

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Физический факультет

На правах рукописи

Рыжиков Платон Сергеевич

**Энергия, импульс и угловой момент электромагнитного
поля в средах с нелокальным нелинейным оптическим
откликом**

1.3.19. Лазерная физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф-м. н., профессор
Макаров Владимир Анатольевич

Оглавление

Введение	4
1 Внутренняя симметрия тензоров нелокальной оптической восприимчивости	12
1.1 Внутренняя симметрия тензоров оптических восприимчивостей, связанных с различными моделями взаимодействия света с веществом: обзор литературы .	12
1.2 Внутренняя симметрия тензоров нелокальной нелинейной оптической восприимчивости для невырожденных по частоте процессов	16
1.3 Особенности внутренней симметрии тензоров нелокальной нелинейной оптической восприимчивости в вырожденных по частоте процессах	21
1.4 Проблема использования материальных уравнений в форме Ландау-Лифшица при описании неоднородных линейных сред, проявляющих нелокальность оптического отклика	29
1.5 Соотношения внутренней симметрии тензоров нелокальной нелинейной оптической восприимчивости в неоднородных средах	34
Основные результаты первой главы	38
2 Законы сохранения энергии и импульса электромагнитного поля в средах с нелокальностью нелинейного оптического отклика	39
2.1 Энергия и импульс электромагнитного поля в сплошных средах: обзор литературы	39
2.2 Тензор энергии-импульса электромагнитного поля при невырожденных по частотам нелинейных процессах в средах с нелокальностью оптического отклика	42
2.3 Учёт вырождения частот в нелинейных оптических процессах в компонентах тензора энергии-импульса электромагнитного поля в нелокальных средах . . .	51
2.4 Численная оценка долей нелинейных компонент энергии и импульса в процессе самофокусировки света в изотропной гиротропной среде	61
Основные результаты второй главы	65
3 Закон сохранения углового момента электромагнитного поля в средах с нелокальностью нелинейного оптического отклика	66
3.1 Влияние эффектов среды на угловой момент электромагнитного поля: обзор литературы	66
3.2 Плотность потока углового момента электромагнитного поля при невырожденных процессах в средах с нелокальностью нелинейного оптического отклика .	69

3.3	Учёт вырождения частот в нелинейных оптических процессах в выражении для плотности потока углового момента электромагнитного поля в нелокальных средах	78
3.4	Разделение углового момента электромагнитного поля в среде с нелокальностью нелинейного оптического отклика на внешнюю и внутреннюю составляющие	81
3.5	Численная оценка долей нелинейных компонент внутреннего углового момента света в процессе самофокусировки в изотропной гиротропной среде	87
	Основные результаты третьей главы	90
	Заключение	91
	Список используемых обозначений	93
	Литература	102

Введение

Законы сохранения играют определяющую роль при изучении различных физических систем [1]. Это обусловлено возможностью их применения для получения и проверки решений различных физических задач, а в случае некоторых фундаментальных законов сохранения — их тесной связью с симметрией изучаемой физической системы [2; 3]. Среди последних особое место занимают законы сохранения энергии, импульса и углового момента (момента импульса), связанные, соответственно, с симметриями физических систем относительно смещений во времени и пространстве и вращения относительно некоторой оси. В электродинамике каждый из этих законов сохранения имеет форму балансного уравнения, связывающего плотность одной из этих величин с соответствующей плотностью её потока, а также, при нарушении той или иной симметрии, включающее в себя неоднородность, определяющую изменение этих величин по мере распространения электромагнитного поля [4–10].

Решение различных задач, связанных с энергией, импульсом и угловым моментом электромагнитного поля имеет и важное практическое значение. Так, плотность энергии электромагнитного поля определяет его гамильтониан, используемый при квантовании поля в вакууме или в среде [11; 12], а интенсивность излучения, напрямую связанная с плотностью потока энергии, является основной характеристикой, используемой при детектировании поля [13]. Помимо этого, закон сохранения энергии накладывает ограничения на величины компонент тензоров оптических восприимчивостей и связь между ними [14; 15]. В свою очередь, импульс и поток импульса характеризуют механическое воздействие света [16; 17], а диагональные компоненты тензора плотности потока импульса могут использоваться в качестве альтернативы плотности энергии при построении квантового описания распространения света [18; 19]. Вопросы, связанные с угловым моментом света, представляют особый интерес в современной оптике. Это обусловлено большим разнообразием его возможных практических применений, среди которых выделяются задачи диагностики сред различного типа, передачи информации и оптического контроля микроскопических объектов [20–30]. Интерес к угловому моменту света связан также и с рядом физических величин, появление которых обусловлено различными симметриями уравнений Максвелла. В частности, эти величины включают обусловленную симметрией Хевисайда-Лармора спиральность, для которой спиновая составляющая углового момента имеет смысл плотности потока, и связанные с инвариантностью уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца величины, дополняющие плотность углового момента и плотность его потока [31–34].

Особый интерес представляет преобразование углового момента света при его распространении в гиротропных средах. Характерная для них оптическая активность проявляется в обусловленном пространственной дисперсией вращения эллипса поляризации электромагнитного излучения в процессе его распространения [16; 35], что свидетельствует о чувствительности гиротропных сред к связанной с поляризацией излучения спиновой составляющей углового момента. Развитие методов генерации излучения со сложной пространственной

структурой позволило также обнаружить чувствительность гиротропных сред к орбитальной составляющей углового момента [36], которая, как было показано ещё в [37], тесно связана с особенностями фазового профиля световых пучков.

Большинство нелинейных оптических эффектов в гиротропных средах экспериментально наблюдались и были теоретически описаны ещё в прошлом веке. Среди них наибольший интерес представляют нелинейная оптическая активность [38—47] и генерация второй гармоники [48—51]. Именно эти процессы в гиротропных средах связаны с наибольшими по величине нелинейными нелокальными оптическими восприимчивостями. Математическое описание распространения света в таких средах обязательно включает учет пространственной дисперсии [16; 35; 52], т.е. зависимость поляризации среды в каждой точке пространства от напряжённостей электрических полей взаимодействующих волн на различных частотах не только в ней, но и в некоторой области вокруг этой точки. В связи с этим в оптике гиротропных сред часто используются термины “среды с нелокальностью оптического отклика” или “нелокальные среды”. В общем случае такой метод описания оптического отклика использует интегральную связь поляризации среды с напряжённостью электрического поля, создаваемой распространяющимися волнами, однако во многих практически важных приложениях используется приближённая форма этой зависимости, когда поляризация среды представляется в виде ряда слагаемых, в состав которых входят компоненты векторов напряжённостей электрического поля и их пространственных производных на различных частотах [38; 40—45]. Обычно этот ряд ограничивают линейными по параметру пространственной дисперсии слагаемыми [53; 54].

Для корректного решения практических задач, связанных с энергией, импульсом и угловым моментом света, необходимо знать, каким образом эти величины изменяются при его распространении в средах с теми или иными особенностями оптического отклика. Аналитические выражения для этих величин хорошо известны для электромагнитного поля в вакууме и в линейных средах без дисперсии [4; 6; 16; 17; 55]. Учёт частотной дисперсии приводит к изменениям выражений для плотностей энергии, импульса и углового момента, однако не меняет существенным образом плотности потоков этих величин [5; 52]. Нелинейность оптического отклика преобразует все связанные со средой компоненты этих величин [19; 56; 57]. Вклад пространственной дисперсии в формулы для энергии, импульса и углового момента света изучен существенно меньше. В [5; 52; 58] было показано, что для пучков с узким пространственным спектром, распространяющихся в линейных средах с пространственной дисперсией, выражения для компонент плотностей энергии, импульса и углового момента не изменяются существенным образом по сравнению со средами, не обладающими пространственной дисперсией, а все изменения, связанные с нелокальностью оптического отклика, содержатся в выражениях для плотностей потоков этих величин. Закон сохранения энергии и входящие в него в выражения для плотности и плотности потока энергии света в наиболее часто используемом первом приближении по параметру пространственной дисперсии для линейных и нелинейных сред были рассмотрены в работах [59—62] при полном пренебрежении зависимостью линейных и нелинейных оптических восприимчивостей от частот распространяющихся в среде волн. Приведённые выше результаты очерчивают **степень разработанности** темы настоящей работы. При этом законы сохранения импульса и

углового момента электромагнитного поля в нелинейных средах с нелокальностью оптического отклика практически не изучены. Фундаментальная роль и практическая значимость величин, входящих в эти законы сохранения, позволяют говорить об **актуальности** темы настоящей работы.

Цели работы

1. Получение соотношений внутренней симметрии для компонент тензоров нелокальной нелинейной оптической восприимчивости четвертого и более высоких рангов, обеспечивающих выполнение в однородных и неоднородных непоглощающих средах произвольного класса пространственной симметрии законов сохранения энергии и импульса электромагнитного поля в случае как невырожденного по частотам, так и вырожденного нелинейного взаимодействия волн.
2. Нахождение явных аналитических выражений для плотностей и плотностей потоков энергии, импульса и углового момента электромагнитного поля в однородных непоглощающих средах произвольного класса пространственной симметрии, демонстрирующих нелокальность оптической нелинейности произвольного порядка в случае как невырожденного по частотам, так и вырожденного взаимодействия волн.
3. Исследование возможности разделения углового момента электромагнитного поля в непоглощающих однородных средах произвольного класса пространственной симметрии с нелокальностью нелинейного оптического отклика на орбитальную и спиновую составляющие.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются следующие из системы уравнений Максвелла балансные уравнения, связывающие плотности энергии, импульса и углового момента электромагнитного поля с плотностями потоков этих величин и отражающие фундаментальные законы сохранения, а также материальные уравнения, связывающие напряженности и индукции электрического и магнитного полей в нелинейных непоглощающих средах произвольного класса пространственной симметрии, обладающих нелокальностью нелинейного оптического отклика произвольного порядка. Предметом исследования являются особенности аналитических выражений для величин, входящих в отражающие законы сохранения энергии, импульса и углового момента балансные уравнения, которые появляются в результате учёта нелокальности нелинейного оптического отклика однородной непоглощающей среды произвольного класса пространственной симметрии.

Научная новизна полученных результатов

1. В первом приближении по параметру пространственной дисперсии получен полный набор соотношений внутренней симметрии для тензоров нелокальной нелинейной оптической восприимчивости четвертого и более высоких рангов в однородных и неодно-

родных непоглощающих средах любого класса пространственной симметрии в случае как невырожденного по частотам, так и вырожденного нелинейного взаимодействия волн.

2. Получены явные аналитические выражения для плотностей энергии, импульса и углового момента электромагнитного поля и плотностей потоков этих величин, обусловленные нелокальностью нелинейного оптического отклика произвольного порядка однородной непоглощающей среды любого класса пространственной симметрии.
3. Выполнена оценка доли слагаемых, связанных с локальным и нелокальным кубическим по полю оптическим откликом однородной непоглощающей изотропной гиротропной среды, в формулах для плотностей энергии, импульса, углового момента и плотностей потоков этих величин в случае самовоздействия в ней эллиптически поляризованного пучка гауссова типа.
4. Показана возможность разделения плотности и плотности потока углового момента электромагнитного поля в однородной непоглощающей среде произвольного класса пространственной симметрии с нелокальностью нелинейного оптического отклика произвольного порядка на орбитальную и спиновую составляющие и найдены аналитические выражения для этих величин.

Практическая значимость работы

Полученные в работе соотношения внутренней симметрии между компонентами тензора нелокальной нелинейной оптической восприимчивости произвольного порядка вместе с ограничениями, накладываемыми пространственной симметрией среды, позволяют выразить все компоненты этих тензоров через конечное число независимых компонент. Это принципиально для корректной записи в первом приближении по параметру пространственной дисперсии материального уравнения, связывающего поляризацию среды с напряжённостями электрических полей взаимодействующих волн и их первыми пространственными производными, необходимой для дальнейшего решения уравнений распространения. Найденные выражения для компонент плотностей и плотностей потоков энергии, импульса и углового момента электромагнитного поля, а также орбитальной и спиновой составляющих углового момента, не только необходимы для проверки корректности решения задач нелинейной оптики, но и дают возможность использовать законы сохранения энергии, импульса и углового момента для их эффективного решения. Развитые в диссертации методы получения связанных с нелокальностью оптического отклика добавок к классическим выражениям для энергии, импульса, углового момента и плотностей потоков этих величин в первом порядке по параметру пространственной дисперсии могут быть использованы для нахождения уточняющих их формул во втором и более высоких приближениях по этому параметру, а также для учета других оптических свойств среды.

Методология исследования

Соотношения внутренней симметрии между компонентами тензора нелокальной нелинейной оптической восприимчивости произвольного порядка и компоненты плотностей и плотностей потоков энергии, импульса и углового момента электромагнитного поля в непоглощающих средах различных классов пространственной симметрии получены как результат преобразования отражающих законы сохранения энергии, импульса и углового момента соотношений, следующих из уравнений Максвелла и материальных уравнений, записанных в форме Ландау-Лифшица, к виду балансных уравнений. При разделении плотности и плотности потока углового момента на орбитальную и спиновую составляющие используется представление напряжённости электрического поля и индукции магнитного поля через скалярный и векторный потенциалы. Для получения численных оценок связанных с кубической нелинейностью и ее нелокальностью компонент плотностей и плотностей потоков энергии, импульса и спиновой части углового момента при самовоздействии эллиптически поляризованного излучения в изотропной гиротропной непоглощающей среде использовалось параксиальное уравнение распространения, которое решалось методом прогонки.

Методология исследования также является основанием **достоверности** полученных результатов. Все основные результаты, представленные в диссертационной работе, прошли проверку во время рецензирования при публикации в рецензируемых журналах.

Положения, выносимые на защиту

I. Для однородных непоглощающих нелинейных сред произвольного класса пространственной симметрии, проявляющих нелокальность оптического отклика n -го порядка, в первом приближении по параметру пространственной дисперсии d/λ (d — масштаб проявления нелокальности оптического отклика, λ — длина волны) справедливы следующие утверждения:

1. Соотношения внутренней симметрии тензора нелокальной нелинейной оптической восприимчивости $n+2$ -го ранга, последний индекс которого связан с дифференцированием напряженности электрического поля по пространственным координатам, включают
 - симметрию по перестановке любых индексов, относящихся к электрическим полям на одинаковых частотах.
 - антисимметрию по перестановке первого и предпоследнего индексов с одновременной перестановкой первой и последней частот в последовательности частотных аргументов.
 - равенство нулю суммы соответственно деленных на произведение кратностей вырождения первой и последней частот в последовательностях частотных аргументов трех компонент этого тензора, связанных циклической перестановкой первого, последнего и находящегося между ними частотных аргументов, и такой же перестановкой индексов, соответствующих этим частотам.
2. Нелокальность нелинейного оптического отклика проявляется

- в формулах для плотностей энергии, импульса и углового момента электромагнитного поля в виде дополнительных слагаемых, содержащих пространственные производные напряженности электрического поля, в выражении для входящей в них поляризации среды.
- в формулах для компонент плотностей потоков энергии и импульса в виде новых слагаемых, содержащих компоненты тензора нелокальной оптической восприимчивости n -го порядка.
- в формулах для компонент плотности потока углового момента в виде двух новых групп слагаемых, первая из которых содержит явно зависящие от пространственных координат слагаемые, обусловленные спецификой выражения для плотности потока импульса в среде, демонстрирующей нелокальность нелинейного оптического отклика, а вторая состоит из явно независимых от пространственных координат слагаемых, не содержащих пространственных производных напряженности электрического поля.

3. Выражения для плотности и плотности потока углового момента электромагнитного поля могут быть представлены в виде трех групп слагаемых, первые две из которых являются соответственно орбитальной и спиновой составляющими этих величин, а интегральные вклады третьих групп слагаемых в формулы для полного углового момента и его потока равны нулю.

II. Отличительной чертой соотношений внутренней симметрии тензоров локальной нелинейной оптической восприимчивости $n + 1$ -го ранга и нелокальных нелинейных оптических восприимчивостей $n + p + 1$ -го ранга ($p = 1, 2, \dots$), описывающих пространственную дисперсию в p -ом приближении по параметру d/λ , в неоднородных непоглощающих средах произвольного класса пространственной симметрии является

- возникновение в соотношениях, связывающих компоненты тензора нелокальной линейной восприимчивости $p + 2$ -го ранга, пространственных производных от компонент тензоров нелокальных оптических восприимчивостей всех более высоких рангов, чем $p + 2$.
- возникновение в записанном в первом приближении по параметру пространственной дисперсии ($p = 1$) соотношении внутренней симметрии тензора локальной оптической восприимчивости, описывающего нелинейность n -го порядка, первых пространственных производных от компонент тензора нелокальной оптической восприимчивости того же порядка.

III. При самофокусировке эллиптически поляризованного гауссова пучка в непоглощающей однородной изотропной гиротропной среде, демонстрирующей кубическую нелинейность, максимальная величина обусловленных нелинейным откликом вещества компонент тензора энергии-импульса Минковского достигается в тех точках пространства, где поле пучка имеет линейную поляризацию, и может достигать десяти процентов от компонент тензора

энергии-импульса, связанных с локальным линейным оптическим откликом среды, в тех точках среды, где его интенсивность в пятьдесят раз превышает максимальную интенсивность в падающем пучке. Нелокальность оптического отклика среды приводит к ненулевому значению спиновых составляющих плотности углового момента и плотности его потока в тех точках пространства, где пучок поляризован линейно.

Апробация работы и публикации по теме диссертации

Результаты работы опубликованы в 8 статьях в рецензируемых международных научных журналах [63—70] и доложены на следующих конференциях:

1. 20th International Conference Laser Optics ICLO 2022, доклад “Energy and momentum of electromagnetic field in media with nonlocality of nonlinear optical response”
2. XII международная конференция по фотонике и информационной оптике (2023), доклад “Влияние нелокальности нелинейного оптического отклика среды на поток углового момента распространяющегося излучения”
3. 21st International Conference Laser Optics ICLO 2024, доклад “Nonlinear components of energy, momentum and angular momentum of Gaussian beams in self-focusing in isotropic gyrotropic media”

Личный вклад автора

Результаты диссертации получены автором лично. Работа выполнена под руководством доктора физико-математических наук профессора В.А. Макарова, с которым определялось направление исследований и проводилось обсуждение полученных результатов. На всех этапах работы научную консультацию автору оказывал кандидат физико-математических наук К.С. Григорьев. Численное исследование самовоздействия эллиптически поляризованного гауссова пучка в изотропной гиротропной среде реализовано автором на основе работ, ранее выполненных доктором физико-математических наук В.А. Макаровым и кандидатами физико-математических наук К.С. Григорьевым и Н.А. Пановым.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка используемых обозначений и списка литературы. Объём работы составляет 102 страницы, в том числе 3 рисунка. Главы разбиты на параграфы. Первый параграф каждой главы содержит краткий обзор литературы по теме главы. Остальные параграфы содержат оригинальные результаты. В конце каждой главы в сжатой форме приводятся основные результаты изложенных в ней исследований.

Первая глава посвящена выводу соотношений внутренней симметрии тензоров нелокальной оптической восприимчивости четвертого и более высоких рангов, обеспечивающих выполнение законов сохранения энергии и импульса электромагнитного поля в непоглощающих средах произвольной пространственной симметрии. В параграфе 1.2 получен полный

набор соотношений внутренней симметрии этого тензора в однородной среде при отсутствии вырождения частот в нелинейном оптическом процессе, описываемом этим тензором. В параграфе 1.3 эти соотношения обобщены для тензоров, описывающих вырожденное по частотам нелинейное взаимодействие волн. Задачей параграфа 1.4 является обоснование применимости материальных уравнений в форме Ландау-Лифшица для описания неоднородных линейных сред с нелокальностью оптического отклика при корректном выводе соотношений внутренней симметрии соответствующих тензоров локальной и нелокальных оптических восприимчивостей. Последний параграф главы обобщает полученные в 1.3 соотношения внутренней симметрии тензора нелокальной нелинейной оптической восприимчивости на случай неоднородных нелинейных сред.

Во **второй главе** полученные соотношения внутренней симметрии используются для получения аналитических выражений для компонент плотностей и плотностей потоков энергии и импульса электромагнитного поля в непоглощающих средах различных классов пространственной симметрии, обладающих нелокальностью нелинейного оптического отклика произвольного порядка. В параграфе 2.2 формулы для этих компонент выведены для нелинейных оптических процессов, в которых участвуют волны с различными частотами. В параграфе 2.3 произведен учёт вырождения частот взаимодействующих волн в выражениях для компонент плотностей и плотностей потоков энергии и импульса электромагнитного поля. Численная оценка влияния полученных компонент на самовоздействие эллиптически поляризованного излучения в изотропной гиротропной непоглощающей среде с пространственной дисперсией кубической нелинейности проведена в параграфе 2.4.

Задачей **третьей главы** является нахождение аналитических выражений для компонент плотности и плотности потока углового момента электромагнитного поля в непоглощающих однородных средах различных классов пространственной симметрии, демонстрирующих нелокальность нелинейного оптического отклика произвольного порядка. В параграфе 3.2 эти величины получены на основе выведенных в параграфе 2.2 второй главы плотностей импульса и его потока для нелинейных оптических процессов, в которых частоты взаимодействующих волн различны. Учёт возможного равенства частот этих волн на формулы для компонент плотности и плотности потока углового момента электромагнитного поля выполнен в параграфе 3.3. В параграфе 3.4 показана возможность разделения плотности и плотности потока углового момента электромагнитного поля в средах с нелокальностью нелинейного оптического отклика на орбитальную и спиновую составляющие и получены формулы для них. Численная оценка влияния добавок к плотности и плотности потока спиновой составляющей углового момента на самовоздействие эллиптически поляризованного излучения в изотропной гиротропной среде выполнена в параграфе 3.5.

Список обозначений содержит основные обозначения, используемые в работе. В рамках каждой главы или параграфа могут использоваться дополнительные обозначения.

Глава 1

Внутренняя симметрия тензоров нелокальной оптической восприимчивости

§ 1.1 Внутренняя симметрия тензоров оптических восприимчивостей, связанных с различными моделями взаимодействия света с веществом: обзор литературы

Решение любой задачи электродинамики начинается с системы уравнений Максвелла для напряжённостей и индукций электрического и магнитного полей. Эта система является недоопределённой, и для возможности её решения требуются дополнительные уравнения, устанавливающие связи между этими полями. Наиболее распространёнными в литературе являются два подхода к записи материальных уравнений. В первом подходе, известном как симметричный подход или подход Казимира, материальные уравнения записываются в такой форме, при которой зависимость индукции электрического поля от напряжённости электрического поля и индукции магнитного поля от напряжённости магнитного поля имеют формально одинаковый вид [35; 71]. Отличие между этими двумя зависимостями заключается только в величинах компонент тензоров, связывающих эти величины. Другой подход, известный как подход Ландау-Лифшица, предполагает, что напряжённость магнитного поля равна индукции магнитного поля, а индукция электрического поля зависит только от напряжённости электрического поля [16; 52]. Подход Ландау-Лифшица можно рассматривать как самостоятельный феноменологический подход, при котором связь между индукцией электрического поля и его напряжённостью обусловлена принципом причинности и является существенно нелокальной. С другой стороны, уравнения Максвелла позволяют выполнить такое преобразование индукции электрического поля и напряжённости магнитного поля, с помощью которого материальные уравнения в форме Казимира преобразуются к форме Ландау-Лифшица [35; 71; 72].

Далее в этой работе мы будем использовать только материальные уравнения в форме Ландау-Лифшица. Именно эта форма материальных уравнений часто используется в задачах оптики сред, обладающих нелокальностью оптического отклика [16; 52; 53; 73], и в нелинейной оптике [15; 53; 54; 72; 74; 75], поскольку позволяет ограничиться решением мень-

шего числа уравнений. На практике обычно используют упрощённую форму материальных уравнений Ландау-Лифшица, описывающую связь спектральной компоненты поляризации среды на частоте ω со спектральными компонентами напряжённости электрического поля и их пространственными производными [15; 38; 74–81]. Простейший пример такого материального уравнения в нелинейной оптике — это материальное уравнение для нелинейной поляризации среды, обладающей нелинейностью второго порядка:

$$P_i(\omega_1 + \omega_2) = \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) E_j(\omega_1) E_k(\omega_2) + \gamma_{ijkl}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) E_j(\omega_1) \partial_l E_k(\omega_2) + \gamma_{ikjl}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2; \omega_2, \omega_1) E_k(\omega_2) \partial_l E_j(\omega_1), \quad (1.1)$$

где тензоры $\hat{\chi}^{(2)}$ и $\hat{\gamma}^{(2)}$ называются тензорами локальной и нелокальной квадратичной восприимчивости соответственно. Величины компонент тензоров оптических восприимчивостей зависят от порядка частотных аргументов, однако число независимых компонент существенно сокращается, когда учитываются определённые требования, которым должны удовлетворять эти тензоры. Классификацию этих требований можно найти, например, в [74].

Во-первых, как электрическое поле, так и поляризация среды являются действительными величинами. Это означает, что спектральные компоненты каждого из этих полей подчиняются условию $\mathbf{E}(-\omega) = \mathbf{E}^*(\omega)$. Следствием этого условия является связь компонент тензоров оптических восприимчивостей:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_1 - \omega_2; -\omega_1, -\omega_2) = \chi_{ijk}^{(2)*}(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2), \quad (1.2)$$

$$\gamma_{ijkl}^{(2)}(-\omega_1 - \omega_2; -\omega_1, -\omega_2) = \gamma_{ijkl}^{(2)*}(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2). \quad (1.3)$$

Эти соотношения легко обобщаются для тензоров нелинейных оптических восприимчивостей более высоких порядков.

Во-вторых, симметрия тензоров оптических восприимчивостей должна отражать симметрию среды. Если среда инвариантна относительно некоторого преобразования симметрии, то все тензоры оптических восприимчивостей среды также должны быть инвариантны относительно этого преобразования. Эта свойство симметрии тензоров оптических восприимчивостей называется пространственной симметрией, и подробно рассмотрено в [82]. В качестве примера можно привести вид тензоров $\hat{\chi}^{(2)}$ и $\hat{\gamma}^{(2)}$ в изотропной гиротропной среде:

$$\chi_{ijk}^{(2)} = \chi^{(2)} e_{ijk}, \quad (1.4)$$

$$\gamma_{ijkl}^{(2)} = \gamma_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \gamma_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma_3 \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (1.5)$$

где e_{ijk} — символ Леви-Чивиты, δ_{ij} — символ Кронекера, $\chi^{(2)}$ и $\gamma_{1,2,3}$ — единственные ненулевые компоненты тензоров локальной и нелокальной квадратичной восприимчивости в изотропной гиротропной среде.

В-третьих, определённые перестановки частот и индексов тензоров нелинейных оптических восприимчивостей оставляют поляризацию среды неизменной. Так, замена в (1.1) $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2)$ на $\chi_{ikj}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2; \omega_2, \omega_1)$ оставляет это материальное уравнение неизменным, поскольку сумма, связанная с этим тензором, не меняется при такой замене. Эта симметрия в литературе называется внутренней перестановочной симметрией (или иногда просто внутренней симметрией) [15; 74]. Некоторые авторы [15] также относят к внутренней симметрии

перестановочные соотношения, возникающие как требование выполнения закона сохранения энергии. Эти соотношения связывают между собой компоненты тензоров оптических восприимчивостей, отличающиеся первым индексом и частотным аргументом. Простейший пример такого соотношения имеет вид:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) = \chi_{jki}^{(2)}(-\omega_1; \omega_2, -\omega_1 - \omega_2). \quad (1.6)$$

Здесь используется нотация, согласно которой при перестановке первого частотного аргумента меняется его знак [15; 74; 75]. Отдельно стоит отметить соотношения внутренней симметрии тензоров нелинейных оптических восприимчивостей, среди частотных аргументов которых есть одинаковые. Для таких тензоров, описывающих вырожденные по частотам нелинейные процессы, существует два различных описания внутренней симметрии. Первое из них, непосредственно полученное из закона сохранения энергии, имеет вид [15]:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(2\omega; \omega, \omega) = \frac{1}{2} \chi_{jki}^{(2)}(-\omega; \omega, -2\omega). \quad (1.7)$$

С другой стороны, в [16] на основании предельного перехода от невырожденного по частотам процесса к вырожденному приводится соотношение:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(2\omega; \omega, \omega) = \chi_{jki}^{(2)}(-\omega; \omega, -2\omega). \quad (1.8)$$

Далее в этой главе мы рассмотрим это противоречие и покажем, в каких случаях используется тот или иной результат.

