

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА**

На правах рукописи

Квашенникова Анастасия Валерьевна

**Численное моделирование генерации волны разностной
частоты в трёхмерных ультразвуковых пучках в условиях
сильного проявления нелинейности среды**

Специальность:

1.3.7. Акустика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

МОСКВА – 2024

Работа выполнена на кафедре акустики физического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научные руководители: **Юлдашев Петр Викторович**,
кандидат физико-математических наук

Хохлова Вера Александровна,
доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Петров Павел Сергеевич**,
доктор физико-математических наук,
заведующий лабораторией геофизической гидродинамики
Тихоокеанского океанологического института имени В.И. Ильичёва
Дальневосточного отделения Российской академии наук

Козубская Татьяна Константиновна,
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник,
главный научный сотрудник отдела 16 Института прикладной
математики имени М.В. Келдыша Российской академии наук

Савицкий Олег Анатольевич,
кандидат физико-математических наук, доцент,
ведущий научный сотрудник отдела перспективных разработок
гидроакустических систем Акустического института имени
академика Н.Н. Андреева

Защита диссертации состоится «23» декабря 2024 года в 15:00 на заседании диссертационного совета МГУ.013.6 на физическом факультете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, аудитория 4-28.

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций Научной библиотеки Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (119192, г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27) и в сети Интернет: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/3253>

Автореферат разослан «__» ноября 2024 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.013.6
доктор физико-математических наук, доцент
kosareva@physics.msu.ru

 О.Г. Косарева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы

При распространении в нелинейной среде двух интенсивных исходно гармонических волн с близкими частотами в первом приближении происходит генерация двух кратных, суммарной и разностной спектральных компонент, которые затем участвуют в каскадных процессах образования множества новых гармоник как вверх, так и вниз по спектру. Поскольку поглощение в среде увеличивается с частотой, например, квадратично в термовязкой среде, то на некотором удалении от источника все высокочастотные компоненты затухают, и происходит формирование низкочастотного излучения преимущественно на разностной частоте, но также включающего в себя и другие комбинационные низкочастотные составляющие спектра, которое затем начинает распространяться независимо от начального возбуждения. В таком случае говорят, что среда выполняет роль бестелесной параметрической антенны бегущей волны, впервые описанной в работах П. Вестервельта (США) 1960-х годов. Независимо эта идея также была предложена В.А. Зверевым и А.И. Калачевым в СССР, изменив существующие представления о невозможности формирования узконаправленного пучка низкочастотного излучения излучателями небольших размеров. Так как диаграмма направленности сгенерированного параметрическим образом излучения на разностной частоте определяется областью нелинейного взаимодействия волн накачки, а не размерами излучателя, и составляет порядка нескольких градусов без боковых лепестков, то важным преимуществом параметрической генерации звука является возможность использования малогабаритных (по сравнению с длиной волны низкочастотного излучения) высокочастотных излучателей. Среди недостатков стоит отметить небольшую эффективность преобразования энергии волн накачки в энергию волны разностной частоты, которая, однако, может быть увеличена при использовании более мощных параметрических излучателей и более сильного проявления нелинейных эффектов. Отметим, что генерация волны разностной частоты при двухчастотном нелинейном взаимодействии гармонических волн является частным случаем явления самодемодуляции, когда высокочастотный спектр мощного импульса волны накачки трансформируется в область низких частот, а его форма определяется поведением огибающей исходного импульса.

Ряд упомянутых выше преимуществ нелинейной генерации низкочастотного звука делает параметрические антенны одним из важных инструментов большого числа теоретических и экспериментальных исследований в области подводной акустики, аэроакустики и медицинской акустики. Так, в подводной акустике низкочастотный сигнал, формируемый высокочастотным параметрическим излучателем, способен без существенного поглощения распространяться на

значительные дистанции и обеспечивать хорошее пространственное разрешение в силу узкой направленности, что используется, например, для профилирования донных структур. В задачах изучения океана на протяженных трассах и обеспечения подводной связи, помимо вышеперечисленных преимуществ, использование низкочастотного параметрического излучения уменьшает эффекты многолучевости при распространении на дальние дистанции. В воздушных приложениях параметрические громкоговорители применяются для создания высоконаправленных пучков слышимого звука, например, в системах активного шумоподавления, музыкальной акустике или системах таргетного общения с пользователем в библиотеках и музеях. Среди медицинских приложений можно отметить метод ультразвуковой визуализации на разностной частоте, позволяющий различать такие свойства тканей, которые не видны при гармонической ультразвуковой визуализации, метод контрастной визуализации упругости материалов, а также использование свойств параметрически сгенерированных низких частот в качестве альтернативы МРТ-системам, например, для обнаружения опухолей головного мозга. Кроме того, в современных медицинских исследованиях изучается возможность использования параметрических излучателей для увеличения эффективности HIFU-терапии (“HIFU” от англ. высокоинтенсивный фокусированный ультразвук) не за счет большего поглощения ультразвуковой энергии пучка, а за счет улучшенной динамики пузырьков и связанного с этим усиления нагрева целевой области. Предположительно, параметрическая генерация волны разностной частоты при двухчастотной накачке может быть использована для мониторинга температуры в режиме реального времени, а также оценки степени теплового воздействия ультразвука на ткань во время HIFU-терапии, поскольку сгенерированное в области фокуса низкочастотное излучение на разностной частоте зависит от степени термической абляции ткани в этой зоне.

В современных исследованиях при теоретическом описании процесса генерации и распространения волны разностной частоты используются различные модели. Наиболее общий подход при решении трехмерных задач состоит в моделировании конечно-разностными методами нелинейной системы уравнений для сжимаемой сплошной среды с вязкостью. Однако получение решений такой системы даже для радиально-симметричных источников сопряжено с большими вычислительными затратами. Более удобной моделью для практического использования является однонаправленное уравнение Вестервельта, учитывающее эффекты нелинейности, дифракции и термовязкого поглощения, которое изначально использовалось для получения аналитических оценок амплитуды давления на разностной частоте в дальнем поле излучателя в предположении, что нелинейное взаимодействие плоских волн накачки ограничено ближней зоной. В

некоторых современных работах уравнение Вестервельта решается численно, например, конечно-разностными методами во временном или спектральном представлении. Однако все эти модели построены либо с использованием приближения квазилинейности, либо при умеренном проявлении нелинейных эффектов, поэтому не позволяют с хорошей точностью описывать режимы образования разрывов в профиле высокоинтенсивных волн накачки, то есть, когда нелинейное преобразование сигнала наиболее эффективно.

Более простой моделью при расчете полей параметрических излучателей является параболическое уравнение Хохлова-Заболотской-Кузнецова (ХЗК), которое может быть использовано при условии, что дифракционная расходимость как высокочастотных волн накачки, так и генерируемой низкочастотной компоненты составляет менее $\pm 15^\circ$. Ранее были разработаны различные алгоритмы для численного моделирования нелинейных акустических пучков, основанные на уравнении ХЗК, в спектральном (Бергенский код) и временном представлении (Техасский код), а также при использовании комбинированного подхода. При моделировании параметрических взаимодействий используются существующие алгоритмы на основе уравнения ХЗК, а также широкий класс аналитических и полуаналитических решений, которые включают различные приближения при задании начальных условий на излучателе, описывающих геометрию расхождения пучка, длину взаимодействия, нелинейные и дифракционные эффекты. Большинство исследований параметрических взаимодействий основаны на использовании квазилинейных или слабо нелинейных подходов и включают предположение об осевой симметрии пучка. Однако параметрические излучатели могут иметь не осесимметричную форму, и в этом случае задача о параметрических взаимодействиях становится принципиально трехмерной. Кроме того, поскольку эффективность параметрических излучателей увеличивается при переходе к сильно нелинейным режимам работы, то в ряде задач может быть недостаточным использование квазилинейного приближения, и необходимо учитывать сильное проявление нелинейных эффектов с образованием ударных фронтов в профиле волны.

Описанные ограничения, накладываемые на численное моделирование параметрических взаимодействий, связаны со сложностями расчета нелинейных взаимодействий в трехмерном волновом поле в среде из-за необходимости учета большого числа взаимодействующих спектральных компонент. Это накладывает высокие требования на объем оперативной памяти для хранения данных числовых массивов и приводит к длительным временам работы алгоритма, делая такие задачи не реализуемыми на практике. Поэтому нелинейный спектральный алгоритм на основе уравнения ХЗК для описания параметрических взаимодействий в 3D был ранее реализован лишь для относительно малого

отношения частот волн накачки к разностной частоте, что уменьшает необходимое число спектральных компонент. Кроме того, моделировались умеренно нелинейные режимы распространения волн в акустическом пучке, генерируемом прямоугольным параметрическим излучателем в воздухе. В этом случае достаточно сильно сказываются эффекты поглощения, например, по сравнению с водной средой, что приводит к образованию менее крутых ударных фронтов и менее широкому спектру. В другой работе, наиболее близкой к изложенным в настоящей диссертации исследованиям, для решения задачи о нелинейной трансформации высокочастотного мощного осесимметричного импульсного сигнала в низкочастотное излучение применяется комбинированный подход к решению уравнения ХЗК с использованием временного алгоритма для описания эффектов нелинейности и поглощения и спектрального – для описания дифракции.

