

ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук Соляева Юрия Олеговича
на тему: «Неклассические масштабные эффекты в прикладных моделях
градиентной теории упругости и электроупругости»
по специальности 1.1.8 – «Механика деформируемого твердого тела»

Диссертация Соляева Юрия Олеговича посвящена проблеме применения градиентных теорий механики деформируемого твердого тела для описания масштабных эффектов в упругих и пьезоэлектрических материалах. Рассматриваются задачи, связанные с прогнозом эффективных свойств композиционных материалов с учетом размера включений, проблемы построения градиентных балочных теорий, проблемы, связанные с описанием масштабного эффекта прочности в материалах с трещинами и концентраторами, а также динамические задачи для поверхностных электроакустических волн. Актуальность рассматриваемых проблем определяется развитием современных методов получения наномодифицированных композитов, микро/нано-структурированных материалов, малоразмерных элементов микро-системной техники, в которых в значительной степени могут проявляться исследуемые неклассические масштабные эффекты и которые могут требовать привлечения соответствующих расчетных моделей.

В первой главе диссертации представлен аналитический обзор литературы. Показана обоснованность и актуальность выбранных направлений исследований.

Во второй главе диссертации представлены основные соотношения рассматриваемых градиентных теорий упругости и электроупругости. В частности, в разделе 2.1 «Градиентная теория упругости (ГТУ)» рассматривается линейно упругое тело, занимающее область Ω с границей $\partial\Omega$, содержащей ребра $\partial\partial\Omega$. Приведены выражения для удельной энергии

деформации линейной градиентной теории упругости Миндлина-Тупина в случае произвольной анизотропной среды с центром симметрии (2.1) и определяющих соотношений (2.2). При этом если во второй формуле (2.2) тензор третьего ранга η заменить градиентом от градиента вектора перемещений, то получим определяющие соотношения в форме I Миндлина. Если тензор η поменять на градиент тензора линейных деформаций, то будем иметь определяющие соотношения в форме II Миндлина, а если же η заменить градиентом вектора вихря, то получатся определяющие соотношения в форме III Миндлина (форма III Миндлина в диссертационной работе не рассматривается). Сформулирован вариационный принцип Лагранжа в виде (2.11), из которого получена соответствующая этому вариационному принципу дифференциальная постановка краевой задачи. Далее, в разделе 2.2 «Градиентная теория электроупругости (ГТЭ)» рассматривается анизотропное тело, занимающее область Ω с поверхностью $\partial\Omega$, содержащей ребра $\partial\partial\Omega$. Принимая в качестве независимых переменных ГТЭ тензор линейных деформаций, вектор напряженности электрического поля, а также их градиенты, приведено выражение для энтальпии (функции состояния) линейной ГТЭ в виде (2.15), которое содержит 10 слагаемых. Свойства материала в рассматриваемой ГТЭ определяются с помощью 10 материальных тензоров, среды которых имеем 1 тензор – второго ранга, 2 тензора – третьего ранга, 4 тензора – четвертого ранга, 2 тензора – пятого ранга и 1 тензор – шестого ранга. Далее, для простоты упрощается выражение для энтальпии. В частности, из 6-и слагаемых, называемых «эффектами связанности», исключаются пять, и упрощенная энтальпия представляется соотношением (2.16). Свойства материала в такой упрощенной ГТЭ определяются одним тензором 2-го ранга, одним тензором 3-го ранга, двумя тензорами 4-го ранга и одним тензором 6-го ранга. На основании энтальпии (2.16) выведены определяющие соотношения (2.17) – (2.20) упрощенной ГТЭ. Учитывая эти определяющие соотношения, через энергетические пары тензоров даны выражение для энтальпии. Далее,

пропуская выкладки, почти аналогичные выкладкам, проведенным в разделе 2.1, даны дифференциальные постановки краевых задач соотношениями (2.23) в рассматриваемой ТГЭ, из которой как частный случай выписана постановка краевых задач классической теории электроупругости. Далее, вводя тензорные матрицы и соответствующие названия (термины), с которыми я не согласен, сформулирована в этих терминах (в форме Барнета и Лоте) постановка краевых задач (2.27), а также дано представление энтальпии соотношением (2.26), которое не верно, так как используемые в правой части этой формулы операции умножения не осуществимы. В разделе 2.3 «Модели с упрощенными определяющими соотношениями» приведены упрощенные определяющие соотношения для ГТУ и их обобщения на случай ГТЭ, которые используются далее в диссертационной работе упрощенные определяющие соотношения для ГТУ и их обобщения на случай ГТЭ, которые используются далее в диссертационной работе и носят прикладной характер. При этом они представлены как форме I, так и форме II Миндлина. Здесь еще приведен один вариант упрощенных определяющих соотношений, который рассматривается в диссертации, относится к градиентной теории межфазного слоя, предложенной и развитой в работах С.А. Лурье, П.А. Белова, Д.Б. Волкова-Богородского [13, 150]. В разделе 2.4 «Уравнения ГТУ в криволинейных системах координат» представлены уравнения равновесия относительно тензоров напряжений и градиентных напряжений, а также статические граничные условия представлены относительно контравариантных компонент этих тензоров. Кинематические граничные условия представлены относительно ковариантных компонент вектора перемещений. Определяющие соотношения записаны в физических компонентах. В разделе 2.5 «Уравнения равновесия в перемещениях» для изотропного материала выписаны уравнения равновесия ГТУ относительно вектора перемещений и его компонент (2.58), в которых участвует два масштабных параметра и которые получаются из уравнения равновесия (2.12), применяя определяющие соотношения, например, форме II Миндлина

