, которое легко получается интегрированием по частям под знаком интеграла [38]:

$$u(x,t) = \frac{2}{\Gamma(N/2+1)(2\sqrt{t})^{N+2}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{4t}} \rho^{N+1} S_\rho^0 u_0(x) d\rho,$$

где

$$S_\rho^0 u_0(x) = \frac{N}{w_N \rho^N} \int\limits_0^\rho \sigma^{N-1} M(x,\sigma,u_0) d\sigma,$$

$$M(x,\sigma,\varphi) = \frac{1}{w_N \sigma^{N-1}} \int\limits_{|x-y|=\sigma} u_0(y) dS_y$$

— среднее от $u_0(y)$ по поверхности сферы $|x-y| = \sigma$ и центром в точке x радиуса σ.

Так как $|u_0(x)| \leqslant M$, то разобъем интеграл $u(x,t)$ на два слагаемых:

$$u(x,t) = \frac{2}{\Gamma(\frac{N+2}{2})(2\sqrt{t})^{N+2}} \int\limits_0^A \rho^{N+1} e^{-\frac{\rho^2}{4t}} S_\rho^0 u_0(x) d\rho +$$

$$+ \frac{2}{\Gamma(\frac{N+2}{2})(2\sqrt{t})^{N+2}} \int\limits_A^\infty \rho^{N+1} e^{-\frac{\rho^2}{4t}} S_\rho^0 u_0(x) d\rho = I_1 + I_2.$$

Так как $S_\rho^0 u_0(x) \to 0, \rho \to \infty$ при $R \to \infty$ равномерно по x в $\mathbb{E}^N$, т.е. предел является равномерным по x в $\mathbb{E}^N$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $A(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $A > A(\varepsilon)$

$$|S_\rho^0 u_0(x)| < \varepsilon/2,$$

если $\rho \geqslant A > A(\varepsilon)$ равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Тогда можем оценить I_2:

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{2} \frac{C_2}{t^{\frac{N+2}{2}}} \int\limits_A^\infty e^{-\frac{\rho^2}{4t}} \rho^{N+1} d\rho <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \frac{C_2}{t^{\frac{N+2}{2}}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{4t}} \rho^{N+1} d\rho = \frac{\varepsilon}{2},$$

где

$$C_2 = \frac{2}{\Gamma(\frac{N+2}{2}) 2^{N+2}}.$$

Фиксируем $A(\varepsilon) > 0$ и воспользуемся тем, что $|u_0(x)| \leqslant M$, тогда для I_1 имеем оценку:

$$|I_1| < \frac{MC_2}{t^{(\frac{N+2}{2})}}.$$

Выберем теперь t так, чтобы выполнялась оценка:

$$\frac{C_2 M}{t^{(\frac{N+2}{2})}} < \varepsilon/2,$$

т.е.

$$\forall t > \Big(\frac{2C_2 M}{\varepsilon}\Big)^{\frac{2}{N+2}}.$$

Тогда в итоге получим из оценок I_1 и I_2 неравенство

$$|u(x,t)| < \varepsilon,$$

если

$$t > \Big(\frac{2C_2M}{\varepsilon}\Big)^{\frac{2}{N+2}}$$

равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Стабилизация решения задачи Коши (94), (95) доказана.

Пусть теперь решение задачи Коши (94), (95) равномерно по x в $\mathbb{E}^N$ имеет предел (97), т.е. оно равномерно по x в $\mathbb{E}^N$, $u(x, t)$ стабилизируется к нулю при $t \to +\infty$. Докажем, что тогда существует предел (10) средних по кубам K_R^x при $R \to \infty$ равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Этот факт хорошо известен (см. [65], с. 349) для случая ограниченных в $\mathbb{E}^N$ начальных функций.

Из леммы 1 и теоремы 3 получаем следствие.

Следствие теоремы 3. Если начальная вектор функция $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{E}^N$, и существует нулевой предел (7) средних Чезаро по t порядка $\alpha > 0$ от решения $u(x, t)$ задачи (1), (2) равномерно по x в $\mathbb{E}^N$, то существует предел (11) средних по шару B_k^x, от вектор-функции $u_0(x)$ равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Доказательство следствия. Из существования предела (10) средних x по кубам B_k^x и леммы 1 вытекает справедливость следствия.

Применяя теорему 1 и лемму 1 аналогично получаем следующее утверждение.

Следствие теоремы 1. Если начальная вектор-функция $u_0(x)$ ограничена и непрерывна в $\mathbb{E}^N$, и существует предел (8) средних по времени t от решения задачи (1), (2) равномерно по x в $\mathbb{E}^N$, то существует предел (11) шаровых средних вектор функции $u_0(x)$ равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Доказательство. Из существования предела (10) средних по кубам K_R^x и леммы 1 получаем, что существует равный ему предел средних по шарам B_R^x. Следствие доказано.

1.4 Параболические по И. Г. Петровскому системы дифферециальных уравнений с непрерывными по $t \geqslant 0$ коэффициентами

В этом параграфе мы изучим поведение при $t \to +\infty$ решений $u(x,t)$ параболической по И. Г. Петровскому системы вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant 2b} A_k(t) D^k u, x \in \mathbb{E}^N, t > 0, \tag{98}$$

с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = u_0(x), x \in \mathbb{E}^N, \tag{99}$$

где

$$u_0(x) = (u_0^1(x), ..., u_0^m(x)) \tag{100}$$

— начальная вектор функция с ограниченными и непрерывными компонентами $u_0^j(x)$, $A_k(t)$ — квадратная матрица размера $m \times m$ с коэффициентами, зависящими от t.

В [63] С. Д. Эйдельман доказал для фундаментального решения $G(x,t)$ системы (98) справедливость следующего неравенства:

$$|D^m G(x,t)| \leqslant C_m (a(t))^{-m-N} \exp\Big(- C(\frac{|x|}{a(t)})^q \Big), \tag{101}$$

где

$$q = \frac{2b}{2b-1}, a(t) \to +\infty, t \to +\infty, C_m > 0, C_1 > 0.$$

Различные достаточные признаки справедливости оценки (101) для фундаментального решения системы уравнения изучены в [64].

Отметим, что, так как для системы (98) выполнено условие $|k| \geqslant 1$, то единичная матрица E удовлетворяет системе (98), т.е.

$$\int\limits_{E^N} G(\xi - x, t) d\xi = E. \tag{102}$$

Отметим также, что неравенство (101) гарантирует устойчивость решения задачи Коши (98), (99) в классе единственности [64].

Доказательства теорем 1–4, приведенные в предыдущем параграфе, остаются в силе и для решений параболических по И. Г. Петровскому систем (98), (99), для которых справедливы оценки вида (101).

Поэтому все теоремы 1–4 из предыдущего параграфа переносятся автоматически на случай системы (98), (99).

Ради *полноты* изложения приведем формулировку, например, теорем 2 и 3 для случая систем (98), (99), с переменными коэффициентами $A_k(t)$.

