

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Широков Илья Евгеньевич

**Автоматизация вычислений квантовых
поправок в суперсимметричных теориях**

Специальность 1.3.3. — теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

МОСКВА — 2022

Работа выполнена на кафедре теоретической физики физического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель:

Степаньянц Константин Викторович

доктор физико-математических наук,
ФГБОУ ВО «МГУ имени М.В.Ломоносова»

Официальные оппоненты:

Арбузов Андрей Борисович

доктор физико-математических наук,
профессор РАН, Объединенный Институт
Ядерных Исследований, начальник сектора
Лаборатории теоретической физики

Катаев Андрей Львович

доктор физико-математических наук,
ФГБУН Институт Ядерных Исследований
РАН, ведущий научный сотрудник

Борк Леонид Владимирович

кандидат физико-математических наук,
ФГУП «Всероссийский научно-исследовательский
институт автоматики им. Н.Л.Духова»,
ведущий научный сотрудник

Защита состоится «17-го» ноября 2022 г. в 15-30 на заседании диссертационного совета МГУ.011.2 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, дом 1, стр. 2, физический факультет, физическая аудитория им. Р.В. ХОХЛОВА.

E-mail: ff.dissovet@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/498743548/>

Автореферат разослан «___»_____ 2022 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета МГУ.011.2,

доктор физико-математических наук

профессор

П.А. Поляков

Общая характеристика диссертации

Актуальность темы исследования

Суперсимметричные теории являются одними из самых многообещающих теорий в современной физике частиц. Они позволяют решить множество проблем физики за пределами Стандартной Модели (СМ). Так, в рамках Минимальной Суперсимметричной Стандартной Модели (МССМ) удается устранить квадратичные расходимости в квантовых поправках к массе хиггсовского бозона [12]. Кроме того, в рамках МССМ благодаря вкладам суперпартнеров удается добиться значительно лучшей сходимости трех констант связи на масштабе Великого Объединения. При этом масштаб Великого Объединения увеличивается на порядок по сравнению со СМ. Это дает возможность получить менее жесткие ограничения на время жизни протона в рамках Теории Великого Объединения (ТВО) [13]. Наконец, в суперсимметричных теориях, сохраняющих R-четность, легчайший суперпартнер – нейтралино является стабильным, что делает его прекрасным кандидатом на роль частицы темной материи [14].

При этом нужно отметить очень хорошее квантовое поведение суперсимметричных теорий в ультрафиолетовой области [15]. Так, $\mathcal{N} = 4$ теория Янга-Миллса является конечной [16], а в $\mathcal{N} = 2$ теории не существует расходимостей за рамками одной петли [17]. Кроме того, даже в $\mathcal{N} = 1$ теориях существуют так называемые теоремы о неперенормировке. Самая известная из них — это теорема о неперенормировке суперпотенциала [18]. Одним из самых интересных утверждений такого рода является NSVZ-соотношение [19], которое связывает β -функцию и аномальную размерность суперполей материи. Оно имеет вид:

$$\frac{\beta(\alpha, \lambda)}{\alpha^2} = -\frac{3C_2 - T(R) + C(R)_i^j (\gamma_\phi)_j^i(\alpha, \lambda)/r}{2\pi(1 - C_2\alpha/2\pi)}, \quad (1)$$

где $r \equiv \dim G$, $C(R)_i^j \equiv (T^A T^A)_i^j$ и $C_2 \equiv T(\text{Adj})$. При этом несмотря на то, что это соотношение известно много лет, лишь недавно удалось получить его всепетлевое доказательство [20]. Это связано с тем, что суперсиммет-

ричные теории очень чувствительны к регуляризации и схемам перенормировки. Так, NSVZ-соотношение для ренормгрупповых функций (РГФ), определенных в терминах голых констант связи, оказывается справедливым при использовании суперсимметричной версии метода регуляризации высшими ковариантными производными [21, 22], а в случае РГФ, определенных в терминах перенормированных констант связи, для удовлетворения этому соотношению необходимо также использование специальной схемы вычитаний [23]. Кроме того, для доказательства NSVZ-соотношения в неабелевом случае, требуется переписать его в новом виде [24], в котором β -функция должна быть равна сумме однопетлевого вклада, а также аномальных размерностей калибровочного поля, полей материи и духовых полей. Чтобы получить такой вид соотношения, необходимо было применить особую теорему о неперенормировке тройных духово-калибровочных вершин [24].