(2.38) [25]. Приведена таблица 1, в которой даны выражения масштабных параметров различных градиентных теории через материальные константы. Далее, уравнения равновесия для ГТЭ записаны относительно компонент вектора перемещений и потенциала электрического поля (2.59), а также относительно тех же неизвестных уравнения равновесия записаны для градиентной теории межфазного слоя (2.60).

В третьей главе диссертации «Привлекаемые методы построения решений» дано описание основных методов, которые применяются в работе для решения рассматриваемых задач. В частности, даны: представление общего решения уравнений равновесия ГТУ в произвольной системе координат, полу-обратный метод для решения задач изгиба, формулировка методов осреднения, основанных на использовании интегральных формул Эшелби, а также описание используемых численных методов (смешанный метод конечных элементов и метод Треффца).

В четвертой главе «Масштабные эффекты в градиентной теории упругости» и пятой главе «Масштабные эффекты в градиентных моделях пьезоэлектрических материалов» диссертации представлены построенные решения и анализ возникающих в них неклассических масштабных эффектов в рамках градиентной теории упругости и градиентной теории электроупругости соответственно. Рассмотрены задачи об определении эффективных свойств композитов со сферическими и цилиндрическими включениями с учетом размера включений, а также задачи балочных теорий. Проведен анализ построенных с помощью полу-обратного метода решений трехмерных и плоских задач изгиба балки в градиентной упругости и электроупругости. Рассмотрены задачи о трещинах, для которых построены численные решения и проведено сопоставление результатов расчетов и экспериментальных данных в части прогноза критических разрушающих нагрузок. Показана возможность применения регуляризованных решений градиентной теории упругости для описания зависимости разрушающих нагрузок для образцов с трещинами различного размера и ориентации по

отношению к нагрузке. Проведена идентификация дополнительных масштабных параметров градиентной теории упругости и предложен модифицированный критерий прочности для условий нагружения по смешанной III моде. Этот критерий учитывает изменение механизмов разрушения, связанных с максимальными главными напряжениями и с напряжениями сдвига, при изменении уровня триаксальности напряженного состояния в вершине концентратора. В четвертой главе в рамках градиентной теории упругости рассмотрена также обобщенная задача Фламана для клина, которая представляет собой случай нагружения материала силой, распределенной вдоль острой кромки. В классической теории упругости эта задача приводит к сингулярным полям перемещений, деформаций и напряжений. В диссертации асимптотический анализ и численное моделирование для задачи Фламана использованы для проверки возможности регуляризации решений вблизи нагруженных острых кромок в градиентной теории упругости. В пятой главе рассмотрены задачи для поверхностных и объемных электроупругих волн, в рамках которых предложена формулировка динамической теории пьезоэлектрических сред, учитывающая градиенты деформаций, электрического поля, а также градиентные инерционные эффекты. Показано, что предложенная формулировка позволяет корректным образом описывать явления нормальной пространственной дисперсии, соответствующей известным данным динамики кристаллической решетки.

Новизна результатов, представленных в работе, заключается в следующем. В диссертации предложены новые аналитические и численные методы построения решений в градиентной теории упругости и в градиентной теории электроупругости. Предложен новый вариант представления общего решения уравнения равновесия ГТУ, который — обобщение известного классического представления Папковича-Нейбера и в рамках градиентной теории упругости содержит дополнительные потенциалы, удовлетворяющие модифицированным уравнениям

Гельмгольца. Полученное представление используется при решении задач о включении в градиентных теориях, а также при реализации метода Треффца. В части развития методов осреднения представлено доказательство эквивалентности прямых и энергетических методов осреднения в рассматриваемых теориях. Доказательство построено на использовании интегральных формул Эшелби, которые, как показано, могут быть приведены к стандартным соотношениям прямых методов осреднения. Проведен анализ и сопоставление различных методов осреднения (метод Мори-Танака, обобщенный самосогласованный метод, дифференциальный метод, численное моделирование на периодических представительных фрагментах), которые могут применяться в градиентных теориях. Для задач о балках в градиентной упругости и электроупругости построен новый класс тестовых трехмерных решений для условий чистого изгиба, которые использованы для дальнейшей корректной формулировки градиентных балочных теорий типа Бернулли-Эйлера, которые могут применяться для уточненного описания механического отклика упругих и пьезоэлектрических микро-кантиливеров. В также диссертации продемонстрирована возможность описания масштабного эффекта прочности хрупких и квази-хрупких материалов на основе численного моделирования и концепции концентрации напряжений в градиентной теории упругости. Предложен модифицированный критерий прочности для оценки разрушающих нагрузок в условиях смешанной I/II моды в зонах с концентраторами напряжений. Проведена идентификация масштабных параметров градиентных теорий на основе экспериментальных данных для широкого класса материалов. Представлен асимптотический анализ решения обобщенной задачи Фламана для клина, нагруженного в вершине. На основе этого анализа установлен класс градиентных теорий, в которых возможна регуляризация решений вблизи нагруженных острых кромок, а именно, это теории, в которых в уравнениях равновесия присутствует два масштабных параметра, определяющих регуляризацию поля дилатации и малых поворотов. Предложена новая формулировка