Основным предметом настоящей главы является именно внутренняя перестановочная симметрия тензоров нелокальной нелинейной оптической восприимчивости, связанная с требованиями выполнения законов сохранения энергии. Отметим, что перестановочная симметрия этих тензоров, включающая в себя перестановку первого индекса ранее изучалась в ряде работ [53; 83; 84]. В работе [83] были получены соотношения внутренней симметрии тензора нелокальной квадратичной восприимчивости в следующей форме:

$$\begin{aligned} &\gamma_{ijkl}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) + \gamma_{jkil}^{(2)}(-\omega_1; \omega_2, -\omega_1 - \omega_2) + \\ &+ \gamma_{kijl}^{(2)}(-\omega_2; -\omega_1 - \omega_2, \omega_1) = 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Отметим, что автор указанной работы использовал материальные уравнения не в форме Ландау-Лифшица, а явным образом представлял поляризацию и намагниченность среды через мультипольные компоненты. Помимо этого, соотношения (1.9) были получены только для невырожденных по частоте процессов. В работе [84] были рассмотрены материальные уравнения для гиротропных сред, обладающих нелинейностью произвольного порядка. В отсутствие частотной дисперсии для компонент тензоров нелокальной оптической восприимчивости n -го порядка нелинейности было получено следующее соотношение:

$$\gamma_{ii_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n k}^{(n)} = -\gamma_{i_n i_1 i_2 \dots i_{n-1} i k}^{(n)}. \quad (1.10)$$

Подчеркнём, что здесь отсутствует зависимость компонент тензора $\hat{\gamma}$ от частот взаимодействующих волн, что соответствует приближению Клейнмана [85]. Соотношение (1.10) также

может быть рассмотрено как обобщение хорошо известного в линейной оптике сред с пространственной дисперсией соотношения $\gamma_{ijk}^{(1)}(\omega) = -\gamma_{jik}^{(1)*}(\omega)$ [16]. Наконец, в работе [53] было получено ещё одно соотношение симметрии тензоров нелокальной нелинейной оптической восприимчивости произвольного порядка нелинейности:

$$\begin{aligned} & \gamma_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n k}^{(n)}(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n-1} + \omega_n; \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n) + \\ & + \gamma_{i_n i_1 i_2 \dots i_{n-1} k}^{(n)}(-\omega_n; -\omega_1 - \omega_2 - \dots - \omega_{n-1} - \omega_n, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}) + \\ & + \dots + \\ & + \gamma_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n k}^{(n)}(-\omega_1; \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n, -\omega_1 - \omega_2 - \dots - \omega_{n-1} - \omega_n) = 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

то есть сумма всех компонент тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$ с циклически переставленными частотами и индексами равна нулю. В частном случае квадратичной среды $n = 2$ (1.11) совпадает с (1.9), причём, как было сказано ранее, (1.9) было получено из материальных уравнений, явным образом разделяющих вклады различных мультиполей в поляризацию и намагниченность среды, тогда как (1.11) было получено из материальных уравнений в форме Ландау-Лифшица.

Использование материальных уравнений в форме Ландау-Лифшица для описания распространения электромагнитного поля в средах с нелокальностью оптического отклика сопряжено с проблемами при описании неоднородных сред и прохождения света через границу раздела сред. Уже в линейной оптике при рассмотрении этих задач в предположении, что материальные уравнения отличаются только зависимостью материальных тензоров от координат, нарушается закон сохранения энергии. Для линейных неоднородных сред, обладающих нелокальностью оптического отклика, в ряде работ [52; 59; 86–88] было показано, что чтобы в этих задачах выполнялся закон сохранения энергии, в материальное уравнение для поляризации среды необходимо добавить дополнительное слагаемое, в результате чего поляризация среды выражается следующим образом:

$$P_i^{(1)}(\omega) = \chi_{ij}^{(1)}(\omega) E_j(\omega) + \gamma_{ijk}^{(1)}(\omega) \partial_k E_j(\omega) + \frac{1}{2} E_j(\omega) \partial_k \gamma_{ijk}^{(1)}(\omega). \quad (1.12)$$

Третье слагаемое в этом выражении отлично от нуля только если среда является неоднородной. Как справедливо отмечено в [71], введение этого нового слагаемого носит только оправдательный характер. Оно вводится в это материальное уравнение искусственным образом, чтобы закон сохранения энергии в неоднородных средах с нелокальностью оптического отклика выполнялся, однако оно не следует из исходных интегральных соотношений, описывающих поляризацию среды. Некоторые авторы [62] также распространяют этот подход на случай прохождения света через границу однородной линейной среды, обладающей нелокальностью оптического отклика, считая эту задачу предельным случаем задачи о распространении поля в неоднородной среде. При таком подходе третье слагаемое материального уравнения (1.12) имеет вид дельта-функции, и в уравнениях Максвелла может рассматриваться как плотность поверхностных зарядов и токов. Возникновение в уравнениях Максвелла с материальными уравнениями в форме Ландау-Лифшица поверхностных токов на границе среды с нелокальным оптическим откликом также может быть получена и из физических соображений как результат учёта приповерхностного слоя, имеющего малую конечную толщину [52; 73].

§ 1.2 Внутренняя симметрия тензоров нелокальной нелинейной оптической восприимчивости для невырожденных по частоте процессов

Пусть в однородной среде, обладающей нелинейностью n -го порядка, распространяются $n + 1$ волн с различными частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \omega_{n+1}$, связанными соотношением $\omega_{n+1} = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$. При использовании материальных уравнений в форме Ландау-Лифшица фурье-гармоника обобщенной поляризации $\mathbf{P}^{(n)}(\omega_{n+1}, \mathbf{r})$ на частоте ω_{n+1} в точке, задаваемой радиус-вектором $\mathbf{r} = (x, y, z)$, определяется значениями в близлежащих к ней точках фурье-гармоник напряжённостей электрических полей $\mathbf{E}(\omega_l, \mathbf{r}_l)$ волн на остальных взаимодействующих частотах:

$$P_i^{(n)}(\omega_{n+1}, \mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_n \tilde{\chi}_{ii_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{r} - \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \times \\ \times E_{i_1}(\omega_1, \mathbf{r}_1) E_{i_2}(\omega_2, \mathbf{r}_2) \dots E_{i_n}(\omega_n, \mathbf{r}_n). \quad (1.13)$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам i_1, i_2, \dots, i_n , принимающим значения x, y и z , производится суммирование. Интегрирование в (1.13) по пространственным координатам x_l, y_l, z_l осуществляется в бесконечных пределах, поскольку реально в интегралы вносит вклад небольшая область пространства с линейными размерами порядка d .

Разложим $E_{i_l}(\omega_l, \mathbf{r}_l)$ в ряд Тейлора и ограничимся линейными по параметру d/λ , где $\lambda = 2\pi c/\min(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \omega_{n+1})$, слагаемыми:

$$E_{i_l}(\omega_l, \mathbf{r}_l) \approx E_{i_l}(\omega_l, \mathbf{r}) + (\mathbf{r}_l - \mathbf{r})_m \partial_m E_{i_l}(\omega_l, \mathbf{r}). \quad (1.14)$$

В (1.14) и далее по дважды встречающемуся индексу m принимающему значения x, y, z , производится суммирование. Подставляя (1.14) в (1.13), получаем:

$$P_i^{(n)}(\omega, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[P_i^{(n,loc)}(\omega, \mathbf{r}) + P_i^{(n,nloc)}(\omega, \mathbf{r}) \right], \quad (1.15)$$

где

$$P_i^{(n,loc)}(\omega_{n+1}, \mathbf{r}) = \chi_{ii_1}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^n) \prod_{p=1}^n E_{i_p}(\omega_p, \mathbf{r}), \quad (1.16)$$

а

$$P_i^{(n,nloc)}(\omega_{n+1}, \mathbf{r}) = \sum_{k=1}^n \gamma_{ii_1^{k-1} i_{k+1} i_k m}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{k-1}, \bar{\omega}_{k+1}^n, \omega_k) \times \\ \times \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n E_{i_p}(\omega_p, \mathbf{r}) \right) \partial_m E_{i_k}(\omega_k, \mathbf{r}). \quad (1.17)$$

Здесь $\bar{\omega}_l^m$ — упорядоченное множество частот $\omega_l, \omega_{l+1}, \dots, \omega_{m-1}, \omega_m, i_l^m$ — упорядоченное множество индексов $i_l i_{l+1} \dots i_{m-1} i_m$. При $l < m$ множества $\bar{\omega}_l^m$ и i_l^m являются пустыми, а при

$l = m$ состоят из одного элемента. Использование этих множеств позволяет существенно упростить громоздкие выражения, которые далее будут рассматриваться в данной работе.

Входящие в (1.16), (1.17) локальные ($\chi_{ii_1^n}^{(n)}$) и нелокальные ($\gamma_{ii_1^n m}^{(n)}$) нелинейные восприимчивости связаны с тензором $\tilde{\chi}_{ii_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}$ соотношениями:

$$\begin{aligned} \chi_{ii_1^n}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^n) &= \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_n \times \\ &\times \tilde{\chi}_{ii_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{r} - \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r} - \mathbf{r}_n), \\ \gamma_{ii_1^n m}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^n) &= \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_n (\mathbf{r}_l - \mathbf{r})_m \times \\ &\times \tilde{\chi}_{ii_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{r} - \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r} - \mathbf{r}_n). \end{aligned} \quad (1.18)$$

В однородных средах любого класса симметрии тензор $\chi_{ii_1^n}^{(n)}$ симметричен по перестановке любых индексов из $i_1 i_2 \dots i_n$, сопровождающейся соответствующей им перестановкой частот ω_l . Тензор нелокальной восприимчивости $\gamma_{ii_1^n m}^{(n)}$ симметричен по перестановке индексов $i_1 i_2 \dots i_{n-1}$ при соответствующей перестановке частот:

$$\begin{aligned} \chi_{ii_1^{p-1} i_p i_{p+1}^{q-1} i_q i_{q+1}^n}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{p-1}, \omega_p, \bar{\omega}_{p+1}^{q-1}, \omega_q, \bar{\omega}_{q+1}^n) &= \\ = \chi_{ii_1^{p-1} i_q i_{p+1}^{q-1} i_p i_{q+1}^n}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{p-1}, \omega_q, \bar{\omega}_{p+1}^{q-1}, \omega_p, \bar{\omega}_{q+1}^n), \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{ii_1^{p-1} i_p i_{p+1}^{q-1} i_q i_{q+1}^n m}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{p-1}, \omega_p, \bar{\omega}_{p+1}^{q-1}, \omega_q, \bar{\omega}_{q+1}^n) &= \\ = \gamma_{ii_1^{p-1} i_q i_{p+1}^{q-1} i_p i_{q+1}^n m}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{p-1}, \omega_q, \bar{\omega}_{p+1}^{q-1}, \omega_p, \bar{\omega}_{q+1}^n). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Будем называть среду непоглощающей, если она прозрачна на частотах взаимодействующих волн $\omega_1, \dots, \omega_{n+1}$ и также отсутствуют многофотонные резонансы на всех комбинациях этих частот. Если среда является непоглощающей, существуют дополнительные перестановочные соотношения между компонентами тензоров локальных и нелокальных восприимчивостей. В этом случае среднее по времени изменение энергии электромагнитного поля должно быть равно нулю. Последнее требует выполнения непосредственно следующих из уравнений Максвелла равенств [14; 16; 74]:

$$\int \sum_{k=1}^{n+1} \omega_k \text{Im} \left[E_i^*(\omega_k) P_i^{(n,loc)}(\omega_k) \right] dx dy dz = 0, \quad (1.21)$$

$$\int \sum_{k=1}^{n+1} \omega_k \text{Im} \left[E_i^*(\omega_k) P_i^{(n,nloc)}(\omega_k) \right] dx dy dz = 0. \quad (1.22)$$

Здесь и далее опущена явная зависимость компонент поляризации среды и напряжённости электрического поля от координаты.

Запишем входящие в (1.21) и (1.22) выражения для компонент поляризации среды $P_i^{(n,loc)}(\omega_l, \mathbf{r})$ и $P_i^{(n,nloc)}(\omega_l, \mathbf{r})$ (выражения для $P_i^{(n,loc)}(\omega_{n+1}, \mathbf{r})$ и $P_i^{(n,nloc)}(\omega_{n+1}, \mathbf{r})$ задаются формулами (1.16) и (1.17)):

$$P_i^{(n,loc)}(\omega_l) = \chi_{ii_1^{l-1} i_{l+1}^n i_{n+1}}^{(n)*}(-\omega_l; \bar{\omega}_1^{l-1}, \bar{\omega}_{l+1}^n, -\omega_{n+1}) \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq l}}^n E_{i_p}^*(\omega_p) \right) E_{i_{n+1}}(\omega_{n+1}), \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned}
P_i^{(n, nloc)}(\omega_l) &= \gamma_{i_1^{l-1} i_{l+1}^{n+1} m}^{(n)*}(-\omega_l; \bar{\omega}_1^{l-1}, \bar{\omega}_{l+1}^n, -\omega_{n+1}) \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq l}}^n E_{i_p}^*(\omega_p) \right) \partial_m E_{i_{n+1}}(\omega_{n+1}) + \\
&+ \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq l}}^n \gamma_{i_{n+1} i_1^{\min(l,s)-1} i_{\min(l,s)+1}^{n \max(l,s)-1} i_{\max(l,s)+1}^n i_s m}^{(n)*} \left(-\omega_l; -\omega_{n+1}, \bar{\omega}_1^{\min(l,s)-1}, \bar{\omega}_{\min(l,s)+1}^{\max(l,s)-1}, \bar{\omega}_{\max(l,s)+1}^n, \omega_s \right) \times \\
&\times E_{i_{n+1}}(\omega_{n+1}) \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq l, s}}^n E_{i_p}^*(\omega_p) \right) \partial_m E_{i_s}^*(\omega_s), \tag{1.24}
\end{aligned}$$

где $l = 1, 2, \dots, n$. После подстановки (1.16) и (1.23) в (1.21) и рационализации полученного выражения с учетом соотношений (1.19) и (1.2) обновленная формула (1.21) принимает вид:

$$\begin{aligned}
&\int dx dy dz \left\{ \sum_{l=1}^n \omega_l \left[\chi_{i_{n+1} i_1^n}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^n) - \chi_{i_1^{l-1} i_{l+1}^n i_{n+1}}^{(n)}(-\omega_l; \bar{\omega}_1^{l-1}, \bar{\omega}_{l+1}^n, -\omega_{n+1}) \right] \right\} \times \\
&\times E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) \prod_{p=1}^n E_{i_p}(\omega_p) = 0. \tag{1.25}
\end{aligned}$$

Равенство (1.25) должно выполняться при произвольном выборе независимых частот $\omega_{1,2,\dots,n}$ и любых фазах электрических полей взаимодействующих в нелинейной среде волн. Это возможно, если каждая из n квадратных скобок в (1.25) равна нулю, т.е. имеет место равенство:

$$\begin{aligned}
\chi_{i_{n+1} i_1^n}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^n) &= \chi_{i_1 i_2^n i_{n+1}}^{(n)}(-\omega_1; \bar{\omega}_2^n, -\omega_{n+1}) = \chi_{i_2 i_3^n i_{n+1} i_1}^{(n)}(-\omega_2; \bar{\omega}_3^n, -\omega_{n+1}, \omega_1) = \\
&= \chi_{i_3 i_4^n i_{n+1} i_1^2}^{(n)}(-\omega_3; \bar{\omega}_4^n, -\omega_{n+1}, \bar{\omega}_1^2) = \dots = \chi_{i_n i_{n+1} i_1^{n-1}}^{(n)}(-\omega_n; -\omega_{n+1}, \bar{\omega}_1^{n-1}). \tag{1.26}
\end{aligned}$$

Формула (1.26) является хорошо известным в нелинейной оптике свойством тензора локальной нелинейной оптической восприимчивости [15; 74; 75].

Проделаем аналогичные операции с равенством (1.22) с целью нахождения необходимых условий его выполнения. Подставим в него (1.17) и (1.24) и возьмем по частям n интегралов, содержащих $\partial_m E_{i_{n+1}}^*(-\omega_{n+1})$, учитывая, что на бесконечности напряженности электрических полей обращаются в нуль. Далее проведем рационализацию полученного выражения с учетом

формул (1.20) и (1.3). В итоге равенство (1.22) примет вид:

$$\begin{aligned}
& \int dx dy dz \left\{ \sum_{l=1}^n \omega_l \left[\gamma_{i_{n+1} i_1^{l-1} i_{l+1}^n i_{lm}}^{(n)} (\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{l-1}, \bar{\omega}_{l+1}^n, \omega_l) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \gamma_{i_l i_1^{l-1} i_{l+1}^n i_{n+1m}}^{(n)} (-\omega_l; \bar{\omega}_1^{l-1}, \bar{\omega}_{l+1}^n, -\omega_{n+1}) \right] E_{i_{n+1}}^* (\omega_{n+1}) \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq l}}^n E_{i_p} (\omega_p) \right) \partial_m E_{i_l} (\omega_l) + \right. \\
& \left. + \sum_{l=1}^n \left\{ \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq l}}^n \omega_s \left[\gamma_{i_{n+1} i_1^{l-1} i_{l+1}^n i_{lm}}^{(n)} (\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{l-1}, \bar{\omega}_{l+1}^n, \omega_l) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \gamma_{i_s i_l i_1^{\min(l,s)-1} i_{\min(l,s)+1}^{\max(l,s)-1} i_{\max(l,s)+1}^n i_{n+1m}} \left(-\omega_s; \omega_l, \bar{\omega}_1^{\min(l,s)-1}, \bar{\omega}_{\min(l,s)+1}^{\max(l,s)-1}, \bar{\omega}_{\max(l,s)+1}^n, -\omega_{n+1} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \gamma_{i_s i_{n+1} i_1^{\min(l,s)-1} i_{\min(l,s)+1}^{\max(l,s)-1} i_{\max(l,s)+1}^n i_{lm}} \left(-\omega_s; -\omega_{n+1}, \bar{\omega}_1^{\min(l,s)-1}, \bar{\omega}_{\min(l,s)+1}^{\max(l,s)-1}, \bar{\omega}_{\max(l,s)+1}^n, \omega_l \right) \right] \right\} \times \\
& \left. \times E_{i_{n+1}}^* (\omega_{n+1}) \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq l}}^n E_{i_p} (\omega_p) \right) \partial_m E_{i_n} (\omega_l) \right\} = 0. \tag{1.27}
\end{aligned}$$

Равенство (1.27), также как и (1.25), должно выполняться при произвольном выборе независимых частот $\omega_{1,2,\dots,n}$ и любых фазах электрических полей взаимодействующих в нелинейной среде волн. Это возможно, только если все n^2 квадратных скобок в (1.27) равны нулю. Из этих равенств n соотношений (квадратные скобки в первой сумме в (1.27)) устанавливаются прямую связь между двумя компонентами тензора нелокальной оптической восприимчивости:

$$\gamma_{i_{n+1} i_1^{l-1} i_{l+1}^n i_{lm}}^{(n)} (\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{l-1}, \bar{\omega}_{l+1}^n, \omega_l) = -\gamma_{i_l i_1^{l-1} i_{l+1}^n i_{n+1m}}^{(n)} (-\omega_l; \bar{\omega}_1^{l-1}, \bar{\omega}_{l+1}^n, -\omega_{n+1}). \tag{1.28}$$

Здесь переставляются местами первый и предпоследний индексы, соответствующие им частоты, а также меняется знак последних и знак перед компонентой тензора. Остальные $n-1$ частот и соответствующие им индексы остаются на своих местах. В отсутствие частотной дисперсии соотношение (1.28) совпадает с соотношением, полученным в [84]. Соотношение (1.28) при конкретном значении $l = \tilde{l}$ ($l = 1, 2, \dots, n$) может быть получено из любой аналогичной формулы, записанной при $l \neq \tilde{l}$, в результате циклического переопределения частот и соответствующего ему одновременного переопределения индексов.

Оставшиеся $n^2 - n$ равенств, зануляющих квадратные скобки в (1.27), обладают таким же свойством. Каждое из них связывает по три компоненты тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$, имеющих сильно отличающиеся друг от друга последовательности индексов и соответствующих им частотных аргументов. Любое из этих $n^2 - n$ соотношений может также быть получено из любого из оставшихся при помощи циклического переопределения частот и соответствующих им индексов с учетом формул (1.20) и (1.3). Каждое из $n^2 - n$ равенств в результате такого

преобразования и использования (1.28), сводится к соотношению:

$$\begin{aligned} & \gamma_{i_{n+1}i_1^{l-1}i_{l+1}^{n-1}i_nm}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{l-1}, \omega_l, \bar{\omega}_{l+1}^{n-1}, \omega_n) + \\ & + \gamma_{i_l^{l-1}i_n i_{l+1}^{n-1}i_{n+1}m}^{(n)}(-\omega_l; \bar{\omega}_1^{l-1}, \omega_n, \bar{\omega}_{l+1}^{n-1}, -\omega_{n+1}) + \\ & + \gamma_{i_n i_1^{l-1}i_{n+1}i_{l+1}^{n-1}i_m}^{(n)}(-\omega_n; \bar{\omega}_1^{l-1}, -\omega_{n+1}, \bar{\omega}_{l+1}^{n-1}, \omega_l) = 0, \end{aligned} \quad (1.29)$$

в котором циклически переставляются первый, предпоследний и любой другой индекс i_l из i_1, i_2, \dots, i_{n-1} с соответствующей перестановкой частотных аргументов.

Запишем (1.29) в практически важных случаях $n = 2$:

$$\gamma_{ii_2m}^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) + \gamma_{i_1i_2im}^{(2)}(-\omega_1; \omega_2, -\omega_3) + \gamma_{i_2ii_1m}^{(2)}(-\omega_2; -\omega_3, \omega_1) = 0, \quad (1.30)$$

и $n = 3$:

$$\begin{aligned} & \gamma_{ii_1i_2i_3m}^{(3)}(\omega_4; \omega_1, \omega_2, \omega_3) + \gamma_{i_1i_3i_2im}^{(3)}(-\omega_1; \omega_3, \omega_2, -\omega_4) + \\ & + \gamma_{i_3i_2i_1m}^{(3)}(-\omega_3; -\omega_4, \omega_2, \omega_1) = 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} & \gamma_{ii_1i_2i_3m}^{(3)}(\omega_4; \omega_1, \omega_2, \omega_3) + \gamma_{i_2i_1i_3im}^{(3)}(-\omega_2; \omega_1, \omega_3, -\omega_4) + \\ & + \gamma_{i_3i_1ii_2m}^{(3)}(-\omega_3; \omega_1, -\omega_4, \omega_2) = 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

В равенстве (1.31) остаются на своих местах частота ω_2 и индекс i_2 , а в (1.32) частота ω_1 и индекс i_1 . Равенство (1.30) совпадает с приведённым в [53; 83] для сред с нелокальной квадратичной нелинейностью.

Подчеркнем, что полученные равенства (1.28) и (1.29), связывающие компоненты тензора $\gamma_{ii_1i_2\dots i_nm}^{(n)}(\omega_{n+1}; \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, являются значительно более информативными и полезными для практических приложений, чем приведенное в работе [53] соотношение:

$$\begin{aligned} & \gamma_{ii_1i_2\dots i_nm}^{(n)}(\omega_{n+1}; \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n) + \\ & + \gamma_{i_1i_2\dots i_nim}^{(n)}(-\omega_1; \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n, -\omega_{n+1}) + \\ & + \gamma_{i_2i_3\dots i_nii_1m}^{(n)}(-\omega_2; \omega_3, \omega_4, \dots, \omega_n, -\omega_{n+1}, \omega_1) + \\ & + \gamma_{i_2i_3\dots i_nii_1m}^{(n)}(-\omega_3; \omega_4, \omega_5, \dots, \omega_n, -\omega_{n+1}, \omega_1, \omega_2) + \dots + \\ & + \gamma_{i_nii_1i_2\dots i_{n-1}m}^{(n)}(-\omega_n; -\omega_{n+1}, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}) = 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Согласно этому соотношению, сумма всех компонент тензора $\gamma_{ii_1i_2\dots i_nm}^{(n)}(\omega_{n+1}; \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ с циклически переставленными частотами и соответствующими индексами равна нулю. Можно показать, что (1.33) является одним из возможных следствий равенств (1.28) и (1.29). Для этого в (1.33) выберем любые два слагаемых, и с помощью (1.29) приравняем их сумму к одной компоненте тензора $\gamma_{ii_1i_2\dots i_nm}^{(n)}(\omega_{n+1}; \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, и с помощью (1.28) поменяем знак этой компоненты так, чтобы все слагаемые в преобразованном выражении (1.33) входили со знаком “плюс”. В результате преобразованное выражение будет содержать на одно слагаемое меньше, однако это также будет равная нулю сумма компонент тензора $\gamma_{ii_1i_2\dots i_nm}^{(n)}(\omega_{n+1}; \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ с циклически переставленными n частотами и соответствующими им индексами. Последовательно применяя (1.29) и (1.28) к этому равенству, можно постепенно уменьшать входящих в него компонент, пока это равенство не совпадёт с (1.29).

§ 1.3 Особенности внутренней симметрии тензоров нелокальной нелинейной оптической восприимчивости в вырожденных по частоте процессах

Прежде всего, покажем, что описанный в предыдущем разделе способ получения соотношений внутренней симметрии тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$, основанный на интегральной формулировке закона сохранения энергии (1.22), не позволяет однозначным образом получить эти соотношения, если среди частот взаимодействующих волн есть одинаковые. Рассмотрим для примера процесс самовоздействия света в среде с нелокальностью кубического отклика. Материальное уравнение для нелинейной нелокальной составляющей поляризации среды имеет вид:

$$P_i^{(3,nloc)}(\omega) = \gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega) E_j^*(\omega) E_l(\omega) \partial_k E_m(\omega) + \gamma_{ilmjk}^{(3)}(\omega; \omega, \omega, -\omega) E_l(\omega) E_m(\omega) \partial_k E_j^*(\omega). \quad (1.34)$$

Здесь для простоты индексы l и m соответствуют спектральной компоненте электрического поля на частоте ω , а индекс j (и также i) — спектральной компоненте электрического поля на частоте $-\omega$. Подставим (1.34) в (1.22):

$$\int \omega E_i^*(\omega) E_l(\omega) \left[\left(\gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega) - \gamma_{lijmk}^{(3)}(-\omega; -\omega, -\omega, \omega) \right) E_j^*(\omega) \partial_k E_m(\omega) + \left(\gamma_{ilmjk}^{(3)}(\omega; \omega, \omega, -\omega) - \gamma_{lmijk}^{(3)}(-\omega; \omega, -\omega, -\omega) \right) E_m(\omega) \partial_k E_j^*(\omega) \right] = 0. \quad (1.35)$$

Интегрирование любого из слагаемых под интегралом по частям не уменьшает их число. Чтобы можно было произвести интегрирование по частям, позволяющее получить соотношение, аналогичное (1.27), нужно предположить, что первая скобка под интегралом (1.35) симметрична по перестановке индексов l и m , а вторая — по перестановке индексов i и j . Однако в рамках интегральной формулировки закона сохранения энергии это требование является допущением, и поэтому получаемый после такого преобразования результат не является достаточно обоснованным. Если же предположить, что каждая из скобок в (1.35) должна обращаться в нуль независимо от другой, то возникает вопрос о том, каким образом эти соотношения могут быть получены при переходе от соотношений (1.28)–(1.29) для невырожденных по частотам процессов к рассматриваемому примеру, в котором две частоты ω и $-\omega$ являются вырожденными. В связи с этим соотношения внутренней симметрии для компонент тензора нелокальной нелинейной оптической восприимчивости, описывающего вырожденное по частотам нелинейное взаимодействие волн, должны быть получены другим методом.

Пусть в среде, проявляющей нелинейность n -го порядка, взаимодействуют $m + 1 \leq n + 1$ электромагнитных волн с различными частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m, \omega_{n+1}$. Напряженность создаваемого ими электрического поля

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{l=1}^m \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega_l) \exp(-i\omega_l t) + \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega_{n+1}) \exp(-i\omega_{n+1} t) + \text{с.с.}, \quad (1.36)$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega_l)$ — комплексная амплитуда волны с частотой ω_l . Выражения для векторов индукции магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ и индукции электрического поля $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ имеют в этом случае вид, аналогичный (1.36):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_{l=1}^m \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega_l) \exp(-i\omega_l t) + \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega_{n+1}) \exp(-i\omega_{n+1} t) + \text{c.c.}, \quad (1.37)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \sum_{l=1}^m \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega_l) \exp(-i\omega_l t) + \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega_{n+1}) \exp(-i\omega_{n+1} t) + \text{c.c.} \quad (1.38)$$

Комплексная амплитуда индукции электрического поля $\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega_l)$ на частоте ω_l связана с $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega_l)$ соотношением:

$$\mathbf{D}(\omega_l) = \hat{\varepsilon}(\omega_l) \mathbf{E}(\omega_l) + \hat{\gamma}^{(1)}(\omega_l) \nabla \mathbf{E}(\omega_l) + \mathbf{P}^{(n,loc)}(\omega_l) + \mathbf{P}^{(n,nloc)}(\omega_l), \quad (1.39)$$

где $\hat{\varepsilon}(\omega_l)$ и $\hat{\gamma}^{(1)}(\omega_l)$ — тензоры линейной диэлектрической проницаемости и линейной нелокальной восприимчивости среды, $\mathbf{P}^{(n,loc)}(\omega_l)$ и $\mathbf{P}^{(n,nloc)}(\omega_l)$ — комплексные амплитуды меняющихся с частотой ω_l локальной и нелокальной составляющих поляризации среды, проявляющей нелинейность n -го порядка. В (1.39) и далее для краткости не указывается зависимость комплексных амплитуд от радиус-вектора \mathbf{r} .