Все вышеупомянутые утверждения неоднократно проверялись явными квантовыми вычислениями [2–5]. В частности, NSVZ-соотношение проверялось вплоть до трехпетлевого приближения [2, 3]. Оказалось, что подобные вычисления являются достаточно трудоемкими. Поэтому крайне актуальным является вопрос их автоматизации с использованием компьютера. Попытки создать программное обеспечение для вычислений по теории возмущений в рамках квантовой теории поля предпринимаются уже более пятидесяти лет (см. например [25], а также обзор [26]). При этом на данный момент существует большое количество самостоятельных программ и различных пакетов к компьютерно-алгебраическим системам. Как правило, все они предназначены для работы в рамках несуперсимметричных теорий или суперсимметричных теорий, заданных в компонентных полях. Однако для упомянутых выше целей необходимо иметь программу, способную работать в рамках суперполей, заданных в суперпространстве. Существует несколько таких программ, например SUSYCAL [27] и пакет для Mathematica SusyMath [28]. К сожалению, они имеют много недостатков и, кроме того, эти проекты не развиваются и недоступны для скачивания. К тому же отдельный интерес представляет не только работа с заданным

выражением в терминах суперполей, но также и возможность генерации графов в заданном приближении. Создание подобного программного обеспечения является важной и крайне актуальной задачей.

Цели и задачи исследования

Целью диссертации является создание C++ программы для генерации суперграфов и сведению их к стандартным импульсным интегралам. При этом для создания алгоритмов программы автор глубоко ознакомился с техникой вычисления суперграфов, решая некоторые важные задачи ручным счётом. Таким образом, к целям работы можно также отнести следующие пункты:

1. Для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий вычисление двухпетлевых диаграмм, дающих вклад в аномальную размерность духов Фаддеева-Попова и содержащих вставку однопетлевого поляризованного оператора.
2. В $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теориях вычисление вклада духов Фаддеева-Попова со вставкой поляризованного оператора в бета-функцию в трехпетлевом приближении, а также проверка части NSVZ-соотношения.
3. В $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамике, регуляризованной высшими производными, вычисление определенного вклада в бета-функцию в трехпетлевом приближении, а также проверка части NSVZ-соотношения.
4. В суперсимметричной теории Янга-Миллса вычисление некоторых вкладов в тройную духово-калибровочную вершину, с целью верификации известной теоремы о неперенормировке.

Кроме того, целью работы является вычисление аномальной размерности суперсимметричной квантовой электродинамики, регуляризованной высшими производными, в трёх петлях, с помощью которой легко получить бета-функцию в четырёх петлях.

Научная новизна

Все полученные результаты являются новыми. Ручные вычисления, проведенные автором ранее, в регуляризации высшими производными не проводились. Программа, созданная в рамках данного диссертационного исследования, также является абсолютно новой. Несмотря на наличие схожих программ для генерации и анализа диаграмм Фейнмана, до настоящего времени не существовало программы, способной генерировать суперграфы и с помощью специальной техники сводить их к импульсным интегралам.

Объект исследования

В рамках данного диссертационного исследования рассматривались:

1. $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричные калибровочные теории, регуляризованные методом высших ковариантных производных.
2. $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная квантовая электродинамика, регуляризованная методом высших ковариантных производных.

Методы исследования

Исследования проводились с использованием стандартных методов квантовой теории поля, обобщенных на теорию, построенную в терминах $\mathcal{N} = 1$ суперполей в суперпространстве. Они включают в себя методы континуального интеграла, связанную с ним диаграммную технику, взятие интегралов, а также метод перенормировок и ренормгруппы. Кроме того, при создании программ применялись стандартные библиотеки языка C++, пакет для распараллеливания вычислений, а также некоторые хорошо известные алгоритмы, связанные с нахождением наибольшего общего делителя, генерации простых чисел и пр.