Теорема $2'$. *Если начальная вектор функция* $u_0(x)$ *ограничена и непрерывна в* $\mathbb{E}^N$*, то для того, чтобы существовал предел средних Чезаро порядка* $\alpha \geqslant 0$ *по* t *от решения системы (98), (99):*

$$\lim_{\to\infty} \frac{\alpha+1}{t} \int\limits_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{\alpha} u(x,\tau)d\tau = 0 \tag{103}$$

равномерно по x *в* $\mathbb{E}^N$*, необходимо и достаточно, чтобы решение задачи (98), (99) стабилизировалось к нулю равномерно по* x *в* $\mathbb{E}^N$*, т.е. существовал предел (21):*

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$$

равномерно по x *в* $\mathbb{E}^N$*.*

Теорема $3'$. *Если вектор функция* $u_0(x)$ *ограничена и непрерывна в* $\mathbb{E}^N$*, тогда для того, чтобы существовал предел (103) средних Чезаро порядка* $\alpha \geqslant 0$ *по* t *от решения системы (98), (99), необходимо и достаточно, чтобы начальная вектор-функция* $u_0(x)$ *имела предел средних по кубам* K_R^x *равномерно по* x *в* $\mathbb{E}^N$*:*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{(2R)^N} \int\limits_{K_R^x} u_0(y)dy = 0. \tag{104}$$

Доказательство теорем 2 и 3 из параграфа 2 и сформулированных теорем $2'$ и $3'$ для решений параболической системы (98) проводятся совершенно аналогично.

ГЛАВА 2
ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ ИТЕРИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

2.1 Обобщенная формула Пуассона. Теорема об асимптотической близости. Теорема 1 и теорема 2

Пусть $x = (x_1, ..., x_N)$ — точка N-мерного евклидова пространства $\mathbb{E}^N$, $\{t > 0\}$ и $\{t \geqslant 0\}$ — следующие множества в $\mathbb{E}^{N+1}$:

$$\{t > 0\} = \{(x,t) : x \in \mathbb{E}^N,\ t > 0\},\ \{t \geqslant 0\} = \{(x,t) : x \in \mathbb{E}^N,\ t \geqslant 0\}.$$

Символом Ω обозначим оператор теплопроводности:

$$\Omega = \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right),\ \Delta = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \text{— оператор Лапласа в } \mathbb{E}^N,$$

а символом $\Omega^{(p)}u$, $p \in \mathbb{N}$ – результат p-кратного повторного применения оператора Ω к функции $u(x,t) \in C^{2p,p}(t > 0)$, (см. [71], с. 254–264). Здесь $C^{2p,p}(t > 0)$ — класс функций $u(x,t)$, которые имеют непрерывные производные по x в $\mathbb{E}^N$ до порядка $2p$ включительно и непрерывные производные по t, $t > 0$, до порядка p включительно.

Считаем, что нулевая степень оператора Ω совпадает с тождественным оператором: $\Omega^{(0)}u \equiv u$ в $\{t > 0\}$.

В полупространстве $\{t \geqslant 0\}$ рассмотрим следующую задачу:

$$\Omega^{(p)}u(x,t) = 0 \text{ в } \{t > 0\},\ \text{где } p \in \mathbb{N},\ p \geqslant 2, \tag{1}$$

$$u(x,t)|_{t=0} = f_0(x), \Omega^{(k)}u(x,t)|_{t=0} = f_k(x),\ k = 1, ..., p-1,\ x \in \mathbb{E}^N, \tag{2}$$

где $f_k(x)\,(k = 0, ..., p-1)$ — заданные функции из $C(\mathbb{E}^N)$, для которых выполнены условия А. Н. Тихонова [77]: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $C(\varepsilon) > 0$, что при $\forall x \in \mathbb{E}^N$ справедливо неравенство

$$|f_k(x)| < C(\varepsilon)e^{\varepsilon|x|^2}, k = 0, ..., p-1. \tag{3}$$

В [71], с. 266–268, установлено, что при сформулированных условиях существует и единственно решение задачи (1), (2), при этом справедлива формула

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi}\sqrt{t})^N} \int\limits_{\mathbb{E}^N} e^{-\frac{r^2}{4t}} F(y,t) dy, \tag{4}$$

где

$$F(x,t) = \sum_{l=0}^{p-1} (-1)^l \frac{t^l}{l!} f_l(x), r^2 = |x-y|^2. \tag{5}$$

Используя обозначение $u_l(x,t)$ для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с начальной функцией $f_l(x)$:

$$\Omega u_l(x,t) = 0, u_l(x,0) = f_l(x), \tag{6}$$

запишем решение (4) задачи (1), (2) в виде

$$u(x,t) = \sum_{l=0}^{p-1} (-1)^l u_l(x,t) \frac{t^l}{l!}. \tag{7}$$

Пусть начальные функции $f_l(x)$ $(l = 0, ..., p-1)$ являются гармоническими в $\mathbb{E}^N$, т.е.

$$f_l(x) \in C^{(2)}(\mathbb{E}^N) \text{ и } \Delta f_l(x) = 0, x \in \mathbb{E}^N.$$

Тогда, как легко видеть, решение задачи (1), (2) имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-1)^l}{l!} t^l f_l(x). \tag{8}$$

Ясно, что для решения (8) задачи (1), (2) стабилизация не имеет места.

Поэтому представляет интерес изучение стабилизации не самого решения $u(x,t)$ задачи (1), (2), а изучение равностабилизации, т.е. стабилизации разности

$$\lim_{t \to +\infty} (u(x,t) - v(x,t)) = 0$$

для некоторой специально построенной функции $v(x,t)$.

При фиксированном $x \in \mathbb{E}^N$ рассмотрим шаровые средние Рисса [18] порядка $\alpha \geqslant 0$ функции $\varphi \in C(E^N)$:

$$S_R^\alpha \varphi(x) = \frac{C}{R^N} \int\limits_{r \leqslant R} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^\alpha \varphi(y) dy, \tag{9}$$

где
$$C = \frac{2}{w_N B(N/2, \alpha + 1)}, \tag{10}$$
а
$$w_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$$
— площадь поверхности сферы единичного радиуса в $\mathbb{E}^N$.

При фиксированных $x \in \mathbb{E}^N$, $t > 0$, $\alpha > 0$ рассмотрим функцию

$$v(x,t,\alpha) := \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-1)^l}{l!} t^l S^{\alpha}_{2\sqrt{t}\sqrt{\alpha}} f_l(x) =$$

$$= \frac{2}{B(N/2, \alpha+1) w_N \alpha^{N/2}} \int\limits_{|\sigma| \leqslant \sqrt{\alpha}} \Big(1 - \frac{|\sigma|^2}{\alpha}\Big)^{\alpha} \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-1)^l}{l!} t^l f_l(x + 2\sqrt{t}\sigma) d\sigma. \tag{11}$$

Совершая замену переменной по формулам $y_k = x_k + 2\sqrt{t}\sigma_k, k = 1, 2, ..., N$, представим решение $u(x,t)$ задачи (1), (2) в следующем виде:

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{E}^N} e^{-|\sigma|^2} \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-1)^l}{l!} t^l f_l(x + 2\sqrt{t}\sigma) d\sigma. \tag{12}$$

Пусть все начальные функции $f_l(x)$, $l = 0, ..., p-1$, имеют на бесконечности не более чем степенной рост, т.е.

$$|f_l(x)| \leqslant M(1 + |x|^m), M > 0, m > 0. \tag{13}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (13) роста функций $f_l(x)(l = 0, ..., p-1)$ и*
$$\alpha(t) = t^{m+p-1}, \tag{14}$$
где p — порядок уравнения (1), m — степень в оценке (13). Тогда решение $u(x,t)$ задачи (1), (2) и функция $v(x,t,\alpha(t))$, определенная равенством (11) при $\alpha = \alpha(t)$ из (14), равностабилизируется при $t \to \infty$ равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{E}^N$ со скоростью не меньше, чем $t^{-m/2}$, т.е.

$$\sup_K |u(x,t) - v(x,t,\alpha(t))| \leqslant C \cdot t^{-m/2}, t \geqslant t_0 > 0. \tag{15}$$

Следствие. 1. Если существует предел решения задачи (1), (2):

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = A(x) \tag{16}$$

равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{E}^N$, то при $\alpha(t)$ из равенства (14) и из оценки (15) следует, что существует равный ему предел функции (11)

$$\lim_{t\to+\infty} v(x,t,\alpha(t)) = A(x) \tag{17}$$

равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{E}^N$.