В предыдущем разделе соотношения внутренней симметрии тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$ были получены из интегральной формулировки закона сохранения энергии электромагнитного поля, требующей выполнения условия (1.22). Необходимость выполнения этих соотношений также однозначно следует из уравнений [64]:

$$\frac{1}{c} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \text{div}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] = 0, \quad (1.40)$$

$$\frac{1}{c} \partial_t [\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] + \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \times \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.41)$$

легко получаемых [5; 6] из системы уравнений Максвелла. Именно (1.28) и (1.29) делают возможным сведение слагаемых, возникающих после подстановки в (1.40) и (1.41) выражений для векторов $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ (формула (1.36)), $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ (формула (1.37)) и $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ (формулы (1.38) и (1.39) с учетом материальных уравнений (1.16), (1.17), (1.23) и (1.24)) к балансным соотношениям

$$\frac{1}{c} \partial_t U + \partial_i S_i = 0, \quad (1.42)$$

$$\frac{1}{c} \partial_t g_i + \partial_j G_{ij} = 0, \quad (1.43)$$

связывающим плотность энергии U , вектор плотности потока энергии \mathbf{S} , плотность импульса \mathbf{g} и тензор плотности потока импульса G_{ij} [2]. Метод [64] является более строгим, поскольку гарантирует, что на выполнение равенств (1.28) и (1.29) не оказывают влияние граничные условия для напряжённостей и индукций электромагнитного поля.

Если некоторые из частот взаимодействующих волн $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ одинаковы, то равенства (1.28) и (1.29) естественно остаются справедливыми. Дополнительные соотношения между компонентами тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$ возникают в непоглощающих средах, если одна из одинаковых (вырожденных) частот является первым или последним частотным аргументом тензора

$\hat{\gamma}^{(n)}$. Найдем их, считая для простоты, что среди частот $\omega_1, \dots, \omega_n$ первые $m - 1$ различные $(\omega_1, \dots, \omega_{m-1})$, а оставшиеся $n - m + 1$ равны ω_m . В этом случае материальные уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned}
P_i^{(n, nloc)}(\omega_{n+1}) &= \sum_{s=1}^{m-1} \tilde{\gamma}_{ii_1^{s-1} i_{s+1}^n i_s k}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{s-1}, \bar{\omega}_{s+1}^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m+1}, \omega_s) \times \\
&\times \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq s}}^{m-1} E_{i_p}(\omega_p) \prod_{p=m}^n E_{i_p}(\omega_m) \partial_k E_{i_s}(\omega_s) + (n - m + 1) \tilde{\gamma}_{ii_1^n k}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m+1}) \times \\
&\times \prod_{p=1}^{m-1} E_{i_p}(\omega_p) \prod_{p=m}^{n-1} E_{i_p}(\omega_m) \partial_k E_{i_n}(\omega_m), \tag{1.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_i^{(n, nloc)}(\omega_l) &= \tilde{\gamma}_{ii_1^{l-1} i_{l+1}^n i_{n+1} k}^{(n)}(\omega_l; -\bar{\omega}_1^{l-1}, -\bar{\omega}_{l+1}^{m-1}, -\tilde{\omega}_m^{n-m+1}, \omega_{n+1}) \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq l}}^{m-1} E_{i_p}^*(\omega_p) \prod_{p=m}^n E_{i_p}^*(\omega_m) \times \\
&\times \partial_k E_{i_{n+1}}(\omega_{n+1}) + \sum_{s=1}^{l-1} \tilde{\gamma}_{ii_{n+1} i_1^{s-1} i_{s+1}^{l-1} i_{l+1}^n i_s k}^{(n)}(\omega_l; \omega_{n+1}, -\bar{\omega}_1^{s-1}, -\bar{\omega}_{s+1}^{l-1}, -\bar{\omega}_{l+1}^{m-1}, -\tilde{\omega}_m^{n-m+1}, \\
&- \omega_s) E_{i_{n+1}}(\omega_{n+1}) \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq s, l}}^{m-1} E_{i_p}^*(\omega_p) \prod_{p=m}^n E_{i_p}^*(\omega_m) \partial_k E_{i_s}^*(\omega_s) + \sum_{s=l+1}^{m-1} \tilde{\gamma}_{ii_{n+1} i_1^{l-1} i_{l+1}^{s-1} i_{s+1}^n i_s k}^{(n)}(\omega_l; \\
&\omega_{n+1}, -\bar{\omega}_1^{l-1}, -\bar{\omega}_{l+1}^{s-1}, -\bar{\omega}_{s+1}^{m-1}, -\tilde{\omega}_m^{n-m+1}, -\omega_s) E_{i_{n+1}}(\omega_{n+1}) \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq l, s}}^{m-1} E_{i_p}^*(\omega_p) \prod_{p=m}^n E_{i_p}^*(\omega_m) \partial_k E_{i_s}^*(\omega_s) + \\
&+ (n - m + 1) \tilde{\gamma}_{ii_{n+1} i_1^{l-1} i_{l+1}^n k}^{(n)}(\omega_l; \omega_{n+1}, -\bar{\omega}_1^{l-1}, -\bar{\omega}_{l+1}^{m-1}, -\tilde{\omega}_m^{n-m+1}) E_{i_{n+1}}(\omega_{n+1}) \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq l}}^{m-1} E_{i_p}^*(\omega_p) \times \\
&\times \prod_{p=m}^{n-1} E_{i_p}^*(\omega_m) \partial_k E_{i_n}^*(\omega_m), \tag{1.45}
\end{aligned}$$

если $l < m$, и

$$\begin{aligned}
P_i^{(n, nloc)}(\omega_m) &= (n - m + 1) \left[\tilde{\gamma}_{ii_1^{m-1} i_{m+1}^n k}^{(n)}(\omega_m; -\bar{\omega}_1^{m-1}, -\tilde{\omega}_m^{n-m}, \omega_{n+1}) \prod_{p=1}^{m-1} E_{i_p}^*(\omega_p) \times \right. \\
&\times \prod_{p=m+1}^n E_{i_p}^*(\omega_m) \partial_k E_{i_{n+1}}(\omega_{n+1}) + \sum_{s=1}^{m-1} \tilde{\gamma}_{ii_{n+1} i_1^{s-1} i_{s+1}^{m-1} i_{m+1}^n i_s k}^{(n)}(\omega_m; \omega_{n+1}, -\bar{\omega}_1^{s-1}, \\
&-\bar{\omega}_{s+1}^{m-1}, -\tilde{\omega}_m^{n-m}, \omega_s) E_{i_{n+1}}(\omega_{n+1}) \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq s}}^{m-1} E_{i_p}^*(\omega_p) \prod_{p=m+1}^n E_{i_p}^*(\omega_m) \partial_k E_{i_s}^*(\omega_s) + (n - m) \times \\
&\times \tilde{\gamma}_{ii_{n+1} i_1^{m-1} i_{m+1}^n k}^{(n)}(\omega_m; \omega_{n+1}, -\bar{\omega}_1^{m-1}, -\tilde{\omega}_m^{n-m}) E_{i_{n+1}}(\omega_{n+1}) \prod_{p=1}^{m-1} E_{i_p}^*(\omega_p) \times \\
&\left. \times \prod_{p=m+1}^{n-1} E_{i_p}^*(\omega_m) \partial_k E_{i_n}^*(\omega_m) \right]. \tag{1.46}
\end{aligned}$$

В (1.44)–(1.46) символ $\tilde{\omega}_m^p$ обозначает множество одинаковых частот, равных ω_m , состоящее из p элементов, $\omega_{n+1} = \sum_{l=1}^{m-1} \omega_l + (n - m + 1)\omega_m$. Каждое слагаемое в каждом из материальных уравнений (1.44)–(1.46) входит с коэффициентом, равным $F(-\omega_l)(F(\omega_s) - \delta_{ls})$, где ω_l — частота поляризации среды, описываемой материальным уравнением, ω_s — частота, электрическое поле на которой находится под оператором дифференцирования в слагаемом, $F(\omega_s)$ — кратность вырождения частоты ω_s , определяемая как число повторений частоты ω_s в последовательности частотных аргументов компоненты тензора $\tilde{\gamma}^{(n)}$ справа от точки с запятой, увеличенное на единицу, если частота слева от точки с запятой в последовательности частотных аргументов равна $-\omega_s$. Для невырожденных частот $F(\omega_s) = 1$. На практике обычно эти материальные уравнения записывают без дополнительных коэффициентов, подобно (1.23)–(1.24). Далее мы покажем, что соотношения внутренней симметрии тензора $\tilde{\gamma}^{(n)}$, используемого в (1.44)–(1.46), оказываются наиболее похожими по форме на соотношения (1.28)–(1.29).

Подставив в (1.40) выражения для векторов $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ (формула (1.36)), $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ (формула (1.37)) и $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ (формулы (1.38) и (1.39) с учетом равенств (1.44), (1.45) и (1.46)), легко убедиться, что полученное равенство может быть записано в виде (1.42), если внутренняя симметрия тензора $\hat{\tilde{\gamma}}^{(n)}$ позволяет определить компоненты симметричного по перестановке любых индексов среди i_m, i_{m+1}, \dots, i_n вспомогательного тензора $A_{i_1^{n+1}k}(\hat{\tilde{\gamma}}^{(n)}, \bar{\omega}_1^{m-1}, \omega_m, \omega_{n+1})$, обеспечивающего выполнение равенства:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^m i\omega_l E_{i_l}(\omega_l) P_{i_l}^{(n, nloc)*}(\omega_l) - i\omega_{n+1} E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) P_{i_{n+1}}^{(n, nloc)}(\omega_{n+1}) = \\ & = \partial_k \left(A_{i_1^{n+1}k} \prod_{p=1}^{m-1} E_{i_p}(\omega_p) \prod_{p=m}^n E_{i_p}(\omega_m) E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) \right). \end{aligned} \quad (1.47)$$

Осуществляя дифференцирование правой части (1.47) и приравнявая нулю коэффициенты при независимых комбинациях напряженностей электрических полей и их пространственных производных, можно получить систему уравнений для компонент тензора $A_{i_1^{n+1}k}$. Существование ее решения (и, следовательно, справедливость равенства (1.47)) требует выполнения нескольких условий внутренней симметрии тензора $n + 2$ ранга, характеризующего нелокальный нелинейный оптический отклик среды. Во-первых, тензор $\tilde{\gamma}_{i_m i_1^{m-1} i_{m+1}^{n-m} i_{n+1} k}^{(n)}$ ($-\omega_m; \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m}, -\omega_{n+1}$) должен быть симметричным по перестановке индекса i_m с любым другим индексом, относящимся к частоте ω_m , если последний частотный аргумент не равен ω_m , т.е., например, при перестановке i_m и i_{m+r} должно выполняться равенство:

$$\begin{aligned} & \tilde{\gamma}_{i_m i_1^{m-1} i_{m+1}^{m+r-1} i_{m+r} i_{m+r+1}^{n-m-r} i_{n+1} k}^{(n)} (-\omega_m; \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{r-1}, \omega_m, \tilde{\omega}_m^{n-m-r}, -\omega_{n+1}) = \\ & = \tilde{\gamma}_{i_{m+r} i_1^{m-1} i_{m+1}^{m+r-1} i_m i_{m+r+1}^{n-m-r} i_{n+1} k}^{(n)} (-\omega_m; \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{r-1}, \omega_m, \tilde{\omega}_m^{n-m-r}, -\omega_{n+1}), \end{aligned} \quad (1.48)$$

где $1 \leq r \leq n - m$. Во-вторых, тензор $\tilde{\gamma}_{i_m i_{n+1} i_1^{m-1} i_{m+1}^{n-1} i_n k}^{(n)}$ ($-\omega_m; -\omega_{n+1}, \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m-1}, \omega_m$) должен быть симметричен по перестановке первого индекса с любым другим индексом, относящимся к частоте ω_m , кроме предпоследнего индекса i_n . В третьих, разности

$$\begin{aligned} \Delta_1 & = \tilde{\gamma}_{i_{n+1} i_1^n k}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m+1}) - \\ & - \tilde{\gamma}_{i_l i_{n+1} i_1^{l-1} i_{l+1}^n k}^{(n)}(-\omega_l; -\omega_{n+1}, \bar{\omega}_1^{l-1}, \bar{\omega}_{l+1}^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m+1}) \end{aligned} \quad (1.49)$$

и

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \tilde{\gamma}_{i_{n+1}i_1^n k}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m+1}) - \\ &- (n-m)\tilde{\gamma}_{i_m i_{n+1} i_1^{m-1} i_{m+1}^n k}^{(n)}(-\omega_m; -\omega_{n+1}, \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}^{n-m}) \end{aligned} \quad (1.50)$$

должны оставаться неизменными при перестановке стоящего на предпоследнем месте индекса, относящегося к частоте ω_m , с любыми другими индексами, связанными с той же частотой. Общей чертой сформулированных выше симметричных соотношений между компонентами тензора $\hat{\tilde{\gamma}}^{(n)}$ является не связанная с частотными аргументами перестановка индексов, возможность которой обусловлена равенством соответствующим им частот.

Существование решения системы уравнений для компонент тензора $A_{i_1^{n+1}k}$ также требует выполнения двух перестановочных соотношений между индексами тензора $\hat{\tilde{\gamma}}^{(n)}$, сопровождающихся одновременной перестановкой соответствующих им частот. Если частота ω_m не является последним частотным аргументом тензора $\hat{\tilde{\gamma}}^{(n)}$, а $-\omega_m$ не является его первым аргументом, то они в точности повторяют (1.28)–(1.29). В остальных случаях эти соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} &\tilde{\gamma}_{i_l i_1^{l-1} i_{l+1}^{m-1} i_m^n i_{n+1} k}^{(n)}(-\omega_l; \bar{\omega}_1^{l-1}, \bar{\omega}_{l+1}^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m+1}, -\omega_{n+1}) = \\ &= \tilde{\gamma}_{i_l i_{n+1} i_1^{l-1} i_{l+1}^{m-1} i_m^n k}^{(n)}(-\omega_l; -\omega_{n+1}, \bar{\omega}_1^{l-1}, \bar{\omega}_{l+1}^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m}, \omega_m) - \\ &- \tilde{\gamma}_{i_{n+1} i_1^n k}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m}, \omega_m), \\ &(n-m+1)\tilde{\gamma}_{i_m i_1^{m-1} i_{m+1}^n i_{n+1} k}^{(n)}(-\omega_m; \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m}, -\omega_{n+1}) = \\ &= (n-m)\tilde{\gamma}_{i_m i_{n+1} i_1^{m-1} i_{m+1}^n k}^{(n)}(-\omega_m; -\omega_{n+1}, \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m}) - \\ &- (n-m+1)\tilde{\gamma}_{i_{n+1} i_1^n k}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m}, \omega_m). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Подчеркнем, что эти равенства содержат по три компоненты тензора $\hat{\tilde{\gamma}}^{(n)}$ и не являются обобщением (1.28).

Подставив в (1.41) выражения для векторов $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ (формула (1.36)), $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ (формула (1.37)) и $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ (формулы (1.38) и (1.39) с учетом равенств (1.44), (1.45) и (1.46)), легко убедиться, что полученное равенство может быть записано в виде (1.43), если внутренняя симметрия тензора $\hat{\tilde{\gamma}}^{(n)}$ позволяет определить компоненты вспомогательного тензора

$B_{i_1^{n+1}k}(\hat{\gamma}^{(n)}, \bar{\omega}_1^{m-1}, \omega_m, \omega_{n+1})$, обеспечивающего выполнение равенства:

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^m P_{i_l}^{(n,nloc)*}(\omega_l) \partial_p E_{i_l}(\omega_l) + P_{i_{n+1}}^{(n,nloc)}(\omega_{n+1}) \partial_p E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) = \\
& = \partial_p \left(\sum_{l=1}^{m-1} B_{i_1^{n+1}k}^{(l)} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq l}}^{m-1} E_{i_q}(\omega_q) \prod_{q=m}^n E_{i_q}(\omega_m) E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) \partial_k E_{i_l}(\omega_l) + \right. \\
& + B_{i_1^{n+1}k}^{(m)} \prod_{q=1}^{m-1} E_{i_q}(\omega_q) \prod_{q=m}^{n-1} E_{i_q}(\omega_m) E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) \partial_k E_{i_n}(\omega_m) + \\
& \left. + B_{i_1^{n+1}k}^{(n+1)} \prod_{q=1}^{m-1} E_{i_q}(\omega_q) \prod_{q=m}^n E_{i_q}(\omega_m) \partial_k E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) \right) - \\
& - \partial_k \left(\sum_{l=1}^{m-1} B_{i_1^{n+1}k}^{(l)} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq l}}^{m-1} E_{i_q}(\omega_q) \prod_{q=m}^n E_{i_q}(\omega_m) E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) \partial_p E_{i_l}(\omega_l) + \right. \\
& + B_{i_1^{n+1}k}^{(m)} \prod_{q=1}^{m-1} E_{i_q}(\omega_q) \prod_{q=m}^{m-1} E_{i_q}(\omega_m) E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) \partial_p E_{i_n}(\omega_m) + \\
& \left. + B_{i_1^{n+1}k}^{(n+1)} \prod_{q=1}^{m-1} E_{i_q}(\omega_q) \prod_{q=m}^n E_{i_q}(\omega_m) \partial_p E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) \right) \quad (1.52)
\end{aligned}$$

Осуществляя дифференцирование правой части (1.52) и приравнявая нулю коэффициенты при независимых комбинациях напряженностей электрических полей и их пространственных производных, удается получить более громоздкую, чем для $A_{i_1^{n+1}k}$, систему уравнений для компонент тензора $B_{i_1^{n+1}k}$. Существование ее решения (и, следовательно, справедливость равенства (1.52)) требует выполнения следующих соотношений внутренней симметрии тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$:

$$\begin{aligned}
& \tilde{\gamma}_{i_m i_1^{m-1} i_{m+1}^{n-1} i_{n+1} k}^{(n)}(-\omega_m; \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m}, -\omega_{n+1}) = \\
& = -\tilde{\gamma}_{i_{n+1} i_1^{m-1} i_{m+1}^{n-1} i_m k}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m}, \omega_m), \quad (1.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{\gamma}_{i_m i_{n+1} i_1^{m-1} i_{m+1}^{n-1} i_n k}^{(n)}(-\omega_m; -\omega_{n+1}, \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m-1}, \omega_m) = \\
& = -\tilde{\gamma}_{i_n i_{n+1} i_1^{m-1} i_{m+1}^{n-1} i_m k}^{(n)}(-\omega_m; -\omega_{n+1}, \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m-1}, \omega_m), \quad (1.54)
\end{aligned}$$

а также равенства (1.28), в котором первая и последняя частоты отличаются от ω_m . Формула (1.48) вместе с (1.53) приводит к симметрии тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$, последний частотный аргумент которого равен ω_m , по перестановке всех индексов, относящихся к этой частоте. Формула (1.54) вместе с условием симметрии тензора $\tilde{\gamma}_{i_m i_{n+1} i_1^{m-1} i_{m+1}^{n-1} i_n k}^{(n)}(-\omega_m; -\omega_{n+1}, \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m-1}, \omega_m)$ по перестановке индексов $i_m \dots i_{n-1}$ запрещают взаимодействие волн, происходящее при участии компоненты тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$, первый и последний частотные аргументы которого отличаются знаком и по модулю равны $|\omega_m|$:

$$\tilde{\gamma}_{i_m i_{n+1} i_1^{m-1} i_{m+1}^{n-1} i_n k}^{(n)}(-\omega_m; -\omega_{n+1}, \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m-1}, \omega_m) = 0. \quad (1.55)$$

Формулы (1.53), (1.54) и полученные с их помощью следствия позволяют преобразовать ранее полученные равенства, связывающие различные компоненты тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$ (найденные в результате анализа выполнимости условия (1.47)) в итоговые формулы, обобщающие соотношения внутренней симметрии (1.28) и (1.29) для непоглощающих сред на случай, когда в перестановке участвуют индексы, соответствующие одинаковым частотным аргументам (кроме уже рассмотренного случая, приводящего к равенству (1.55)). Это, во-первых, симметрия (1.48) по перестановке первого индекса с любым другим, кроме предпоследнего и последнего, если все переставляемые индексы соответствуют одной и той же частоте ω_m , не равной последней частоте в последовательности его частотных аргументов. Во-вторых, при перестановке первого и предпоследнего индексов в случае, когда только одна из соответствующих им частот равна ω_m , справедливо равенство:

$$\begin{aligned} & \tilde{\gamma}_{i_m i_1^{m-1} i_{m+1}^{n-1} i_{n+1} k}^{(n)}(-\omega_m; \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m}, -\omega_{n+1}) = \\ & = -\tilde{\gamma}_{i_{n+1} i_1^{m-1} i_{m+1}^{n-1} i_m k}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m}, \omega_m). \end{aligned} \quad (1.56)$$

В третьих, в случае перестановки трех индексов, среди которых обязательно присутствуют первый и предпоследний, а также любой другой индекс из числа не относящихся к одинаковым частотам ω_m , имеет место равенство:

$$\begin{aligned} & \tilde{\gamma}_{i_{n+1} i_1^{l-1} i_l i_{l+1}^{n-1} i_n k}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{l-1}, \omega_l, \bar{\omega}_{l+1}^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m}, \omega_m) + \\ & + \tilde{\gamma}_{i_l i_1^{l-1} i_n i_{l+1}^{n-1} i_{n+1} k}^{(n)}(-\omega_l; \bar{\omega}_1^{l-1}, \omega_m, \bar{\omega}_{l+1}^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m}, -\omega_{n+1}) + \\ & + \tilde{\gamma}_{i_n i_1^{l-1} i_{n+1} i_{l+1}^{n-1} i_l k}^{(n)}(-\omega_m; \bar{\omega}_1^{l-1}, -\omega_{n+1}, \omega_{l+1}^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m}, \omega_l) = 0. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Эти свойства внутренней симметрии тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$ сохраняются, если в среди частот $\bar{\omega}_1^{n+1}$ можно выделить не одно, а два и более множества одинаковых частот. В этом случае по-прежнему будет обращаться в ноль компонента тензора, первый и последний частотные аргументы которой равны по величине и противоположны по знаку. Кроме этого, индексы, относящиеся к одной и той же частоте, также могут свободно переставляться местами. Соотношения (1.56) и (1.57) останутся справедливыми при перестановке различных частотных аргументов, в том числе и из разных множеств одинаковых частот.

При записи материальных уравнений (1.44)–(1.46) использовался тензор $\hat{\gamma}^{(n)}$, компоненты которого меньше компонент более часто используемого тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$, при записи которого эти же материальные уравнения не содержат численных коэффициентов, в $F(-\omega_l)F(\omega_s)$ раз, где ω_l — частота, находящаяся перед точкой с запятой в последовательности частотных аргументов компоненты, ω_s — последняя частота в последовательности частотных аргументов, $F(\omega)$ — кратность вырождения частоты. Для тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$ соотношения симметрии (1.48), (1.55) и (1.56) имеют тот же вид, что и для тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$. Различие величин компонент этих тензоров приводит к отличию только в записи соотношения (1.57), которое для тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$

имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{F(-\omega_{n+1})F(\omega_m)} \gamma_{i_{n+1}i_1^{l-1}i_l i_{l+1}^{n-1}i_{n+1}k}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{l-1}, \omega_l, \bar{\omega}_{l+1}^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m}, \omega_m) + \\
& + \frac{1}{F(\omega_l)F(-\omega_{n+1})} \gamma_{i_l i_1^{l-1}i_n i_{l+1}^{n-1}i_{n+1}k}^{(n)}(-\omega_l; \bar{\omega}_1^{l-1}, \omega_m, \bar{\omega}_{l+1}^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m}, -\omega_{n+1}) + \\
& + \frac{1}{F(\omega_m)F(\omega_l)} \gamma_{i_n i_1^{l-1}i_{n+1} i_{l+1}^{n-1}i_l k}^{(n)}(-\omega_m; \bar{\omega}_1^{l-1}, -\omega_{n+1}, \bar{\omega}_{l+1}^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m}, \omega_l) = 0. \quad (1.58)
\end{aligned}$$

Таким же образом различие в форме материальных уравнений, описывающих поляризацию квадратичной среды в процессе генерации второй гармоники, приводит к различию соотношений симметрии (1.7) и (1.8). Эти материальные уравнения могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}
P_i(2\omega) &= \tilde{\chi}_{ijk}(2\omega; \omega, \omega) E_j(\omega) E_k(\omega), \\
P_j(\omega) &= 2\tilde{\chi}_{jik}(\omega; 2\omega, -\omega) E_i(2\omega) E_k^*(\omega). \quad (1.59)
\end{aligned}$$

Для тензора $\tilde{\chi}$, входящего в эти уравнения, легко получить соотношения симметрии (1.8). В практических задачах нелинейной оптики обычно используют следующую форму материальных уравнений:

$$\begin{aligned}
P_i(2\omega) &= \chi_{ijk}(2\omega; \omega, \omega) E_j(\omega) E_k(\omega), \\
P_j(\omega) &= \chi_{jik}(\omega; 2\omega, -\omega) E_i(2\omega) E_k^*(\omega). \quad (1.60)
\end{aligned}$$

Для входящего в них тензора $\hat{\chi}$ также легко получить соотношения симметрии (1.7). Естественно, что обе формы записи материальных уравнений (и (1.59), и (1.60)) являются правильными, но спор о том, какая из них является “более правильной” ведется уже много лет начиная с работы [89].

Приведём следующие из формул (1.48), (1.55), (1.56) и (1.58) некоторые примеры соотношений внутренней симметрии для компонент тензоров $\hat{\gamma}^{(n)}$, описывающих нелокальный нелинейный оптический отклик непоглощающей среды, которые можно использовать при расчете параметров, задающих интенсивность и поляризацию взаимодействующих волн. При генерации второй гармоники в среде с квадратичной нелинейностью ($n = 2$, $\omega_{1,2} = \omega$, поэтому $m = 1$, $\omega_3 = 2\omega$, а $F(\omega) = 2$, $F(-2\omega) = 1$) формулы (1.48), (1.55) и (1.56) принимают вид:

$$\gamma_{ijlk}^{(2)}(-\omega; \omega, -2\omega) = \gamma_{jilk}^{(2)}(-\omega; \omega, -2\omega), \quad (1.61)$$

$$\gamma_{ijlk}^{(2)}(-\omega; -2\omega, \omega) = 0, \quad (1.62)$$

$$\gamma_{ijlk}^{(2)}(2\omega; \omega, \omega) = -\gamma_{jikl}^{(2)}(-\omega; \omega, -2\omega). \quad (1.63)$$

В случае генерации третьей гармоники в среде с кубической нелинейностью ($n = 3$, $\omega_{1,2,3} = \omega$, $\omega_4 = 3\omega$, т.е. $m = 1$, $F(\omega) = 3$, а $F(-3\omega) = 1$) соотношения (1.48), (1.55) и (1.56) приводят к равенствам:

$$\gamma_{ijlmk}^{(3)}(-\omega; \omega, \omega, -3\omega) = \gamma_{jilmk}^{(3)}(-\omega; \omega, \omega, -3\omega) = \gamma_{lijmk}^{(3)}(-\omega; \omega, \omega, -3\omega), \quad (1.64)$$

$$\gamma_{ijlmk}^{(3)}(-\omega; -3\omega, \omega, \omega) = 0, \quad (1.65)$$

$$\gamma_{ijlmk}^{(3)}(3\omega; \omega, \omega, \omega) = -\gamma_{mjlik}^{(3)}(-\omega; \omega, \omega, -3\omega). \quad (1.66)$$

В этих двух случаях формулу (1.57) записать невозможно, поскольку взаимодействуют всего две волны с различными частотами (ω и 2ω или ω и 3ω). Для компонент тензора, определяющего сигнальную волну в схеме КАРС ($n = 3$, $\omega_1 = -\omega'$, $\omega_{2,3} = \omega$, $\omega_4 = \omega_c = 2\omega - \omega'$, следовательно $m = 2$, $F(-\omega_4) = F(-\omega_1) = 1$, а $F(\omega_2) = 2$), можно записать все следствия соотношений внутренней симметрии (1.48), (1.55), (1.56) и (1.58):

$$\gamma_{ijlmk}^{(3)}(-\omega; \omega, -\omega_c, -\omega') = \gamma_{jilmk}^{(3)}(-\omega; \omega, -\omega_c, -\omega'), \quad (1.67)$$

$$\gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega_c; -\omega', \omega, \omega) = -\gamma_{mljik}^{(3)}(-\omega; \omega, -\omega', -\omega_c), \quad (1.68)$$

$$\gamma_{ijlmk}^{(3)}(-\omega; -\omega_c, -\omega', \omega) = 0, \quad (1.69)$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega_c; -\omega', \omega, \omega) + \gamma_{jlmik}^{(3)}(\omega'; \omega, \omega, -\omega_c) + \frac{1}{2}\gamma_{lmijk}^{(3)}(-\omega; \omega, -\omega_c, -\omega') = 0. \quad (1.70)$$

В случае самовоздействия электромагнитной волны (процесс $\omega = -\omega + \omega + \omega$) в среде с кубической нелинейностью ($n = 3$) частота $\omega_1 = -\omega$, а $\omega_{2,3,4} = \omega$. Формально можно считать, что в среде взаимодействуют две волны с частотами ω и $-\omega$ и поэтому $m = 2$, а $F(\omega) = F(-\omega) = 2$. Равенство (1.57) не может быть записано для процесса, в котором взаимодействуют только две волны, а соотношения (1.48), (1.55) и (1.56) принимают следующий вид:

$$\gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega) = \gamma_{jilmk}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega) \quad (1.71)$$

$$\gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega; \omega, \omega, -\omega) = 0 \quad (1.72)$$

$$\gamma_{ijlmk}^{(3)}(-\omega; \omega, -\omega, -\omega) = -\gamma_{mljik}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega) \quad (1.73)$$

Формулы, аналогичные (1.61)–(1.73) для компонент тензора $\hat{\gamma}^{(3)}$ будут отличаться от них только отсутствием знака “тильда” и коэффициентов $1/2$ в формуле (1.70).