Положения, выносимые на защиту

1. Для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий был вычислен вклад со вставкой поляризационного оператора в аномальную размерность духов Фаддеева-Попова в двух петлях. Затем, с помощью специального метода был вычислен вклад духов Фаддеева-Попова со вставкой поляризационного оператора в β -функцию в трёх петлях. Было произведено сравнение этих вкладов, которое подтвердило справедливость NSVZ-соотношения.
2. В $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теориях были вычислены некоторые вклады, пропорциональные $(C_2)^2$, а также $C_2T(R)$ в тройную духово-калибровочную вершину. Результат не имеет ультрафиолетовых расходимостей, что подтверждает положения теоремы о неперенормировке тройных духово-калибровочных вершин.
3. В $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамике был вычислен вклад со вставкой однопетлевого поляризационного оператора в бета-функцию в трехпетлевом приближении. После вычисления соответствующего вклада в двухпетлевую аномальную размерность была проверена справедливость NSVZ-соотношения.
4. Была создана программа для вычисления суперграфов. Программа была написана на языке C++ с некоторыми специальными библиотеками. Она способна генерировать, проводить операции в терминах суперпространства и, таким образом, сводить выражения к стандартным импульсным интегралам. Корректность работы программы была проверена на вычислениях в рамках $\mathcal{N} = 1$ квантовой суперсимметричной электродинамики, регуляризованной высшими производными.
5. С помощью новой программы была полностью вычислена аномальная размерность $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной электродинамики в трех петлях. При этом с помощью NSVZ соотношения на основе этого результата был получен вклад в β -функцию в четырех петлях. Изначально полученные в терминах голых констант связи, эти величины были также пересчитаны в терминах перенормированных констант. Кроме того, как

для этого частного случая, так и для всех петель было показано, что существует перенормировочное предписание, при котором в аномальной размерности и β -функции остаются только схемно-независимые части.

Теоретическая и практическая значимость

Все вычисления, описанные в данной диссертации, имеют высокую теоретическую ценность. Они подтверждают хорошо известные соотношения, такие как NSVZ соотношение, а также теорема о неперенормировке тройных духово-калибровочных вершин. Кроме того, результаты для аномальной размерности в высших петлях, дают возможность изучить особенности выбора схемы перенормировки в исследуемых теориях. Программа, созданная в рамках данного исследования, имеет очень высокую практическую ценность. С её помощью уже были получены новые и интересные результаты. В будущем, после некоторой доработки, её также можно будет применять для вычислений в рамках феноменологически более интересных теорий, таких как, например, $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная теория Янга-Миллса.

Достоверность и обоснованность результатов

Достоверность результатов подтверждается их соответствием с общими теоремами о неперенормировке. Результаты работы программы являются корректными поскольку:

1. Результат вычислений аномальной размерности в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамике вплоть до трёх петель оказался калибровочно независимым.
2. При взятии интегралов получился конечный ответ для аномальной размерности.
3. Схемнонезависимая часть вычислений совпала с результатом вычислений в $\overline{\text{DR}}$ схеме.

Таким образом, можно считать, что, по крайней мере, для случая $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики результаты, получаемые

программой, являются в достаточной степени достоверными, что говорит о возможности её дальнейшего использования в более сложных теориях.

Личный вклад соискателя

Все результаты, описанные в диссертации были получены автором лично. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами.

В работах [1–3] автором были вычислены суперграфы, содержащие вставку однопетлевого поляризованного оператора квантового калибровочного суперполя, при этом прочие вклады вычислялись другими соавторами.

В научных трудах [4, 5] автором вычислялись вклады в трехточечную духово-калибровочную функцию Грина, которые также содержат вставку однопетлевого поляризованного оператора. При этом в одну из вершин этой вставки (содержащей в одном случае петлю материи, а в другом петлю калибровочного поля) вставлена внешняя линия калибровочного поля. В случае вставки, содержащей петлю калибровочного поля, был вычислен вклад с определенной расстановкой суперсимметричных ковариантных производных по внутренним линиям диаграммы. Прочие вклады в данную трехточечную функцию были вычислены другими соавторами.