2. Верно и обратное утверждение.

Если существует предел (17) равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{E}^N$, то из (15) вытекает, что существует равный ему предел (16) равномерно по x на $\forall K$ в $\mathbb{E}^N$.

Доказательство. Вычитая равенство из (12) формулы (11) и переходя под знаком интегралов к сферическим N-мерным координатам с центром в точке x, получим:

$$Q \equiv u(x,t) - v(x,t,\alpha) = \frac{2}{\Gamma(N/2)} \int\limits_0^\infty e^{-\rho^2} \rho^{N-1} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-1)^l t^l}{l!} M(x, 2\sqrt{t}\rho, f_l) d\rho - \frac{2}{B(N/2, \alpha+1)\alpha^{N/2}} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\sqrt{\alpha}} \Big(1 - \frac{\rho^2}{\alpha}\Big)^\alpha \rho^{N-1} \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-1)^l t^l}{l!} M(x, 2\sqrt{t}\rho f_l) d\rho, \tag{18}$$

где

$$M(x,\rho,f_l) = \frac{1}{w_N \rho^{N-1}} \int\limits_{|x-y|=\rho} f_l(y) dS_y \tag{19}$$

— сферическое среднее функций $f_l(x)\,(l = 0, ..., p-1)$ по поверхности сферы с центром в точке x радиуса ρ.

Совершая в правой части (18) замену $\rho^2 = \sigma$, представим равенство (18) в следующем виде:

$$Q = \frac{1}{\Gamma(N/2)} \int\limits_0^\alpha \sigma^{\frac{N-2}{2}} (e^{-\sigma} - (1 - \frac{\sigma}{\alpha})^\alpha) \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-1)^l t^l}{l!} M(x, 2\sqrt{t}\sqrt{\sigma}, f_l) d\sigma +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(N/2)}\int\limits_{\alpha}^{\infty}\sigma^{\frac{N-2}{2}}e^{-\sigma}\left(\sum_{l=0}^{p-1}\frac{(-1)^l t^l}{l!}M(x,2\sqrt{t}\sqrt{\sigma},f_l)\right)d\sigma+$$

$$+\left(\frac{1}{\Gamma(N/2}-\frac{1}{B(N/2,\alpha+1)\alpha^{N/2}}\right)\int\limits_{0}^{\alpha}\sigma^{\frac{N-2}{2}}(1-\frac{\sigma}{\alpha})^{\alpha}\times$$

$$\times\left(\sum_{l=0}^{p-1}\frac{(-1)^l t^l}{l!}M(x,2\sqrt{t}\sqrt{\sigma},f_l)\right)d\sigma=$$

$$=K_1+K_2+K_3. \qquad (20)$$

Так как все функции $f_l(x)\,(l=0,...,p-1)$ удовлетворяют условию степенного роста (13) и так как модуль усреднения (19) не превосходит модуля усредняемых функций $f_l(x)$, то получим неравенство:

$$|M(x,2\sqrt{t}\sqrt{\sigma},f_l)|\leqslant C(1+|x|^m+t^{m/2}\sigma^{m/2}2^m). \qquad (21)$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Если $\alpha\geqslant 1$ и $0\leqslant x\leqslant\alpha$, то справедливо следующее двойное неравенство:

$$0\leqslant e^{-x}-(1-\frac{x}{\alpha})^{\alpha}\leqslant\frac{x^2}{\alpha}e^{-x}, \qquad (22)$$

при этом левое неравенство (22) имеет вид

$$(1-\frac{x}{\alpha})^{\alpha}\leqslant e^{-x}, 0\leqslant x\leqslant\alpha, \qquad (23)$$

и хорошо известно.

Докажем правое неравенство (22). Умножив (22) на e^x, получим:

$$1\leqslant e^x(1-\frac{x}{\alpha})^{\alpha}+\frac{x^2}{\alpha}. \qquad (24)$$

Обозначим

$$\varphi(x)=\frac{x^2}{\alpha}+e^x(1-\frac{x}{\alpha})^{\alpha},$$

тогда неравенство (24) примет вид

$$\varphi(x)\geqslant 1.$$

Докажем, что $\varphi(x)\geqslant 1$ для $0<x<\alpha$, для которых $\varphi'(x)=0$.

Вычисляя производную $\varphi'(x)$ и приравняв её к нулю, найдем:

$$e^x(1-\frac{x}{\alpha})^{\alpha-1}=2.$$

В нулях производной функции $\varphi(x)$ имеем:

$$\varphi(x)=\frac{x^2}{\alpha}+e^x(1-\frac{x}{\alpha})^{\alpha-1}(1-\frac{x}{\alpha})=\frac{x^2}{\alpha}+2(1-\frac{x}{\alpha})=\frac{(x-1)^2}{\alpha}+2-\frac{1}{\alpha}\geqslant 1.$$

Лемма 1 доказана.

Оценим слагаемые $K_i, i=1,2,3,$ в правой части (20). Применяя неравенства (21), (22), будем иметь:

$$|K_1|\leqslant\Big(\sum_{l=0}^{p-1}\frac{(t)^l}{l!}\Big)\frac{1}{\Gamma(N/2)}\int\limits_0^\alpha \sigma^{\frac{N-2}{2}}\times$$

$$\times\Big(e^{-\sigma}-(1-\frac{\sigma}{\alpha})^{\alpha}\Big)(1+|x|^m+t^{m/2}\sigma^{m/2}2^m)d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant\frac{pt^{p-1}C}{\alpha\cdot\Gamma(N/2)}\int\limits_0^\alpha \sigma^{\frac{N}{2}+1}e^{-\sigma}(1+|x|^m+t^{m/2}\sigma^{m/2}2^m)d\sigma. \tag{25}$$

Здесь, и далее, мы будем учитывать, что

$$\Big(\sum_{l=0}^{p-1}\frac{(t)^l}{l!}\Big)\leqslant pt^{p-1},\ \text{при } t\geqslant 1. \tag{26}$$

Заменяя в интеграле (25) верхний предел α на $+\infty$, получим следующую оценку:

$$|K_1|\leqslant\frac{C_1pt^{p-1}}{\alpha}(1+|x|^m+t^{m/2}), \tag{27}$$

где C_1 — зависит от N и m.

Оценим слагаемое K_2 в правой части (20), используя оценки (21), (26) и при $\sigma>\alpha$ очевидные неравенства

$$e^{-\sigma}=e^{-\sigma/2}e^{-\sigma/2}\leqslant e^{-\alpha/2}e^{-\sigma/2}\leqslant\frac{2}{\alpha}e^{-\sigma/2},$$

получим:

$$|K_2|\leqslant pt^{p-1}\frac{1}{\Gamma(N/2)}\int\limits_\alpha^\infty \sigma^{\frac{N-2}{2}}e^{-\sigma}|M(x,2\sqrt{t}\sqrt{\sigma},f_l)|d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant pt^{p-1} \cdot \frac{C}{\alpha\Gamma(N/2)} \int\limits_0^\infty \sigma^{\frac{N-2}{2}} e^{-\sigma/2}[(1+|x|^m + t^{m/2}\sigma^{m/2}2^m)]d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_2 pt^{p-1}}{\alpha}(1+|x|^m + t^{m/2}), \tag{28}$$

где C_2 — зависит от N и m.