Таким образом, построение трехмерных моделей, описывающих нелинейные взаимодействия волн для источников с произвольным соотношением частот накачки и разностной частоты и степенью проявления нелинейных эффектов, а также учитывающих дифракционные эффекты как для волн накачки, так и для волны разностной частоты, все еще находится в стадии активных исследований и поэтому является актуальной задачей, которой посвящена настоящая диссертационная работа. Кроме того, развитый в диссертации полный нелинейный трехмерный алгоритм решения уравнения ХЗК впервые обобщается для исследования распространения волны разностной частоты в более сложных средах, таких как мелководные волноводы, с учетом неоднородностей скорости звука в толще воды и отражений от дна и поверхности.

Цель и задачи работы

Целью диссертационной работы является разработка трехмерной численной модели нелинейных взаимодействий высокочастотных волн накачки, включающей ударноволновые режимы распространения в неоднородной среде, и исследование на ее основе параметрических процессов генерации и распространения волны разностной частоты. В рамках указанной цели решались следующие **задачи**:

1. Реализовать численные одномерные модели для описания нелинейных взаимодействий с помощью уравнения Бюргерса: в спектральном представлении для двухчастотного взаимодействия волн накачки и во временном представлении при импульсном начальном возбуждении среды. Разработать оптимальные нелинейные алгоритмы для обеспечения возможности решения трехмерных задач в разрывных режимах, исследовать особенности параметрических взаимодействий плоских волн.

2. Реализовать трехмерный квазилинейный конечно-разностный алгоритм решения нелинейного параболического уравнения Хохлова-Заболотской-

Кузнецова для описания дифракции волн накачки и волны разностной частоты для реалистичных начальных условий на параметрическом излучателе, имеющем структуру многоэлементной решетки.

3. Разработать трехмерную полную нелинейную численную модель решения уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова в спектральном представлении с фильтрацией частот при двухчастотном взаимодействии волн накачки в режимах распространения с сильным проявлением нелинейных эффектов. Продемонстрировать отличия результатов моделирования с полученными при использовании квазилинейного подхода на основе анализа амплитудных характеристик и характеристик направленности пучков волн накачки и волны разностной частоты, а также эффективности генерации параметрического излучения.

4. Исследовать особенности нелинейной генерации волны разностной частоты в неоднородных средах и при наличии отражений от границ в различных нелинейных режимах работы параметрического излучателя.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования в диссертационной работе являются нелинейные взаимодействия одномерных и трехмерных ультразвуковых полей волн накачки, создаваемые высокочастотным параметрическим излучателем, и генерируемое ими поле низкочастотного излучения. Предметом исследования являются пространственно-временные структуры акустических полей и их характеристики (амплитуда давления, интенсивность, мощность, энергия, направленность).

Методология исследования

Проведенные в диссертации исследования основаны на известных результатах классических и современных работ, посвященных вопросам генерации и распространения низкочастотного излучения, формируемого при параметрическом взаимодействии волн накачки. Представленная работа дополняет и обобщает их на случай трехмерной постановки задачи для реалистичных начальных условий на параметрическом излучателе, способном работать в режимах сильного проявления нелинейных эффектов, а также на случай волноводного распространения в неоднородных средах.

Численное моделирование параметрических взаимодействий в приближении плоской нелинейной задачи в рамках уравнения Бюргерса, а также построение алгоритмов для решения трехмерной дифракционной задачи в квазилинейном приближении на основе уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова в свободном поле и в присутствии границ для однородных и неоднородных сред осуществлялись автором в среде программирования MATLAB R2022a на

персональном компьютере. Алгоритм полного нелинейного моделирования решений трехмерного уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова для различных сред был реализован на языке FORTRAN 2003 с применением технологии OpenMP для осуществления параллельных вычислений на высокопроизводительном сервере, что позволило существенно сократить время расчетов. При этом необходимые модификации кода, анализ получаемых решений для акустических полей и представление результатов осуществлялось автором.

Научная новизна

1. Разработаны новые спектральный и временной алгоритмы для описания нелинейных волновых взаимодействий на основе уравнения Бюргерса, оптимизированные для расчета режимов распространения с сильным проявлением нелинейных эффектов. Спектральный алгоритм включает новый метод прореживания спектра для практической реализации трехмерных задач при двухчастотной накачке. Временной удароуправляющий алгоритм в случае импульсной накачки более эффективен по сравнению с существующими.

2. Реализован трехмерный алгоритм решения уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова для описания дифракции волн накачки и волны разностной частоты при ее генерации в квазилинейной модели для реалистичных условий на плоском параметрическом излучателе произвольной формы и без приближений, связанных с описанием геометрии расхождения пучков накачки, их длины взаимодействия и дифракционных эффектов для волны разностной частоты.

3. Разработан трехмерный алгоритм решения уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова в разрывных режимах генерации волны разностной частоты в спектральном представлении с фильтрацией частот. Продемонстрированы отличия результатов моделирования в квазилинейном и ударноволновом режимах, а также наибольшая эффективность работы параметрического излучателя при сильном проявлении нелинейных эффектов.

4. Исследованы особенности генерации волны разностной частоты в квазилинейном и сильно нелинейном режимах работы параметрического излучателя в неоднородных средах и в присутствии границ.

Практическая значимость работы

1. Разработанные спектральный и временной алгоритмы расчета нелинейного оператора эволюционных уравнений нелинейной акустики обеспечивают возможность решения трехмерных задач о параметрических взаимодействиях при разумных временных затратах и затратах на требуемую память для хранения данных во время работы алгоритма.

2. Реализованный трехмерный алгоритм решения уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова в квазилинейном приближении позволяет описывать дифракционные эффекты как для волны накачки, так и для низкочастотного излучения в случае произвольной формы плоских параметрических излучателей и не требует использования дополнительных приближений.

3. Разработанный трехмерный полный нелинейный спектральный алгоритм позволяет рассчитывать поля параметрических излучателей сложной геометрии и с произвольным соотношением взаимодействующих частот бигармонической волны накачки в режимах сильного проявления нелинейных эффектов, а также определять оптимальные режимы излучения накачки с целью увеличения выходной мощности на разностной частоте при сохранении желаемой направленности пучка.

4. Представленная численная модель может быть модифицирована для описания распространения в неоднородных средах и в присутствии границ, как, например, в случае мелководного акустического волновода, что обеспечивает более точное описание эффектов, происходящих в условиях реальных экспериментов.

Положения, выносимые на защиту

1. Оптимизация нелинейного спектрального алгоритма для расчета двухчастотных волновых взаимодействий позволяет уменьшить число спектральных компонент, необходимых для корректного описания режимов работы параметрического излучателя в условиях сильного проявления нелинейных эффектов, с нескольких тысяч до десятков при сохранении точности расчета амплитуды давления волны разностной частоты с ошибкой в пределах 2–3%, и делает практически реализуемым решение трехмерных задач.

2. Временное представление на основе удароуправляющей схемы типа Годунова эффективно для описания нелинейной демодуляции высокочастотных импульсов в ударноволновых режимах, поскольку требует использования 2–3 узлов временной сетки на разрыв против порядка 50 в существующих схемах.

3. Численный алгоритм на основе квазилинейного представления трехмерного уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова описывает дифрагирующие пучки волн накачки и волны разностной частоты с достаточно высокой направленностью без приближений при задании начальных условий на излучателе, длины взаимодействия волн накачки и геометрии задачи. Приближенные аналитические решения количественно верно описывают амплитуду давления низкочастотного излучения лишь в ближнем поле излучателя и только на оси пучка.

4. Параметрические процессы в ударноволновых режимах распространения существенно отличаются от квазилинейных: сильное проявление нелинейных

эффектов приводит к дополнительному уменьшению амплитуды на оси и уширению диаграммы направленности пучка волны разностной частоты. При этом ударноволновой режим работы параметрического излучателя является наиболее эффективным для генерации низкочастотного излучения, и эффективность перекачки энергии из высокочастотной части спектра в разностную частоту возрастает с увеличением начальной мощности на излучателе без эффекта насыщения. Разработанная трехмерная нелинейно-дифракционная модель позволяет определять оптимальные режимы работы параметрических излучателей с точки зрения увеличения мощности низкочастотного излучения на разностной частоте, но при этом оставаясь в рамках необходимой для конкретных физических задач направленности пучка.

5. Разработанный нелинейный алгоритм позволяет исследовать параметрические процессы генерации низкочастотного излучения, в том числе, в режимах сильного проявления нелинейных эффектов, в средах с пространственными неоднородностями скорости звука, а также при наличии отражений от границ (например, дна и поверхности), которые приводят к большей локализации и дальности распространения низкочастотного излучения.