§ 1.4 Проблема использования материальных уравнений в форме Ландау-Лифшица при описании неоднородных линейных сред, проявляющих нелокальность оптического отклика

Покажем, что материальные уравнения в форме Ландау-Лифшица могут быть использованы для описания электромагнитного поля в неоднородных линейных средах без искусственного добавления дополнительных слагаемых, если соотношения внутренней симметрии входящих в них тензоров оптических восприимчивостей получены корректным образом. При использовании подхода Ландау — Лифшица к построению электродинамики неоднородных линейных сред соответствующая частоте ω спектральная составляющая поляризации среды $\mathbf{P}(\omega, \mathbf{r})$, в точке, задаваемой радиус-вектором \mathbf{r} , считается связанной со спектральными составляющими $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}_1)$ вектора напряжённости монохроматического электрического поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}_1) \exp(-i\omega t) + \text{с.с.}$ во всех точках пространства соотношением, которое в отсутствие частотной дисперсии имеет вид [71]:

$$\mathbf{P}(\omega, \mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}_1 \hat{\chi}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}_1). \quad (1.74)$$

Здесь $\tilde{\chi}_{ij}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ — тензор диэлектрической восприимчивости, учитывающий нелокальность оптического отклика неоднородной среды на внешнее световое поле, $i, j = x, y, z$. В отличие от подавляющего большинства работ, учитывающих пространственную дисперсию среды, будем далее в этом разделе считать, что этот тензор является произвольной непрерывной функцией векторов \mathbf{r} и \mathbf{r}_1 , а не только их разности $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$.

Разложим электрическое поле $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}_1)$ в ряд Тейлора в точке, задаваемой радиус-вектором \mathbf{r} , не ограничиваясь в нем конечным числом слагаемых:

$$E_j(\omega, \mathbf{r}_1) = E_j(\omega, \mathbf{r}) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})_{i_1} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})_{i_2} \cdots \times \\ \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})_{i_p} \partial_{i_1 i_2 \dots i_p} E_j(\omega, \mathbf{r}). \quad (1.75)$$

Подставляя (1.75) в (1.74), перепишем уравнение для спектральной составляющей поляризации среды в виде:

$$P_i(\omega, \mathbf{r}) = \chi_{ij}(\omega; \mathbf{r}) E_j(\omega, \mathbf{r}) + \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_{ij i_1 i_2 \dots i_p}(\omega; \mathbf{r}) \partial_{i_1 i_2 \dots i_p} E_j(\omega, \mathbf{r}), \quad (1.76)$$

где локальная линейная восприимчивость

$$\chi_{ij}(\omega; \mathbf{r}) = \int \tilde{\chi}_{ij}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1, \quad (1.77)$$

а нелокальные линейные восприимчивости

$$\gamma_{ij i_1 i_2 \dots i_p}(\omega; \mathbf{r}) = \frac{1}{p!} \int (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})_{i_1} \cdots (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})_{i_p} \tilde{\chi}_{ij}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1. \quad (1.78)$$

В (1.75)–(1.78) индексы i_1, i_2, \dots, i_p принимают значения x, y и z , $\partial_{i_1 i_2 \dots i_p} = \partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_p}$. В отличие от однородных сред, где $\hat{\chi}$ зависит исключительно от $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, компоненты тензоров (1.77) и (1.78) зависят от пространственных координат. Последнее существенно изменяет дополнительные соотношения внутренней симметрии между компонентами этих тензоров, возникающие в непоглощающей неоднородной линейной среде из-за необходимости выполнения закона сохранения энергии, имеющему в этом случае вид однородного балансного уравнения

$$\frac{1}{c} \partial_t U + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0, \quad (1.79)$$

связывающего плотность энергии электромагнитного поля U с вектором плотности потока энергии \mathbf{S} . Формула (1.79) как обычно должна быть получена из соотношения

$$\frac{1}{c} (\mathbf{E} \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{B} \partial_t \mathbf{B}) + \operatorname{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = 0, \quad (1.80)$$

непосредственно следующего из уравнений Максвелла, записанных в рамках подхода Ландау — Лифшица к электродинамике непоглощающих сред. Здесь c — скорость света, $\mathbf{D} = [\mathbf{E}(\omega; \mathbf{r}) + \mathbf{P}(\omega; \mathbf{r})] \exp(-i\omega t) + \text{с.с.}$, где декартовы компоненты вектора $\mathbf{P}(\omega, \mathbf{r})$ задаются соотношением (1.76). Содержащие вектор \mathbf{B} слагаемые в (1.80) легко преобразуются в части выражений для входящих в формулу (1.79) U и \mathbf{S} без каких-либо дополнительных условий.

Получим условия, при которых первое слагаемое в (1.80) имеет вид дивергенции некоторого вектора и, следовательно, может быть включено в формулу для плотности потока энергии \mathbf{S} , т.е. имеет место тождество

$$\begin{aligned} & \left(\chi_{ij} E_j + \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_{ij i_1 i_2 \dots i_p} \partial_{i_1 i_2 \dots i_p} E_j \right) E_i^* - \\ & - \left(\chi_{ji}^* E_i^* + \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_{ji i_1 i_2 \dots i_p}^* \partial_{i_1 i_2 \dots i_p} E_i^* \right) E_j = \\ & = \partial_k \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{ij i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_n}^{(m,n)} \partial_{i_1 i_2 \dots i_m} E_i^* \partial_{j_1 j_2 \dots j_n} E_j \right), \end{aligned} \quad (1.81)$$

где $k = x, y, z$. Здесь и далее мы используем свойства тензоров локальной и нелокальной оптической восприимчивости, согласно которым $\chi_{ji}^*(\omega; \mathbf{r}) = \chi_{ij}(-\omega; \mathbf{r})$ и $\gamma_{ji i_1 i_2 \dots i_p}^*(\omega; \mathbf{r}) = \gamma_{ij i_1 i_2 \dots i_p}(-\omega; \mathbf{r})$ (1.2)–(1.3). Компоненты тензоров $A_{ij i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_n}^{(m,n)}$ в (1.81) зависят исключительно от $\chi_{ij}(\omega; \mathbf{r})$, $\gamma_{ij i_1 i_2 \dots i_p}(\omega; \mathbf{r})$ и их пространственных производных. Если при каких-то m и n в последовательности индексов $i_1 i_2 \dots i_m$ ($j_1 j_2 \dots j_n$) номер последнего индекса оказывается меньше номера первого, то упомянутая последовательность индексов в $A_{ij i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_n}^{(m,n)}$ считается отсутствующей.

Дифференцируя правую часть (1.81) и приравнявая коэффициенты при одинаковых комбинациях полей и их пространственных производных, получаем соотношения:

$$\chi_{ij}(\omega; \mathbf{r}) - \chi_{ji}^*(\omega; \mathbf{r}) = \partial_k A_{ijk}^{(0,0)}, \quad (1.82)$$

$$\gamma_{ij i_1 i_2 \dots i_p}(\omega; \mathbf{r}) = A_{ij i_1 \dots i_{p-1} i_p}^{(0,p-1)} + \partial_k A_{ij i_1 i_2 \dots i_p k}^{(0,p)}, \quad (1.83)$$

$$\gamma_{ji i_1 i_2 \dots i_p}^*(\omega; \mathbf{r}) = -A_{ij i_1 i_2 \dots i_{p-1} i_p}^{(p-1,0)} - \partial_k A_{ij i_1 i_2 \dots i_p k}^{(p,0)}, \quad (1.84)$$

а также цепочку равенств

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_k A_{ij i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_n k}^{(m,n)} + A_{ij i_1 i_2 \dots i_{m-1} j_1 j_2 \dots j_n i_m}^{(m-1,n)} + \\ &+ A_{ij i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_{n-1} j_n}^{(m,n-1)} \end{aligned} \quad (1.85)$$

справедливую для всех $m \geq 1$ и $n \geq 1$.

Используя последовательно записанные формулы (1.83)–(1.84) для $p = 1, 2, \dots$, можно переписать равенство (1.82) в виде:

$$\begin{aligned} \chi_{ij}(\omega; \mathbf{r}) - \chi_{ji}^*(\omega; \mathbf{r}) &= \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} \partial_{i_1 i_2 \dots i_p} \gamma_{ij i_1 i_2 \dots i_p}(\omega; \mathbf{r}) = \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \partial_{i_1 i_2 \dots i_p} \gamma_{ji i_1 i_2 \dots i_p}^*(\omega; \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (1.86)$$

являющемся соотношением внутренней симметрии для компонент тензора локальной линейной восприимчивости неоднородной среды. В случае однородной среды пространственные производные обращаются в нуль и (1.86) совпадает с хорошо известным соотношением внутренней симметрии $\chi_{ij}(\omega) - \chi_{ji}^*(\omega) = 0$ для компонент независящего от пространственных координат тензора $\chi_{ij}(\omega)$ [16].

Записав последовательно формулу (1.85) для каждого фиксированного m из $m = 1, 2, 3, \dots$ и $n = 1, 2, \dots$, легко получить с их помощью из (1.83), (1.84) равенство

$$\begin{aligned} & \gamma_{jji_1i_2\dots i_p}(\omega; \mathbf{r}) - (-1)^p \gamma_{jii_1i_2\dots i_p}^*(\omega; \mathbf{r}) = \\ & = \sum_{s=0}^p (-1)^s \partial_k A_{ijj_i p i_{p+1} \dots i_{p-s+1} i_1 i_2 \dots i_{p-s} k}^{(s, p-s)} \end{aligned} \quad (1.87)$$

Чтобы из него получить соотношения внутренней симметрии для компонент тензора нелокальной линейной восприимчивости, с помощью (1.85) в этом выражении нужно выразить $A_{ijj_i p i_{p+1} \dots i_{p-s+1} i_1 i_2 \dots i_{p-s} k}^{(s, p-s)}$ через компоненты тензоров $\hat{A}^{(p+q, 0)}$ и $\hat{A}^{(0, p+q)}$, где $q = 0, 1, 2, \dots$, а затем, используя (1.83) и (1.84), выразить компоненты этих тензоров через компоненты тензоров нелокальных оптических восприимчивостей $p+q+3$ рангов. В свою очередь, каждая из этих компонент может быть выражена через компоненты тензоров $\hat{A}^{(p+q+1, 0)}$ и $\hat{A}^{(0, p+q+1)}$. В результате последовательного применения (1.85), (1.83) и (1.84) соотношения внутренней симметрии для компонент тензора нелокальной линейной восприимчивости $p+2$ ранга ($p = 1, 2, \dots$) для неоднородной среды будут представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \gamma_{jji_1i_2\dots i_p}(\omega; \mathbf{r}) - (-1)^p \gamma_{jii_1i_2\dots i_p}^*(\omega; \mathbf{r}) = \\ & = \partial_k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{n+s} \sum_{m=0}^p L^{(m, n)} \times \\ & \times \partial_{k_1 k_2 \dots k_{n+s}} \gamma_{ijj_i i_2 \dots i_p k k_1 \dots k_{n+s}}(\omega; \mathbf{r}) = \\ & = (-1)^{p+1} \partial_k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{n+s} \sum_{m=0}^p L^{(m, n)} \times \\ & \times \partial_{k_1 k_2 \dots k_{n+s}} \gamma_{jii_1i_2\dots i_p k k_1 \dots k_{n+s}}^*(\omega; \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.88)$$

Здесь численный коэффициент $L^{(m, n)}$ при $n \geq 1$ задается рекуррентной формулой:

$$L^{(m, n)} = \sum_{q=0}^{m-1} L^{(m-q, n-1)}, \quad (1.89)$$

а $L^{(m, 0)} = 1$ при любом $m \geq 0$. Подчеркнем, что в правую часть (1.88) входят пространственные производные от компонент тензоров нелокальных линейных восприимчивостей всех рангов выше $p+2$. В случае однородной среды (1.88) превращается в хорошо известные перестановочные соотношения для независящих от пространственных координат компонент тензоров линейной нелокальной оптической восприимчивости [16; 52]:

$$\gamma_{jji_1i_2\dots i_p}(\omega) - (-1)^p \gamma_{jii_1i_2\dots i_p}^*(\omega) = 0. \quad (1.90)$$

В частности, для неоднородных сред соотношения внутренней симметрии для компонент часто встречающихся тензоров нелокальных линейных оптических восприимчивостей третьего ($p = 1$) и четвертого ($p = 2$) рангов оказываются значительно более сложными, чем для

однородных сред:

$$\begin{aligned}
& \gamma_{ijl_1}(\omega; \mathbf{r}) + \gamma_{jil_1}^*(\omega; \mathbf{r}) = \\
& = \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^{q+1} \left(\sum_{s=0}^q (L^{(0,s)} + L^{(1,s)}) \right) \times \\
& \times \partial_{k_1 k_2 \dots k_q} \gamma_{ijl_1 k_1 \dots k_q}(\omega; \mathbf{r}) = \\
& = \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^{q+1} \left(\sum_{s=0}^q (L^{(0,s)} + L^{(1,s)}) \right) \times \\
& \times \partial_{k_1 k_2 \dots k_q} \gamma_{jil_1 k_1 \dots k_q}^*(\omega; \mathbf{r}), \tag{1.91}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma_{ijl_1 l_2}(\omega; \mathbf{r}) - \gamma_{jil_1 l_2}^*(\omega; \mathbf{r}) = \\
& = \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^{q+1} \left(\sum_{s=0}^q (L^{(0,s)} + L^{(1,s)} + L^{(2,s)}) \right) \times \\
& \times \partial_{k_1 k_2 \dots k_q} \gamma_{ijl_1 l_2 k_1 \dots k_q}(\omega; \mathbf{r}) = \\
& = \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q \left(\sum_{s=0}^q (L^{(0,s)} + L^{(1,s)} + L^{(2,s)}) \right) \times \\
& \times \partial_{k_1 k_2 \dots k_q} \gamma_{jil_1 l_2 k_1 \dots k_q}^*(\omega; \mathbf{r}). \tag{1.92}
\end{aligned}$$

Если нелокальность оптического отклика на внешнее световое поле проявляется в области, характерный размер d которой существенно меньше длины волны $\lambda = 2\pi c/n\omega$ (n — линейный показатель преломления), то формула (1.76) является быстро сходящимся рядом. Для гиротропных сред в этом случае основную роль играет тензор $\gamma_{ijl_1}(\omega; \mathbf{r})$, связанный с псевдотензором гирации соотношением дуальности, и тензорами $\gamma_{ijl_1 l_2 \dots l_p}(\omega; \mathbf{r})$, если $p \geq 2$, можно пренебречь. Такое приближение значительно упрощает равенства (1.86) и (1.91), которые соответственно принимают вид:

$$\begin{aligned}
& \chi_{ij}(\omega; \mathbf{r}) - \chi_{ji}^*(\omega; \mathbf{r}) = \\
& = \partial_k \gamma_{ijk}(\omega; \mathbf{r}) = -\partial_k \gamma_{jik}^*(\omega; \mathbf{r}), \tag{1.93}
\end{aligned}$$

$$\gamma_{ijl_1}(\omega; \mathbf{r}) + \gamma_{jil_1}^*(\omega; \mathbf{r}) = 0. \tag{1.94}$$

С учетом (1.94) формула (1.93) сводится к равенству $\chi_{ij}^A(\omega; \mathbf{r}) = \chi_{ji}^{A*}(\omega; \mathbf{r})$, где

$$\chi_{ij}^A(\omega; \mathbf{r}) = \chi_{ij}(\omega; \mathbf{r}) - \frac{1}{2} \partial_k \gamma_{ijk}(\omega; \mathbf{r}). \tag{1.95}$$

В этом случае материальное уравнение (1.76) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
P_i(\omega; \mathbf{r}) & = \chi_{ij}^A(\omega; \mathbf{r}) E_j(\omega; \mathbf{r}) + \gamma_{ijk}^A(\omega; \mathbf{r}) \partial_k E_j(\omega; \mathbf{r}) + \\
& + \frac{1}{2} E_j(\omega; \mathbf{r}) \partial_k \gamma_{ijk}^A(\omega; \mathbf{r}), \tag{1.96}
\end{aligned}$$

где $\gamma_{ijk}^A(\omega; \mathbf{r}) = \gamma_{ijk}(\omega; \mathbf{r})$, совпадающем с точностью до обозначений с приведенным без каких-либо обоснований в [52; 59], но обеспечивающем (как было показано в [59] и в настоящей работе) выполнение закона сохранения энергии в непоглощающей среде в форме (1.79). Поэтому

третье слагаемое в материальном уравнении (1.96), записанном для неоднородных гиротропных линейных сред в рамках подхода Ландау-Лифшица и считавшееся «дополнительным», на самом деле является частью первого слагаемого в (1.76), отвечающего за локальный оптический отклик гиротропной среды в первом приближении по параметру пространственной дисперсии d/λ . Подчеркнем, что компоненты тензоров $\chi_{ij}^A(\omega; \mathbf{r})$ и $\gamma_{ijk}^A(\omega; \mathbf{r})$ выражаются через компоненты тензора $\tilde{\chi}_{ij}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ (см. формулы (1.77) и (1.78)). Но при широко распространенном переходе от тензора $\tilde{\chi}_{ij}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ к тензору, зависящему только от разности $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, часть информации о среде неизбежно теряется, что может приводить к ошибкам в материальном уравнении или введению на первый взгляд необоснованных слагаемых при попытке обобщить результаты, полученные для однородных сред, на случай неоднородных сред. В данном случае более строгий подход подтверждает угаданную авторами [52] формулу (1.96).

§ 1.5 Соотношения внутренней симметрии тензоров нелокальной нелинейной оптической восприимчивости в неоднородных средах

С учётом результата, полученного в предыдущем разделе, рассмотрим, какой вид имеют соотношения симметрии тензоров локальной и нелокальной оптической восприимчивости в нелинейной неоднородной среде. Как и в разделе 1.3, будем считать, что в среде, демонстрирующей нелинейность n -го порядка, взаимодействуют $m + 1$ волна, частоты которых $\omega_1, \dots, \omega_m, \omega_{n+1} = \sum_{i=1}^{m-1} \omega_i + (n - m + 1)\omega_m$ различны. Для простоты вывода будем считать, что только частота ω_m является вырожденной с кратностью вырождения $F(\omega_m) = n - m + 1$. Поляризация среды на каждой из частот записывается в виде:

$$P_i^{(n)}(\omega_{n+1}, \mathbf{r}) = \int \tilde{\chi}_{i i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}(\omega_{n+1}; \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) \prod_{q=1}^n E_{i_q}(\omega_q, \mathbf{r}_q) d\mathbf{r}_q, \quad (1.97)$$

$$P_i^{(n)}(\omega_l, \mathbf{r}) = \int \tilde{\chi}_{i i_1 i_2 \dots i_{l-1} i_{l+1} i_{l+2} \dots i_{n+1}}^{(n)}(\omega_l; -\omega_1, -\omega_2, \dots, -\omega_{l-1}, -\omega_{l+1}, -\omega_{l+2}, \dots, -\omega_n, \omega_{n+1}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{l-1}, \mathbf{r}_{l+1}, \mathbf{r}_{l+2}, \dots, \mathbf{r}_{n+1}) E_{i_{n+1}}(\mathbf{r}_{n+1}, \omega_{n+1}) d\mathbf{r}_{n+1} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq l}}^n E_{i_q}^*(\omega_q, \mathbf{r}_q) d\mathbf{r}_q, \quad (1.98)$$

где $l = 1, 2, \dots, m - 1$,

$$P_i^{(n)}(\omega_m, \mathbf{r}) = \int \tilde{\chi}_{i i_1 i_2 \dots i_{m-1} i_{m+1} i_{m+2} \dots i_{n+1}}^{(n)}(\omega_m; -\omega_1, -\omega_2, \dots, -\omega_{m-1}, -\omega_{m+1}, -\omega_{m+2}, \dots, -\omega_n, \omega_{n+1}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{m-1}, \mathbf{r}_{m+1}, \mathbf{r}_{m+2}, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{r}_{n+1}) \times \\ \times E_{i_{n+1}}(\omega_{n+1}; \mathbf{r}_{n+1}) d\mathbf{r}_{n+1} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq m}}^n E_{i_q}^*(\omega_q, \mathbf{r}_q) d\mathbf{r}_q, \quad (1.99)$$

Представим каждую из напряжённостей электрических полей в (1.97)–(1.99) с помощью ряда Тейлора (1.75) и ограничимся только первыми двумя слагаемыми этого ряда. В результате

материальные уравнения будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
P_i^{(n)}(\omega_{n+1}) &= \chi_{ii_1^n}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m+1}; \mathbf{r}) \prod_{p=1}^{m-1} E_{i_p}(\omega_p) \prod_{p=m}^n E_{i_p}(\omega_m) + \\
&+ \sum_{s=1}^{m-1} \gamma_{ii_1^{s-1}i_{s+1}^n i_{s+1} i_{s+1} k}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{s-1}, \bar{\omega}_{s+1}^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m+1}, \omega_s; \mathbf{r}) \times \\
&\times \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq s}}^{m-1} E_{i_p}(\omega_p) \prod_{p=m}^n E_{i_p}(\omega_m) \partial_k E_{i_s}(\omega_s) + \gamma_{ii_1^n k}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{n-m+1}; \mathbf{r}) \times \\
&\times \prod_{p=1}^{m-1} E_{i_p}(\omega_p) \prod_{p=m}^{n-1} E_{i_p}(\omega_m) \partial_k E_{i_n}(\omega_m), \tag{1.100}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_i^{(n)}(\omega_l) &= \chi_{ii_1^{l-1}i_{l+1}^{n+1}}^{(n)}(\omega_l; -\bar{\omega}_1^{l-1}, -\bar{\omega}_{l+1}^{m-1}, -\tilde{\omega}_m^{n-m+1}, \omega_{n+1}; \mathbf{r}) E_{i_{n+1}}(\omega_{n+1}) \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq l}}^{m-1} E_{i_p}^*(\omega_p) \times \\
&\times \prod_{p=m}^n E_{i_p}^*(\omega_m) + \gamma_{ii_1^{l-1}i_{l+1}^n i_{n+1} k}^{(n)}(\omega_l; -\bar{\omega}_1^{l-1}, -\bar{\omega}_{l+1}^{m-1}, -\tilde{\omega}_m^{n-m+1}, \omega_{n+1}; \mathbf{r}) \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq l}}^{m-1} E_{i_p}^*(\omega_p) \times \\
&\times \prod_{p=m}^n E_{i_p}^*(\omega_m) \partial_k E_{i_{n+1}}(\omega_{n+1}) + \sum_{s=1}^{l-1} \gamma_{ii_{n+1} i_1^{s-1} i_{s+1}^{l-1} i_{l+1}^n i_{s+1} i_{s+1} k}^{(n)}(\omega_l; \omega_{n+1}, -\bar{\omega}_1^{s-1}, -\bar{\omega}_{s+1}^{l-1}, -\bar{\omega}_{l+1}^{m-1}, \\
&-\tilde{\omega}_m^{n-m+1}, -\omega_s; \mathbf{r}) E_{i_{n+1}}(\omega_{n+1}) \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq s, l}}^{m-1} E_{i_p}^*(\omega_p) \prod_{p=m}^n E_{i_p}^*(\omega_m) \partial_k E_{i_s}^*(\omega_s) + \\
&+ \sum_{s=l+1}^{m-1} \gamma_{ii_{n+1} i_1^{l-1} i_{l+1}^{s-1} i_{s+1}^n i_{s+1} i_{s+1} k}^{(n)}(\omega_l; \omega_{n+1}, -\bar{\omega}_1^{l-1}, -\bar{\omega}_{l+1}^{s-1}, -\bar{\omega}_{s+1}^{m-1}, -\tilde{\omega}_m^{n-m+1}, -\omega_s; \mathbf{r}) E_{i_{n+1}}(\omega_{n+1}) \times \\
&\times \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq l, s}}^{m-1} E_{i_p}^*(\omega_p) \prod_{p=m}^n E_{i_p}^*(\omega_m) \partial_k E_{i_s}^*(\omega_s) + \gamma_{ii_{n+1} i_1^{l-1} i_{l+1}^n k}^{(n)}(\omega_l; \omega_{n+1}, -\bar{\omega}_1^{l-1}, -\bar{\omega}_{l+1}^{m-1}, -\tilde{\omega}_m^{n-m+1}; \mathbf{r}) \times \\
&\times E_{i_{n+1}}(\omega_{n+1}) \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq l}}^{m-1} E_{i_p}^*(\omega_p) \prod_{p=m}^{n-1} E_{i_p}^*(\omega_m) \partial_k E_{i_n}^*(\omega_m), \tag{1.101}
\end{aligned}$$

при $l < m$, и

$$\begin{aligned}
P_i^{(n)}(\omega_m) &= \chi_{i_1^{m-1} i_{m+1}^{n+1}}^{(n)}(\omega_m; -\bar{\omega}_1^{m-1}, -\tilde{\omega}_m^{n-m}, \omega_{n+1}; \mathbf{r}) E_{i_{n+1}}(\omega_{n+1}) \prod_{p=1}^{m-1} E_{i_p}^*(\omega_p) \times \\
&\times \prod_{p=m+1}^n E_{i_p}^*(\omega_m) + \gamma_{i_1^{m-1} i_{m+1}^{n+1} k}^{(n)}(\omega_m; -\bar{\omega}_1^{m-1}, -\tilde{\omega}_m^{n-m}, \omega_{n+1}; \mathbf{r}) \prod_{p=1}^{m-1} E_{i_p}^*(\omega_p) \times \\
&\times \prod_{p=m+1}^n E_{i_p}^*(\omega_m) \partial_k E_{i_{n+1}}(\omega_{n+1}) + \sum_{s=1}^{m-1} \gamma_{i_{n+1} i_1^{s-1} i_{s+1}^{m-1} i_{m+1}^n i_s k}^{(n)}(\omega_m; \omega_{n+1}, -\bar{\omega}_1^{s-1}, \\
&-\bar{\omega}_{s+1}^{m-1}, -\tilde{\omega}_m^{n-m}, -\omega_s) E_{i_{n+1}}(\omega_{n+1}) \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq s}}^{m-1} E_{i_p}^*(\omega_p) \prod_{p=m+1}^n E_{i_p}^*(\omega_m) \partial_k E_{i_s}^*(\omega_s) + \\
&+ \gamma_{i_{n+1} i_1^{m-1} i_{m+1}^n k}^{(n)}(\omega_m; \omega_{n+1}, -\bar{\omega}_1^{m-1}, -\tilde{\omega}_m^{n-m}; \mathbf{r}) E_{i_{n+1}}(\omega_{n+1}) \prod_{p=1}^{m-1} E_{i_p}^*(\omega_p) \times \\
&\times \prod_{p=m+1}^{n-1} E_{i_p}^*(\omega_m) \partial_k E_{i_n}^*(\omega_m). \tag{1.102}
\end{aligned}$$

Материальные уравнения (1.97)–(1.99) обобщают использованные ранее материальные уравнения (1.44)–(1.46) для неоднородных сред, а также учитывают локальную компоненту нелинейной поляризации среды.