Оценим слагаемое K_3 в правой части (20), используя при этом оценку (21), неравенство (23), а также следующую оценку из леммы 2 работы [19], с. 88:

$$0 < \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) - \alpha^{N/2} B\left(\frac{N}{2}, \alpha+1\right) < \frac{C}{\alpha}, \alpha > 0. \tag{29}$$

Из оценки (29) вытекает, что существует предел

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \alpha^{N/2} B\left(\frac{N}{2}, \alpha+1\right) = \Gamma\left(\frac{N}{2}\right). \tag{30}$$

Из (30) при достаточно больших α следует, что справедливо неравенство

$$\alpha^{N/2} B\left(\frac{N}{2}, \alpha+1\right) > \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) - 1/2. \tag{31}$$

Применяя для оценки K_3 неравенства (21), (23), (26), (29), (31), будем иметь:

$$|K_3| < \frac{|\Gamma(\frac{N}{2}) - \alpha^{N/2}B(\frac{N}{2}, \alpha+1)|}{\Gamma(\frac{N}{2})(\Gamma(\frac{N}{2}) - \frac{1}{2})} \frac{pt^{p-1}}{\alpha} \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty \sigma^{\frac{N-2}{2}} e^{-\sigma} C(1+|x|^m + t^{m/2}\sigma^{m/2}2^m)]d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_3}{\alpha} pt^{p-1}(1+|x|^m + t^{m/2}), \tag{32}$$

где C_3 — зависит от N и m.

Докажем оценку (15). Положим $\alpha(t) = t^{p-1+m}$, где p — порядок уравнения (1), а m — степень в оценке (13), и воспользуемся оценками (27), (28), (32). При этом получим искомую оценку (15):

$$|u(x,t) - v(x,t,\alpha(t))| \leqslant C(K)t^{-m/2},$$

где

$$C(K) = \sup_{x\in K} C(1+|x|^m).$$

Теорема 1 доказана.

Пусть функции $f_l(x)$, $l = 0, ..., p-1$, в задаче (1), (2) являются непрерывными и ограниченными в $\mathbb{E}^N$:

$$|f_l(x)| \leqslant C, \forall x \in \mathbb{E}^N,\ l = 0, ..., p-1. \tag{33}$$

Имеет место утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия ограниченности (33) и*

$$\alpha(t) = t^{p-1}\beta(t), \tag{34}$$

где p — порядок уравнения (1), функция $\beta(t)$ — монотонно возрастающая функция, такая, что

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(t) = \infty. \tag{35}$$

Тогда решение задачи (1), (2) и функция $v(x, t, \alpha(t))$, определенная равенством (11), равностабилизируется при $t \to +\infty$ равномерно по x в $\mathbb{E}^N$ со скоростью не менее, чем $1/\beta(t)$, т.е.

$$\sup_{x \in \mathbb{E}^N} |u(x,t) - v(x, t, \alpha(t)| \leqslant \frac{C}{\beta(t)}. \tag{36}$$

Доказательство теоремы 2 очевидно вытекает из доказательства теоремы 1, так как оценки (27), (28), (32) при условиях (33) и (34) переходят в следующие оценки:

$$|K_l| \leqslant \frac{C_l p t^{p-1}}{\alpha(t)} = \frac{C_l}{\beta(t)}, l = 1, 2, 3. \tag{37}$$

Тогда из (37) и формулы (20) получим оценку:

$$|u(x,t) - v(x, t, \alpha(t))| \leqslant \frac{C}{\beta(t)}, C = C_1 + C_2 + C_3$$

равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Теорема 2 доказана.

2.2 О задаче Коши для итерированного уравнения теплопроводности

Пусть

$$\Omega = \Delta - \frac{\partial}{\partial t},\ \Delta = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \text{ — оператор Лапласа.}$$

Символ $\Omega^{(p)}u$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, обозначает результат p-кратного повторного применения оператора Ω к функции $u(x,t) \in C^{(2p,p)}$ (см. [71]).

Здесь мы рассмотрим другую постановку задачи Коши для оператора (см. [71], с. 257–264):

$$\Omega^{(p)}u(x,t) = 0 \text{ в } (t > 0), u(x,t) = \varphi_0(x), \tag{38}$$

$$\frac{\partial^l u}{\partial t^l}(x,0) = \varphi_l(x), x \in \mathbb{E}^N,\ l = 1, ..., p-1, \tag{39}$$

где $\varphi_l(x)$ $(l = 1, ..., p-1)$ — заданные функции, которые принадлежат классам $C^{2(p-l-1)} \in \mathbb{E}^N$ и удовлетворяют условиям А. Н. Тихонова [77], т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $C(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x из $\mathbb{E}^N$ выполнена оценка

$$\left| \frac{\partial^{\alpha_1 + ... + \alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} - \partial x_N^{\alpha_N}} \varphi_l(x) \right| < C(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon |x|^2\right)$$

для всех $\alpha_l \geqslant 0, \alpha_l \in \mathbb{N}, \alpha_1 + ... + \alpha_N \leqslant 2(p-l-t)$, $l = 0, \ldots, p-1$.

В [71] (M. Nicolescu) были изучены свойства решений уравнения (1), в частности, было установлено существование, единственность решения задачи Коши (1), (2), и получено интегральное представление этой задачи:

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{t^l}{l!} \sum_{k=0}^{l} (-1)^k C_l^k \frac{\partial^k u_{l-k}(x,t)}{\partial t^k}, \tag{40}$$

где

$$C_l^k = \frac{l!}{k!(l-k)!},$$

$$u_l(x,t) = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi}\sqrt{t}\right)^N} \int\limits_{E^N} \varphi_l(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy, \tag{41}$$

$$|x-y| = \left[\sum_{k=0}^{N} (x_k - y_k)^2 \right]^{1/2};$$

$u_l(x,t)$ — решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с начальной функцией $\varphi_l(y)$:

$$\Omega u_l(x,t) = 0, u_l(x,0) = \varphi_l(x). \tag{42}$$

Хорошо известное из [47] (В. Д. Репников и С. Д. Эйдельман) необходимое и достаточное условие равномерной (поточечной) по x стабилизации решения (42):

$$\lim_{t\to+\infty} u_l(x,t) = A_l(x) \tag{43}$$

выражается в терминах равномерного (поточечного) предела шаровых средних функции $\varphi_l(x)$ следующим образом:

$$\lim_{R\to\infty} S_R^0 \varphi_l(x) = \lim_{R\to\infty} \frac{N}{w_N R^N} \int\limits_{|x-y|\leqslant R} \varphi_l(y)dy = A_l(x), \tag{44}$$

$$w_N = 2\pi^{N/2}/\Gamma(N/2).$$

Нашей целью является получение аналогичного критерия стабилизации для решения задачи Коши (1), (2) при $p \geqslant 2$. Конечно, в таком виде это утверждение не может быть справедливым для задачи (1), (2). Действительно, если $\varphi_l(x) \in C^2(\mathbb{E}^N)$ и гармоничны в $\mathbb{E}^N$, т.е.

$$\Delta\varphi_l(x) = 0\,(l = 0, 1, ..., p-1),$$

то решение задачи (1), (2) имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{l=1}^{p-1} \frac{t^l}{l!}\varphi_l(x).$$

Ясно, что в этом случае стабилизация решения задачи (38), (39) не имеет места, но при этом у всех $\varphi_l(x)(l = 0, ..., p-1)$ существуют пределы шаровых средних $S_R^0\varphi_l(x) = \varphi_l(x)$.

Поэтому представляет интерес изучение стабилизации не самого решения задачи (38), (39), а некоторого усреднения этого решения по времени t.