Достоверность результатов

Достоверность и обоснованность представленных в диссертационной работе результатов подтверждается проверочными численными экспериментами, а также соответствием результатов численных экспериментов априорной информации, аналитическим расчетам и результатам, полученным в работах других авторов.

Апробация работы

Результаты представленных в диссертации исследований докладывались и обсуждались на следующих профильных Всероссийских и международных конференциях: на XXXII, XXXIII, XXXIV и XXXV Всероссийских школах-семинарах «Волновые явления: физика и применения» имени А.П. Сухорукова (г. Можайск, 6–11 июня 2021 г., 5–10 июня 2022 г., 28 мая – 2 июня 2023 г. и 26–31 мая 2024 г.); на XXXIV, XXXV и XXXVI сессиях Российского акустического общества (г. Москва, 14–24 февраля 2022 г., 13–17 февраля 2023 г. и 21–25 октября 2024 г.), на XXIX и XXX Международных научных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (г. Москва, 11–22 апреля 2022 г. и 10–21 апреля 2023 г.); на Международном конгрессе по ультразвуку (г. Пекин, 18–21 сентября 2023 г.), а также на научных семинарах кафедры акустики физического факультета МГУ, и опубликованы в 10 публикациях в сборниках трудов и тезисов конференций.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 20-02-00676, стипендий фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» 20-2-2-21-1 и 23-2-1-46-1, стипендии Правительства РФ для студентов и аспирантов, стипендии Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова молодым сотрудникам, аспирантам и студентам, добившимся значительных результатов в педагогической и научно-исследовательской деятельности.

Публикации

Основные результаты диссертационной работы изложены в 4 печатных работах, в том числе 3 статьях в рецензируемых научных журналах, удовлетворяющих Положению о присуждении ученых степеней в МГУ имени М.В. Ломоносова, и 1 публикации в журнале из списка ВАК РФ. Список работ автора приведен в конце автореферата.

Личный вклад автора

Все представленные в диссертационной работе результаты получены автором лично или при его определяющем участии. Постановка задач и полученные результаты обсуждались совместно с научным руководителем и научным консультантом. Автором были лично проведены все этапы численного моделирования трехмерной полной нелинейной задачи о генерации низкочастотного излучения параметрическим излучателем, которая предварительно разбивалась на плоскую нелинейную и квазилинейную трехмерную подзадачи, а затем обобщалась на случай распространения волн в неоднородных средах и в присутствии границ.

Непосредственно автором был написан оригинальный текст большинства публикаций по представленным в диссертационной работе результатам. Окончательная подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, а представление их в редакцию журналов и переписка с редакторами и рецензентами для подавляющего большинства статей осуществлялась автором самостоятельно. Вклад автора в научных трудах [A1–A3] составлял от 1 до 1/2; в научном труде [A4] от 1/2 до 1/3.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, одной главы, посвященной обзору литературы, четырех оригинальных глав, заключения и библиографии. Каждая глава включает в себя краткое введение в рамках поставленной задачи, оригинальную часть и выводы. Работа содержит 123 страницы, включает 44 рисунка, 3 таблицы и 124 библиографические ссылки.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во Введении к диссертационной работе обосновывается актуальность, новизна и практическая значимость исследуемой проблемы, приводится краткий обзор литературы, сформулированы цели и задачи работы, а также описывается ее краткое содержание по главам.

В **первой главе** приведен литературный обзор известных теоретических результатов, полученных при решении задачи о нелинейных взаимодействиях в поле параметрического излучателя. Так как исследование процессов генерации и распространения волны разностной частоты (ВРЧ) в общем случае затруднительно, то имеющиеся аналитические результаты получены с учетом различных упрощающих предположений при описании нелинейных и дифракционных эффектов.

В **§1.1** представлена первая, предложенная П. Вестервельтом теоретическая модель, позволяющая получить аналитические оценки для характеристик генерируемого излучения на разностной частоте в дальнем поле параметрического излучателя. В **§1.2** представлены модельные уравнения, применяемые в теории параметрических взаимодействий: уравнение Вестервельта, учитывающее эффекты нелинейности, дифракции и поглощения, а также уравнение Хохлова-Заболотской-Кузнецова – параболическое приближение уравнения Вестервельта для узконаправленных пучков.

Как первый шаг при исследовании нелинейно-дифракционных задач, в **§1.3** рассмотрен класс одномерных решений плоской нелинейной задачи. В приближении квазилинейности, используя метод последовательных приближений, удалось получить результаты для амплитуды давления ВРЧ без и с учетом диссипативных эффектов для волн накачки и ВРЧ, которые демонстрируют важные свойства параметрических процессов. Так, амплитуда давления ВРЧ возрастает с увеличением пройденного расстояния, пока не начинают сказываться эффекты линейного поглощения. При этом параметрическая генерация ВРЧ тем эффективнее, чем больше значение разностной частоты; амплитуда ВРЧ растет квадратично с увеличением исходного давления на излучателе, что демонстрирует необходимость перехода к разрывным режимам. Однако при сильном проявлении нелинейных эффектов, когда профиль волны содержит разрывы, а спектр обогащается большим числом новых спектральных компонент, получение аналитических решений, представимых в виде ряда из бесконечного числа генерируемых спектральных компонент, сильно усложняется, и аналитические оценки можно привести лишь на достаточном удалении от излучателя, где гармоники распространяются практически независимо.

§1.4 посвящен описанию дифракционной задачи о параметрической генерации низкочастотного излучения и результатам, полученным при различных

упрощениях геометрии задачи. Так, приведены аналитические решения в случае недифрагирующих и дифрагирующих волн накачки с гауссовским распределением на круглом или прямоугольном параметрическом излучателе. Описаны модели, полученные в квазилинейном приближении, а также двумерные и трехмерные приближенные решения для режимов работы параметрического излучателя в условиях сильного проявления нелинейных эффектов.

В §1.5 рассматриваются аналитические результаты по исследованию процесса самодемпирования высокочастотной импульсной волны накачки с амплитудной и/или фазовой модуляцией. Приведены известные результаты квазилинейной теории Берктея для профиля демодулированной низкочастотной волны, генерируемой при распространении амплитудно-модулированного импульса накачки, а также выражения, учитывающие, в том числе, и фазовую модуляцию исходной волны.

Наконец, §1.6 посвящен обзору существующих численных алгоритмов, используемых в мировой литературе для описания нелинейных взаимодействий в поле параметрического излучателя. Поскольку в настоящей диссертации численное моделирование параметрических процессов для узконаправленных пучков накачки и генерируемой волны разностной частоты осуществляется на основе уравнения ХЗК, особое внимание уделяется различным алгоритмам решения этого уравнения в спектральном, временном и комбинированном представлениях.

Выводы к главе 1 сформулированы в §1.7.

Вторая глава посвящена численному описанию нелинейных взаимодействий плоских волн накачки, при этом рассматривается как двухчастотное параметрическое взаимодействие с генерацией волны разностной частоты, так и эффект нелинейной демодуляции высокочастотной импульсной накачки.

В §2.1 приводится нелинейное уравнение Бюргерса – одномерный аналог уравнений Вестервельта и ХЗК, учитывающее только эффекты нелинейности и термовязкого поглощения при распространении волн.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\beta}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial p^2}{\partial \tau} + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}. \quad (1)$$

Здесь p – акустическое давление, z – выделенное направление вдоль оси пучка, $\tau = t - z/c_0$ – время в бегущей системе координат, c_0 – скорость звука, ρ_0 – плотность среды, β и δ – коэффициенты нелинейности и термовязкого поглощения в среде, соответственно.

Наибольшую сложность при численном решении уравнения Бюргерса, а также более сложных уравнений ХЗК и Вестервельта в трехмерных задачах представляет

оператор нелинейности, который может рассчитываться в спектральном или временном представлении.

В §2.2 представлен спектральный алгоритм решения уравнения Бюргера для двухчастотного взаимодействия волн накачки, когда уравнение (1) переходит в систему связанных уравнений для спектральных компонент p_n с положительными номерами конечного ряда Фурье с числом гармоник $2N_{\max}$:

$$\frac{\partial p_n}{\partial z} = -\frac{\delta n^2 \omega_{\text{dif}}^2}{2c_0^3} p_n + \frac{i\beta n \omega_{\text{dif}}}{c_0^3 \rho_0} \left(\sum_{m=1}^{N_{\max}-n} p_m^* p_{n+m} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} p_m p_{n-m} \right). \quad (2)$$

При образовании ударных фронтов в профиле исходно гармонической волны для корректного описания ее распространения необходимо учитывать порядка тысячи спектральных компонент. В случае двухчастотного взаимодействия волн накачки число спектральных компонент увеличивается пропорционально отношению частоты волн накачки к разностной частоте и составляет уже несколько тысяч или даже десятков тысяч. Это сильно затрудняет вычисления, особенно в трехмерной постановке задачи, поскольку количество операций в спектральном алгоритме пропорционально квадрату числа гармоник.