В работе [6] вклад автора был определяющим.

Апробация результатов

Результаты диссертационной работы были представлены в нескольких докладах на различных конференциях. При этом лично автором были сделаны доклады:

1. “Трехпетлевая аномальная размерность и четырехпетлевая бета-функция для $\mathcal{N} = 1$ SQED с N_f ароматами в неминимальной калибровке”, XXIX Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов – 2022”, Москва, Россия, 11 — 22 апреля 2022.

2. “Multiloop calculations in $\mathcal{N} = 1$ SQED with N_f flavours regularized by higher derivatives”, International Conference on Quantum Field Theory, High-

Energy Physics, and Cosmology, Дубна, Россия, 18 — 21 июля 2022.

Кроме того автор является соавтором следующих докладов:

3. “Двухпетлевая перенормировка духов Фаддеева-Попова в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теориях, регуляризованных высшими ковариантными производными”, XXV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов – 2018”, Москва, Россия, 9 — 13 апреля 2018.

4. “Two-loop anomalous dimension of the Faddeev-Popov ghosts in $N=1$ supersymmetric theories”, 19th Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics, Москва, Россия, 22 — 28 августа 2019.

5. “Использование нового метода для вычисления вкладов духов Фаддеева-Попова в β -функцию $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий Янга-Миллса в трехпетлевом приближении”, XXVII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов – 2020”, Москва, Россия, 10 — 27 ноября 2020.

6. “Трехпетлевая бета-функция для $N = 1$ SQED в неминимальной калибровке”, XXVII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов – 2020”, Москва, Россия, 10 — 27 ноября 2020.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из 4 глав, первая из которых является введением, заключения, списка литературы и приложения. Общий объем диссертации 111 страниц. **Список литературы** содержит 182 ссылки.

Краткое содержание диссертации

Диссертация состоит из 4 глав (включая введение), заключения, списка литературы и приложения.

Глава 1 является **Введением**. В нем описываются основные проблемы Стандартной Модели и теорий Великого Объединения и возможные

решения этих проблем при помощи суперсимметричных расширений существующих теорий. Затем перечисляются интересные квантовые свойства суперсимметричных теорий. После этого приведен обзор существующих программ, с помощью которых можно вычислять квантовые поправки в различных теориях. Кроме того, в данной главе дается краткая характеристика диссертации, приводится список конференций на которых докладывались описываемые в диссертации достижения. В конце главы дается краткое содержание работы.

В **Главе 2** описывается ряд вычислений, сделанных вручную, в которых принимал участие автор. Эти вычисления во многом помогли овладеть навыками, которые затем были применены для создания программы. Эти вычисления проводились в рамках $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий, которые описаны в первом разделе главы. Затем подробно описывается вычисления определенного вклада, содержащего вставку поляризованного оператора калибровочного поля, в аномальную размерность духов Фаддеева-Попова. Также в главе 2 описано вычисление вклада в трехточечную духово-калибровочную вершину. Это вычисление проводилось в рамках явной проверки теоремы о неперенормировке тройной духово-калибровочной вершины. В конце главы также приведено вычисление части вклада духов Фаддеева-Попова в β -функцию $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса. На основе этого результата и результата для духов Фаддеева-Попова выполнена проверка части NSVZ соотношения.

В **Главе 3** приводится описание новой программы для генерации суперграфов и проведения вычислений в терминах суперпространства. Описывается алгоритм, реализуемый программой, затем приводятся основы внутреннего синтаксиса программы. Затем описывается $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная электродинамика с N_f ароматами, в рамках которой работает программа. Приводятся примеры входных файлов для вычисления двухточечной функции Грина суперполей материи в одной и двух петлях, в том числе с полями Паули-Вилларса в неминимальной калибровке. В конце главы приводятся результаты для заданных входных файлов, они сравниваются с соответствующими ручными вычислениями, а также приводится

время работы для различных случаев использования программы.