При $R > 0, x \in \mathbb{E}^N$, рассмотрим шаровые средние Рисса ([59], [18]) порядка $\alpha \geqslant 0$ функций $\varphi_l(x)$:

$$S_R^\alpha \varphi_l(x) = \frac{2}{w_N B(N/2, \alpha+1) R^N} \int\limits_{r\leqslant R} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^\alpha \varphi_l(y)dy. \tag{45}$$

Пусть $\beta \geqslant p-1$, где p — порядок уравнения (38).

Рассмотрим следующие усреднения типа Рисса по t порядка $\beta > 0$ от решения $u(x,t)$ задачи (38), (39):

$$S(x,t,\beta;u) = \frac{(-1)^{p-1}2}{B(\frac{p}{2},\beta+1)t^p} \int\limits_0^t u(x,\tau) \times$$

$$\times \Big(\frac{\partial}{\partial\tau}\Big)^{p-1} \Big[\tau^{p-1}\Big(1-\frac{\tau^2}{t^2}\Big)^{\beta}\Big] d\tau. \qquad (46)$$

Далее, будем применять следующую лемму.

Лемма 2. Если начальная функция $\varphi_l(x)$ в задаче Коши (42) имеет предел шаровых средних Рисса порядка $\alpha_i \geqslant 0$:

$$\lim_{R\to\infty} S_R^{\alpha_l}\varphi_l(x) = A_l(x) \qquad (47)$$

равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{E}^N$, то для каждого $l = 1, 2, ..., p$ существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} t^l \frac{\partial^l u_i}{\partial t^l} = 0 \qquad (48)$$

равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{E}^N$.

Эта элементарная лемма будет доказана в следующем разделе.

Интегрируя по частям $p-1$ раз в (46), получим:

$$S(x,t,\beta,u) = \frac{2}{B(p/2,\beta+1)t^p} \int\limits_0^t \tau^{p-1}\Big(1-\frac{\tau^2}{t^2}\Big)^{\beta} \frac{\partial^{p-1}u(x,\tau)}{\partial t^{p-1}} d\tau. \qquad (49)$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 3. *Пусть $\beta \geqslant p-1$ и функции $\varphi_l(x)\,(l = 0, 1, ..., p-1)$ имеют пределы шаровых средних Рисса порядков $\alpha_l \geqslant 0$:*

$$\lim_{R\to\infty} S_R^{\alpha_l}\varphi_l(x) = A_l(x)\,(l = 0, 1, ..., p-1) \qquad (50)$$

равномерно по x на компакте K в $\mathbb{E}^N$.

Тогда решение задачи (38), (39) имеет предел средних (49) типа Рисса по t порядка $\beta \geqslant p-1$:

$$\lim_{t\to\infty} S(x,t,\beta;u) = A_{p-1}(x) \tag{51}$$

равномерно по x на компакте K в $\mathbb{E}^N$, при этом существует предел разности

$$\lim_{t\to\infty}[S(x,t,\beta;u) - u_{p-1}(x,t)] = 0. \tag{52}$$

Сформулированная теорема дает достаточные условия стабилизации средних типа Рисса (49) по t от решения задачи Коши (38), (39).

Доказательство теоремы 3.

Рассмотрим средние типа Рисса (46), учитывая формулу (40), и применяя правило Лейбница [19], выделяя при этом группу слагаемых, содержащих функцию $u_{p-1}(x,t)$, получим:

$$S(x,t,\beta;u) = \frac{2}{B(p/2,\beta+1)t^p}\int\limits_0^t \tau^{p-1}\Big(1-\frac{\tau^2}{t^2}\Big)^{\beta}\times$$

$$\times\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial\tau}\Big)^{p-1}\Big(\frac{\tau^{p-1}}{(p-1)!}u_{p-1}(x,\tau)\Big)d\tau + \Big[\sum_{l=1}^{p-1} C_{p-1}^{l}(-1)^l\frac{\tau^{p-1}}{(p-1)!}\times$$

$$\times\frac{\partial^l}{\partial\tau^l}u_{p-1-l}(x,t) + \sum_{l=0}^{p-2}\frac{1}{l!}\sum_{k=0}^{l} C_l^k(-1)^l\frac{\partial^k u_{l-k}}{\partial\tau^k}\Big]\Big]d\tau.$$

Далее интегрируя по частям, имеем:

$$S(x,t,\beta;u) = \frac{1}{B(p/2,\beta+1)t^p}\int\limits_0^t \tau^{p-1}\Big(1-\frac{\tau^2}{t^2}\Big)^{\beta}u_{p-1}(x,\tau)d\tau +$$

$$+\frac{1}{B(p/2,\beta+1)t^p}\int\limits_0^t \tau^{p-1}\Big(1-\frac{\tau^2}{t^2}\Big)^{\beta}\Big[\sum_{j=0}^{p-2} C_{p-1}^{j}\frac{(p-1)...(p-j)}{(p-1)!}\times$$

$$\times\tau^{p-1-j}\frac{\partial^{p-1-j}u_{p-1}(x,\tau}{\partial\tau^{p-1-j}}\Big]+ \tag{53}$$

$$+\frac{1}{B(p/2,\beta+1)t^p}\int\limits_0^t \tau^{p-1}\Big(1-\frac{\tau^2}{t^2}\Big)^{\beta}\Big[\sum_{l=1}^{p-1} C_{p-1}^{l}(-1)^l\frac{1}{(p-1)!}\times$$

$$\times \sum_{j=0}^{p-1} C_{p-1}^{j}(p-1)...(p-j)\tau^{p-1-j}\frac{\partial^{l+p-1-j}}{\partial\tau^{l+p-1-j}}u_{p-i-l}(x,\tau)+$$

$$+\sum_{l=0}^{p-2}\frac{1}{l!}\sum_{k=0}^{l}C_l^k(-1)^k\sum_{j=0}^{l}C_{p-1}^{l}l(l-1)...(l-j+1)\times$$

$$\times\tau^{l-j}\frac{\partial^{k+p-1-j}}{\partial\tau^{k+p-i-j}}(u_{l-k}(x,\tau)\Big]d\tau=$$

$$=v_1(x,t)+v_2(x,t)+v_3(x,t).$$

Из формулы (53) следует, что для доказательства теоремы 3 достаточно установить справедливость следующих предельных равенств:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{B(p/2,\beta+1)t^p}\int\limits_0^t\tau^{p-1}\Big(1-\frac{\tau^2}{t^2}\Big)^{\beta}u_{p-1}(x,\tau)d\tau=A_{p-1}(x); \tag{54}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{B(p/2,\beta+1)t^p}\int\limits_0^t\tau^{p-1}\Big(1-\frac{\tau^2}{t^2}\Big)^{\beta}\tau^l\frac{\partial^l u_{p-1}(x,\tau)}{\partial\tau^l}d\tau=0; \tag{55}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{B(p/2,\beta+1)t^p}\int\limits_0^t\tau^{p-1}\Big(1-\frac{\tau^2}{t^2}\Big)^{\beta}\tau^v\frac{\partial^l u_{p-1}(x,\tau)}{\partial\tau^l}d\tau=0,\ v<l. \tag{56}$$

По условию функции $\varphi_{p-1}(x,\tau)$ существует предел шаровых средних Рисса порядка $\alpha_{p-1}\geqslant 0$.

Тогда, как известно [18], решение задачи Коши $u_{p-1}(x,t)$ с начальной функцией $\varphi_{p-1}(x)$ стабилизируется к $A_{p-1}(x)$ равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{E}^N$:

$$\lim_{t\to\infty}u_{p-1}(x,t)=A_{p-1}(x). \tag{57}$$

Так как средние Рисса по t порядка β в правых частях формул (54), (55), (56), очевидно, обладают свойством регулярности, из (57), и вытекает справедливость равенства (54).