Были рассмотрены различные методы оптимизации нелинейного спектрального алгоритма путем прореживания спектра для обеспечения возможности решения задачи в трехмерной постановке в разумное время и с минимальными затратами на требуемую память.

Идея метода уменьшения числа спектральных компонент в системе (2) состоит в том, что основной вклад в генерацию низкочастотных спектральных компонент вносят только высокочастотные гармоники с наибольшей амплитудой, которые сосредоточены вблизи кратных частот волн накачки (рис. 1). При этом в полном спектре волны присутствуют гармоники с достаточно малой амплитудой, которые можно отбросить без существенной потери точности решения для ВРЧ. Чтобы определить номера гармоник с наибольшими амплитудами, вводилось некоторое пороговое давление, по которому отсекались гармоники с меньшей амплитудой (кроме первой), после чего

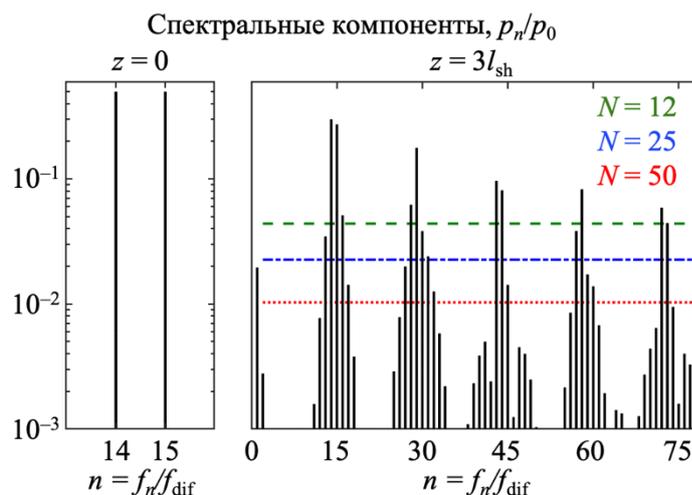


Рис. 1. Иллюстрация к методу прореживания спектра на примере соотношения частоты волны накачки к разностной частоте $f_{\text{pump1}}/f_{\text{dif}} = 15$. Слева изображен начальный спектр при $z = 0$, а справа – спектр нелинейной волны на расстоянии трех длин образования разрыва $z = 3l_{\text{sh}}$ и пороговые давления для удержания в алгоритме только $N = 12, 25$ или 50 высокоамплитудных компонент.

спектральный алгоритм решения уравнения (1) модифицировался таким образом, чтобы вычисления проходили только по индексам гармоник, оставленных после прореживания. Для достижения оптимальных результатов варьировались пороговые значения давления (и число удерживаемых в спектральном алгоритме компонент, соответственно) и дистанции прореживания z_{th} .

Результаты применения метода прореживания спектра в сравнении с полным учетом всех спектральных компонент для амплитуды давления ВРЧ p_{dif}/p_0 представлены на рис. 2 для различного числа удерживаемых в алгоритме гармоник (рис. 2, *a–в*) и при проведении частотной фильтрации на различных расстояниях z_{th} (рис. 2, *г–е*) для случаев $f_{pump1}/f_{dif} = 30$ (*a, г*), $f_{pump1}/f_{dif} = 15$ (*б, д*) и $f_{pump1}/f_{dif} = 10$ (*в, е*). Из рисунка 2 следует, что для выбранных трех пар взаимодействующих волн накачки можно сократить число удерживаемых в нелинейном спектральном алгоритме гармоник с тысяч (для полного расчета было взято 250 гармоник волны накачки, т. е. 7500, 3750 и 2500 гармоник разностной частоты) до $N = 25$ или 50. При этом ошибка в расчете амплитуды давления ВРЧ вплоть до 10 длин образования разрыва (определенного для высокочастотного периода волны накачки с максимальной амплитудой p_0) составляет 3% или 2%, соответственно, при наиболее удачном выборе расстояния z_{th} , на котором выполняется прореживание спектра, равном 3 длинам образования разрыва.

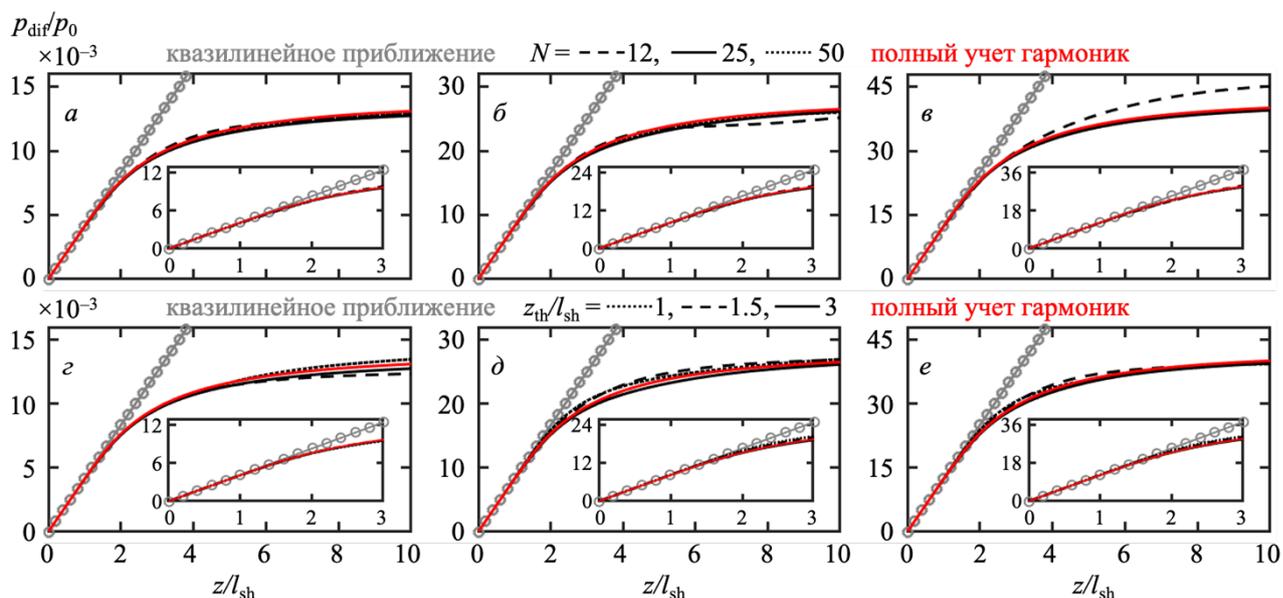


Рис. 2. Зависимости амплитуды волны разностной частоты p_{dif}/p_0 от пройденного расстояния z/l_{sh} для трех значений f_{pump1}/f_{dif} : 30 (*a, г*), 15 (*б, д*) и 10 (*в, е*). *a–в*: прореживание спектра при $z_{th} = 3l_{sh}$ и различном количестве N включенных в алгоритм гармоник; *г–е*: прореживание спектра при $N = 25$ на различных расстояниях z_{th}/l_{sh} . На графиках также представлено решение в квазилинейном приближении и решение с полным учетом гармоник $N = N_{max}$ (7500, 3750 и 2500).

Другая идея метода прореживания спектра состоит в том, что вклад в генерацию волны разностной частоты вносят пары гармоник, номера которых отличаются на 1. Чтобы оценить, какие пары вносят наибольший вклад в амплитуду ВРЧ, в расчетах с полным числом спектральных компонент на каждом шаге численного алгоритма отдельно рассчитывался вклад от каждой пары и прибавлялся к уже внесенному вкладу той же парой на предыдущих шагах. В дальнейшем вклады от всех пар гармоник сортировались в порядке уменьшения, и из полученного списка выбиралось определенное количество спектральных компонент, по которым в нелинейном алгоритме и проводились вычисления. Однако этот метод оказался менее точным при малом количестве оставляемых в расчете гармоник ($N < 150$) и поэтому не был использован в дальнейшем при решении трехмерных задач.

В §2.3 развит временной подход к решению уравнения Бюргерса как альтернатива спектральному для импульсной накачки с широким спектром, где количество спектральных компонент возрастает в десятки раз по сравнению с двухчастотным возбуждением. Временной алгоритм разработан на основе шеститочечной консервативной удароулавливающей схемы типа Годунова, выигрышной для описания разрывных режимов, так как требует использования всего лишь 2–3 временных узлов численной сетки на разрыв в одномерных и 7–8 узлов в трехмерных задачах против порядка 50 в существующих алгоритмах. Проведена верификация временного алгоритма путем сравнения со спектральным методом и показана его выигрышность с точки зрения времени работы в сотни раз по сравнению с полным спектральным и в несколько раз относительно спектрального алгоритма с частотной фильтрацией.