Повторим проведённые в разделе 1.3 преобразования, используя материальные уравнения (1.97)–(1.99). Уравнение (1.40) должно быть преобразовано к однородному балансному уравнению (1.42). Подставив выражения для векторов $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ (формула (1.36)), $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ (формула (1.37)) и $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ (формулы (1.38) и (1.39) с учётом равенств (1.97), (1.98) и (1.99)) в (1.40), легко убедиться, что полученное равенство может быть записано в виде (1.42), если внутренняя симметрия тензоров $\hat{\chi}^{(n)}$ и $\hat{\gamma}^{(n)}$ позволяет определить компоненты вспомогательного тензора $A_{i_1^{n+1} k}(\hat{\chi}^{(n)}, \hat{\gamma}^{(n)}, \bar{\omega}_1^{m-1}, \omega_m, \omega_{n+1}, \mathbf{r})$, обеспечивающего выполнение равенства:

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^m i\omega_l E_{i_l}(\omega_l) P_{i_l}^{(n)*}(\omega_l) - i\omega_{n+1} E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) P_{i_{n+1}}^{(n)}(\omega_{n+1}) = \\
&= \partial_k \left(A_{i_1^{n+1} k} \prod_{p=1}^{m-1} E_{i_p}(\omega_p) \prod_{p=m}^n E_{i_p}(\omega_m) E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) \right). \tag{1.103}
\end{aligned}$$

В то же время неоднородность среды приводит к тому, что закон сохранения импульса (1.43) должен содержать связанную с неоднородностью среды плотность сил \mathbf{f} [2; 9], в связи с чем уравнение (1.41) должно быть сведено к неоднородному балансному уравнению:

$$\frac{1}{2} \partial_t g_i + \partial_j G_{ij} = f_i. \tag{1.104}$$

Подстановка выражений для векторов $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ (формула (1.36)), $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ (формула (1.37)) и $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ (формулы (1.38) и (1.39) с учётом равенств (1.97), (1.98) и (1.99)) в (1.41) позволяет преобразовать полученное выражение к виду (1.104), если могут быть определены такие тензоры $B_{i_1^{n+1} k}(\hat{\chi}^{(n)}, \hat{\gamma}^{(n)}, \bar{\omega}_1^{m-1}, \omega_m, \omega_{n+1}, \mathbf{r})$ и $C_{i_1^{n+1}}(\hat{\chi}^{(n)}, \hat{\gamma}^{(n)}, \bar{\omega}_1^{m-1}, \omega_m, \omega_{n+1}, \mathbf{r})$, которые удо-

влетворяют равенству:

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^m P_{i_l}^{(n)*}(\omega_l) \partial_p E_{i_l}(\omega_l) + P_{i_{n+1}}^{(n)}(\omega_{n+1}) \partial_p E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) = \\
& = \partial_p \left(C_{i_1^{n+1}} E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) \prod_{q=1}^{m-1} E_{i_q}(\omega_q) \prod_{q=m}^n E_{i_q}(\omega_m) + \right. \\
& + \sum_{l=1}^{m-1} B_{i_1^{n+1}k}^{(l)} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq l}}^{m-1} E_{i_q}(\omega_q) \prod_{q=m}^n E_{i_q}(\omega_m) E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) \partial_k E_{i_l}(\omega_l) + \\
& + B_{i_1^{n+1}k}^{(m)} \prod_{q=1}^{m-1} E_{i_q}(\omega_q) \prod_{q=m}^{n-1} E_{i_q}(\omega_m) E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) \partial_k E_{i_n}(\omega_m) + \\
& \left. + B_{i_1^{n+1}k}^{(n+1)} \prod_{q=1}^{m-1} E_{i_q}(\omega_q) \prod_{q=m}^n E_{i_q}(\omega_m) \partial_k E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) \right) - \\
& - \partial_k \left(\sum_{l=1}^{m-1} B_{i_1^{n+1}k}^{(l)} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq l}}^{m-1} E_{i_q}(\omega_q) \prod_{q=m}^n E_{i_q}(\omega_m) E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) \partial_p E_{i_l}(\omega_l) + \right. \\
& + B_{i_1^{n+1}k}^{(m)} \prod_{q=1}^{m-1} E_{i_q}(\omega_q) \prod_{q=m}^{n-1} E_{i_q}(\omega_m) E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) \partial_p E_{i_n}(\omega_m) + \\
& \left. + B_{i_1^{n+1}k}^{(n+1)} \prod_{q=1}^{m-1} E_{i_q}(\omega_q) \prod_{q=m}^n E_{i_q}(\omega_m) \partial_p E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) \right) - \\
& - \left(E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) \prod_{q=1}^{m-1} E_{i_q}(\omega_q) \prod_{q=m}^n E_{i_q}(\omega_m) \partial_p C_{i_1^{n+1}} + \right. \\
& + \sum_{l=1}^{m-1} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq l}}^{m-1} E_{i_q}(\omega_q) \prod_{q=m}^n E_{i_q}(\omega_m) E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) \partial_k E_{i_l}(\omega_l) \partial_p B_{i_1^{n+1}k}^{(l)} + \\
& + \prod_{q=1}^{m-1} E_{i_q}(\omega_q) \prod_{q=m}^{n-1} E_{i_q}(\omega_m) E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) \partial_k E_{i_n}(\omega_m) \partial_p B_{i_1^{n+1}k}^{(m)} + \\
& \left. + \prod_{q=1}^{m-1} E_{i_q}(\omega_q) \prod_{q=m}^n E_{i_q}(\omega_m) \partial_k E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) \partial_p B_{i_1^{n+1}k}^{(n+1)} \right). \tag{1.105}
\end{aligned}$$

Последнее слагаемое в правой части (1.105) устроено таким образом, чтобы после дифференцирования остальных слагаемых в ней не содержалось слагаемых, в которых отсутствуют пространственные производные ∂_p компонент напряжённостей электрических полей.

Система уравнений для компонент тензора \hat{A} получается в результате дифференцирования правой части (1.103) и приравнивания коэффициентов при одинаковых произведениях напряжённостей электрических полей и их пространственных производных. Наличие в (1.103) тензора $\hat{\chi}^{(n)}$ и зависимость компонент тензора \hat{A} от пространственных координат добавляет в эту систему ровно одно новое уравнение, которого не было при рассмотрении (1.47). Система уравнений для компонент тензоров \hat{B} и \hat{C} получается в результате дифференцирования правой части (1.105) и приравнивания коэффициентов при одинаковых произведениях напряжённостей электрических полей и их пространственных производных. В результате

учёта локального нелинейного отклика и неоднородности среды эта система содержит на $m + 1$ уравнений больше, чем система, определяющая независимый от пространственных координат тензор \hat{B} в (1.105). При этом остальные уравнения в системах, определяющих компоненты тензоров \hat{A} и \hat{B} остаются такими же, как и в однородных средах. В результате внутренняя симметрия тензора нелокальной нелинейной оптической восприимчивости $\hat{\gamma}^{(n)}$ по-прежнему определяются уравнениями (1.48), (1.55), (1.56) и (1.58). Новые уравнения, возникающие в неоднородной среде, приводят только к изменению внутренней симметрии тензора локальной нелинейной оптической восприимчивости $\hat{\chi}^{(n)}$, выражающейся следующими равенствами:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{F(-\omega_{n+1})} \chi_{i_{n+1}i_1^{(n)}}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{(n-m+1)}; \mathbf{r}) - \\ & - \frac{1}{F(\omega_l)} \chi_{ii_1^{l-1}i_{l+1}^{n+1}}^{(n)}(-\omega_l; \bar{\omega}_1^{l-1}, \bar{\omega}_{l+1}^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{(n-m+1)}, -\omega_{n+1}; \mathbf{r}) = \\ & = \frac{1}{2F(-\omega_{n+1})F(\omega_l)} \partial_k \left[\gamma_{i_{n+1}i_1^{l-1}i_{l+1}^n i_l k}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{l-1}, \bar{\omega}_{l+1}^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{(n-m+1)}, \omega_l; \mathbf{r}) - \right. \\ & \left. - \gamma_{ii_1^{l-1}i_{l+1}^n i_{n+1}k}^{(n)}(-\omega_l; \bar{\omega}_1^{l-1}, \bar{\omega}_{l+1}^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{(n-m+1)}, -\omega_{n+1}; \mathbf{r}) \right]. \end{aligned} \quad (1.106)$$

Соотношение (1.106) может рассматриваться как обобщение соотношения (1.93) на случай нелинейных неоднородных сред.

Основные результаты первой главы

Получены соотношения внутренней симметрии тензора нелокальной нелинейной оптической восприимчивости, обеспечивающие выполнение законов сохранения энергии и импульса электромагнитного поля, распространяющегося в однородной непоглощающей среде с нелокальностью нелинейного оптического отклика. Показано, что компоненты тензора нелокальной оптической восприимчивости, первая частота в частотном аргументе которых равна по модулю и противоположна по знаку последней частоте в частотном аргументе, равны нулю. В неоднородных средах с нелокальностью оптического отклика соотношения внутренней симметрии тензоров локальной и нелокальных оптических восприимчивостей включают в себя пространственные производные тензоров нелокальных оптических восприимчивостей более высоких порядков. Последнее свойство тензоров оптических восприимчивостей позволяет использовать материальные уравнения в форме Ландау-Лифшица для описания оптических процессов в неоднородных средах с нелокальностью оптического отклика без искусственного добавления дополнительных слагаемых, обеспечивающих выполнение закона сохранения энергии.

Глава 2

Законы сохранения энергии и импульса электромагнитного поля в средах с нелокальностью нелинейного оптического отклика

§ 2.1 Энергия и импульс электромагнитного поля в сплошных средах: обзор литературы

Законы сохранения энергии и импульса являются одними из фундаментальных законов физики. В теоретической физике их выполнение связано с инвариантностью физических систем относительно сдвигов во времени и пространстве соответственно [2]. В электродинамике эти законы сохранения имеют форму балансных уравнений [6; 55; 58], связывающих плотности энергии и импульса с плотностями их потоков. При этом условием сохранения энергии электромагнитного поля является стационарность среды, в которой оно распространяется, а условием сохранения импульса поля — однородность среды. Плотность энергии U , вектор плотности потока энергии (вектор Пойнтинга) \mathbf{S} , вектор плотности импульса \mathbf{g} и тензор плотности потока импульса (тензор напряжений Максвелла) \hat{G} образуют единую величину — тензор энергии-импульса \hat{T} [7].

Законы сохранения энергии и импульса электромагнитного поля следуют непосредственно из уравнений Максвелла [6; 55; 58]. Из этого следует, что оптический отклик среды существенно образом влияет на вид величин, входящих в эти законы сохранения. Вопрос о том, каким образом должен быть записан тензор энергии-импульса электромагнитного поля в среде, имеет долгую историю, начинающуюся с работ Минковского [90] и Абрагама [91; 92]. В подходе Минковского тензор энергии-импульса электромагнитного поля строится таким образом, чтобы в однородной непоглощающей среде законы сохранения энергии и импульса имели вид однородных балансных уравнений. Особенностью получаемого таким образом тензора энергии-импульса является его асимметричность, в результате чего в общем случае угловой момент электромагнитного поля не сохраняется несмотря на отсутствие внешних сил, действующих на поле [93]. В подходе Абрагама в однородной непоглощающей среде только закон сохранения энергии является однородным, тогда как плотность и плотность потока импульса строятся таким образом, чтобы тензор энергии-импульса был симметричным. В этом случае закон сохранения импульса содержит также плотность сил, известную как

силы Абрагама. Существуют и другие выражения для компонент тензора энергии-импульса электромагнитного поля в среде, обусловленные различными физическими соображениями, однако именно выражения Абрагама и Минковского остаются наиболее значимыми [55]. В ряде работ [17; 55] было показано, что импульс электромагнитного поля в форме Абрагама имеет смысл кинетического импульса, то есть импульса, определяющего движение среды под действием света, тогда как импульс электромагнитного поля в форме Минковского является каноническим импульсом, то есть величиной, закон сохранения которой является следствием трансляционной симметрии среды.

Далее мы ограничимся рассмотрением только тензора энергии-импульса в подходе Минковского. Рассмотрим наиболее известные в литературе формы компонент этого тензора энергии-импульса электромагнитного поля в диэлектриках с различными особенностями оптического отклика. В первую очередь, приведём выражения для компонент тензора энергии-импульса Минковского в линейной недиспергирующей среде:

$$U = \frac{1}{2} (D_i E_i + B_i B_i), \quad (2.1)$$

$$S_i = e_{ijk} E_j B_k, \quad (2.2)$$

$$g_i = e_{ijk} D_j B_k, \quad (2.3)$$

$$G_{ij} = \delta_{ij} U - E_i D_j - B_i B_j. \quad (2.4)$$

Здесь, как и в первой главе, считается, что напряжённость магнитного поля равна его индукции, а индукция электрического поля связана с его напряжённостью соотношением $D_i = \varepsilon_{ij} E_j$. Выражения (2.1)–(2.4) являются хорошо известным результатом электродинамики, и именно они чаще всего рассматриваются в споре между сторонниками форм Минковского и Абрагама [6; 16; 17; 55; 90].

При учёте частотной и пространственной дисперсии линейной среды плотность энергии электромагнитного поля в ней задаётся формулой Бриллюэна [5; 16; 52]:

$$U = \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})) E_i^*(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}) + B_i^*(\omega, \mathbf{k}) B_j(\omega, \mathbf{k}). \quad (2.5)$$

При получении этой формулы считается, что индукция электрического поля задаётся общей формулой:

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \varepsilon_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') E_j(\mathbf{r}', t'), \quad (2.6)$$

в которой считается, что поле $E_j(\mathbf{r}', t')$ имеет вид

$$E_j(\mathbf{r}', t') = E_i(\omega, \mathbf{k}) e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} + \text{с.с.}, \quad (2.7)$$

и амплитуда $E_i(\omega, \mathbf{k})$, зависящая также от пространственных координат \mathbf{r} и времени t , имеет узкий пространственный и частотный спектры. Соответствующие плотности энергии (2.5)

компоненты тензора энергии-импульса также преобразуются к более сложному виду [5; 52]:

$$S_i = e_{ijk} (E_j(\omega, \mathbf{k})B_k^*(\omega, \mathbf{k}) + E_j^*(\omega, \mathbf{k})B_k(\omega, \mathbf{k})) - \frac{\omega}{c} \frac{\partial}{\partial k_i} \varepsilon_{jk}(\omega, \mathbf{k}) E_j^*(\omega, \mathbf{k}) E_k(\omega, \mathbf{k}), \quad (2.8)$$

$$g_i = e_{ijk} (\varepsilon_{jl}(\omega, \mathbf{k}) E_l(\omega, \mathbf{k}) B_k^*(\omega, \mathbf{k}) + \varepsilon_{jl}^*(\omega, \mathbf{k}) E_l^*(\omega, \mathbf{k}) B_k(\omega, \mathbf{k})) + ck_i \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_{jk}(\omega, \mathbf{k}) E_j^*(\omega, \mathbf{k}) E_l(\omega, \mathbf{k}), \quad (2.9)$$

$$G_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} (2B_k^*(\omega, \mathbf{k}) B_k(\omega, \mathbf{k}) + \varepsilon_{kl}(\omega, \mathbf{k}) E_l(\omega, \mathbf{k}) E_k^*(\omega, \mathbf{k}) + \varepsilon_{kl}^*(\omega, \mathbf{k}) E_l^*(\omega, \mathbf{k}) E_k(\omega, \mathbf{k})) - E_i^*(\omega, \mathbf{k}) \varepsilon_{jk}(\omega, \mathbf{k}) E_k(\omega, \mathbf{k}) - E_i(\omega, \mathbf{k}) \varepsilon_{jk}^*(\omega, \mathbf{k}) E_k^*(\omega, \mathbf{k}) - B_i^*(\omega, \mathbf{k}) B_j(\omega, \mathbf{k}) - B_i(\omega, \mathbf{k}) B_j^*(\omega, \mathbf{k}) - k_i \frac{\partial}{\partial k_j} \varepsilon_{kl}(\omega, \mathbf{k}) E_k^*(\omega, \mathbf{k}) E_l(\omega, \mathbf{k}). \quad (2.10)$$

В этих формулах можно увидеть закономерность: учёт частотной дисперсии приводит к существенному изменению выражений для плотностей энергии и импульса, которые входят в законы сохранения под производной по времени, тогда как учёт пространственной дисперсии приводит к возникновению новых слагаемых в выражениях для плотностей потоков энергии и импульса, пространственные производные которых входят в законы сохранения. Все связанные с пространственной или частотной дисперсией среды изменения компонент тензора энергии-импульса приводят к тому, что эти выражения становятся не пропорциональными поляризации среды. Отметим, что формулы (2.5), (2.8)–(2.10) написаны в форме, соответствующей подходу Минковского, и указанная закономерность не имеет места в подходе Абрагама [5].

Использование формул (2.5)–(2.10) предполагает, что известен вид зависимости диэлектрической проницаемости среды $\hat{\varepsilon}$ как от частоты ω , так и от волнового вектора \mathbf{k} . Как уже было сказано в первой главе, вместо материального уравнения (2.6) обычно используют приближённые материальные уравнения, получаемые разложением электрического поля под интегралом в ряд Тейлора (1.75)–(1.76). В первом порядке по малому параметру пространственной дисперсии выражения для плотности и плотности потока энергии электромагнитного поля в гиротропной среде без частотной дисперсии были получены в работах [59–62] в следующем виде:

$$U = \frac{1}{2} (E_i (\varepsilon_{ij} E_j + \gamma_{ijk} \partial_k E_j) + B_i B_i), \quad (2.11)$$

$$S_i = e_{ijk} E_j B_k + (2c)^{-1} \gamma_{jki} E_j \partial_t E_k. \quad (2.12)$$

Индукция электрического поля в этом случае определяется выражением $D_i = \varepsilon_{ij} E_j + \gamma_{ijk} \partial_k E_j$. Первое слагаемое (2.11) оказывается пропорциональным индукции электрического поля, в результате чего (2.11) может быть записано в виде, формально совпадающем с первым слагаемым (2.1). В работе [94] также были получены компоненты тензора напряжений электромагнитного поля в гиротропной среде при описании её с помощью симметричных материальных уравнений в первом порядке по малому параметру пространственной дисперсии. В отличие от формул (2.11)–(2.12), получаемых непосредственно из уравнений Максвелла, в [94] результат был получен на основе анализа функции Лагранжа электромагнитного поля в линейной

гиротропной среде. Ввиду использования авторами обозначений, удобных именно при таком подходе, мы не будем воспроизводить здесь этот результат. Отметим, что подобно (2.10), этот результат также содержит слагаемые, не пропорциональные поляризации среды.

Для нелинейных сред без пространственной и частотной дисперсии все компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля были получены в работах [19; 56] на основе анализа функции Лагранжа [95]. Авторы этих работ использовали так называемый дуальный векторный потенциал $\boldsymbol{\psi}$, с помощью которого индукция электрического поля выражается как $\mathbf{D} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}$, а индукция магнитного поля как $\mathbf{B} = -\frac{1}{c}\partial_t \boldsymbol{\psi} - \nabla \xi$, где ξ — дуальный скалярный потенциал. Учёт нелинейности оптического отклика среды приводит к изменению всех компонент тензора энергии-импульса кроме плотности потока энергии, которая выражается с помощью (2.1). Выражение для плотности импульса с учётом нелинейной поляризации среды остаётся пропорциональным индукции электрического поля. Плотность энергии и диагональные компоненты плотности потока импульса оказываются представленными через суммы по порядкам нелинейности оптического отклика, каждое из слагаемых в которых содержит численный коэффициент, зависящий от порядка нелинейности.

§ 2.2 Тензор энергии-импульса электромагнитного поля при невырожденных по частотам нелинейных процессах в средах с нелокальностью оптического отклика

В однородной непоглощающей среде из уравнений Максвелла, в которых индукция магнитного поля \mathbf{B} считается равной его напряжённости \mathbf{H} , а индукция электрического поля \mathbf{D} связана с его напряженностью \mathbf{E} материальным уравнением (1.13), запишем непосредственно следующие из них равенства [5; 6; 55; 96; 97]:

$$\frac{1}{c}\mathbf{E}\partial_t\mathbf{D} + \frac{1}{c}\mathbf{B}\partial_t\mathbf{B} + \operatorname{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{c}\partial_t[\mathbf{D} \times \mathbf{B}] + \mathbf{D} \times \nabla \times \mathbf{E} + \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B} = 0. \quad (2.14)$$

Из (2.13)–(2.14) можно получить уравнения

$$\frac{1}{c}\partial_t U + \operatorname{div}\mathbf{S} = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{c}\partial_t g_i + \partial_j G_{ij} = 0, \quad (2.16)$$

отражающие, соответственно, законы сохранения энергии и импульса электромагнитного поля [2]. В (2.15), (2.16) U — плотность энергии, \mathbf{S} — вектор Пойнтинга, \mathbf{g} — плотность импульса, \hat{G} — тензор плотности потока импульса или тензор напряжений. С помощью тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$, где индексы α и β принимают значения 0, x , y и z , уравнения (2.15)–(2.16) могут быть записаны в виде одного однородного балансного уравнения [2]. Компоненты тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ связаны с U , \mathbf{S} , \mathbf{g} и \hat{G} равенствами: $T_{00} = U$, $T_{i0} = S_i$, $T_{0j} = g_j$,

$T_{ij} = G_{ij}$. Тензор энергии-импульса, определяемый уравнениями (2.15)–(2.16), соответствует подходу Минковского.

В выражение для индукции электрического поля вносимые, обусловленные, соответственно, линейной и нелинейными составляющими поляризации среды, входят аддитивно [15; 74–76]. Более того, каждое из этих слагаемых состоит из суммы локальной и нелокальной составляющих поляризации. Это позволяет записать входящие в (2.15)–(2.16) величины следующим образом:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} (U^{(n,loc)} + U^{(n,nloc)}), \quad (2.17)$$

$$\mathbf{S} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{S}^{(n,loc)} + \mathbf{S}^{(n,nloc)}), \quad (2.18)$$

$$g_i = \sum_{n=1}^{\infty} (g_i^{(n,loc)} + g_i^{(n,nloc)}), \quad (2.19)$$

$$G_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} (G_{ij}^{(n,loc)} + G_{ij}^{(n,nloc)}). \quad (2.20)$$

Целью настоящей главы является нахождение аналитических выражений для поправок $U^{(n)}$, $S_i^{(n)}$, $g_j^{(n)}$ и $G_{ij}^{(n)}$ к компонентам тензора энергии-импульса Минковского, обусловленных проявлением локального и нелокального нелинейного оптического отклика среды n -го порядка

В среде, наиболее сильно проявляющей оптическую нелинейность n порядка ($n \geq 2$), электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ определяется напряжённостями полей распространяющихся в ней волн:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{m=1}^{n+1} \mathbf{E}^{(m)}(\mathbf{r}, t) + \text{c.c.} = \\ &= \sum_{m=1}^{n+1} \tilde{\mathbf{E}}^{(m)}(\mathbf{r}, t, \omega_m) e^{-i\omega_m t} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Здесь $\omega_{n+1} = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$, $\omega_{1,2,\dots,n}$ — частоты распространяющихся волн, не равные друг другу и не являющиеся кратными, $\mathbf{E}^{(m)}(\mathbf{r}, t)$ — электрическое поле волны с центральной частотой ω_m . Частотный спектр медленно меняющихся во времени амплитуд $\tilde{\mathbf{E}}^{(m)}(\mathbf{r}, t, \omega_m)$ каждой из $n + 1$ распространяющихся волн будем считать достаточно узким, чтобы можно было пренебречь частотной дисперсией среды вблизи их центральных частот. Действительность напряженности электрического поля приводит к равенству $\mathbf{E}^{(m)} = \mathbf{E}^{(-m)*}$.

Индукция нелинейной среды записывается в виде:

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon} \mathbf{E} + \hat{\gamma}^{(1)} \nabla \mathbf{E} + \mathbf{P}^{(n,loc)} + \mathbf{P}^{(n,nloc)}, \quad (2.22)$$

где локальная $\mathbf{P}^{(n,loc)}$ и нелокальная $\mathbf{P}^{(n,nloc)}$ составляющие нелинейной поляризации среды определяются материальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(n,loc),(n,nloc)}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{m=1}^{n+1} \mathbf{P}^{(n,loc),(n,nloc)}(\omega_m, \mathbf{r}, t) + \text{c.c.} = \\ &= \sum_{m=1}^{n+1} \tilde{\mathbf{P}}^{(n,loc),(n,nloc)}(\mathbf{r}, t, \omega_m) e^{-i\omega_m t} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Здесь $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\gamma}^{(1)}$ — тензоры линейной диэлектрической проницаемости и нелокальной восприимчивости среды соответственно. Входящая в (2.23) локальная часть $\mathbf{P}^{(n,loc)}(\omega_m)$ комплексной поляризации среды на частоте ω_m задается уравнениями [15; 74–76]:

$$P_i^{(n,loc)}(\omega_m) = \chi_{ii_1^{m-1}i_{m+1}^n}^{(n)}(\omega_m; -\bar{\omega}_1^{m-1}, -\bar{\omega}_{m+1}^n, \omega_{n+1}) E_{i_n}^{(n+1)} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^n E_{i_k}^{(k)*} \quad (2.24)$$

при $m = 1, 2, \dots, n$ и

$$P_i^{(n,loc)}(\omega_{n+1}) = \chi_{ii_1^n}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{n+1}) \prod_{k=1}^n E_{i_k}^{(k)} \quad (2.25)$$

при $m = n + 1$. От материальных уравнений (1.23) и (2.25) эти уравнения отличаются тем, что уравнения (1.23) и (2.25) связывают медленно меняющиеся амплитуды напряжённости электрического поля и поляризации среды, тогда как (2.24) и (2.25) связывают компоненты вектора поляризации среды на каждой из частот взаимодействующих волн с компонентами вектора электрического поля, создаваемого этими волнами. Нелокальная часть $\mathbf{P}^{(n,nloc)}(\omega_m)$ комплексной поляризации среды на частоте ω_m в первом приближении по параметру пространственной дисперсии записывается в виде (см. [53] и (1.17), (1.24)):

$$P_i^{(n,nloc)}(\omega_m) = \Gamma_{ijp}(\omega_m; \omega_{n+1}) \partial_p E_j^{(n+1)} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^n \Gamma_{ijp}(\omega_m; -\omega_s) \partial_p E_n^{(s)*}, \quad (2.26)$$

при $m = 1, 2, \dots, n$ и

$$P_i^{(n,nloc)}(\omega_{n+1}) = \sum_{m=1}^n \Gamma_{ijp}(\omega_{n+1}; \omega_m) \partial_p E_j^{(m)} \quad (2.27)$$

при $m = n + 1$. Независящие от пространственных производных напряженности электрического поля вспомогательные тензоры, входящие в (2.26)–(2.27), имеют вид:

$$\Gamma_{ijk}(\omega_{n+1}, \omega_m) = \gamma_{ii_1^{m-1}i_{m+1}^n jk}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{m-1}, \bar{\omega}_{m+1}^n, \omega_m) \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq m}}^n E_{i_p}^{(p)}, \quad (2.28)$$

$$\Gamma_{ijk}(\omega_m, -\omega_s) = \gamma_{ii_{n+1}^{l_1} i_1^{\min(l,s)-1} i_{\min(l,s)+1}^{\max(l,s)-1} i_{\max(l,s)+1}^n jk}^{(n)}(\omega_m; \omega_{n+1}, -\bar{\omega}_1^{\min(l,s)-1}, -\bar{\omega}_{\min(l,s)+1}^{\max(l,s)-1}, -\bar{\omega}_{\max(l,s)+1}^n) E_{i_{n+1}}^{(n+1)} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq m, s}}^n E_{i_{p+1}}^{(p)*}. \quad (2.29)$$

Здесь индексы m и s принимают значения от 1 до n , и $m \neq s$. Из соотношения внутренней симметрии (1.28) следует, что $\Gamma_{ijk}(\omega_m, \omega_{n+1}) = -\Gamma_{jik}(-\omega_{n+1}, -\omega_m)$. Выражение для вектора индукции магнитного поля имеет вид, аналогичный (2.21):

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{m=1}^{n+1} \mathbf{B}^{(m)}(\mathbf{r}, t) + \text{c.c.} = \\ &= \sum_{m=1}^{n+1} \tilde{\mathbf{B}}^{(m)}(\mathbf{r}, t, \omega_m) \exp(-i\omega_m t + i\mathbf{k}_m \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Материальное уравнение, связывающее векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} в нелинейной среде с нелокальностью оптического отклика, имеет достаточно сложный вид. В связи с этим, для приведения (2.13)–(2.14) к виду (2.15)–(2.16) оказывается удобным избавиться в (2.13) от слагаемого, содержащего производную $\partial_t \mathbf{D}$, переписав уравнения (2.13)–(2.14) для декартовых компонент \mathbf{E} , \mathbf{D} и \mathbf{B} в следующем виде:

$$\frac{1}{c} \partial_t (D_i E_i) - \frac{1}{c} D_i \partial_t E_i + \frac{1}{2c} \partial_t (B_i^2) + \partial_i (e_{ijk} E_j B_k) = 0, \quad (2.31)$$

$$\frac{1}{c} \partial_t (e_{pki} D_k B_i) + D_k \partial_p E_k + \frac{1}{2} \partial_p (B_k^2) - \partial_k (D_k E_p + B_k B_p) = 0. \quad (2.32)$$

При получении (2.32) были учтены равенства $\partial_i D_i = 0$ и $\partial_i B_i = 0$.