Далее, в силу условий теоремы у начальных функций $\varphi_i(x)$, $i=0,...,p-2$, существуют пределы шаровых средних Рисса порядков α_i, $i=0,...,p-2$.

Известно [18], что это является достаточным условием стабилизации соответствующих решений $u_i(x,t)$ задачи Коши равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{E}^N$:

$$\lim_{t\to\infty}u_i(x,t)=A_i(x),\ i=0,...,p-2. \tag{58}$$

Кроме того, в силу тех же условий и в силу леммы существует нулевой предел (48), а также следующий предел

$$\lim_{t\to\infty} t^{\nu}\frac{\partial^l u(x,t)}{\partial t^l} = 0$$

($\nu \leqslant l$) равномерно по x на каждом компакте. Тогда мы получаем, что существуют пределы (54), (55), (58) равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{E}^N$.

Теорема 3 доказана.

2.3 Доказательство леммы 2

Учтем тот факт [18], [16], что шаровые средние Рисса (45) $S_R^{\alpha}\varphi_i(x)$ функции $\varphi_i(x)$ являются решением следующей задачи Коши:

$$\Delta S_R^{\alpha}\varphi_i(x) = \frac{1}{R^k}\frac{\partial}{\partial R}R^k\frac{\partial}{\partial R}S_R^{\alpha}\varphi_i(x), \tag{59}$$

$$S_R^{\alpha}\varphi_i(x)\Big|_{R=0} = \varphi_i(x), \frac{\partial}{\partial R}S_R^{\alpha}\varphi_i(x)\Big|_{R=0} = 0\,(x\in E^N, R>0) \tag{60}$$

в полупространстве $\mathbb{E}_+^{N+1} = (x\in\mathbb{E}^N, \rho\geqslant 0)$, где $k = 2\alpha+N+1$.

Представим соответствующие функции в виде интеграла Пуассона (41):

$$u_i(x,t) = \frac{2}{\Gamma(k+1)/2}\int\limits_0^{\infty}\rho^k S_{2\sqrt{t}\rho}^{\alpha}\varphi_i(x)d\rho. \tag{61}$$

Дифференцируя последнее равенство по t (законность этого дифференцирования очевидна), в силу (59), (60) получаем:

$$\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} = \frac{2}{\Gamma((k+1)/2)}\int\limits_0^{\infty} e^{-\rho^2}\rho^k\Big[\frac{1}{(2\sqrt{t}\rho)^k}\frac{\partial}{\partial(2\sqrt{t}\rho)}\Big]\times$$

$$\times(2\sqrt{t}\rho)^k\frac{\partial}{\partial(2\sqrt{t}\rho)}\Big[S_{2\sqrt{t}\rho}^{\alpha}\varphi_i(x)\Big]d\rho =$$

$$= \frac{2}{\Gamma(k+1)/2}\frac{1}{4t}\int\limits_0^{\infty} e^{-\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^k\frac{\partial}{\partial\rho}S_{2\sqrt{t}\rho}^{\alpha}\varphi_i(x)d\rho.$$

Дважды интегрируя по частям в правой части последнего равенства и учитывая, что при этом подстановки обращаются в нуль, получим:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{1}{4t}\frac{2}{\Gamma(k+1)/2}\int\limits_0^\infty S^\alpha_{2\sqrt{t}\rho}\varphi_i(x)\Big(\frac{1}{\rho^k}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^k\frac{\partial}{\partial\rho}\Big)e^{-\rho^2}d\rho. \tag{62}$$

Обозначим радиальный оператор дифференцирования

$$\rho^{-k}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^k\frac{\partial}{\partial\rho}$$

символом Δ_ρ, а символом $\Delta^l_\rho e^{-\rho^2}$ — результат l-кратного повторного применения оператора Δ_ρ к функции $e^{-\rho^2}$.

Дифференцируя равенство (62) $l-1$ раз и учитывая (59), (60), как в (62), будем иметь:

$$\frac{\partial^l u_i(x,t)}{\partial t^l} = \frac{1}{(4t)^l}\frac{2}{\Gamma((k+1)/2)}\int\limits_0^\infty \rho^k S^\alpha_{2\sqrt{t}\rho}\varphi_i(x)\Delta^l_\rho e^{-\rho^2}d\rho. \tag{63}$$

Очевидно, что

$$\Delta^l_\rho e^{-\rho^2} = e^{-\rho^2}P_l(\rho^2),$$

где $P_l(\rho^2)$ — полином по ρ^2 степени l.

С помощью интегрирования по частям легко устанавливается следующее равенство:

$$I_0 \equiv \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial\rho}\rho^k\frac{\partial}{\partial\rho}\Delta^{l-1}_\rho e^{-\rho^2}d\rho =$$

$$= \rho^k\frac{\partial}{\partial\rho}\Delta^{l-1}_\rho e^{-\rho^2}\Big|^{\rho=+\infty}_{\rho=0} = e^{-\rho^2}\rho^k\frac{\partial}{\partial\rho}P_{l-1}(\rho^2)\Big|^{\rho=+\infty}_{\rho=0} = 0. \tag{64}$$

Полагаем, что $t > T_0 > 0$ и представим интеграл (63) в следующем виде:

$$\frac{1}{2}\Gamma((k+1)/2)t^l\frac{\partial^l u_i(x,t)}{\partial t^l} =$$

$$= \Big(\int\limits_0^{\sqrt{T_0/t}} + \int\limits_{\sqrt{T_0/t}}^\infty\Big)\rho^k S^\alpha_{2\sqrt{t}\rho}\varphi_i(x)\Delta^l_\rho e^{-\rho^2}d\rho =$$

$$= K_1(x,t) + K_2(x,t). \tag{65}$$

Оценим вначале $K_2(x,t)$, представив его в следующем виде:

$$K_2=\sum_{m=0}^{l}B_{m,l}\int\limits_{\sqrt{T_0/t}}^{\infty}\rho^{k+2m}e^{-\rho^2}S^{\alpha}_{2\sqrt{t}\rho}\varphi_i(x)d\rho, \tag{66}$$

где $B_{m,l}$ — коэффициенты полинома $P_l(\rho^2)$.

Учитывая тот факт, что функция $\rho^{k+2m}e^{-\rho^2}$ положительна на интервале $(\sqrt{T_0/t},+\infty)$, применим первую формулировку среднего значения [34] в каждом слагаемом в (66), при этом получим:

$$K_1=\sum_{m=0}^{l}B_{m,l}S^{\alpha}_{2\sqrt{t}\rho_{*,m}}\varphi_i(x)\int\limits_{\sqrt{T_0/t}}^{+\infty}\rho^{k+2m}e^{-\rho^2}d\rho,$$

где $2\sqrt{t}\rho_{*,m}\geqslant 2\sqrt{T_0}\rho_{*,m}\geqslant 2\sqrt{T_0}$, $m=0,...,l$.

В силу условий леммы 2 для любого $\varepsilon>0$ существует такое $T_0(\varepsilon)>0$, что при $T>T_0(\varepsilon)$ для всех $x\in K$ имеет место равенство

$$S^{\alpha}_{2\sqrt{t}\rho_{*,m}}\varphi_i(x)=A_i(x)+\varepsilon_i(x,t),$$

где

$$|\varepsilon_i(x,t)|<\frac{\varepsilon}{2}\sum_{m=0}^{l}|B_{m,l}|\int\limits_0^{\infty}e^{-\rho^2}\rho^{k+2m}d\rho.$$

Так как $2\sqrt{t}\rho_{*,m}\geqslant 2\sqrt{T_0}$ при $\rho_{*,m}\geqslant 2\sqrt{T_0}\,m=0,...,l$, то при $t\to+\infty$ получим:

$$\lim_{t\to\infty}K_2(x,t)=I_0A_i(x)=0, \tag{67}$$

ибо I_0 удовлетворяет равенству (64).