Развитый временной подход позволяет исследовать особенности нелинейной самодемодуляции высокочастотных импульсов произвольной формы в различных режимах распространения. Например, на рис. 3 приведены результаты численного моделирования безразмерных спектров \bar{p}/p_0 ($a, в$) и нормированных на максимум профилей p/p^{\max} ($б, г$) исходно высокочастотного прямоугольного импульса, состоящего из двух сигналов: гармонического с частотой f_0 и сигнала с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) в диапазоне $0.9f_0-1f_0$, для двух характерных режимов работы параметрического излучателя (квазилинейный $a-б$ и сильно нелинейный $в-г$), что определяется начальным давлением на нем p_0 . По мере распространения в спектре импульса (рис. 3, $a, в$) наблюдается формирование низкочастотных компонент исходно высокочастотной волны с бóльшей максимальной амплитудой в случае разрывного режима, а в профиле импульса (рис. 3, $б, г$) происходит самодемодуляция внутри каждого цикла исходной огибающей, при этом наблюдается рост амплитуды демодулированных периодов

оггибающей (черные и красные кривые) по мере увеличения частоты колебаний к концу импульса.

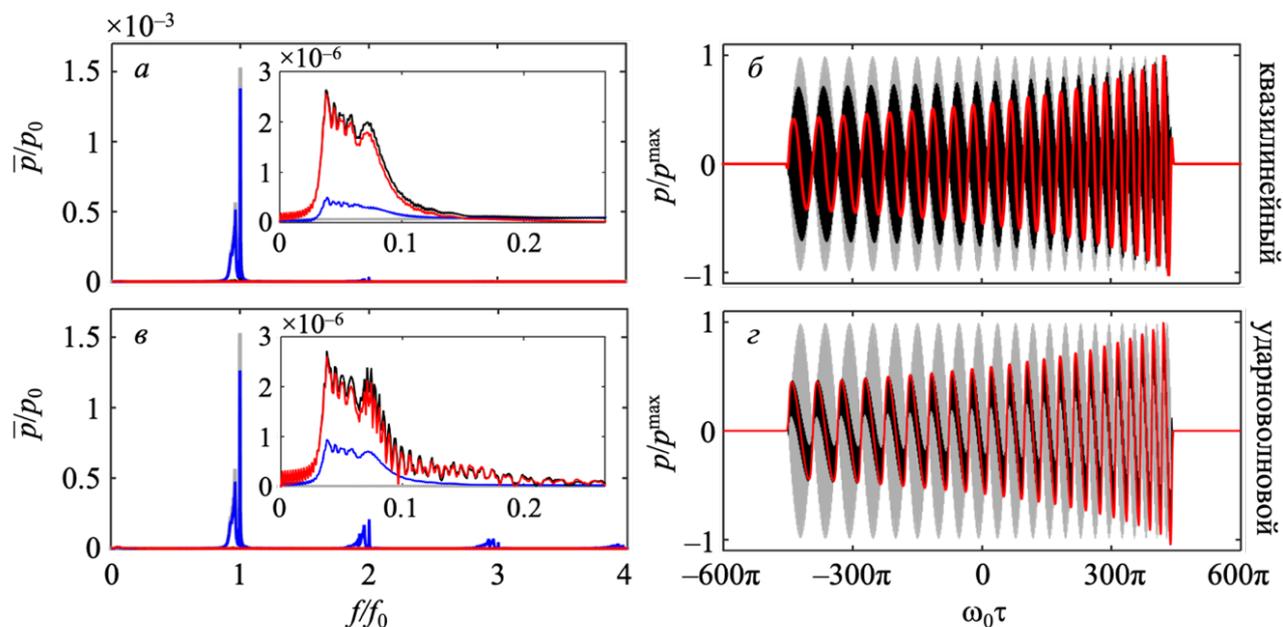


Рис. 3. Спектры (а, в) и нормированные на максимум профили (б, з) прямоугольного ЛЧМ импульса для случаев слабого (а–б) и сильного (в–з) проявления нелинейности, на различных расстояниях, измеряемых в длинах поглощения волны накачки: 0 (серые кривые), 0.1 (синие кривые), 4 (черные кривые) и 25 (красные кривые).

Выводы к главе 2 приведены в §2.4.

В **третьей главе** исследуется трехмерная дифракционная задача о генерации волны разностной частоты в квазилинейном приближении с учетом дифракции, как волн накачки, так и ВРЧ, в обоих поперечных направлениях x и y .

В §3.1 описан численный спектральный алгоритм решения трехмерного уравнения ХЗК:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau \partial z} = \frac{c_0}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} + \frac{\beta}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2}. \quad (3)$$

При использовании квазилинейного спектрального подхода задача сводится к решению двух линейных уравнений для волн накачки и неоднородного линейного уравнения для ВРЧ с функцией источников в правой части.

Дифракционная задача рассматривалась для реалистичных начальных условий на излучателе $p(x, y, z = 0)$, которые задавались на примере подводной высокочастотной многоэлементной антенной решетки эллипсоидальной формы (характерные размеры 18.85 см и 31.8 см по x и y), с двумя каналами излучения волн накачки (равномерное распределение колебательной скорости на поверхности 544 отдельных элементов представлено на рис. 4, слева) на частотах $f_{\text{pump1}} = 150$ кГц и $f_{\text{pump2}} = 145, 140$ или 135 кГц (разностные частоты f_{dif} при этом составили $f_{\text{dif}} = 5, 10$ или 15 кГц). Сглаженные амплитуды давления волн накачки

$p_{\text{pump1,2}}/p_0$ в плоскости излучателя представлены на рис. 4 (справа), где амплитуда давления на излучателе составляла $p_0 = 0.06$ МПа в квазилинейном режиме.

Характерные длины дифракции волн накачки составили 2.5–2.8 м и 7.1–7.9 м в направлениях осей x и y , расстояние образование разрыва для периода волны с наибольшей начальной амплитудой на излучателе $p_0 = 0.06$ МПа составляло 17 м, а длина поглощения в морской воде $l_{\text{abs,pump}} = 1700$ м. Таким образом, параметрический излучатель обеспечивал работу как в квазилинейном, так и в ударноволновом режимах, в условиях слабого линейного поглощения в среде.

Апробация численного алгоритма проводилась для волн накачки путем сравнения численных решений с точным решением линейной дифракционной задачи методом интеграла Рэлея.

В §3.2 приводятся результаты квазилинейного моделирования. Получено, что направленность ВРЧ возрастает с увеличением f_{dif} , поскольку при увеличении частоты дифракционные эффекты проявляются слабее. Для волн разностной частоты углы расхождения пучка в обоих направлениях отличаются меньше (например, $\beta_x = 5.2^\circ$ и $\beta_y = 4.6^\circ$ для $f_{\text{dif}} = 5$ кГц), чем для волн накачки (например, $\alpha_x = 4.0^\circ$ и $\alpha_y = 3.2^\circ$ в случае $f_{\text{pump1}} = 150$ кГц), поскольку генерация ВРЧ продолжается и на расстояниях, больших длины дифракции волн накачки в направлении оси x , когда высокочастотные пучки накачки расширяются в этом направлении, но еще не дифрагируют по оси y .

В §3.3 демонстрируется сравнение полученных для амплитуды давления ВРЧ численных результатов с приближенными аналитическими моделями, приведенными в главе 1 (рис. 5). Одна из них состоит в том, что амплитуда ВРЧ рассчитывается в предположении взаимодействия плоских волн накачки. В двух других моделях предполагается взаимодействие недифрагирующих волн накачки с гауссовским распределением на круглом и

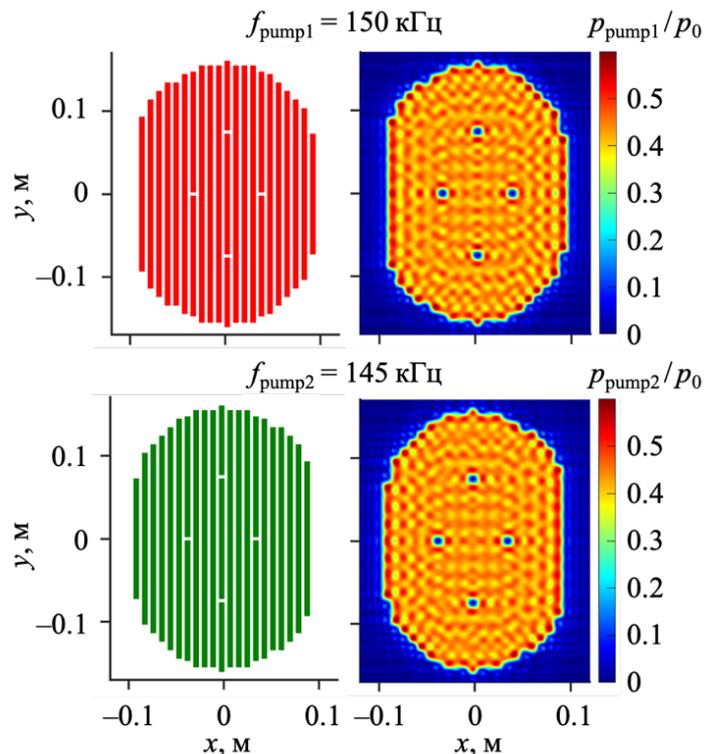


Рис. 4. Равномерные распределения амплитуды колебательной скорости на поверхности излучателя для двух каналов излучения волн накачки (слева) и соответствующие им сглаженные начальные условия на излучателе для амплитуд давлений $p_{\text{pump1,2}}/p_0$ (справа) на примере волн накачки с частотами $f_{\text{pump1}} = 150$ кГц и $f_{\text{pump2}} = 145$ кГц.