В **Главе 4** описывается вычисление трехпетлевой аномальной размерности в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной электродинамике с N_f ароматами. Приводится общее выражение для интегралов в импульсном пространстве, дающих вклад трехпетлевую аномальную размерность. Эти интегралы берутся в технике полиномов Чебышева. Подробно взятие этих интегралов описывается в **Приложении**. Приводится окончательный результат для трехпетлевой аномальной размерности в терминах голой константы связи. С помощью NSVZ-соотношения на основе этого результата вычисляется β -функция в четырех петлях, также определенная в терминах голых констант связи. Затем на основе этих выражений вычисляется соответствующие внутригрупповые функции, определенные в терминах перенормированных констант связи. Оказывается, что с помощью специальной конечной перенормировки эти функции можно переписать в виде, содержащем только схемно-независимые части. Такая схема вычитаний названа минимальной. В конце главы приводится общее доказательство того, что такая схема существует во всех петлях.

Краткие итоги исследований, лежащих в основе диссертации, подводятся в **Заключении**.

Заключение

Основное достижение автора, описанное в данном диссертационном исследовании, состоит в создании новой программы [29], способной генерировать суперграфы и проводить с ними различные манипуляции, работая при этом в суперпространстве в 4 измерениях.

Несмотря на то, что различные программы и пакеты к компьютерно-алгебраическим системам для вычислений в рамках квантовой теории поля существуют много лет, лишь малое количество из них способны работать в терминах суперполей в суперпространстве. Даже существующие программы являются весьма недоработанными и, кроме того, данные проекты не

развиваются на данный момент. При этом многие недавние вычисления в рамках этого подхода (в которых в частности принимал участие автор) показали, что ручной счет является весьма затруднительным и, как правило, требует участие нескольких человек для вычислений [1–5, 7–10].

Созданная программа является достаточно комплексным инструментом для работы в рамках упомянутого подхода. Программа способна генерировать суперграфы путем прямого разложения производящего функционала. Этот подход дает возможность корректно генерировать диаграммы, даже в теориях, регуляризованных высшими производными. При этом программа не только генерирует, но и доводит результат до интегралов, определенных в импульсном пространстве, что является достаточно трудоемкой процедурой с учетом наличия большого количества суперсимметричных ковариантных производных. Кроме того, нужно подчеркнуть, что программа работает в 4 измерениях, что позволяет избежать проблем, связанных с определением γ_5 и ε -символа. На данный момент программа способна вычислять двухточечную функцию Грина в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной электродинамике с N_f ароматами, регуляризованной высшими производными.

На основе созданной программы уже был получен новый результат, а именно в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной электродинамике с N_f ароматами была вычислена трехпетлевая аномальная размерность полей материи [6, 11]. Результат оказался калибровочно-независимым, что и должно быть в соответствии с [18], и является хорошей проверкой правильности. Полученные интегралы были взяты с помощью техники полиномов Чебышева [30]. Результат для схемно-независимой части (которая не содержит N_f) совпал с ранее полученным в $\overline{\text{DR}}$ схеме [31].

На основе этого результата с помощью NSVZ-соотношения была получена β -функция, определенная в терминах голых констант связи. Были найдены также РГФ, определенные в терминах перенормированной константы связи. При определенной схеме вычитаний ответ совпал с полученным в $\overline{\text{DR}}$ схеме. Также оказалось, что определенным выбором перенормировочного предписания можно положить равными нулю все схемно-зависимые вклады, которые содержат $(N_f)^k$ при $k \geq 1$ для аномальной размерности

сти и $(N_f)^k$ при $k \geq 2$ для β -функции. Было также продемонстрировано, что подобное утверждение справедливо во всех петлях. Для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной электродинамики такая минимальная схема также является NSVZ схемой во всех порядках и в ней остаются только схемно-независимые вклады.