Подставим выражения для векторов \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} и \mathbf{P} в (2.31), (2.32) и проведем усреднение по времени. В результате можно сразу получить, что $S_p^{(n,loc)} = 0$ и

$$g_p^{(n,loc)} = e_{pki} \left\langle P_k^{(n,loc)} B_i \right\rangle = e_{pki} \sum_{m=1}^{n+1} P_k^{(n,loc)}(\omega_m) B_i^{(m)*} + \text{с.с.} \quad (2.33)$$

В (2.33) треугольные скобки обозначают усреднение по времени, а $P_k^{(n,loc)}(\omega_m)$ задается формулами (2.24) и (2.25). Из (2.31), (2.32) также следует, что полученные после усреднения по времени добавки к плотности энергии $U^{(n,loc)}$ и плотности потока импульса $G_{pk}^{(n,loc)}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{1}{c} \partial_t U^{(n,loc)} = \frac{1}{c} \sum_{m=1}^{n+1} \left\{ \partial_t \left[P_i^{(n,loc)}(\omega_m) E_i^{(m)*} \right] - P_i^{(n,loc)}(\omega_m) \partial_t E_i^{(m)*} \right\} + \text{с.с.}, \quad (2.34)$$

$$\partial_k G_{pk}^{(n,loc)} = \sum_{m=1}^{n+1} \left\{ P_k^{(n,loc)}(\omega_m) \partial_p E_k^{(m)*} - \partial_k \left[E_p^{(m)*} P_k^{(n,loc)}(\omega_m) \right] \right\} + \text{с.с.} \quad (2.35)$$

Для нахождения этих добавок необходимо преобразовать в уравнении (2.34) слагаемое $P_i^{(n,loc)}(\omega_m) \partial_t E_i^{(m)*}$ и в уравнении (2.35) слагаемое $P_k^{(n,loc)}(\omega_m) \partial_p E_k^{(m)*}$. Это можно сделать, используя свойства внутренней симметрии тензора $\chi_{ii_1}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^n)$, имеющие место в среде без диссипации и позволяющие переставлять местами его индексы вместе с соответствующей перестановкой частот [15; 74].

Подставим (2.24)–(2.25) в $P_i^{(n,loc)}(\omega_m) \partial_t E_i^{(m)*}$ и $P_p^{(n,loc)}(\omega_m) \partial_k E_p^{(m)*}$, переобозначим в каждом из $n + 1$ слагаемых индексы таким образом, чтобы во всех слагаемых одной и той же частоте соответствовал одинаковый индекс и проведём во входящем в каждое из них тензоре $\hat{\chi}^{(n)}$ перестановку индексов и частот так, чтобы во всех слагаемых они имели один и тот же порядок. При этом получившиеся $n + 1$ слагаемых оказываются результатом дифференцирования $E_i^{(n+1)*} P_i^{(n,loc)}(\omega_{n+1})$ по времени или координатам. Благодаря симметрии тензора $\hat{\chi}^{(n)}$ при одновременной перестановке индексов и соответствующих им частот это выражение также оказывается равным $E_i^{(m)*} P_i^{(n,loc)}(\omega_m)$ при любой частоте ω_m , что позволяет переписать $E_i^{(n+1)*} P_i^{(n,loc)}(\omega_{n+1})$ в виде суммы $\sum_{m=1}^{n+1} E_i^{(m)*} P_i^{(n,loc)}(\omega_m) / (n + 1)$. В итоге:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{n+1} P_i^{(n,loc)}(\omega_m) \partial_{j,t} E_i^{(m)*} + \text{с.с.} = \\ & = \frac{1}{n+1} \partial_{j,t} \sum_{m=1}^{n+1} E_i^{(m)*} P_i^{(n,loc)}(\omega_m) + \text{с.с.} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Соотношение (2.36) позволяет легко найти $U^{(n,loc)}$ и $G_{ij}^{(n,loc)}$ из уравнений (2.34)–(2.35):

$$U^{(n,loc)} = \frac{n}{n+1} \sum_{m=1}^{n+1} P_i^{(n,loc)}(\omega_m) E_i^{(m)*} + \text{c.c.}, \quad (2.37)$$

$$G_{pk}^{(n,loc)} = \sum_{m=1}^{n+1} \left(\frac{\delta_{pk}}{n+1} P_i^{(n,loc)}(\omega_m) E_i^{(m)*} - P_k^{(n,loc)}(\omega_m) E_p^{(m)*} \right) + \text{c.c.} \quad (2.38)$$

Подстановка выражений для векторов \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} и \mathbf{P} в уравнения (2.31)–(2.32) и усреднение результата по времени позволяют записать соотношения, которым должны удовлетворять $U^{(n,nloc)}$, $S_p^{(n,nloc)}$, $g_p^{(n,nloc)}$ и $G_{pk}^{(n,nloc)}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \partial_t U^{(n,nloc)} + \partial_p S_p^{(n,nloc)} &= \frac{1}{c} \sum_{m=1}^{n+1} \left\{ \partial_t \left[P_i^{(n,nloc)}(\omega_m) E_i^{(m)*} \right] - \right. \\ &\left. - P_i^{(n,nloc)}(\omega_m) \partial_t E_i^{(m)*} \right\} + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\frac{1}{c} \partial_t g_p^{(n,nloc)} = \frac{1}{c} \partial_t \sum_{m=1}^{n+1} e_{pkn} P_k^{(n,nloc)}(\omega_m) B_n^{(m)*} + \text{c.c.}, \quad (2.40)$$

$$\partial_k G_{pk}^{(n,nloc)} = \sum_{m=1}^{n+1} \left\{ P_k^{(n,nloc)}(\omega_m) \partial_p E_k^{(m)*} - \partial_k \left[E_p^{(m)*} P_k^{(n,nloc)}(\omega_m) \right] \right\} + \text{c.c.} \quad (2.41)$$

Из (2.40) легко получить, что

$$g_p^{(n,nloc)} = \sum_{m=1}^{n+1} e_{pki} P_k^{(n,nloc)}(\omega_m) B_i^{(m)*} + \text{c.c.} \quad (2.42)$$

Для нахождения $U^{(n,nloc)}$ и $S_i^{(n,nloc)}$ преобразуем содержащее $P_i^{(n,nloc)}(\omega_m) \partial_t E_i^{(m)*}$ слагаемое в (2.39). Это слагаемое содержит как производные по времени, так и производные по пространственным координатам, и поэтому может быть представлено в виде:

$$\frac{1}{c} \sum_{m=1}^{n+1} P_i^{(n,nloc)}(\omega_m) \partial_t E_i^{(m)*} = \frac{1}{c} \partial_t F + \partial_k R_k. \quad (2.43)$$

При этом скаляр

$$F = \frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^{n+1} P_i^{(n,nloc)}(\omega_m) E_i^{(m)*} + \text{c.c.} \quad (2.44)$$

войдет в выражение для $U^{(n,nloc)}$, а вектор \mathbf{R} , компоненты которого определяются формулой:

$$\begin{aligned} R_k &= \frac{1}{c} \frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^n \left[\Gamma_{ijk}(\omega_{n+1}; \omega_m) E_j^{(m)} \partial_t E_i^{(n+1)*} + \Gamma_{ijk}(-\omega_m; -\omega_{n+1}) E_j^{(n+1)*} \times \right. \\ &\left. \times \partial_t E_i^{(m)} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^n \Gamma_{ijk}(-\omega_m; \omega_s) E_j^{(s)} \partial_t E_i^{(m)} \right] + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

войдет в формулу для $\mathbf{S}^{(n,nloc)}$. В справедливости равенства (2.43) с (2.44) и (2.45) можно убедиться, непосредственно подставляя эти выражения в (2.43) и используя соотношения внутренней симметрии тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$ (1.28)–(1.29). В результате выражения для $U^{(n,nloc)}$ и $S_i^{(n,nloc)}$ принимают следующий вид:

$$U^{(n,nloc)} = \frac{n}{n+1} \sum_{m=1}^{n+1} P_i^{(n,nloc)}(\omega_m) E_i^{(m)*} + \text{c.c.}, \quad (2.46)$$

$$S_k^{(n,nloc)} = -R_k = -\frac{1}{c} \frac{1}{n+1} \left\{ \sum_{m=1}^n \left[\partial_t E_i^{(n+1)*} \Gamma_{ijk}(\omega_{n+1}; \omega_m) E_j^{(m)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \partial_t E_i^{(m)} \Gamma_{ijk}(-\omega_m; -\omega_{n+1}) E_j^{(n+1)*} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^n \partial_t E_i^{(m)} \Gamma_{ijk}(-\omega_m; \omega_s) E_j^{(s)} \right] + \text{c.c.} \right\}, \quad (2.47)$$

Для нахождения $G_{pk}^{(n,nloc)}$ аналогичным образом преобразуем содержащее $P_k^{(n,nloc)}(\omega_m) \partial_p E_k^{(m)*}$ слагаемое в (2.41). Оно может быть представлено в виде производной по пространственным координатам от суммы двух слагаемых:

$$\sum_{m=1}^{n+1} P_k^{(n,nloc)}(\omega_m) \partial_p E_k^{(m)*} = \partial_k (\delta_{pk} F + N_{pk}). \quad (2.48)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что компоненты входящего в (2.48) вспомогательного тензора \hat{N} имеют вид:

$$N_{pk} = \frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^n \left[\Gamma_{ijk}(\omega_{n+1}; \omega_m) E_j^{(m)} \partial_p E_i^{(n+1)*} + \right. \\ \left. + \Gamma_{ijk}(-\omega_m; -\omega_{n+1}) E_j^{(n+1)*} \partial_p E_i^{(m)} + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^n \Gamma_{ijk}(-\omega_m; \omega_s) E_j^{(s)} \partial_p E_i^{(m)} \right] + \text{c.c.}, \quad (2.49)$$

а скаляр F определяется (2.44). При получении этого результата также необходимо учитывать соотношения внутренней симметрии тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$ (1.28)–(1.29). Скаляр F и тензор N_{pk} войдут в формулу для $G_{pk}^{(n,nloc)}$:

$$G_{pk}^{(n,nloc)} = \sum_{m=1}^{n+1} \left(\frac{\delta_{pk}}{n+1} P_i^{(n,nloc)}(\omega_m) E_i^{(m)*} - P_k^{(n,nloc)}(\omega_m) E_p^{(m)*} \right) + \\ + \frac{1}{n+1} \left(\sum_{m=1}^{n+1} \left[\partial_p E_i^{(n+1)*} \Gamma_{ijk}(\omega_{n+1}; \omega_m) E_j^{(m)} + \partial_p E_i^{(m)} \Gamma_{ijk}(-\omega_m; -\omega_{n+1}) E_j^{(n+1)*} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^n \partial_p E_i^{(m)} \Gamma_{ijk}(-\omega_m; \omega_s) E_j^{(s)} \right] \right) + \text{c.c.} \quad (2.50)$$

Сравнивая выражения (2.33) и (2.37) с (2.42) и (2.46), можно заметить, что плотности энергии и импульса, связанные с локальной и нелокальной составляющими нелинейного

оптического отклика среды, различаются только формой зависимости от напряженности электрического поля входящих в них компонент вектора поляризации среды. Первая сумма в выражении (2.50) также отличается от (2.38) только видом формул для входящих в них $\mathbf{P}^{(n,loc)}$ и $\mathbf{P}^{(n,nloc)}$. Остальные слагаемые в (2.50) и формула (2.47) определяют дополнительные потоки импульса и энергии электромагнитного поля, характерные только для сред, оптический отклик которых на внешнее световое поле является нелокальным.

В качестве примера приведем формулы (2.46), (2.47), (2.42) и (2.50) для практически важных частных случаев генерации суммарной частоты $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ в среде с квадратичной нелинейностью ($n = 2$) и частоты $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ в среде с кубической нелинейностью ($n = 3$). При $n = 2$ нелинейная поляризация среды записывается в виде:

$$P_i^{(2,nloc)}(\omega_3) = \gamma_{ijlk}^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) E_j^{(1)} \partial_k E_l^{(2)} + \gamma_{ijlk}^{(2)}(\omega_3; \omega_2, \omega_1) E_j^{(2)} \partial_k E_l^{(1)}, \quad (2.51)$$

$$P_i^{(2,nloc)}(\omega_{1,2}) = \gamma_{ijlk}^{(2)}(\omega_{1,2}; \omega_3, -\omega_{2,1}) E_j^{(3)} \partial_k E_l^{(2,1)*} + \gamma_{ijlk}^{(2)}(\omega_{1,2}; -\omega_{2,1}, \omega_3) E_j^{(2,1)*} \partial_k E_l^{(3)}, \quad (2.52)$$

и формулы (2.46), (2.47), (2.42) и (2.50) принимают вид:

$$U^{(2,nloc)} = \frac{2}{3} \left[\left(\gamma_{jlik}^{(2)}(-\omega_1; \omega_2, -\omega_3) + \gamma_{ljik}^{(2)}(-\omega_2; \omega_1, -\omega_3) \right) E_j^{(1)} E_l^{(2)} \partial_k E_i^{(3)*} + \left(\gamma_{lijk}^{(2)}(-\omega_2; -\omega_3, \omega_1) + \gamma_{iljk}^{(2)}(\omega_3; \omega_2, \omega_1) \right) E_l^{(2)} E_i^{(3)*} \partial_k E_j^{(1)} + \left(\gamma_{ijlk}^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) + \gamma_{jilk}^{(2)}(-\omega_1; -\omega_3, \omega_2) \right) E_i^{(3)*} E_j^{(1)} \partial_k E_l^{(2)} \right] + \text{c.c.}, \quad (2.53)$$

$$S_k^{(2,nloc)} = -\frac{1}{3c} \left[\left(\gamma_{ijlk}^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) + \gamma_{iljk}^{(2)}(\omega_3; \omega_2, \omega_1) \right) E_j^{(1)} E_l^{(2)} \partial_t E_i^{(3)*} + \left(\gamma_{jlik}^{(2)}(-\omega_1; \omega_2, -\omega_3) + \gamma_{jilk}^{(2)}(-\omega_1; -\omega_3, \omega_2) \right) E_l^{(2)} E_i^{(3)*} \partial_t E_j^{(1)} + \left(\gamma_{lijk}^{(2)}(-\omega_2; -\omega_3, \omega_1) + \gamma_{ljik}^{(2)}(-\omega_2; \omega_1, -\omega_3) \right) E_i^{(3)*} E_j^{(1)} \partial_t E_l^{(2)} \right] + \text{c.c.}, \quad (2.54)$$

$$g_p^{(2,nloc)} = e_{pki} \left[\left(\gamma_{kjlm}^{(2)}(\omega_1; \omega_3, -\omega_2) E_j^{(3)} \partial_m E_l^{(2)*} + \gamma_{kjlm}^{(2)}(\omega_1; -\omega_2, \omega_3) E_j^{(2)*} \partial_m E_l^{(3)} \right) B_i^{(1)*} + \left(\gamma_{kjlm}^{(2)}(\omega_2; \omega_3, -\omega_1) E_j^{(3)} \partial_m E_l^{(1)*} + \gamma_{kjlm}^{(2)}(\omega_2; -\omega_1, \omega_3) E_j^{(1)*} \partial_m E_l^{(3)} \right) B_i^{(2)*} + \left(\gamma_{kjlm}^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) E_j^{(1)} \partial_m E_l^{(2)} + \gamma_{kjlm}^{(2)}(\omega_3; \omega_2, \omega_1) E_j^{(2)} \partial_m E_l^{(1)} \right) B_i^{(3)*} \right] + \text{c.c.} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned}
G_{pk}^{(2,loc)} = & \frac{1}{3} \left\{ \delta_{pk} \left[\left(\gamma_{jlim}^{(2)}(-\omega_1; \omega_2, -\omega_3) + \gamma_{ljim}^{(2)}(-\omega_2; \omega_1, -\omega_3) \right) E_j^{(1)} E_l^{(2)} \partial_m E_i^{(3)*} + \right. \right. \\
& + \left(\gamma_{lijm}^{(2)}(-\omega_2; -\omega_3, \omega_1) + \gamma_{iljm}^{(2)}(\omega_3; \omega_2, \omega_1) \right) E_l^{(2)} E_i^{(3)*} \partial_m E_j^{(1)} + \\
& + \left. \left(\gamma_{ijlm}^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) + \gamma_{jilm}^{(2)}(-\omega_1; -\omega_3, \omega_2) \right) E_i^{(3)*} E_j^{(1)} \partial_m E_l^{(2)} \right] + \\
& + \left[\left(\gamma_{ijlk}^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) + \gamma_{iljk}^{(2)}(\omega_3; \omega_2, \omega_1) \right) E_j^{(1)} E_l^{(2)} \partial_p E_i^{(3)*} + \right. \\
& + \left(\gamma_{jlik}^{(2)}(-\omega_1; \omega_2, -\omega_3) + \gamma_{jilk}^{(2)}(-\omega_1; -\omega_3, \omega_2) \right) E_l^{(2)} E_i^{(3)*} \partial_p E_j^{(1)} + \\
& + \left. \left(\gamma_{lijk}^{(2)}(-\omega_2; -\omega_3, \omega_1) + \gamma_{ljik}^{(2)}(-\omega_2; \omega_1, -\omega_3) \right) E_i^{(3)*} E_j^{(1)} \partial_p E_l^{(2)} \right] \left. \right\} - \\
& - \left\{ \left(\gamma_{kjlm}^{(2)}(\omega_1; \omega_3, -\omega_2) E_j^{(3)} \partial_m E_l^{(2)*} + \gamma_{kjl m}^{(2)}(\omega_1; -\omega_2, \omega_3) E_j^{(2)*} \partial_m E_l^{(3)} \right) E_p^{(1)*} + \right. \\
& + \left(\gamma_{kjlm}^{(2)}(\omega_2; \omega_3, -\omega_1) E_j^{(3)} \partial_m E_l^{(1)*} + \gamma_{kjl m}^{(2)}(\omega_2; -\omega_1, \omega_3) E_j^{(1)*} \partial_m E_l^{(3)} \right) E_p^{(2)*} + \\
& + \left. \left(\gamma_{kjlm}^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) E_j^{(1)} \partial_m E_l^{(2)} + \gamma_{kjl m}^{(2)}(\omega_3; \omega_2, \omega_1) E_j^{(2)} \partial_m E_l^{(1)} \right) E_p^{(3)*} \right\} + \text{c.c.} \quad (2.56)
\end{aligned}$$

В среде с кубической нелинейностью ($n = 3$) материальные уравнения (2.26) и (2.27), выражения для плотности энергии, векторов плотности потока энергии и плотности импульса, а также тензора плотности потока импульса задаются формулами:

$$\begin{aligned}
P_i^{(3,loc)}(\omega_4) = & \gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega_4; \omega_1, \omega_2, \omega_3) E_j^{(1)} E_l^{(2)} \partial_k E_m^{(3)} + \gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega_4; \omega_2, \omega_3, \omega_1) \times \\
& \times E_j^{(2)} E_l^{(3)} \partial_k E_m^{(1)} + \gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega_4; \omega_3, \omega_1, \omega_2) E_j^{(3)} E_l^{(1)} \partial_k E_m^{(2)}, \quad (2.57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_i^{(3,loc)}(\omega_{1,2,3}) = & \gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega_{1,2,3}; \omega_4, -\omega_{2,3,1}, -\omega_{3,1,2}) E_j^{(4)} E_l^{(2,3,1)*} \partial_k E_m^{(3,1,2)*} + \\
& + \gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega_{1,2,3}; -\omega_{3,1,2}, \omega_4, -\omega_{2,3,1}) E_j^{(3,1,2)*} E_l^{(4)} \partial_k E_m^{(2,3,1)*} + \\
& + \gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega_{1,2,3}; -\omega_{2,3,1}, -\omega_{3,1,2}, \omega_4) E_j^{(2,3,1)*} E_l^{(3,1,2)*} \partial_k E_m^{(4)}, \quad (2.58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U^{(3,loc)} = & \frac{3}{4} \left[\left(\gamma_{jlmik}^{(3)}(-\omega_1; \omega_2, \omega_3, -\omega_4) + \gamma_{lmjik}^{(3)}(-\omega_2; \omega_3, \omega_1, -\omega_4) + \right. \right. \\
& + \gamma_{mjlik}^{(3)}(-\omega_3; \omega_1, \omega_2, -\omega_4) \left. \right) E_j^{(1)} E_l^{(2)} E_m^{(3)} \partial_k E_i^{(4)*} + \left(\gamma_{lmijk}^{(3)}(-\omega_2; \omega_3, -\omega_4, \omega_1) + \right. \\
& + \gamma_{ilmjk}^{(3)}(\omega_4; \omega_2, \omega_3, \omega_1) + \gamma_{miljk}^{(3)}(-\omega_3; -\omega_4, \omega_2, \omega_1) \left. \right) E_l^{(2)} E_m^{(3)} E_i^{(4)*} \partial_k E_j^{(1)} + \\
& + \left(\gamma_{mijlk}^{(3)}(-\omega_3; -\omega_4, \omega_1, \omega_2) + \gamma_{ijmlk}^{(3)}(\omega_4; \omega_1, \omega_3, \omega_2) + \right. \\
& + \gamma_{jmilk}^{(3)}(-\omega_1; \omega_3, -\omega_4, \omega_2) \left. \right) E_j^{(1)} E_m^{(3)} E_i^{(4)*} \partial_k E_l^{(2)} + \left(\gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega_4; \omega_1, \omega_2, \omega_3) + \right. \\
& + \left. \gamma_{lijmk}^{(3)}(-\omega_2; -\omega_4, \omega_1, \omega_3) + \gamma_{jlimk}^{(3)}(-\omega_1; \omega_2, -\omega_4, \omega_3) \right) E_j^{(1)} E_l^{(2)} E_i^{(4)*} \partial_k E_m^{(3)} \left. \right] + \text{c.c.}, \quad (2.59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_k^{(3,loc)} = & -\frac{1}{4c} \left[\left(\gamma_{ilmjk}^{(3)}(\omega_4; \omega_2, \omega_3, \omega_1) + \gamma_{ijmlk}^{(3)}(\omega_4; \omega_1, \omega_3, \omega_2) + \right. \right. \\
& + \gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega_4; \omega_1, \omega_2, \omega_3) \left. \right) E_j^{(1)} E_l^{(2)} E_m^{(3)} \partial_t E_i^{(4)*} + \left(\gamma_{jmlk}^{(3)}(-\omega_1; \omega_3, -\omega_4, \omega_2) + \right. \\
& + \gamma_{jlmik}^{(3)}(-\omega_1; \omega_2, \omega_3, -\omega_4) + \gamma_{jlimk}^{(3)}(-\omega_1; \omega_2, -\omega_4, \omega_3) \left. \right) E_l^{(2)} E_m^{(3)} E_i^{(4)*} \partial_t E_j^{(1)} + \\
& + \left(\gamma_{ljimk}^{(3)}(-\omega_2; \omega_1, -\omega_4, \omega_3) + \gamma_{lmjik}^{(3)}(-\omega_2; \omega_3, \omega_1, -\omega_4) + \right. \\
& + \gamma_{lmijk}^{(3)}(-\omega_2; \omega_3, -\omega_4, \omega_1) \left. \right) E_j^{(1)} E_m^{(3)} E_i^{(4)*} \partial_t E_l^{(2)} + \left(\gamma_{mjljk}^{(3)}(-\omega_3; \omega_1, \omega_2, -\omega_4) + \right. \\
& + \left. \gamma_{mijlk}^{(3)}(-\omega_3; -\omega_4, \omega_1, \omega_2) + \gamma_{miljk}^{(3)}(-\omega_3; -\omega_4, \omega_2, \omega_1) \right) E_j^{(1)} E_l^{(2)} E_i^{(4)*} \partial_t E_m^{(3)} \left. \right] + \text{c.c.}, \quad (2.60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_p^{(3,nloc)} = & e_{pki} \left[\left(\gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_1; \omega_4, -\omega_2, -\omega_3) E_j^{(4)} E_l^{(2)*} \partial_r E_m^{(3)*} + \gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_1; -\omega_3, \omega_4, -\omega_2) \right. \right. \\
& \times E_j^{(3)*} E_l^{(4)} \partial_r E_m^{(2)*} + \gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_1; -\omega_2, -\omega_3, \omega_4) E_j^{(2)*} E_l^{(3)*} \partial_r E_m^{(4)} \left. \right) B_i^{(1)*} + \\
& + \left(\gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_2; \omega_4, -\omega_3, -\omega_1) E_j^{(4)} E_l^{(3)*} \partial_r E_m^{(1)*} + \gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_2; -\omega_1, \omega_4, -\omega_3) E_j^{(1)*} E_l^{(4)} \partial_r E_m^{(3)*} + \right. \\
& + \gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_2; -\omega_3, -\omega_1, \omega_4) E_j^{(3)*} E_l^{(1)*} \partial_r E_m^{(4)} \left. \right) B_i^{(2)*} + \left(\gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_3; \omega_4, -\omega_1, -\omega_2) E_j^{(4)} E_l^{(1)*} \times \right. \\
& \times \partial_r E_m^{(2)*} + \gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_3; -\omega_2, \omega_4, -\omega_1) E_j^{(2)*} E_l^{(4)} \partial_r E_m^{(1)*} + \gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_3; -\omega_1, -\omega_2, \omega_4) E_j^{(1)*} E_l^{(2)*} \times \\
& \times \partial_r E_m^{(4)} \left. \right) B_i^{(3)*} + \left(\gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_4; \omega_1, \omega_2, \omega_3) E_j^{(1)} E_l^{(2)} \partial_r E_m^{(3)} + \gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_4; \omega_2, \omega_3, \omega_1) E_j^{(2)} E_l^{(3)} \times \right. \\
& \times \partial_r E_m^{(1)} + \gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_4; \omega_3, \omega_1, \omega_2) E_j^{(3)} E_l^{(1)} \partial_r E_m^{(2)} \left. \right) B_i^{(4)*} \Big] + \text{c.c.} \tag{2.61}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{pk}^{(3,nloc)} = & \frac{1}{4} \left\{ \delta_{pk} \left[\left(\gamma_{jlmir}^{(3)}(-\omega_1; \omega_2, \omega_3, -\omega_4) + \gamma_{lmjir}^{(3)}(-\omega_2; \omega_3, \omega_1, -\omega_4) + \right. \right. \\
& + \gamma_{mjilir}^{(3)}(-\omega_3; \omega_1, \omega_2, -\omega_4) \left. \right) E_j^{(1)} E_l^{(2)} E_m^{(3)} \partial_r E_i^{(4)*} + \left(\gamma_{lmijr}^{(3)}(-\omega_2; \omega_3, -\omega_4, \omega_1) + \right. \\
& + \gamma_{ilmjr}^{(3)}(\omega_4; \omega_2, \omega_3, \omega_1) + \gamma_{miljr}^{(3)}(-\omega_3; -\omega_4, \omega_2, \omega_1) \left. \right) E_l^{(2)} E_m^{(3)} E_i^{(4)*} \partial_r E_j^{(1)} + \\
& + \left(\gamma_{mijlr}^{(3)}(-\omega_3; -\omega_4, \omega_1, \omega_2) + \gamma_{ijmlr}^{(3)}(\omega_4; \omega_1, \omega_3, \omega_2) + \right. \\
& + \gamma_{jmilr}^{(3)}(-\omega_1; \omega_3, -\omega_4, \omega_2) \left. \right) E_j^{(1)} E_m^{(3)} E_i^{(4)*} \partial_r E_l^{(2)} + \left(\gamma_{ijlmr}^{(3)}(\omega_4; \omega_1, \omega_2, \omega_3) + \right. \\
& + \gamma_{lijmr}^{(3)}(-\omega_2; -\omega_4, \omega_1, \omega_3) + \gamma_{jlimr}^{(3)}(-\omega_1; \omega_2, -\omega_4, \omega_3) \left. \right) E_j^{(1)} E_l^{(2)} E_i^{(4)*} \partial_r E_m^{(3)} \Big] + \\
& + \left[\left(\gamma_{ilmjk}^{(3)}(\omega_4; \omega_2, \omega_3, \omega_1) + \gamma_{ijmlk}^{(3)}(\omega_4; \omega_1, \omega_3, \omega_2) + \right. \right. \\
& + \gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega_4; \omega_1, \omega_2, \omega_3) \left. \right) E_j^{(1)} E_l^{(2)} E_m^{(3)} \partial_p E_i^{(4)*} + \left(\gamma_{jmilk}^{(3)}(-\omega_1; \omega_3, -\omega_4, \omega_2) + \right. \\
& + \gamma_{jlmik}^{(3)}(-\omega_1; \omega_2, \omega_3, -\omega_4) + \gamma_{jlimk}^{(3)}(-\omega_1; \omega_2, -\omega_4, \omega_3) \left. \right) E_l^{(2)} E_m^{(3)} E_i^{(4)*} \partial_p E_j^{(1)} + \\
& + \left(\gamma_{lijmk}^{(3)}(-\omega_2; \omega_1, -\omega_4, \omega_3) + \gamma_{lmjik}^{(3)}(-\omega_2; \omega_3, \omega_1, -\omega_4) + \right. \\
& + \gamma_{lmijk}^{(3)}(-\omega_2; \omega_3, -\omega_4, \omega_1) \left. \right) E_j^{(1)} E_m^{(3)} E_i^{(4)*} \partial_p E_l^{(2)} + \left(\gamma_{mjlik}^{(3)}(-\omega_3; \omega_1, \omega_2, -\omega_4) + \right. \\
& + \gamma_{mijlk}^{(3)}(-\omega_3; -\omega_4, \omega_1, \omega_2) + \gamma_{miljk}^{(3)}(-\omega_3; -\omega_4, \omega_2, \omega_1) \left. \right) E_j^{(1)} E_l^{(2)} E_i^{(4)*} \partial_p E_m^{(3)} \Big] \Big\} - \\
& - \left\{ \left(\gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_1; \omega_4, -\omega_2, -\omega_3) E_j^{(4)} E_l^{(2)*} \partial_r E_m^{(3)*} + \gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_1; -\omega_3, \omega_4, -\omega_2) \right. \right. \\
& \times E_j^{(3)*} E_l^{(4)} \partial_r E_m^{(2)*} + \gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_1; -\omega_2, -\omega_3, \omega_4) E_j^{(2)*} E_l^{(3)*} \partial_r E_m^{(4)} \left. \right) E_p^{(1)*} + \\
& + \left(\gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_2; \omega_4, -\omega_3, -\omega_1) E_j^{(4)} E_l^{(3)*} \partial_r E_m^{(1)*} + \gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_2; -\omega_1, \omega_4, -\omega_3) E_j^{(1)*} E_l^{(4)} \partial_r E_m^{(3)*} + \right. \\
& + \gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_2; -\omega_3, -\omega_1, \omega_4) E_j^{(3)*} E_l^{(1)*} \partial_r E_m^{(4)} \left. \right) E_p^{(2)*} + \left(\gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_3; \omega_4, -\omega_1, -\omega_2) E_j^{(4)} E_l^{(1)*} \times \right. \\
& \times \partial_r E_m^{(2)*} + \gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_3; -\omega_2, \omega_4, -\omega_1) E_j^{(2)*} E_l^{(4)} \partial_r E_m^{(1)*} + \gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_3; -\omega_1, -\omega_2, \omega_4) E_j^{(1)*} E_l^{(2)*} \times \\
& \times \partial_r E_m^{(4)} \left. \right) E_p^{(3)*} + \left(\gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_4; \omega_1, \omega_2, \omega_3) E_j^{(1)} E_l^{(2)} \partial_r E_m^{(3)} + \gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_4; \omega_2, \omega_3, \omega_1) E_j^{(2)} E_l^{(3)} \times \right. \\
& \times \partial_r E_m^{(1)} + \gamma_{kjlmr}^{(3)}(\omega_4; \omega_3, \omega_1, \omega_2) E_j^{(3)} E_l^{(1)} \partial_r E_m^{(2)} \left. \right) E_p^{(4)*} \Big\} + \text{c.c.} \tag{2.62}
\end{aligned}$$