прямоугольном излучателе. Эти аналитические решения хорошо соответствуют численному решению уравнения ХЗК на небольших расстояниях, однако далее приближенные решения продолжают расти, поскольку в них ограничивающим параметрическим фактором является только дифракция волны разностной частоты.

Наконец, четвертая модель учитывает дифракцию волн накачки с гауссовским распределением на круглом излучателе, и ее результаты имеют схожую тенденцию с численным решением уравнения ХЗК: начальное увеличение безразмерной амплитуды ВРЧ в ближнем поле излучателя и её медленное уменьшение на больших расстояниях, в области сферической расходимости взаимодействующих волн. Однако количественно результаты этих моделей сильно отличаются, что связано с отличием в граничных условиях. Таким образом, все четыре аналитические модели верно описывают поведение амплитуды ВРЧ только в ближнем поле на оси пучка, однако не могут быть использованы на больших расстояниях.

В §3.4 сформулированы выводы к третьей главе.

Четвертая глава основана на комбинации результатов второй и третьей глав и посвящена решению трехмерной полной нелинейной задачи о генерации волны разностной частоты при двухчастотной накачке в разрывных режимах в свободном пространстве.

Численный спектральный алгоритм решения уравнения ХЗК в полной нелинейной постановке с частотной оптимизацией описан в §4.1. Моделирование проводилось для тех же пар частот накачки f_{pump1} и f_{pump2} , что и в квазилинейной постановке, при этом в сильно нелинейном режиме начальное давление на поверхности излучателя составляло до $p_0 = 0.6$ МПа (длина нелинейности 1.7 м). Коэффициент поглощения был увеличен в десять раз, чтобы обеспечить

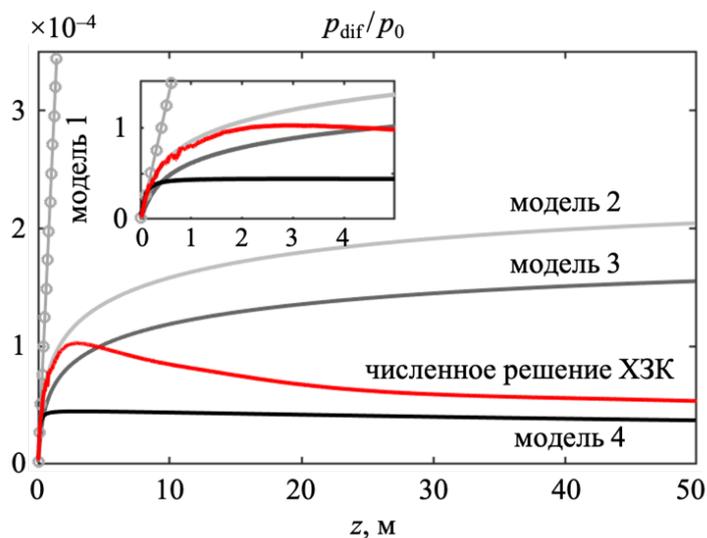


Рис. 5. Сравнение результатов различных квазилинейных моделей для амплитуды волны разностной частоты с $f_{\text{dif}} = 5$ кГц на оси пучка: численное решение квазилинейного уравнения ХЗК (красная линия) и приближенные аналитические модели: расчет для плоских волн («модель 1»), приближения недифрагирующих волн накачки с гауссовским начальным распределением на круглом («модель 2») и прямоугольном («модель 3») излучателях, приближение дифрагирующих волн накачки с гауссовским начальным распределением на круглом излучателе («модель 4»).

устойчивость численной схемы при расчете нелинейного оператора с использованием ограниченного числа гармоник. Искусственное увеличение коэффициента поглощения согласуется с экспериментальными данными, так как в морской воде обычно наблюдается дополнительное поглощение из-за присутствия водорослей и взвесей. В этом случае длина поглощения $l_{\text{abs,pump}}$ высокочастотной волны накачки составила 170 м, т. е. задача решалась все еще в условиях слабого линейного поглощения в среде.

В §4.2 приводятся результаты сравнения амплитудных характеристик и характеристик направленности пучков накачки и ВРЧ для квазилинейного решения и полного нелинейного подхода. Максимальное отношение амплитуды ВРЧ к начальной амплитуде давления волн накачки достигает 0.66% при самом высоком значении разностной частоты (15 кГц), рассматриваемом в моделировании (рис. 6). Как видно из рисунка 6, когда на оси пучка достигаются условия формирования ударных фронтов в профиле волны, величина безразмерных амплитуд давления как волн накачки, так и волн разностной частоты (рис. 6, красные кривые) в зависимости от пройденного расстояния значительно уменьшается по сравнению с моделированием квазилинейного распространения (рис. 6, черные кривые) из-за перекачки энергии от волн накачки к их высшим гармоникам и комбинированным частотам.

По сравнению с квазилинейными результатами, в ударноволновом режиме наблюдается увеличение ширины пучка в направлении осей x и y , определенной по уровню давления -6 дБ, примерно в два раза (табл. 1):

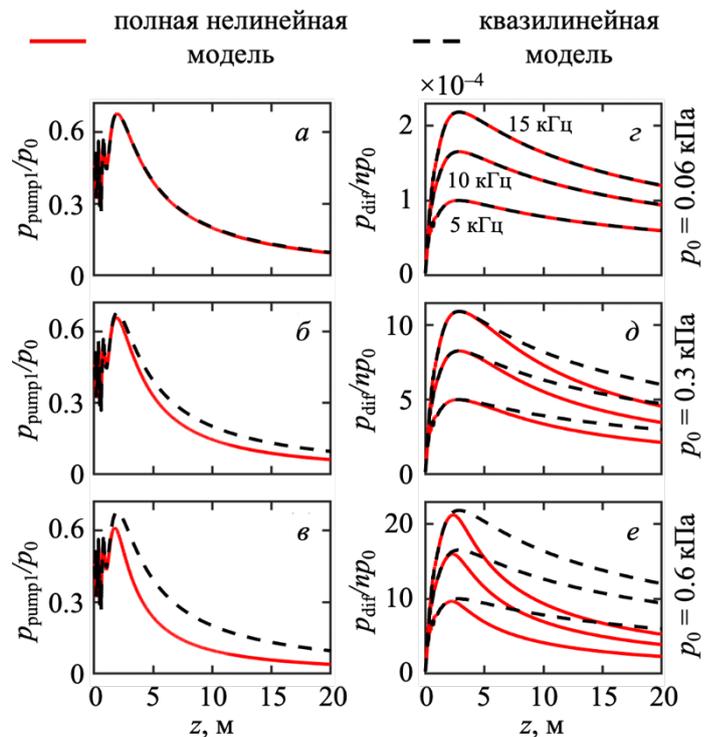


Рис. 6. Одномерные осевые распределения безразмерной амплитуды давления волны накачки с частотой $f_{\text{pump}} = 150$ кГц ($a-v$) и трех волн разностной частоты ($z-e$) с частотами $f_{\text{dif}} = 5$ кГц ($n = 1$), 10 кГц ($n = 2$) и 15 кГц ($n = 3$), рассчитанные с использованием полного нелинейного (красные сплошные кривые) и квазилинейного (черные штриховые кривые) подходов для трех значений амплитуды давления на излучателе p_0 : 0.06 МПа (a, z , квазилинейный режим), 0.3 МПа (b, d , переходный режим), 0.6 МПа (v, e , ударноволновой режим).

Табл. 1. Полные углы расхождения пучков в различных режимах.

	$f_{\text{pump}1} = 150 \text{ кГц}$		$f_{\text{dif}} = 5 \text{ кГц}$	
Квазилинейный расчет	$\alpha_x = 4.0^\circ$	$\alpha_y = 2.5^\circ$	$\beta_x = 5.4^\circ$	$\beta_y = 4.8^\circ$
Полное нелинейное моделирование	$\alpha_x = 5.4^\circ$	$\alpha_y = 3.2^\circ$	$\beta_x = 9.6^\circ$	$\beta_y = 8.5^\circ$

Такое уширение пучка ВРЧ связано с уменьшением длины взаимодействий волн накачки за счет дополнительного поглощения на образующихся ударных фронтах вблизи оси пучка, что приводит к уменьшению поперечного размера сформировавшегося источника ВРЧ и к соответствующему усилению дифракционной расходимости. Таким образом, в ударноволновых режимах использование квазилинейного приближения неприменимо как с точки зрения оценки амплитуды давления на оси, так и для определения свойств направленности пучков.