Публикации автора

в рецензируемых научных журналах, индексируемых в международных базах данных Web of Science, SCOPUS, RSCI

- [1] Kazantsev A. E., Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shirokov I. E., Skoptsov M. B. and Stepanyantz K. V. Two-loop renormalization of the Faddeev-Popov ghosts in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories regularized by higher derivatives. // JHEP. — 2018. — Vol. 1806. — P. 020. **ИФ WoS: 5.810.** *Wos.*
- [2] Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shirokov I. E. and Stepanyantz K. V. Three-loop contribution of the Faddeev-Popov ghosts to the β -function of $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories and the NSVZ relation. // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Vol. 79. — P. 809. **ИФ WoS: 4.590.** *Wos.*
- [3] Aleshin S. S., Durandina I. S., Kolupaev D. S., Korneev D. S., Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Petrov I. A., Shatalova V. V. and Shirokov I. E., *et al.* Three-loop verification of a new algorithm for the calculation of a β -function in supersymmetric theories regularized by higher derivatives for the case of $\mathcal{N} = 1$ SQED.// Nucl. Phys. B. — 2020. — Vol. 956. — P. 115020. **ИФ WoS: 2.759.** *Wos.*
- [4] Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shirokov I. E. and Stepanyantz K. V. Finiteness of the two-loop matter contribution to the triple gauge-ghost vertices in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories regularized by higher derivatives.// Phys. Rev. D. — 2021. — Vol. 104. — P. 025008. **ИФ WoS: 5.296.** *Wos.*

- [5] Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shatalova V. V., Shirokov I. E. and Stepanyantz K. V. Finiteness of the triple gauge-ghost vertices in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories: the two-loop verification. // Eur. Phys. J. C. — 2022. — Vol. 82. — P. 69. **ИФ WoS: 4.590.** *Wos.*
- [6] Shirokov I. E. and Stepanyantz K. V. The three-loop anomalous dimension and the four-loop β -function for $\mathcal{N} = 1$ SQED regularized by higher derivatives // JHEP. — 2022. — Vol. 2204. — P. 108. **ИФ WoS: 5.810.** *Wos.*

**Иные публикации автора, в том числе публикации
в материалах конференций и рабочих совещаний**

- [7] Казанцев А. Е., Кузьмичев М. Д., Мещеряков Н. П., Новгородцев С. В., Скопцов М. Б., Широков И. Е., Двухпетлевая перенормировка духов Фаддеева-Попова в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теориях, регуляризованных высшими ковариантными производными // Материалы Международного молодежного научного форума Ломоносов—2018 / Под ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. — Москва: Москва, 2018. — С. 182–184.
- [8] Кузьмичев М. Д., Мещеряков Н. П., Новгородцев С. В., Широков И. Е., Использование нового метода для вычисления вкладов духов Фаддеева-Попова в β -функцию $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий Янга-Миллса в трехпетлевом приближении // Материалы Международного молодежного научного форума Ломоносов—2020 / Под ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. — Москва: Москва, 2020.
- [9] Дурандина И. С., Кузьмичев М. Д., Мещеряков Н. П., Новгородцев С. В., Петров И. А., Шаталова В. В., Широков И. Е., Трехпетлевая бета-функция для $\mathcal{N} = 1$ SQED в неминимальной калибровке // Материалы Международного молодежного научного форума

Ломоносов—2020 / Под ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. — Москва: Москва, 2020.

- [10] Kazantsev A. E., Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shirokov I. E., Skoptsov M. B. and Stepanyantz K. V. Two-loop anomalous dimension of the Faddeev-Popov ghosts in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric theories. // Particle Physics at the Year of 150th Anniversary of the Mendeleev's Periodic Table of Chemical Elements, / Ed. by Studenikin A. I. — *Proceedings, 19th Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics: Moscow, Russia, August 22 — 28, 2019.* — World Scientific Pub. Singapore, 2021. — P. 544.
- [11] Широков И. Е., Трехпетлевая аномальная размерность и четырехпетлевая бета-функция для $\mathcal{N} = 1$ SQED с N_f ароматами в неминимальной калибровке // Материалы Международного молодежного научного форума Ломоносов—2022 / Под ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. — Москва: Москва, 2022.