Оценим величину $K_1(x,t)$ в (65). Так как функция $\varphi_i(x)$ непрерывна в $\mathbb{E}^N$, то при фиксированном T_0 устремим время t к бесконечности и, учитывая, что x в $K_1(x,t)$ принадлежит компакту K, очевидно получим, что существует следующий предел:

$$\lim_{t\to\infty}K_1(x,t)=0 \tag{68}$$

равномерно по x на компакте K. Итак, справедливы равенства (65), (67), (68). Из них же и вытекает, что лемма 2 доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты диссертационной работы автора, *выдвигаемые на защиту*, являются новыми и состоят в следующем:

• Получен критерий существования равномерного во всем пространстве предела средних по времени от решения параболической по И. Г. Петровскому системы уравнений без младших коэффициентов.

• Впервые также получен критерий существования равномерного во всем пространстве предела средних Чезаро порядка $\alpha \geqslant 0$ по времени от решения параболической по И. Г. Петровскому системы уравнений с младшими коэффициентами.

• Получены критерии существования пределов средних по времени и средних Чезаро порядка $\alpha \geqslant 0$ по времени в терминах существования средних по кубам, а также в терминах существования предела средних по шарам равномерно по x во всем пространстве.

• Если выполнены некоторые условия роста и $\alpha(t) = t^{m+p-1}$ — порядок средних, то установлено утверждение о равностабилизации предела разности решения итерированного уравнения и некоторой специально построенной функции при больших значениях времени, равномерно по x на каждом компакте со скоростью не менее, чем $t^{-m/2}$ (т.е. установлена степенная оценка указанной разности).

• Получено утверждение о равностабилизации при больших значениях времени средних типа Рисса по времени от соответствующей функции и построенного решения.

Результаты работы могут быть использованы специалистами, работающими в области качественной теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Благодарности. Автор выражает икреннюю благодарность своим научным руководителям, а именно, доктору физико-математических наук, профессору Шамолину Максиму Владимировичу и кандидату физико-математических наук, доценту Заплетину Максиму Петровичу за постановку интересной и важной задачи, а также внимание и ценные советы по работе с диссертацией.

Автор выражает глубокую благодарность заведующему кафедрой общих проблем управления механико-математического факультета, доктору физико-математических наук, профессору Фурсикову Андрею Владимировичу и всем сотрудникам кафедры за плодотворное обсуждение работы.

Автор также благодарит профессорско-преподавательский состав факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова за полученное ранее математическое образование.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Список использованных источников

1. Белман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М., 2003, 215 с. 6

2. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. – М., Наука, 1982, 336 с. 6

3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М, Наука, 1971, 512 с. 6

4. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М., Наука, 1976, 280 с. 6

5. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М., Наука, 1989. 7

6. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения. – Киев, Высш. школа, 1989, 347 с. 6

7. Городецкий В.В. Некоторые теоремы о стабилизации решения задачи Коши для параболических по Шилову систем в классах обобщенных функций // Укр. матем. журн., 1988, т. 40, № 1, с. 43–48. 3

8. Гущин А.К. О равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения // Матем. сборник, 1982, т. 119, № 4, с. 451–507. 7

9. Гущин А.К., Михайлов В.П. О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения // ДАН СССР, 1970, т. 194, № 3, с. 492–495. 5

10. Гущин А.К., Михайлов В.П. О стабилизации решения задачи Коши для одномерного параболического уравнения // ДАН СССР, 1971, т. 197, № 2, с. 257–266. 5, 48

11. Гущин А.К., Михайлов В.П. О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения // Дифференц. уравнения, 1971, т. 7, № 2, с. 297–311. 3

12. Гущин А.К., Михайлов В.П., Муравей Л.А. О стабилизации решений нестационарных граничных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Сибирское отдел. АН СССР. Институт гидромеханики. Динамика сплошной среды, вып. 23, 1975, с. 57–89. 3

13. Денисов В.Н. К вопросу о необходимых условиях стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности во всем пространстве E^N и на любом его компакте // ДАН СССР, 1981, т. 260, № 4, с. 780–783. 4

14. Денисов В.Н. О необходимых условиях равномерной во всем пространстве стабилизации решения задачи Коши в классах функций, имеющих степенной рост // ДАН СССР, 1982, т. 262, № 4, с. 785–786. 4

15. Денисов В.Н. О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени // Успехи матем. наук, 2005, т. 60, № 4, с. 145–212. 3

16. Денисов В.Н. О поведении при больших значениях времени решений параболических уравнений // СМФН., 2020, т. 66, № 1, с. 1–155. 4, 66

17. Денисов В.Н., Жиков В.В. О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений // Матем. заметки, 1985, т. 37, № 6, с. 834–850. 4, 5

18. Денисов В.Н., Репников В.Д. О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений // Дифференц. уравнения, 1984, т. 20, № 1, с. 20–41. 3, 16, 54, 62, 65, 66

19. Денисов В.Н., Шелепова Е.В. О скорости стабилизации решения параболического уравнения // Проблемы матем. анализа, 2020, т.103, с. 85–90. 59, 64

20. Денисов П.В. Об асимптотике средних от решения задачи Коши для системы параболических уравнений // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, 2018, т. 145, с. 110–113. 8, 9, 10, 11, 13, 24

21. Денисов П.В. Об асимптотических свойствах решений итерированного уравнения теплопроводности // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, 2021, т. 192, с. 155–160. 17, 24

22. Денисов П.В. О стабилизации средних по времени от решения параболической по И. Г. Петровскому системы уравнений // Дифференциальные уравнения, 2022, т. 58, № 11, с. 1557–1561. 17

23. Денисов П.В. О стабилизации средних Рисса по времени решения задачи Коши для итерированного уравнения теплопроводности // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика, 2022, № 2, с. 13–16. 26

24. Дрожжинов Ю.Н. Стабилизация решений обобщенной задачи Коши для ультрапараболического уравнения // Известия АН СССР, серия матем., 1969, т. 33, № 2, с. 368–378. 3, 4

25. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений // Минск, Наука и техника, 1979, 743 с. 6

26. Жиков В.В. О стабилизации решений параболических уравнений // Матем.сборник, 1977, т. 104, № 4, с. 597–616. 5, 6

27. Жиков В.В. Критерий поточечной стабилизации для параболических уравнений с почти - пертодическими коэффициентами // Матем. сб., 1979, т. 110, № 2, с. 304–318. 5

28. Жиков В.В. Асимптотическое поведение и стабилизация решений параболических уравнений второго порядка с младшими членами // Труды ММО, 1983, т. 46, с. 69–98. 6

29. Житомирский Я.И. Задача Коши для параболических систем линейных уравнений в часных производных с растущими коэффициентами // Изв. вузов, матем., 1959, № 1, с. 55–74. 7

30. Ильин А.М. О поведении решения задачи Коши для параболического уравнения при неограниченном возрастании времени // УМН, 1961, т. 16, № 2, с. 115–121. 6

31. Ильин А.М.., Калашников А.С., Оленик О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи матем. наук, 1962, т. 17, № 3, с. 3–146. 3