В §4.3 исследуется вопрос об эффективности нелинейной генерации низкочастотного излучения на основе двух метрик. Одним из показателей является зависимость нормированной амплитуды ВРЧ p_{dif}/p_0 на оси пучка от амплитуды давления на излучателе p_0 (эффективность) на различных расстояниях. На рис. 7 приводится график такой зависимости на двух расстояниях для трех моделей и двух значений частот (5 и 15 кГц): численные расчеты на основе квазилинейной и полной нелинейной моделей, а также нелинейное аналитическое решение Моффета (§1.4).

Результаты, полученные с помощью квазилинейной и полной нелинейной моделей, как и ожидалось, хорошо согласуются при низких начальных давлениях на излучателе p_0 . При этом в квазилинейной модели эффективность линейно возрастает с увеличением p_0 , а в полной нелинейной модели она сначала растет линейно, а затем насыщается при условиях, близких к условиям формирования ударных фронтов в профиле волны.

Решение Моффета на всех расстояниях имеет максимум при $p_0 = 0.2 \text{ МПа}$, когда возникает режим, близкий к образованию ударных волн, и немного

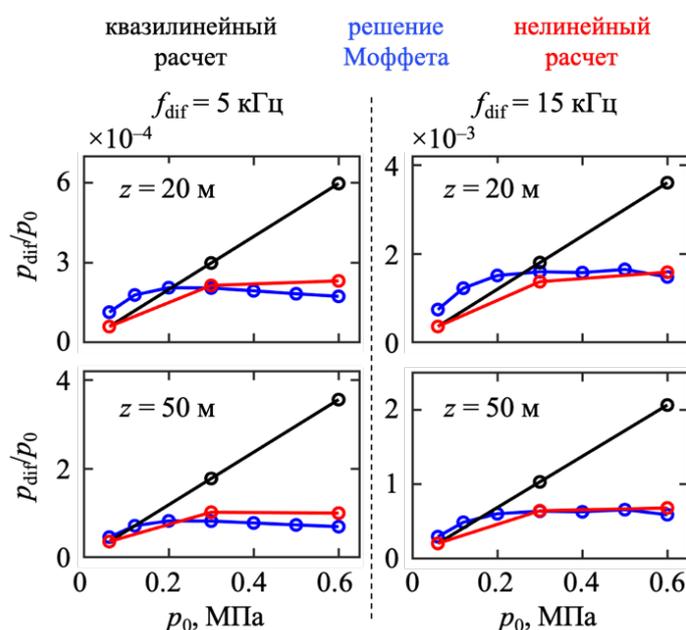


Рис. 7. Эффективность генерации волны разностной частоты параметрическим излучателем на расстояниях $z = 20 \text{ м}$ и 50 м для трех моделей: квазилинейный подход, решение Моффета и полная нелинейная модель.

уменьшается с дальнейшим увеличением p_0 . Такого уменьшения эффективности не наблюдается для численной нелинейной модели. Следовательно, наиболее эффективная параметрическая генерация соответствует амплитудам на излучателе, близким к условиям формирования ударных фронтов в пучке и превышающим их. Абсолютное значение амплитуды давления ВРЧ на оси пучка в режиме насыщения будет линейно возрастать с увеличением p_0 .

Другим показателем эффективности может служить процент от общей акустической мощности, трансформируемой от волн накачки в волну разностной частоты. Этот процент увеличивается с увеличением мощности излучателя без эффекта насыщения. Для наибольшего значения $f_{\text{dif}} = 15$ кГц при $z = 50$ м такой коэффициент передачи составляет 0.002%, 0.03% и 0.05% от общей начальной мощности волн накачки, которая составляла 0.023 кВт, 0.58 кВт и 2.3 кВт для $p_0 = 0.06$ МПа, 0.3 МПа и 0.6 МПа, соответственно.

Таким образом, показано, что, с точки зрения обеих метрик, генерация низкочастотного излучения на разностной частоте происходит эффективнее при больших начальных давлениях и, следовательно, мощностях на параметрическом излучателе, при которых реализуются сильно нелинейные режимы распространения волн, что существенно отличается от поведения высших гармоник, амплитуды которых насыщаются с ростом давления на излучателе. Однако для таких режимов в рассматриваемом случае характерно двукратное уширение пучка ВРЧ, поэтому численное моделирование параметрических процессов служит удобным инструментом для количественных оценок уровней сгенерированного низкочастотного излучения при сохранении желаемой направленности.

Выводы к главе 4 сформулированы в §4.4.

Последняя **пятая глава** посвящена изучению особенностей генерации и распространения ВРЧ в неоднородных средах и в присутствии границ (дно и поверхность) на примере мелководного акустического волновода.

В §5.1 численный алгоритм решения уравнения ХЗК для свободного пространства обобщается на распространение в неоднородных средах и/или с учетом наличия отражений от мягких границ на дне и поверхности.

В §5.2 приводятся результаты численного моделирования задачи для различных моделей подводного звукового канала и учета границ (четыре комбинации условий: однородное и неоднородное пространство, однородный и неоднородный волновод), представленных на рис. 8, в квазилинейном режиме работы параметрического излучателя ($p_0 = 0.06$ МПа). Получено, что полный угол расхождения пучка ВРЧ по оси y , рассчитанный при $z = 50$ м по уровню -6 дБ от максимума давления, составляет 5.7° в свободном пространстве и 3.5° в подводном звуковом канале (ПЗК), т. е. распространение в ПЗК увеличивает

направленность низкочастотного излучения в 1.6 раз. Также наличие ПЗК локализует низкочастотное излучение на разностной частоте в сердцевине канала, увеличивая дистанцию его распространения. При наличии мягких границ поле ВРЧ приобретает модовую структуру с отражениями от дна и поверхности, качественно не меняющуюся с пройденным расстоянием z , что также способствует увеличению дальности распространения ВРЧ.

В §5.3 продемонстрировано сравнение результатов квазилинейного и сильно нелинейного режимов работы параметрического излучателя на примере изоскоростного волновода.

Как и в квазилинейном режиме (рис. 9, *a–b*), поле ВРЧ в разрывном режиме (рис. 9, *z–e*) представляет собой суперпозицию нескольких мод волновода и качественно повторяет поведение поля в квазилинейном режиме, но сильнее концентрируется в середине волновода и отличается на 20 дБ большими уровнями давления и выходной мощности ВРЧ, поэтому исследование сильно нелинейных режимов перспективно для практических применений.

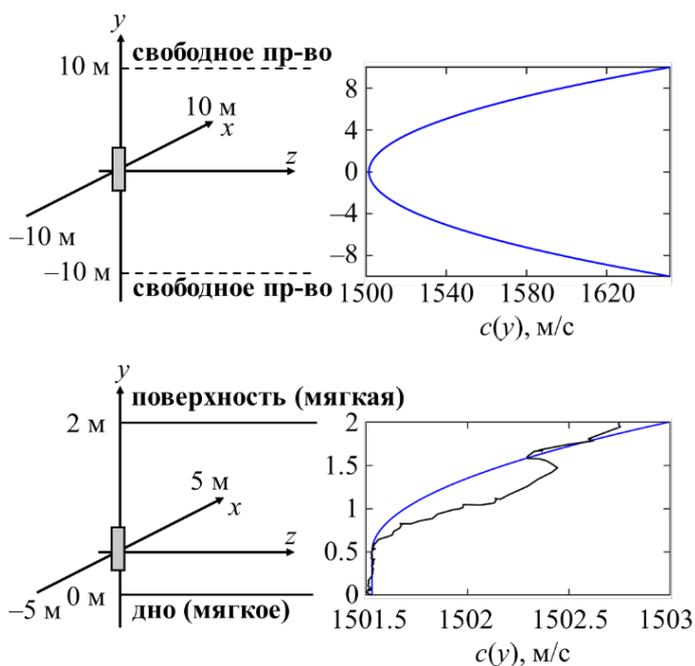


Рис. 8. Два типа рассматриваемых границ с соответствующими профилями скорости звука $c(y)$ при наличии неоднородностей.