§ 2.3 Учёт вырождения частот в нелинейных оптических процессах в компонентах тензора энергии-импульса электромагнитного поля в нелокальных средах

Пусть в среде, проявляющей нелинейность n -го порядка, из $n + 1$ частот участвующих во взаимодействии волн, первые $m - 1$ частот различны, следующие $n - m + 1$ равны ω_m , а последняя $\omega_{n+1} = \sum_{l=1}^{m-1} \omega_l + (n - m + 1)\omega_m$. Напряженность создаваемого ими электрического поля

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{l=1}^m \tilde{\mathbf{E}}^{(l)}(\mathbf{r}, t, \omega_l) \exp(-i\omega_l t) + \tilde{\mathbf{E}}^{(n+1)}(\mathbf{r}, t, \omega_{n+1}) \exp(-i\omega_{n+1} t) + \text{c.c.} = \\ &= \sum_{l=1}^m \mathbf{E}^{(l)} + \mathbf{E}^{(n+1)} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Формула (2.63) отличается от формулы (2.21) только числом слагаемых. Индукция магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ и индукция электрического поля $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ выражаются через комплексные амплитуды $\tilde{\mathbf{B}}^{(l)}(\mathbf{r}, t, \omega_l)$ и $\tilde{\mathbf{D}}^{(l)}(\mathbf{r}, t, \omega_l)$ аналогично (2.63):

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{l=1}^m \tilde{\mathbf{B}}^{(l)}(\mathbf{r}, t, \omega_l) \exp(-i\omega_l t) + \tilde{\mathbf{B}}^{(n+1)}(\mathbf{r}, t, \omega_{n+1}) \exp(-i\omega_{n+1} t) + \text{c.c.} = \\ &= \sum_{l=1}^m \mathbf{B}^{(l)} + \mathbf{B}^{(n+1)} + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{l=1}^m \tilde{\mathbf{D}}^{(l)}(\mathbf{r}, t, \omega_l) \exp(-i\omega_l t) + \tilde{\mathbf{D}}^{(n+1)}(\mathbf{r}, t, \omega_{n+1}) \exp(-i\omega_{n+1} t) + \text{c.c.} = \\ &= \sum_{l=1}^m \mathbf{D}^{(l)} + \mathbf{D}^{(n+1)} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (2.65)$$

Индукция электрического поля определяется уравнением (2.22), в котором локальная и нелокальная составляющие поляризации могут быть записаны в виде, аналогичном (2.63):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(n,loc),(n,nloc)}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{l=1}^m \tilde{\mathbf{P}}^{(n,loc),(n,nloc)}(\mathbf{r}, t, \omega_l) \exp(-i\omega_l t) + \\ &+ \tilde{\mathbf{P}}^{(n,loc),(n,nloc)}(\mathbf{r}, t, \omega_{n+1}) \exp(-i\omega_{n+1} t) + \text{c.c.} = \\ &= \sum_{l=1}^m \mathbf{P}^{(n,loc),(n,nloc)}(\omega_l) + \mathbf{P}^{(n,loc),(n,nloc)}(\omega_{n+1}) + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Материальные уравнения для $\mathbf{P}^{(n,loc)}(\omega_l)$ и $\mathbf{P}^{(n,nloc)}(\omega_l)$, где $l = 1, 2, \dots, m, n + 1$, в среде, проявляющей нелинейность n -го порядка, могут быть записаны в виде [53; 54; 66]:

$$\begin{aligned} P_i^{(n,loc)}(\omega_l) &= \chi_{i i_{n+1} i_1^{l-1} i_{l+1}^n}^{(n)}(\omega_l; \omega_{n+1}, -\bar{\omega}_1^{l-1}, -\bar{\omega}_{l+1}^{m-1}, -\tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m))}) \times \\ &\times E_{i_{n+1}}^{(n+1)} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq l}}^{m-1} E_{i_p}^{(p)*} \prod_{p=m}^n E_{i_p}^{(m)*}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

если $l = 1, 2, \dots, m-1$,

$$P_i^{(n,loc)}(\omega_m) = \chi_{i i_{n+1} i_1^{m-1} i_{m+1}^n}^{(n)}(\omega_m; \omega_{n+1}, -\bar{\omega}_1^{m-1}, -\tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m)-1)}) \times \\ \times E_{i_{n+1}}^{(n+1)} \prod_{p=1}^{m-1} E_{i_p}^{(p)*} \prod_{p=m+1}^n E_{i_p}^{(m)*}, \quad (2.68)$$

$$P_i^{(n,loc)}(\omega_{n+1}) = \chi_{i i_1^n}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m))}) \prod_{p=1}^{m-1} E_{i_p}^{(p)} \prod_{p=m}^n E_{i_p}^{(m)}, \quad (2.69)$$

$$P_i^{(n,nloc)}(\omega_l) = \Gamma_{i i_{n+1} k}(\omega_l; \omega_{n+1}) \partial_k E_{i_{n+1}}^{(n+1)} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq l}}^{m-1} \Gamma_{i i_s k}(\omega_l; -\omega_s) \partial_k E_{i_s}^{(s)*} + \\ + \Gamma_{i i_n k}(\omega_l; -\omega_m) \partial_k E_{i_n}^{(m)*}, \quad (2.70)$$

если $l = 1, 2, \dots, m-1$,

$$P_i^{(n,nloc)}(\omega_m) = \Gamma_{i i_{n+1} k}(\omega_m; \omega_{n+1}) \partial_k E_{i_{n+1}}^{(n+1)} + \sum_{s=1}^{m-1} \Gamma_{i i_s k}(\omega_m; -\omega_s) \partial_k E_{i_s}^{(s)*} \quad (2.71)$$

и

$$P_i^{(n,nloc)}(\omega_{n+1}) = \sum_{s=1}^{m-1} \Gamma_{i i_s k}(\omega_{n+1}; \omega_s) \partial_k E_{i_s}^{(s)} + \Gamma_{i i_n k}(\omega_{n+1}; \omega_m) \partial_k E_{i_n}^{(m)}. \quad (2.72)$$

Используемые здесь обозначения i_s^q , $\bar{\omega}_s^q$ и $\tilde{\omega}_m^s$ для последовательностей индексов и частот совпадают с обозначениями, использованными при записи материальных уравнений (1.44)–(1.46), $F(\omega_m)$ – кратность вырождения частоты ω_m , определяемая как число вхождений ω_m после точки с запятой в аргументах компоненты тензора $\hat{\chi}$ или $\hat{\gamma}$, увеличенное на единицу, если частота $-\omega_m$ является первым аргументом компонент этих тензоров. При записи (2.70)–(2.72) используются вспомогательные тензоры:

$$\Gamma_{i i_s k}(\omega_{n+1}; \omega_s) = \partial P_i^{(n,nloc)}(\omega_{n+1}) / \partial (\partial_k E_{i_s}^{(s)}) = \\ = \gamma_{i i_1^{s-1} i_{s+1}^n i_s k}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{s-1}, \bar{\omega}_{s+1}^m, \tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m)-1)}, \omega_s) \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq s}}^m E_{i_p}^{(p)} \prod_{p=m+1}^n E_{i_p}^{(m)}, \quad (2.73)$$

$$\Gamma_{i i_{n+1} k}(\omega_l; \omega_{n+1}) = \partial P_i^{(n,nloc)}(\omega_l) / \partial (\partial_k E_{i_{n+1}}^{(n+1)}) = \\ = \gamma_{i i_1^{l-1} i_{l+1}^{n+1} k}^{(n)}(\omega_l; -\bar{\omega}_1^{l-1}, -\bar{\omega}_{l+1}^m, -\tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m)-1)}, \omega_{n+1}) \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq l}}^m E_{i_p}^{(p)*} \prod_{p=m+1}^n E_{i_p}^{(m)*}, \quad (2.74)$$

$$\Gamma_{i i_s k}(\omega_l; -\omega_s) = \partial P_i^{(n,nloc)}(\omega_l) / \partial (\partial_k E_{i_s}^{(s)*}) = \\ = \gamma_{i i_{n+1} i_1^{\min(l,s)-1} i_{\min(l,s)+1}^{\max(l,s)-1} i_s k}^{(n)}(\omega_l; \omega_{n+1}, -\bar{\omega}_1^{\min(l,s)-1}, -\bar{\omega}_{\min(l,s)+1}^{\max(l,s)-1}, \\ -\bar{\omega}_{\max(l,s)+1}^m, -\tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m)-1)}, -\omega_s) E_{i_{n+1}}^{(n+1)} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq l, s}}^m E_{i_p}^{(p)*} \prod_{p=m+1}^n E_{i_p}^{(m)*}, \quad (2.75)$$

позволяющие сократить запись $\mathbf{P}^{(n,loc)}(\omega_l)$ и $\mathbf{P}^{(n,nloc)}(\omega_l)$, а также последующих уравнений. Компоненты вспомогательных тензоров (2.73)–(2.75) удовлетворяют условию $\Gamma_{ii_{n+1}k}(\omega_l; \omega_{n+1}) = -\Gamma_{ii_s k}(-\omega_{n+1}; -\omega_s)$, следующему из соотношений внутренней симметрии тензора $\hat{\chi}^{(n)}$ (1.56). В материальных уравнениях (2.67)–(2.72) частота ω_m имеет кратность вырождения $F(\omega_m) = n - m + 1$, а все остальные частоты — кратность вырождения 1. Отсутствие в этих формулах нескольких разных совокупностей одинаковых частот связано исключительно с целью сделать используемые громоздкие формулы более короткими. Все дальнейшие полученные в этом приближении формулы легко обобщаются на случаи нескольких вырожденных частот.

Для получения связанных с локальным и нелокальным нелинейным оптическим откликом n -го порядка объема однородной непоглощающей среды добавок к плотности энергии электромагнитного поля $U^{(n)} = U^{(n,loc)} + U^{(n,nloc)}$, плотности потока его энергии $\mathbf{S}^{(n)} = \mathbf{S}^{(n,loc)} + \mathbf{S}^{(n,nloc)}$, плотности импульса $g_i^{(n)} = g_i^{(n,loc)} + g_i^{(n,noc)}$ и компонентам плотности потока импульса $G_{ij}^{(n)} = G_{ij}^{(n,loc)} + G_{ij}^{(n,nloc)}$, как и в предыдущем разделе, необходимо сначала подставить выражения (2.67)–(2.72) в формулу для $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$, и полученный результат, а также $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, далее подставить в следующие из уравнений Максвелла равенства (2.13)–(2.14), отражающие законы сохранения энергии и импульса, и провести усреднение получившихся выражений по времени, в результате чего в этих равенствах останутся производные только от медленно меняющихся величин. Полученные выражения необходимо преобразовать таким образом, чтобы они приняли вид однородных уравнений непрерывности (2.31) и (2.32) соответственно. Для нахождения явного вида искомых добавок необходимо преобразовать выражения $\langle \mathbf{E} \partial_t \mathbf{P} \rangle = \partial_t \langle \mathbf{E} \mathbf{P} \rangle - \langle \mathbf{P} \partial_t \mathbf{E} \rangle$ и $\langle \mathbf{P} \partial_p \mathbf{E} \rangle$, в которых угловые скобки означают усреднение по времени, к выражениям, являющимся комбинациями полных производных по пространственным координатам и времени. Эта процедура оказывается принципиально зависящей от числа слагаемых в материальных уравнениях, и поэтому результаты предыдущего раздела, в котором m было равно n , т.е. частоты всех $n + 1$ взаимодействующих волн были различными, не могут быть непосредственно использованы для их нахождения.

Подставляя материальные уравнения (2.67)–(2.69) для локальной составляющей нелинейной поляризации в $\langle \mathbf{P} \partial_p \mathbf{E} \rangle$ и учитывая свойство внутренней симметрии тензора $\hat{\chi}^{(n)}$, согласно которому [15] (см. также (1.106)):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{F(-\omega_m)} \chi_{ii_1^{m-1} i_{m+1}^{n-1} i_{n+1}}^{(n)}(\omega_m; -\bar{\omega}_1^{m-1}, -\tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m)-1)}, \omega_{n+1}) = \\ & = \frac{1}{F(\omega_{n+1})} \chi_{i_{n+1} i_1^{m-1} i_{m+1}^n}^{(n)}(-\omega_{n+1}; -\bar{\omega}_1^{m-1}, -\tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m))}), \end{aligned} \quad (2.76)$$

можно убедиться, что для любой частоты из множества частот $\omega_{1,2,\dots,m,n+1}$ взаимодействующих волн справедливо равенство:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^m P_{i_s}^{(n,loc)*}(\omega_s) \partial_p E_{i_s}^{(s)} + P_{i_{n+1}}^{(n,loc)}(\omega_{n+1}) \partial_p E_{i_{n+1}}^{(n+1)*} + \text{с.с.} = \\ & = \frac{1}{F(\omega_l)} \partial_p \left[P_{i_l}^{(n,loc)*}(\omega_l) E_{i_l}^{(l)} \right] + \text{с.с.} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Для этого необходимо подставить в левую часть (2.77) материальные уравнения (2.67)–(2.69), далее в слагаемом, содержащем производную напряженности электрического поля на частоте

ω_m , внести под производную все поля на этой частоте, используя правила дифференцирования и симметрию тензора $\hat{\chi}^{(n)}$ по перестановке всех индексов, относящихся к одной и той же частоте, а затем, используя соотношения внутренней симметрии (2.76), преобразовать компоненты тензора $\hat{\chi}^{(n)}$ во всех получившихся слагаемых в левой части (2.77) таким образом, чтобы последовательности индексов и частотных аргументов всех компонент были одинаковыми. Если, например, в качестве первой частоты выбрана ω_l , то в результате полученное выражение будет совпадать с правой частью формулы (2.77).

В правой части (2.77) одна из частот оказывается выделенной среди прочих, тогда как в левой части того же выражения, а также в полученном в предыдущем разделе выражении (2.40) все частоты включены одинаковым образом. Преобразование этого выражения к виду, учитывающему частоты всех взаимодействующих волн одинаковым образом, и, как следствие, нахождение явного вида связанных с локальным нелинейным оптическим откликом объема непоглощающей изотропной среды добавок к компонентам тензора энергии-импульса электромагнитного поля может быть выполнено в рамках двух различных подходов к формальному определению числа участвующих во взаимодействии волн. При *прямом подходе* считается, что в среде, обладающей нелинейностью n -го порядка, взаимодействуют $m + 1$ волн с разными частотами $\omega_{1,2,\dots,m,n+1}$, где $m < n$, для электромагнитного поля на каждой из которых уравнения Максвелла имеют одинаковый вид. Этот подход выглядит более естественным при проверке системы уравнений, описывающей взаимодействие волн в нелинейной среде, на необходимое выполнение законов сохранения энергии, импульса и углового момента света. Результирующее электрическое поле в этом случае вначале представляется в виде суперпозиции напряжённостей полей заданного числа взаимодействующих волн с различными частотами, а затем используется связь между ними, обусловленная нелинейностью среды. С другой стороны, в рамках *подхода, основанного на предельном переходе* от случая $n + 1$ волн с разными частотами к случаю вырожденного по частотам нелинейного взаимодействия волн можно считать, что в среде взаимодействуют $n + 1$ волн, но уравнения для $n - m + 1$ из них, имеющих одинаковую частоту ω_m , совпадают. Этот случай отражает точку зрения, согласно которой в среде, обладающей нелинейностью n -го порядка, всегда взаимодействуют ровно $n + 1$ волн, даже если имеет место вырождение частот. В рамках первого подхода формула (2.77) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^m P_{i_s}^{(n,loc)*}(\omega_s) \partial_p E_{i_s}^{(s)} + P_{i_{n+1}}^{(n,loc)}(\omega_{n+1}) \partial_p E_{i_{n+1}}^{(n+1)*} + \text{с.с.} = \\ & = \frac{1}{m+1} \partial_p \left[\sum_{l=1}^m \frac{1}{F(\omega_l)} P_i^{(n,loc)*}(\omega_l) E_i^{(l)} + \frac{1}{F(-\omega_{n+1})} P_{i_{n+1}}^{(n,loc)}(\omega_{n+1}) E_{i_{n+1}}^{(n+1)*} + \text{с.с.} \right]. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Для получения правой части (2.78) необходимо $m + 1$ раз записать равенство (2.77), последовательно выбирая $\omega_{1,2,\dots,m,n+1}$ в качестве частоты, стоящей слева от точки с запятой в последовательности частотных аргументов тензора $\hat{\chi}^{(n)}$, сложить эти выражения и поделить полученный результат на $m + 1$. В соответствии со вторым подходом формула (2.77)

записывается в виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^m P_{i_s}^{(n,loc)*}(\omega_s) \partial_p E_{i_s}^{(s)} + P_{i_{n+1}}^{(n,loc)}(\omega_{n+1}) \partial_p E_{i_{n+1}}^{(n+1)*} + \text{c.c.} = \\ & = \frac{1}{n+1} \partial_p \left[\sum_{l=1}^m P_i^{(n,loc)*}(\omega_l) E_i^{(l)} + P_{i_{n+1}}^{(n,loc)}(\omega_{n+1}) E_{i_{n+1}}^{(n+1)*} + \text{c.c.} \right]. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Для получения этого равенства необходимо правую и левую части (2.77) записанные для частот $\omega_{1,2,\dots,m,n+1}$ домножить соответственно на $F(\omega_l)$, где $l = 1, 2, \dots, m, n+1$, сложить получившиеся $m+1$ равенств и поделить полученный результат на $n+1$. Поскольку $\sum_{l=1}^m F(\omega_l) + F(-\omega_{n+1}) = n+1$, левая часть после такого преобразования остаётся неизменной.

Подстановка найденных выражений для $\langle \mathbf{P}^{(n,loc)} \partial_p \mathbf{E} \rangle$ в (2.14) и $\langle \mathbf{P}^{(n,loc)} \partial_t \mathbf{E} \rangle$ в (2.13) и сравнение получившихся формул с (2.15)–(2.16) позволяют записать связанные с локальным нелинейным оптическим откликом объема непоглощающей среды добавки к компонентам тензора энергии-импульса в следующем виде:

$$\begin{aligned} U^{(n,loc)} &= \sum_{l=1}^m [1 - K(\omega_l)] P_i^{(n,loc)*}(\omega_l) E_i^{(l)} + \\ &+ [1 - K(-\omega_{n+1})] P_i^{(n,loc)}(\omega_{n+1}) E_i^{(n+1)*} + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$S_k^{(n,loc)} = 0, \quad (2.81)$$

$$g_p^{(n,loc)} = \sum_{l=1}^m e_{pij} P_i^{(n,loc)*}(\omega_l) B_j^{(l)} + e_{pij} P_i^{(n,loc)}(\omega_{n+1}) B_j^{(n+1)*} + \text{c.c.}, \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} G_{pk}^{(n,loc)} &= \sum_{l=1}^m \left[\delta_{pk} K(\omega_l) P_i^{(n,loc)*}(\omega_l) E_i^{(l)} - P_k^{(n,loc)*}(\omega_l) E_p^{(l)} \right] + \\ &+ \delta_{pk} K(-\omega_{n+1}) P_i^{(n,loc)}(\omega_{n+1}) E_i^{(n+1)*} - P_k^{(n,loc)}(\omega_{n+1}) E_p^{(n+1)*} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (2.83)$$

При использовании прямого подхода коэффициент $K(\omega_{l,n+1}) = [(m+1)F(\omega_{l,n+1})]^{-1}$, а в рамках подхода, основанного на предельном переходе, $K(\omega_{l,n+1}) = (n+1)^{-1}$. При $m = n$ для каждой из частот $F(\omega_l) = 1$ и использование любого из этих подходов приводит к одинаковому результату.

В рамках подхода, основанного на предельном переходе, формулы (2.80) и (2.83) и формула (2.82), не зависящая от выбора подхода, отличаются от аналогичных им выражений для обусловленных нелинейным локальным оптическим откликом объёма среды плотностей энергии и импульса и плотностей потоков импульса в случае, когда все $n+1$ частот взаимодействующих волн различны, только числом слагаемых во входящих в них суммах. В то же время, при использовании прямого подхода формулы (2.80) и (2.83) содержат дополнительные коэффициенты.

Если подставить в $\langle \mathbf{P} \partial_p \mathbf{E} \rangle$ материальные уравнения для нелокальной составляющей нелинейной поляризации среды (формулы (2.70)–(2.72)), то с учётом содержащихся в этих форму-

лах пространственных производных амплитуд напряженности электрического поля на различных частотах можно записать равенство:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{P}^{(n, nloc)} \partial_p \mathbf{E} \rangle &= \sum_{s=1}^m P_{i_s}^{(n, nloc)*}(\omega_s) \partial_p E_{i_s}^{(s)} + P_{i_{n+1}}^{(n, nloc)}(\omega_{n+1}) \partial_p E_{i_{n+1}}^{(n+1)*} + \text{c.c.} = \\
&= \partial_p \left(\sum_{l=1}^{m-1} A_{i_1^{n+1}k}^{(l)} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq l}}^{m-1} E_{i_q}^{(q)} \prod_{q=m}^n E_{i_q}^{(m)} E_{i_{n+1}}^{(n+1)*} \partial_k E_{i_l}^{(l)} + A_{i_1^{n+1}k}^{(m)} \prod_{q=1}^{m-1} E_{i_q}^{(q)} \times \right. \\
&\times \prod_{q=m}^{n-1} E_{i_q}^{(m)} E_{i_{n+1}}^{(n+1)*} \partial_k E_{i_n}^{(m)} + A_{i_1^{n+1}k}^{(n+1)} \prod_{q=1}^{m-1} E_{i_q}^{(q)} \prod_{q=m}^n E_{i_q}^{(m)} \partial_k E_{i_{n+1}}^{(n+1)*} \left. \right) - \\
&- \partial_k \left(\sum_{l=1}^{m-1} A_{i_1^{n+1}k}^{(l)} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq l}}^{m-1} E_{i_q}^{(q)} \prod_{q=m}^n E_{i_q}^{(m)} E_{i_{n+1}}^{(n+1)*} \partial_p E_{i_l}^{(l)} + A_{i_1^{n+1}k}^{(m)} \prod_{q=1}^{m-1} E_{i_q}^{(q)} \times \right. \\
&\times \prod_{q=m}^{n-1} E_{i_q}^{(m)} E_{i_{n+1}}^{(n+1)*} \partial_p E_{i_n}^{(m)} + A_{i_1^{n+1}k}^{(n+1)} \prod_{q=1}^{m-1} E_{i_q}^{(q)} \prod_{q=m}^n E_{i_q}^{(m)} \partial_p E_{i_{n+1}}^{(n+1)*} \left. \right) + \text{c.c.} \quad (2.84)
\end{aligned}$$

Здесь $A_{i_1^{n+1}k}^{(l)}$ — неизвестные промежуточные тензоры, конкретный вид которых определяет величины $U^{(n, nloc)}$, $\mathbf{S}^{(n, nloc)}$, $g_i^{(n, nloc)}$ и $G_{ij}^{(n, nloc)}$. Для нахождения компонент $A_{i_1^{n+1}k}^{(l)}$ необходимо решить систему уравнений, образующуюся в результате раскрытия входящих в правую часть (2.84) производных и приравнивания содержащихся в левой и правой частях коэффициентов при находящимся в них одинаковых комбинациях напряжённостей электрических полей и их пространственных производных. Эта система уравнений относительно $A_{i_1^{n+1}k}^{(l)}$ не имеет единственного решения, поскольку законы сохранения (2.15)–(2.16) остаются неизменными при добавлении к ним выражений с равными нулю дивергенциями и производными по времени [2; 98]. Тем не менее, отталкиваясь от отличия формулы (2.77) при наличии вырождения по частотам от аналогичной формулы в случае, когда все частоты $\omega_{1,2,\dots,n+1}$ различны, и от формулы (2.48), оказывается возможным подобрать такое решение для $A_{i_1^{n+1}k}^{(l)}$, с помощью которого (2.84) будет записано в виде:

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^m P_{i_s}^{(n, nloc)*}(\omega_s) \partial_p E_{i_s}^{(s)} + P_{i_{n+1}}^{(n, nloc)}(\omega_{n+1}) \partial_p E_{i_{n+1}}^{(n+1)*} + \text{c.c.} = \\
&= \frac{1}{F(\omega_l)} \left[\partial_p \left(P_i^{(n, nloc)*}(\omega_l) E_i^{(l)} \right) - \partial_k \left(E_i^{(l)} \Gamma_{ijk}(-\omega_l; -\omega_{n+1}) \partial_p E_j^{(n+1)*} + \right. \right. \\
&\left. \left. + E_i^{(l)} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq l}}^m \Gamma_{ijk}(-\omega_l; \omega_s) \partial_p E_j^{(s)} \right) \right] + \text{c.c.}, \quad (2.85)
\end{aligned}$$

если $l = 1, 2, \dots, m$, и:

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^m P_{i_s}^{(n, nloc)*}(\omega_s) \partial_p E_{i_s}^{(s)} + P_{i_{n+1}}^{(n, nloc)}(\omega_{n+1}) \partial_p E_{i_{n+1}}^{(n+1)*} + \text{c.c.} = \\
&= \frac{1}{F(-\omega_{n+1})} \left[\partial_p \left(P_i^{(n, nloc)}(\omega_{n+1}) E_i^{(n+1)*} \right) - \right. \\
&\left. - \partial_k \left(E_i^{(n+1)*} \sum_{s=1}^m \Gamma_{ijk}(\omega_{n+1}; \omega_s) \partial_p E_j^{(s)} \right) \right] + \text{c.c.}, \quad (2.86)
\end{aligned}$$

если $l = n + 1$. Чтобы убедиться в справедливости этих равенств, достаточно расписать содержащиеся в их правых частях производные в явном виде и сравнить коэффициенты при одинаковых комбинациях напряжённостей полей и их производных в правой и левой частях уравнений. В силу соотношений внутренней симметрии (1.56) и (1.58) эти коэффициенты оказываются равными друг другу.