Цитируемая литература

- [12] Mohapatra R. N. Unification And Supersymmetry. The Frontiers Of Quark - Lepton Physics : The Frontiers Of Quark-lepton Physics. // New York, USA: Springer, 2003. — 421 p.
- [13] Zyla P. A. *et al.* [Particle Data Group]. Review of Particle Physics. // РТЕР. — 2020. — Vol. 2020 and 2021 update. — P. 083C01.
- [14] Вайнберг С. Пер. с англ. — Квантовая теория поля. Том 3: Суперсимметрия. // Москва, Физматлит (2018), 456 с.;
Weinberg S. The quantum theory of fields. Vol. 3: Supersymmetry. // Cambridge, Cambridge University Press, 2005. — 442 p.
- [15] Уэст П. Введение в суперсимметрию и супергравитацию. // Пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 328 с.;

- West P. C. Introduction to supersymmetry and supergravity. // Singapore: World Scientific, 1990 — 425 p.
- [16] Sohnius M. F. and West P. C. Conformal Invariance in N=4 Supersymmetric Yang-Mills Theory. // Phys. Lett. B. — 1981. — Vol. 100. — P. 245.
- [17] Howe P. S., Stelle K. S. and Townsend P. K. Miraculous Ultraviolet Cancellations in Supersymmetry Made Manifest. // Nucl. Phys. B. — 1984. — Vol. 236. — P. 125.
- [18] Grisaru M. T., Siegel W. and Rocek M. Improved Methods for Supergraphs. // Nucl. Phys. B. — 1979. — Vol. 159. — P. 429.
- [19] Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I. and Zakharov V. I. Exact Gell-Mann-Low Function of Supersymmetric Yang-Mills Theories from Instanton Calculus. // Nucl. Phys. B. — 1983. — Vol. 229. — P. 381.
- [20] Stepanyantz K. The all-loop perturbative derivation of the NSVZ β -function and the NSVZ scheme in the non-Abelian case by summing singular contributions. // Eur. Phys. J. C. — 2020. — Vol. 80. — P. 911.
- [21] Slavnov A. A. Invariant regularization of nonlinear chiral theories. // Nucl. Phys. B. — 1971. — Vol. 31. — P. 301.
- [22] Кривошеков В. К. Инвариантная регуляризация для суперсимметричных калибровочных теорий. // ТМФ. — 1978. — Т. 36. — С. 291;
Krivoshchekov V. K. Invariant Regularizations for Supersymmetric Gauge Theories. // Theor. Math. Phys. — 1978. — Vol. 36. — P. 745.
- [23] Kataev A. L. and Stepanyantz K. V. NSVZ scheme with the higher derivative regularization for $\mathcal{N} = 1$ SQED. // Nucl. Phys. B. — 2013. — Vol. 875. — P. 459.
- [24] Stepanyantz K. V. Non-renormalization of the $V\bar{c}c$ -vertices in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric theories. // Nucl. Phys. B. — 2016. — Vol. 909. — P. 316.

- [25] Campbell J. A. and Hearn A. C. Symbolic analysis of feynman diagrams by computer // J. Comput. Phys., 1970, Vol. 5, P. 280.
- [26] Гердт В. П., Тарасов О. В. и Ширков Д. В. Аналитические вычисления на ЭВМ в приложении к физике и математике // УФН, 1980, т. 130, с. 113–147.
- [27] Kreuzberger T., Kummer W. and Schweda M. SUSYCAL: A PROGRAM FOR SYMBOLIC COMPUTATIONS IN SUPERSYMMETRIC THEORIES // Comput. Phys. Commun., 1990, Vol. 58, pp. 89-104.
- [28] Ferrari A. F. SusyMath: A Mathematica package for quantum superfield calculations // Comput. Phys. Commun., 2007, Vol. 176, pp. 334-346.
- [29] Shirokov I., Computer algebra calculations in supersymmetric electrodynamics // [arXiv:2209.05295 [hep-th]], принята к публикации в журнале "Программирование".
- [30] Rosner J. L. Higher-order contributions to the divergent part of $Z(3)$ in a model quantum electrodynamics. // Annals Phys. — 1967. — Vol. 44. — P. 11.
- [31] Jack I., Jones D. R. T. and North C. G. $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry and the three loop anomalous dimension for the chiral superfield. // Nucl. Phys. B. — 1996. — Vol. 473. — P. 308.