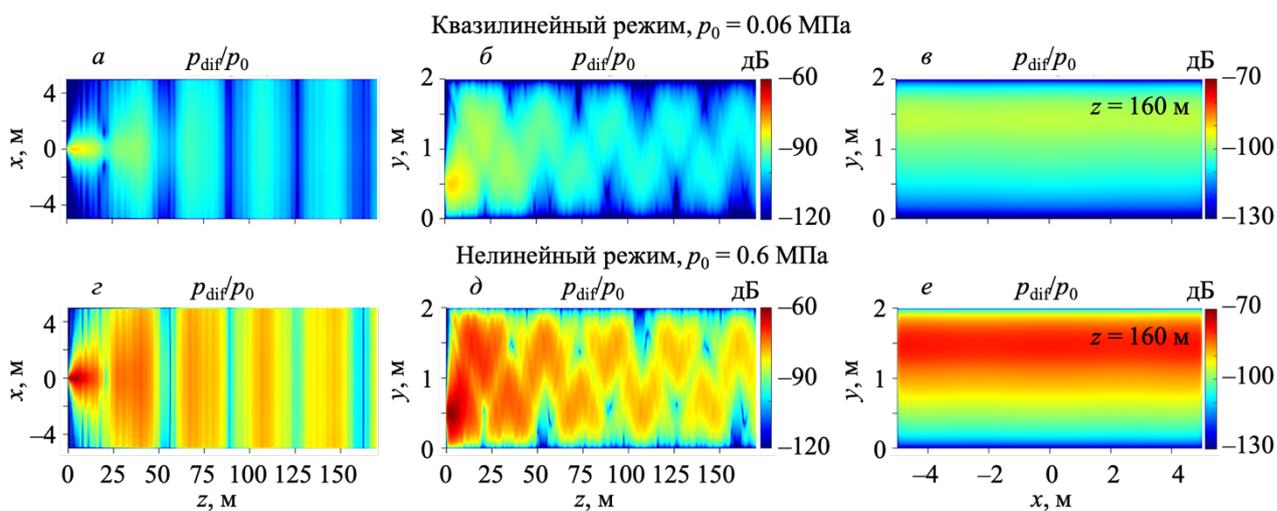


Рис. 9. Квазилинейное (*a–b*) vs полное нелинейное (*z–e*) моделирование распространения ВРЧ с $f_{\text{dif}} = 5$ кГц в однородном волноводе: пространственные продольные и поперечные ($z = 160$ м) распределения поля давления.

В §5.4 представлены выводы к пятой главе.

В конце рукописи кратко сформулированы основные результаты и выводы диссертационной работы, благодарности, публикации автора и список литературы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В работе с помощью численных методов исследованы особенности нелинейной генерации низкочастотного излучения высокочастотной дифрагирующей накачкой в различных режимах работы параметрического излучателя, включая режимы сильного проявления нелинейных эффектов с образованием ударных фронтов в профиле волны. Получены результаты для реалистичных граничных условий на примере подводного параметрического излучателя в свободном поле, а также в присутствии границ и неоднородностей среды.

1. Развитый метод оптимизации расчета нелинейного оператора в спектральном алгоритме позволяет осуществлять моделирование трехмерных задач о параметрической генерации волны разностной частоты, поскольку число спектральных компонент, необходимых для корректного описания ударноволновых режимов при двухчастотном взаимодействии, сокращается с нескольких тысяч до десятков при сохранении точности расчета амплитуды давления волны разностной частоты с максимальной ошибкой в пределах 2–3%. Показано, что частотную фильтрацию удерживаемых в алгоритме гармоник предпочтительнее проводить на расстоянии трех длин образования разрыва для высокочастотного периода волны накачки с максимальной амплитудой.

Показано также, что аналитическое решение, полученное в квазилинейном приближении, существенно отличается от численного решения полной нелинейной задачи на расстояниях, больших двух характерных длин образования разрыва для периода волны накачки с максимальной амплитудой.

2. Расчет поля давления во временном представлении на основе удароуправляющей схемы типа Годунова, используемой в работе в случае импульсной накачки, выигрышнее даже при двухчастотном взаимодействии (в сотни раз по сравнению со спектральным расчетом без оптимизации). Развитый подход позволяет использовать 2–3 узла временной сетки на разрыв против порядка 50 точек для существующих нелинейных алгоритмов, используемых при описании параметрических взаимодействий в ударноволновых режимах. Эффект нелинейной демодуляции высокочастотного импульса наступает раньше в сильно нелинейных режимах по сравнению с квазилинейным (на расстояниях порядка одной длины поглощения волн накачки против трех) и протекает эффективнее, несмотря на наличие дополнительного поглощения волн накачки на

образующихся в профиле волны разрывах. Для обоих типов режимов характерно, что максимум в спектре демодулированного импульса достигает насыщения на меньших расстояниях, чем становится сравнимым с амплитудой волн накачки.

3. Квазилинейный трехмерный спектральный алгоритм направлен на полное описание эффектов дифракции без приближений при задании длины взаимодействия волн накачки, начальных условий на излучателе и геометрии задачи. Показано, что направленность низкочастотного излучения шире и более сглажена по обоим поперечным направлениям, чем у волн накачки. При этом, чем больше величина разностной частоты, тем более узконаправленное излучение генерируется параметрической антенной. Продемонстрировано, что известные аналитические решения, использующие дополнительные предположения об условиях на излучателе и поведении высокочастотных волн накачки, справедливы лишь в ближнем поле излучателя на оси пучка.

4. Сравнение результатов полного нелинейного и квазилинейного моделирования трехмерного уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова показало, что в ударноволновых режимах использование квазилинейного приближения неприменимо ни для оценки амплитуды давления на оси, ни для описания направленности волн накачки и волн разностной частоты (в сильно нелинейных режимах для параметров рассматриваемой задачи происходит двукратное увеличение углов расхождения пучка волн разностной частоты). Продемонстрировано, что ударноволновые режимы работы параметрического излучателя оптимальнее для генерации низкочастотного излучения по двум метрикам. Во-первых, эффективность параметрического излучателя (т.е. безразмерная амплитуда давления волны разностной частоты на оси) сначала растет линейно с увеличением начального давления на излучателе, а затем насыщается при больших давлениях. Во-вторых, мощность волны разностной частоты возрастает с увеличением начальной мощности на излучателе без эффекта насыщения и составляет порядка 0.05% от мощности волн накачки для параметров рассматриваемой задачи в разрывном режиме против 0.002% в квазилинейном.

5. Развитая численная модель позволяет описывать параметрические процессы в неоднородной среде при наличии отражений от границ и исследовать отличия при волноводном распространении волны разностной частоты относительно распространения в свободном однородном пространстве.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в рецензируемых научных журналах, удовлетворяющих Положению о присуждении учёных степеней в МГУ имени М.В. Ломоносова:

A1. **Kvashennikova A.V.**, Yuldashev P.V., Khokhlova V.A., Esipov I.B. *Fully nonlinear three-dimensional modeling of parametric interactions in the field of a dual-frequency acoustic array* // The Journal of the Acoustical Society of America. 2024. Vol. 155. No. 3. P. 1682–1693. **JIF = 2,1 (WoS)**. Общий объём статьи = 1,125 п.л., личный вклад = 0,9 п.л.

A2. **Тюрина А.В. (Квашенникова А.В.)**, Юлдашев П.В., Есипов И.Б., Хохлова В.А. *Генерация акустической волны разностной частоты в дифрагирующем пучке волн накачки в квазилинейном приближении* // Акустический журнал. 2023. Т. 69. № 1. С. 22–131. **IF = 1,846 (РИНЦ)**. Общий объём статьи = 0,8125 п.л., личный вклад = 0,65 п.л.

Переводная версия: **Tyurina A.V. (Kvashennikova A.V.)**, Yuldashev P.V., Esipov I.B., Khokhlova V.A. *Quasilinear approximation for modeling difference-frequency acoustic wave in a diffracting pump-wave beam* // Acoustical Physics. 2023. V. 69. No. 1. P. 30–39. **JIF = 0,9 (WoS)**. Общий объём статьи = 0,8125 п.л., личный вклад = 0,65 п.л.

A3. **Тюрина А.В. (Квашенникова А.В.)**, Юлдашев П.В., Есипов И.Б., Хохлова В.А. *Численная модель спектрального описания генерации ультразвуковой волны разностной частоты при двухчастотном взаимодействии* // Акустический журнал. 2022. Т. 68. № 2. С. 152–161. **IF = 1,846 (РИНЦ)**. Общий объём статьи = 0,8125 п.л., личный вклад = 0,65 п.л.

Переводная версия: **Tyurina A.V. (Kvashennikova A.V.)**, Yuldashev P.V., Esipov I.B., Khokhlova V.A. *Spectral modeling of difference-frequency generation in the case of two-frequency interaction of ultrasound waves* // Acoustical Physics. 2022. V. 68. No. 2. P. 130–137. **JIF = 0,9 (WoS)**. Общий объём статьи = 0,8125 п.л., личный вклад = 0,65 п.л.

Публикация в рецензируемом научном журнале из перечня ВАК РФ:

A4. Сергеева М.С., **Тюрина А.В. (Квашенникова А.В.)**, Юлдашев П.В., Хохлова В.А. *Метод численного расчета генерации ультразвуковых волн разностной частоты в условиях формирования ударного фронта* // Учёные записки физматического факультетата Московского университета. 2022. № 4, с. 2240101. **IF = 0,062 (РИНЦ)**. Общий объём статьи = 0,375 п.л., личный вклад = 0,15 п.л.