динамической градиентной электроупругости, которая учитывает градиентные инерционные эффекты и позволяет корректно описывать эффекты пространственной дисперсии электроакустических волн.

Полученные решения и представленные выводы и рекомендации представляются обоснованными и достоверными. В работе проводится строгий анализ постановок краевых задач, структуры их решений. Аналитические решения сопоставлены с численным моделированием, а доступные экспериментальные данные используются для идентификации дополнительных параметров градиентных теорий и тестирования корректности описания реализующихся масштабных эффектов.

Результаты диссертационной работы представлены в 22 статьях, опубликованных в рецензируемых ведущих российских и международных научных журналах, а также неоднократно докладывались на конференциях. Опубликованные работы полностью отражают результаты диссертации.

Автореферат даёт чёткое представление о диссертации и в полной мере отражает её содержание.

Замечания к диссертационной работе.

- Диссертационная работа оформлена нехорошо. Некоторые формулы написаны неправильно, а также некоторые научные термины используются некорректно. Все тензорные величины обозначены одинаково полужирным шрифтом. Все это очень затрудняет чтение работы. Все обнаруженные замечания с целью сокращения письма выписывать не будем. Ниже укажем на некоторые из них.

- На странице 33 после соотношения (2.8) на первой строке в формуле имеется вектор \mathbf{v} , разъяснение которого не даётся.

- На странице 34 из сформулированного вариационного принципа Лагранжа (2.11) выведены дифференциальные постановки краевых задач. Из вариационного принципа Лагранжа обычно получаются уравнения равновесия и статические граничные условия. Откуда тут появились

главные кинематические граничные условия, не объясняется. Не объясняется и значение слова «главные».

- То же самое относится к постановке краевых задач ГТЭ (2.23) на странице 37.

- Введённые в первом абзаце на странице 38 термины для записи постановки краевых задач, по мнению оппонента, являются некорректными.

- Выражение для эн+тальпии (2.26) неправильно записаны, так как в правой части используемые операции умножения нельзя осуществить.

- На странице 48 в левой части векторного уравнения (2.58) последнее слагаемое, содержащее два оператора ротора, написано неправильно. Ротор от вектора перемещения надо ставить в скобках.

- На странице 49 после уравнения (2.60) на первой строке после слова «где» правая часть формулы неправильно написано и это не – оператор. Это – компоненты оператора, применённые к компонентам вектора перемещений.

- Там же на той же строке вторая формула так же не – оператор. Это – скалярный оператор, применённый потенциалу электрического поля.

- В асимптотическом анализе для задачи о клине в разделе 4.4. рассматриваются варианты только упрощенных прикладных теорий (теория Айфантиса, дилатационная теория, теория сред псевдокоссера), но не дается анализа решения в рамках общей пяти-параметрической изотропной теории упругости в формулировке Миндлина.

- В разделе, связанном с рассмотрением проблем механики трещин (4.3), проводится анализ известных экспериментальных данных только на основе градиентной теории упругости, но не дается сопоставления этого анализа с классическими моделями, например, линейно-упругой механики разрушения и др.

- В разделе 5.1 проводится построение градиентных теорий для пьезобалок Бернулли-Эйлера и вводятся неклассические результирующие, для которых желательно дать физическую трактовку.

Вместе с тем, указанные замечания и обнаруженные опечатки не снижают научной ценности и практической значимости результатов, полученных автором в диссертационной работе.

Диссертационная работа Соляева Юрия Олеговича по всем параметрам, в частности, по актуальности, научной новизне, степени достоверности и практической значимости отвечает всем требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертационной работы соответствует паспорту специальности 1.1.8 – «Механика деформируемого твердого тела» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней доктора наук в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Она оформлена, согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Соляев Юрий Олегович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.8 – «Механика деформируемого твердого тела».

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры Механики композитов
Механико-математического факультета

Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Московский государственный университет имени
М.В.Ломоносова»

Никабалзе Михаил Ушангиевич

Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Адрес места работы:

119234, г. Москва, Ленинские горы, 1,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Московский государственный университет имени
М.В. Ломоносова»
Тел.: 8 (495) 939-4343; e-mail: composite_msu@mail.ru

Подпись Никабадзе Михаила Ушангиевича заверяю:
Декан механико-математического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова д.ф.-м.н.,
член-корр. АН РФ, профессор

А.И. Шафаревич