32. Ильин А.М., Хасьминский Р.З. Асимптотическое поведение решений параболических уравнений и эргодическое свойство неоднородных дифузионных процессов // Матем. сборник, 1963, т. 60, № 3, с. 368–392. 6

33. Ильин В.А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи матем. наук, 1960, т. 15, вып. 2, с. 97–154. 3

34. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. – М., МГУ, т. 1, т. 2, 2004. 68

35. Колгоморов А.Н., Петровский И.П., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической задаче // Бюлл. Моск. Гос. Ун-та, сек. Математ. и механ., 1937, т. 1, № 6, с. 1–26. 4

36. Ландис Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. – М., Наука, 1971. 7

37. Литовченко В.А., Довжицкая И.М. Стабилизация решений параболических систем типа Шилова с неотрицательным родом // Сибирский матем. журн., 2014, т. 55, № 2, с. 341–349. 3

38. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М., Наука, 1983, 423 с. 6, 48

39. Михлин С.Г. Проблема минимума квадратичного функционала. – М., 1952, 216 с. 6

40. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – М., Высшая школа, 1977, 431 с. 6

41. Мукминов Ф.Х. О равномерной стабилизации решений первой смешанной задачи для параболического уравнения // Матем. сборник, 1990, т. 131, № 11, с. 1486–1509. 7

42. Муравник А.Б. Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // СМФН, 2014, т. 52, с. 3–141. 3

43. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные уравнения. – М., Наука, 1969, 526 с. 6

44. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М., Физ.-мат. литература, 2009, 400 с. 7

45. Полякова В.М. О стабилизации уравнения теплопроводности // ДАН СССР, 1959, т. 129, № 6. 4

46. Репников В.Д. О равномерной стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений // ДАН СССР, 1964, т. 157, № 3, с. 532–535. 6

47. Репников В.Д., Эйдельман С.Д. Необходимые и достаточные условия установления задачи Коши // ДАН СССР, 1966, т. 167, № 2, с. 298–301. 4, 62

48. Рудин У. Функциональный анализ. – М., Мир, 1975, 443 с. 6

49. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюлов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением для квазилинейных параболических уравнений. – М., Наука, 1987, 480 с. 5

50. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М., Наука, 1988, 333 с. 6

51. Стеклов В.А. Основные задачи Математической физики. – М., Наука, 1983, 432 с. 6

52. Тихонов А.Н. Об уравнении теплопроводности для нескольких переменных // Бюллетень МГУ, математика и механика, 1938, секция А1, № 9, с. 1–45. 3, 4, 30, 47

53. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. – М., И. Л., 1957, 443 с. 6

54. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. – М., И. Л., 1960, 299 с. 6

55. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. – М., 2003, 351 с. 6

56. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. – М., Наука, т. 1, 1963, 343 с. 6

57. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. – М., Наука, т.2, 1968, 515 с. 6

58. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., Наука, 1983. 7

59. Харди Г.Г. Расходящиеся ряды. Изд. 2-е стереотипное. – М., Ком. Книга, 2006, 504 с. 4, 9, 22, 23, 26, 62

60. Черемных Ю.Н. Об асимптотике решений параболических уравнений // Изв. АН СССР, сер. матем., 1959, т. 23, № 6, с. 913–924. 6

61. Шишмарев И.А. Введение в термоэллиптических уравнений. – М., МГУ, 1979, 183 с. 6

62. Эйдельман С.Д. Оценки решений параболических систем и некоторые их приложений // Матем. сб. 1953, т. 33, № 2, с.359–382. 3, 5, 10, 21

63. Эйдельман С.Д. Лиувиллевы теоремы и теоремы об устойчивости для решений параболических систем // Матем. сб., 1958, т.44, № 4, с. 481–508. 3, 10, 51

64. Эйдельман С.Д. Параболические системы. – Наука, 1964, 443 с. 3, 5, 22, 30, 51

65. Эйдельман С.Д., Порпер Ф.О. О стабилизации решения задачи Коши для параболических систем // Известия вузов матем., 1960, № 4, с. 210–217. 3, 5, 10, 11, 38, 48, 50

66. Эйдельман С.Д., Порпер Ф.О. О поведении решений параболических уравнений второго порядка с диссипацией // Дифференц. уравнения, 1971, т. 7, № 9, с. 1684–1695. 7

67. Aronson D.G.Bounds for the fundamental solution of a parabolic equations. Bull.Amer. Math. Soc., 1967, v. 73, No. 6, pp. 890–896. 7

68. Denisov P.V. On the asymptotics of averages values of solutions to the Cauchy problem for a system of parabolic equations. Journal of Mathematical Sciences, 2020, V. 245, No. 4, pp. 524-527. 21

69. Krzyzanski M. Sur l'allure asymptotique des o potentials de chaleur et de I'integrall de Fourier-Poisson. Annal. Polonici, Math., 1957, v. 111, No. 2, pp. 288–299. 4

70. Nash J. Continuity of sjlutions of parabolic and elliptic equations. Amer. J. Math., 1958, v. 80, No. 4, pp. 531–954.

71. Nicolesccu Miron. Ecuatia iterata a caldurii Studii Si-Cercetari Matematicl. Academia Republii Populare Romine, 1954, V. 5, No. 3–4, pp. 243–333. 15, 17, 18, 53, 54, 61

72. Osada H. Diffusion processes with generator of generalized divirgence forms. J. Math. Kyoto Univ., 1987, v. 72, pp. 597–619. 7

73. Selivanova N.Yu., Shamolin M.V. Local solvability of a one-phase problem with free boundary, Journal of Mathematical Sciences, V. 189, No. 2 (2013), pp. 274–283.

74. Selivanova N.Yu., Shamolin M.V. Studying the interphase zone in a certain singular-limit problem, Journal of Mathematical Sciences, V. 189, No. 2 (2013), pp. 284–293.

75. Selivanova N.Yu., Shamolin M.V. Local solvability of the Capillary problem, Journal of Mathematical Sciences, V. 189, No. 2 (2013), pp. 294–300.

76. Selivanova N.Yu., Shamolin M.V. Quasi-stationary Stefan problem with values on the front depending on its geometry, Journal of Mathematical Sciences, V. 189, No. 2 (2013), pp. 301–310.

77. Tychonoff A.N. Theoremes f'unicite pour l'equatim de la chaleur. Mat. Sb., 1935, v. 45, No. 2, pp. 199–216. 3, 4, 15, 53, 61

Список публикаций соискателя

1–А. Денисов П.В. Об асимптотике средних от решения задачи Коши для системы параболических уравнений // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, 2018, т. 145, с. 110–113; Denisov P.V. On the asymptotics of averages values of solutions to the Cauchy problem for a system of parabolic equations. Journal of Mathematical Sciences, 2020, V. 245, No. 4, pp. 524–527, DOI: 10.1007/s10958-020-04708-1 [Scopus, SJR-0,21].

2–А. Денисов П.В. О стабилизации средних по времени от решения параболической по И. Г. Петровскому системы уравнений // Дифференц. уравнения, 2022, т. 58, № 11, с. 1557–1561, DOI: 10.31857/S0374064122110115 [WoS, JCI-0,51].

3–А. Денисов П.В. О стабилизации средних Рисса по времени решения задачи Коши для итерированного уравнения теплопроводности // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика, 2022, № 2, с. 13–16, DOI: 10.31857/S0374064122110115 [RSCI, ИФ РИНЦ-0,224].

Иные публикации по теме диссертации

4–А. Денисов П.В. Об асимптотических свойствах решений ите- рированного уравнения теплопроводности // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения., 2021, т. 192, с. 155–160, DOI: 10.36535/0233-6723-2021-192-155-160.