С помощью равенств (2.85) и (2.86) можно получить два набора формул для $U^{(n,nloc)}$, $\mathbf{S}^{(n,nloc)}$, $g_i^{(n,nloc)}$ и $G_{ij}^{(n,nloc)}$, соответствующих двум описанным выше подходам к определению числа взаимодействующих волн. Для реализации прямого подхода необходимо сложить сумму поочередно записанных для $\omega_l = \omega_{1,2,\dots,m}$ выражений (2.85) с выражением (2.86) и поделить полученный результат на $m + 1$. Подход, основанный на предельном переходе, требует перед сложением поочередно записанных для $\omega_l = \omega_{1,2,\dots,m}$ выражений (2.85) с выражением (2.86) сначала умножить каждое из выражений (2.85) на $F(\omega_l)$, соответствующее тому ω_l , для которого это выражение было записано, а (2.86) на $F(-\omega_{n+1})$. Результат выполнения этой операции следует поделить на $n + 1$. Промежуточные выражения, аналогичные (2.78) и (2.79), оказываются достаточно громоздкими, поэтому сразу запишем окончательные формулы для добавок к компонентам тензора энергии-импульса электромагнитного поля, связанных с нелокальным нелинейным оптическим откликом объема непоглощающей среды:

$$U^{(n,nloc)} = \sum_{l=1}^m [1 - K(\omega_l)] P_i^{(n,nloc)*}(\omega_l) E_i^{(l)} + [1 - K(-\omega_{n+1})] P_i^{(n,nloc)}(\omega_{n+1}) E_i^{(n+1)*} + \text{c.c.}, \quad (2.87)$$

$$S_k^{(n,nloc)} = c^{-1} \sum_{l=1}^m \left[K(-\omega_{n+1}) E_i^{(n+1)*} \Gamma_{ijk}(\omega_{n+1}; \omega_l) \partial_t E_j^{(l)} + K(\omega_l) E_i^{(l)} \Gamma_{ijk}(-\omega_l; -\omega_{n+1}) \partial_t E_j^{(n+1)*} + K(\omega_l) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq l}}^m E_i^{(l)} \Gamma_{ijk}(-\omega_l; \omega_s) \partial_t E_j^{(s)} \right] + \text{c.c.}, \quad (2.88)$$

$$g_p^{(n,nloc)} = \sum_{l=1}^m e_{pij} P_i^{(n,nloc)*}(\omega_l) B_j^{(l)} + e_{pij} P_i^{(n,nloc)}(\omega_{n+1}) B_j^{(n+1)*} + \text{c.c.}, \quad (2.89)$$

$$G_{pk}^{(n,nloc)} = \sum_{l=1}^m \left[\delta_{pk} K(\omega_l) P_i^{(n,nloc)*}(\omega_l) E_i^{(l)} - P_k^{(n,nloc)*}(\omega_l) E_p^{(l)} \right] + \delta_{pk} K(-\omega_{n+1}) P_i^{(n,nloc)}(\omega_{n+1}) E_i^{(n+1)*} - P_k^{(n,nloc)}(\omega_{n+1}) E_p^{(n+1)*} - \sum_{l=1}^m \left(K(-\omega_{n+1}) E_i^{(n+1)*} \Gamma_{ijk}(\omega_{n+1}; \omega_l) \partial_p E_j^{(l)} + K(\omega_l) E_i^{(l)} \Gamma_{ijk}(-\omega_l; -\omega_{n+1}) \partial_p E_j^{(n+1)*} + K(\omega_l) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq l}}^m E_i^{(l)} \Gamma_{ijk}(-\omega_l; \omega_s) \partial_p E_j^{(s)} \right) + \text{c.c.} \quad (2.90)$$

Явный вид используемых здесь коэффициентов $K(\omega_{l,n+1})$ зависит от реализуемого подхода и принимает те же значения, что и в рассмотренном выше случае локального нелинейного оптического отклика непоглощающей среды. Сравнение формул (2.80)–(2.83) с аналогичными им формулами для связанных с нелинейным локальным оптическим откликом объёма среды добавок к плотности энергии, плотности потока энергии, плотности импульса и плотности потока импульса, полученными ранее для случая, при котором частоты всех $n + 1$ взаимодействующих волн различны, также остаётся в силе и для формул (2.87)–(2.90). Выражение для связанной с нелокальным нелинейным оптическим откликом плотности потока энергии (2.88) при использовании подхода, основанного на предельном переходе, отличается от аналогичного выражения для невырожденного случая (2.47) только числом входящих в него слагаемых, тогда как при использовании прямого подхода отличаются также и коэффициенты при каждом из слагаемых.

Несмотря на то, что при записи материальных уравнений (2.67)–(2.72) для локальной и нелокальной составляющих нелинейной поляризации среды для простоты считалось, что только одна частота ω_m имеет кратность вырождения больше единицы, полученные формулы (2.80)–(2.83) и (2.87)–(2.90) легко обобщаются на случай, когда несколько различных частот взаимодействующих волн обладают кратностями вырождения больше единицы (вплоть до ситуации, когда модули частот всех взаимодействующих волн равны друг другу). В этом случае используемый для записи поляризации среды тензор

$$\Gamma_{ijk}(\omega_l; \omega_s) = \partial P_i^{(n, nloc)}(\omega_l) / \partial (\partial_k E_j^{(s)}), \quad (2.91)$$

имеет вид произведения компоненты тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$, у которой первый частотный аргумент равен ω_l , а последний — ω_s , на $n - 1$ компонент вектора напряжённости электрического поля, среди которых напряжённости электрического поля на частотах $-\omega_l$ и ω_s встречаются $F(-\omega_l) - 1$ и $F(\omega_s) - 1$ раз соответственно, а компоненты на каждой из прочих частот взаимодействующих волн ω_r ($\omega_r \neq \omega_s$ и $\omega_r \neq -\omega_l$) встречаются по $F(\omega_r)$ раз. Каждая из сумм от единицы до m в формулах (2.80)–(2.83) и (2.87)–(2.90) в этом случае превращается в сумму по всем возможным различным частотам, кроме учитываемой отдельным слагаемым частоты ω_{n+1} . При использовании прямого подхода явный вид коэффициентов $K(\omega_{l,n+1})$ обеспечивает форму записи (2.80)–(2.83) и (2.87)–(2.90), учитывающую вырождение нескольких различных частот. Более того, при подходе, основанном на предельном переходе, формулы (2.80)–(2.83) и (2.87)–(2.90) вообще не зависят от кратностей вырождения частот взаимодействующих волн.

В качестве примеров использования полученных общих формул приведем выражения для связанных с нелокальным нелинейным оптическим откликом объёма непоглощающей среды добавок к плотности энергии $U^{(n, nloc)}$, вектору плотности потока энергии $S_k^{(n, nloc)}$, компонентам вектора плотности импульса $g_p^{(n, nloc)}$ и компонентам тензора плотности потока импульса $G_{pk}^{(n, nloc)}$ при генерации второй гармоники в среде с квадратичной нелинейностью и генерации третьей гармоники и самофокусировки в среде с кубической нелинейностью.

При генерации второй гармоники в среде с квадратичной нелинейностью $n = 2$, $\omega_{1,2} = \omega$, $m = 1$, $\omega_3 = 2\omega$, а $F(\omega) = 2$, $F(-2\omega) = 1$. Подстановка этих значений в (2.87)–(2.90) приводит

к следующим выражениям:

$$U^{(2,nloc)} = \left\{ [1 - K(\omega)] \gamma_{ijkl}^{(2)}(-\omega; \omega, -2\omega) E_i(\omega) \partial_k E_l^*(2\omega) + [1 - K(-2\omega)] \gamma_{ijkl}^{(2)}(2\omega; \omega, \omega) E_i^*(2\omega) \partial_k E_l(\omega) \right\} E_j(\omega) + \text{c.c.}, \quad (2.92)$$

$$S_k^{(2)} = c^{-1} \left[K(-2\omega) \gamma_{ijkl}^{(2)}(2\omega; \omega, \omega) E_i^*(2\omega) \partial_t E_l(\omega) + K(\omega) \gamma_{ijkl}^{(2)}(-\omega; \omega, -2\omega) E_i(\omega) \partial_t E_l^*(2\omega) \right] E_j(\omega) + \text{c.c.}, \quad (2.93)$$

$$g_p^{(2,nloc)} = e_{pij} \left(\gamma_{ilmk}^{(2)}(-\omega; \omega, -2\omega) B_j(\omega) \partial_k E_m^*(2\omega) + \gamma_{ilmk}^{(2)}(2\omega; \omega, \omega) B_j^*(2\omega) \partial_k E_m(\omega) \right) E_l(\omega) + \text{c.c.} \quad (2.94)$$

$$G_{pk}^{(2,nloc)} = \left\{ \delta_{pk} \left[K(\omega) \gamma_{ijlm}^{(2)}(-\omega; \omega, -2\omega) E_i(\omega) \partial_m E_l^*(2\omega) + K(-2\omega) \gamma_{ijlm}^{(2)}(2\omega; \omega, \omega) E_i^*(2\omega) \partial_m E_l(\omega) \right] - \left[K(-2\omega) \gamma_{ijkl}^{(2)}(2\omega; \omega, \omega) E_i^*(2\omega) \partial_p E_l(\omega) + K(\omega) \gamma_{ijkl}^{(2)}(-\omega; \omega, -2\omega) E_i(\omega) \partial_p E_l^*(2\omega) \right] - \left[\gamma_{kijlm}^{(2)}(2\omega; \omega, \omega) E_p^*(2\omega) \partial_m E_l(\omega) + \gamma_{kijlm}^{(2)}(-\omega; \omega, -2\omega) E_p(\omega) \partial_m E_l^*(2\omega) \right] \right\} E_j(\omega) + \text{c.c.}, \quad (2.95)$$

При использовании прямого подхода $K(\omega) = \frac{1}{4}$ и $K(-2\omega) = \frac{1}{2}$, тогда как при использовании подхода, основанного на предельном переходе, $K(\omega) = K(-2\omega) = \frac{1}{3}$. Если бы формулы (2.92)–(2.95) были получены из формул (2.46), (2.47), (2.42) и (2.50) для невырожденных процессов, мы получили бы в неправильные значения $K(\omega) = 2/3$ и $K(-2\omega) = 1/3$.

В случае генерации третьей гармоники в среде с кубической нелинейностью $n = 3$, $\omega_{1,2,3} = \omega$, $\omega_4 = 3\omega$, т.е. $m = 1$, $F(\omega) = 3$, а $F(-3\omega) = 1$, и формулы (2.87)–(2.90) принимают вид:

$$U^{(3,nloc)} = \left\{ [1 - K(\omega)] \gamma_{ijlmk}^{(3)}(-\omega; \omega, \omega, -3\omega) E_i(\omega) \partial_k E_m^*(3\omega) + [1 - K(-3\omega)] \gamma_{ijlmk}^{(3)}(3\omega; \omega, \omega, \omega) E_i^*(3\omega) \partial_k E_m(\omega) \right\} E_j(\omega) E_l(\omega) + \text{c.c.}, \quad (2.96)$$

$$S_k^{(3)} = c^{-1} \left[K(-3\omega) \gamma_{ijlmk}^{(3)}(3\omega; \omega, \omega, \omega) E_i^*(3\omega) \partial_t E_m(\omega) + K(\omega) \gamma_{ijlmk}^{(3)}(-\omega; \omega, \omega, -3\omega) E_i(\omega) \partial_t E_m^*(3\omega) \right] E_j(\omega) E_l(\omega) + \text{c.c.}, \quad (2.97)$$

$$g_p^{(3,nloc)} = e_{pij} \left(\gamma_{ilmnk}^{(3)}(-\omega; \omega, \omega, -3\omega) B_j(\omega) \partial_k E_n^*(3\omega) + \gamma_{ilmnk}^{(3)}(3\omega; \omega, \omega, \omega) B_j^*(3\omega) \partial_k E_n(\omega) \right) E_l(\omega) E_m(\omega) + \text{c.c.} \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned}
G_{pk}^{(3,nloc)} = & \left\{ \delta_{pk} \left[K(\omega) \gamma_{ijlmn}^{(3)}(-\omega; \omega, \omega, -3\omega) E_i(\omega) \partial_n E_m^*(3\omega) + \right. \right. \\
& + K(-3\omega) \gamma_{ijlmn}^{(3)}(3\omega; \omega, \omega, \omega) E_i^*(3\omega) \partial_n E_m(\omega) \left. \right] - \\
& - \left[K(-3\omega) \gamma_{ijlmk}^{(3)}(3\omega; \omega, \omega, \omega) E_i^*(3\omega) \partial_p E_m(\omega) + \right. \\
& + K(\omega) \gamma_{ijlmk}^{(3)}(-\omega; \omega, \omega, -3\omega) E_i(\omega) \partial_p E_m^*(3\omega) \left. \right] - \\
& - \left[\gamma_{kjlmn}^{(3)}(3\omega; \omega, \omega, \omega) E_p^*(3\omega) \partial_n E_m(\omega) + \right. \\
& \left. \left. + \gamma_{kjlmn}^{(3)}(-\omega; \omega, \omega, -3\omega) E_p(\omega) \partial_n E_m^*(3\omega) \right] \right\} E_j(\omega) E_l(\omega) + \text{c.c.}, \quad (2.99)
\end{aligned}$$

В этих формулах $K(\omega) = \frac{1}{6}$ и $K(-3\omega) = \frac{1}{2}$ при использовании прямого подхода, и $K(\omega) = K(-3\omega) = \frac{1}{4}$ при использовании подхода, основанного на предельном переходе. Используя формулы (2.46), (2.47), (2.42) и (2.50), полученные для невырожденных процессов, мы получили бы в формулах (2.96)–(2.99) неправильные значения $K(\omega) = 3/4$ и $K(-3\omega) = 1/4$.

Если происходит самовоздействие электромагнитной волны (процесс $\omega = -\omega + \omega + \omega$) в среде с кубической нелинейностью ($n = 3$), то частота $\omega_1 = -\omega$, а $\omega_{2,3,4} = \omega$. Формально можно считать, что взаимодействуют две волны с частотами ω и $-\omega$, для которых $m = 2$, $F(\omega) = F(-\omega) = 2$. В этом случае формулы (2.87)–(2.90) принимают вид:

$$\begin{aligned}
U^{(3,nloc)} = & \frac{3}{4} \left[\gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega) E_i^*(\omega) \partial_k E_m(\omega) + \right. \\
& \left. + \gamma_{iljmk}^{(3)}(-\omega; \omega, -\omega, -\omega) E_i(\omega) \partial_k E_m^*(\omega) \right] E_j^*(\omega) E_l(\omega), \quad (2.100)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_k^{(3)} = & \frac{1}{4c} \left[\gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega) E_i^*(\omega) \partial_t E_m(\omega) + \right. \\
& \left. + \gamma_{iljmk}^{(3)}(-\omega; \omega, -\omega, -\omega) E_i(\omega) \partial_t E_m^*(\omega) \right] E_j^*(\omega) E_l(\omega), \quad (2.101)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_p^{(3,nloc)} = & e_{pij} \left(\gamma_{ilmnk}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega) B_i^*(\omega) \partial_k E_n(\omega) + \right. \\
& \left. + \gamma_{imlnk}^{(3)}(-\omega; \omega, -\omega, -\omega) B_i(\omega) \partial_k E_n^*(\omega) \right) E_l^*(\omega) E_m(\omega) \quad (2.102)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{pk}^{(3,nloc)} = & \left\{ \frac{1}{4} \left[\delta_{pk} \left(\gamma_{ijlmn}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega) E_i^*(\omega) \partial_n E_m^*(\omega) + \right. \right. \right. \\
& \gamma_{iljmn}^{(3)}(-\omega; \omega, -\omega, -\omega) E_i(\omega) \partial_n E_m^*(\omega) \left. \right) - \\
& - \left(\gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega) E_i^*(\omega) \partial_p E_m(\omega) + \right. \\
& \left. + \gamma_{iljmk}^{(3)}(\omega; \omega, -\omega, -\omega) E_i(\omega) \partial_p E_m^*(\omega) \right) \left. \right] - \\
& - \gamma_{kjlmn}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega) E_p^*(\omega) \partial_n E_m(\omega) - \\
& \left. - \gamma_{kljmn}^{(3)}(-\omega; \omega, -\omega, -\omega) E_p(\omega) \partial_n E_m^*(\omega) \right\} E_j^*(\omega) E_l(\omega), \quad (2.103)
\end{aligned}$$

В этом частном случае прямой подход и подход, основанный на предельном переходе, приводят к одинаковым коэффициентам $K(\omega) = K(-\omega) = \frac{1}{4}$. Отметим, что каждое из выражений (2.100)–(2.103) является действительным и наличие комплексного сопряжения в формулах не требуется. Используя формулы для невырожденных процессов, мы получили бы в два раза большие величины, чем те, которые стоят в правых частях равенств (2.100)–(2.103).

§ 2.4 Численная оценка долей нелинейных компонент энергии и импульса в процессе самофокусировки света в изотропной гиротропной среде

Рассмотрим, насколько значительным оказывается вклад полученных добавок к плотности энергии, плотности потока энергии, плотности импульса и плотности потока импульса в случае самофокусировки света в изотропной гиротропной среде. Интерес к этому явлению обусловлен, во-первых, тем, что его описание, в отличие от других нелинейных оптических эффектов, таких как генерация частот, не проводится в приближении заданного поля волн основного излучения и связан с решением уравнений распространения для компонент электрического поля единственного пучка. Во-вторых, в результате превышения порога самофокусировки пучок сужается и его пиковая интенсивность многократно возрастает, благодаря чему вклад в величину компонент тензора энергии-импульса Минковского слагаемых, содержащих произведения четырех компонент вектора напряженности электрического поля, растёт быстрее, чем вклад тех слагаемых, куда входят произведения лишь двух компонент вектора напряженности.

В предыдущих разделах связь между индукцией электрического поля и поляризацией среды задавалась простым уравнением $\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}$. Такое представление позволяет исключить из выкладок и итоговых выражений лишние численные коэффициенты. Для целей настоящего раздела это уравнение связи перепишем в виде $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, соответствующем системе СГС, и часто используемом при решении задачи самовоздействия света [39; 46; 99].

В случае самофокусировки монохроматического эллиптически поляризованного пучка частоты ω в среде с кубической нелинейностью U , S_k , g_p и G_{pk} состоят из четырех групп слагаемых, связанных соответственно с локальной и нелокальной линейными и локальной и нелокальной нелинейными составляющими оптического отклика среды. Входящие в них напряженность $\mathbf{E}(x, y, z, \omega) \exp(-i\omega t) + \text{c.c.}$ и индукция $\mathbf{B}(x, y, z, \omega) \exp(-i\omega t) + \text{c.c.}$ электромагнитного поля распространяющейся волны связаны соотношением $B_i = (-ic/\omega)e_{ijk}\partial_j E_k$. Части U , S_k , g_p и G_{pk} , связанные с локальным линейным откликом далее будем обозначать верхним индексом lL . Эти величины задаются хорошо известными формулами [16]:

$$U^{(lL)} = \frac{1}{4\pi} \left(E_i^* E_i + B_i^* B_i + 4\pi\chi_{ij}^{(1)} E_i^* E_j \right), \quad (2.104)$$

$$S_k^{(lL)} = \frac{e_{kij}}{4\pi} \left(E_i^* B_j + E_i B_j^* \right), \quad (2.105)$$

$$g_p^{(lL)} = \frac{e_{pij}}{4\pi} \left(E_i^* + 4\pi\chi_{in}^{(1)*} E_n^* \right) B_j + \text{c.c.}, \quad (2.106)$$

$$\begin{aligned} G_{pk}^{(lL)} = & \frac{1}{4\pi} \left[\delta_{pk} \left(E_i^* E_i + B_i^* B_i + 4\pi\chi_{ij}^{(1)} E_i^* E_j \right) - \right. \\ & - B_k^* B_p - B_k B_p^* - E_k^* E_p - E_k E_p^* - \\ & \left. - 4\pi\chi_{kj}^{(1)} E_j E_p^* - 4\pi\chi_{kj}^{(1)*} E_j^* E_p \right]. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Здесь $\chi_{ij}^{(1)}(\omega)$ — компоненты тензора локальной линейной оптической восприимчивости среды.

Выражения для связанных с нелокальным линейным оптическим откликом частей U , S_k , g_p и G_{pk} (верхний индекс nL) также могут быть найдены в литературе [52; 59], либо получены как частный случай формул (2.46), (2.47), (2.42) и (2.47) при $n = 1$:

$$U^{(nL)} = \frac{1}{2} \gamma_{ijk}^{(1)} (E_i^* \partial_k E_j - E_j \partial_k E_i^*), \quad (2.108)$$

$$S_k^{(nL)} = -\frac{i\omega}{c} \gamma_{ijk}^{(1)} E_i^* E_j, \quad (2.109)$$

$$g_p^{(nL)} = e_{pij} \gamma_{ink}^{(1)*} \partial_k E_n^* E_j + \text{c.c.}, \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} G_{pk}^{(nL)} &= \frac{1}{2} \delta_{pk} \gamma_{ijn}^{(1)} (E_i^* \partial_n E_j - E_j \partial_n E_i^*) - \\ &- \frac{1}{2} \gamma_{ijk}^{(1)} (E_i^* \partial_p E_j - E_j \partial_p E_i^*) - \\ &- \gamma_{kjn}^{(1)*} \partial_n E_j^* E_p - \gamma_{kjn}^{(1)} \partial_n E_j E_p^*, \end{aligned} \quad (2.111)$$

где $\gamma_{ijk}^{(1)}(\omega)$ — компоненты тензора нелокальной линейной восприимчивости среды.

Связанные с локальным нелинейным откликом (верхний индекс lN) части U , S_k , g_p и G_{pk} могут быть получены из формул (2.80)–(2.83) аналогично тому, как формулы (2.100)–(2.103) были получены из (2.87)–(2.90):

$$U^{(lN)} = \frac{3}{2} \chi_{ijkn}^{(3)} E_i^* E_j^* E_k E_n, \quad (2.112)$$

$$S_k^{(lN)} = 0, \quad (2.113)$$

$$g_p^{(lN)} = \frac{i c}{\omega} \chi_{ijkn}^{(3)*} E_j E_k^* E_n^* (\partial_i E_p - \partial_p E_i) + \text{c.c.}, \quad (2.114)$$

$$\begin{aligned} G_{pk}^{(lN)} &= \frac{1}{2} \delta_{pk} \chi_{ijnm}^{(3)} E_i^* E_j^* E_n E_m - \\ &- \chi_{kjm n}^{(3)*} E_j E_m^* E_n^* E_p - \chi_{kjm n}^{(3)} E_j^* E_m E_n E_p^*, \end{aligned} \quad (2.115)$$

где $\chi_{ijkl}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega)$ — компоненты тензора локальной кубической нелинейности. В частном случае изотропной среды формула (2.112) может быть получена на основе результатов работы [57].

Наконец, связанные с нелокальным нелинейным откликом среды (индекс nN) части U , S_k , g_p и G_{pk} задаются формулами (2.100)–(2.103), которые в рассматриваемом случае могут быть записаны в виде:

$$U^{(nN)} = \frac{3}{4} \gamma_{ijkmp}^{(3)} (E_i^* E_j^* E_k \partial_p E_m - E_k E_m E_i^* \partial_p E_j^*) \quad (2.116)$$

$$S_k^{(nN)} = -\frac{i\omega}{4c} \left(\gamma_{ijnmk}^{(3)} E_i^* E_m - \gamma_{injmk}^{(3)*} E_i E_m^* \right) E_j^* E_n, \quad (2.117)$$

$$g_p^{(nN)} = \frac{i c}{\omega} \gamma_{ijmlk}^{(3)*} E_j E_m^* \partial_k E_l^* (\partial_i E_p - \partial_p E_i) + \text{c.c.}, \quad (2.118)$$

$$\begin{aligned} G_{pk}^{(nN)} &= \frac{1}{4} \delta_{pk} \gamma_{ijlmn}^{(3)} E_i^* E_l (E_j^* \partial_n E_m - E_m \partial_n E_j^*) - \\ &- \frac{1}{4} \gamma_{ijlmk}^{(3)} E_i^* E_l (E_j^* \partial_p E_m - E_m \partial_p E_j^*) - \\ &- \gamma_{kjlmn}^{(3)*} E_j E_l^* \partial_n E_m^* E_p - \gamma_{kjlmn}^{(3)} E_j^* E_l \partial_n E_m E_p^*. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Здесь $\gamma_{ijklp}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega)$ — компоненты тензора нелокальной нелинейной восприимчивости, первые четыре индекса которых связаны с частотами ω , $-\omega$, ω и ω соответственно.

Если самофокусировка эллиптически поляризованного пучка, распространяющегося вдоль оси z , происходит в непоглощающей изотропной гиротропной среде (симметрия $\infty\infty$), то с учетом соотношений внутренней симметрии [16; 53; 74; 82] и (1.71)–(1.73) $\chi_{ij}^{(1)} = (\varepsilon - 1)\delta_{ij}/4\pi$, $\gamma_{ijk}^{(1)} = \gamma_1 e_{ijk}$, $\chi_{ijlm}^{(3)} = \chi_1(\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl})/2 + \chi_2\delta_{ij}\delta_{lm}$, $\gamma_{ijmnl}^{(3)} = \gamma_3(e_{ilm}\delta_{jn} + e_{iln}\delta_{jm} + e_{jlm}\delta_{in} + e_{jln}\delta_{im})/2$, где ε — линейная диэлектрическая проницаемость, а $\chi_{1,2}$ и $\gamma_{1,3}$ — зависящие от ω константы. Если для ее описания используется метод медленно меняющихся амплитуд [99], то $E_{x,y} = \mathcal{E}_{x,y}(\sqrt{\mu}x, \sqrt{\mu}y, \mu z) \exp(ikz)$, где k — модуль волнового вектора, μ — символический параметр малости, и дифференцирование $E_{x,y}$ по z сводится к умножению $E_{x,y}$ на ik . Продольной составляющей электрического поля в этом случае из-за её малости можно пренебречь.

Медленно меняющиеся амплитуды $\mathcal{E}_{\pm} = \mathcal{E}_x \pm i\mathcal{E}_y$ циркулярно поляризованных компонент электрического поля удовлетворяют следующей системе уравнений [39; 46]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2k}\Delta_{\perp}\right)\mathcal{E}_{\pm} = i\left[\pm\rho_0 + \left(\frac{\sigma_1}{2} \pm \rho_1\right)|\mathcal{E}_{\pm}|^2 + \left(\frac{\sigma_1}{2} + \sigma_2\right)|\mathcal{E}_{\mp}|^2\right]\mathcal{E}_{\pm}, \quad (2.120)$$

где $\rho_0 = 2\pi\omega^2\gamma_1/c^2$, $\sigma_{1,2} = 2\pi\omega^2\chi_{1,2}/kc^2$, $\rho_1 = 2\pi\omega^2\gamma_3/c^2$. Ее решение позволяет записать формулу для плотности энергии электромагнитного поля в виде: $U = U_0(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$. Здесь $U_0 = U^{(LL)} = \frac{\varepsilon}{4\pi}(|\mathcal{E}_+|^2 + |\mathcal{E}_-|^2)$, а определяющие вклады $U^{(nL)}$, $U^{(LN)}$ и $U^{(nN)}$ в плотность энергии U коэффициенты $\alpha_{1,2,3}$ имеют вид:

$$\alpha_1 = \frac{\rho_0}{k}M, \quad (2.121)$$

$$\alpha_2 = 3I\frac{\sigma_1 + \sigma_2(1 - M^2)}{2k} \quad (2.122)$$

$$\alpha_3 = \frac{3\rho_1}{2k}IM. \quad (2.123)$$

Здесь $I(x, y, z) = (|\mathcal{E}_+|^2 + |\mathcal{E}_-|^2)/2$ — интенсивность, а $M(x, y, z) = (|\mathcal{E}_+|^2 - |\mathcal{E}_-|^2)/(|\mathcal{E}_+|^2 + |\mathcal{E}_-|^2)$ — степень эллиптичности эллипса поляризации распространяющегося излучения. Зависящие от $|\mathcal{E}_{\pm}|$ коэффициенты $\alpha_{1,2,3}$ естественно обращаются в нуль, если непоглощающая среда демонстрирует исключительно локальный линейный отклик на внешнее электрическое поле. При самофокусировке света $S_z = S_z^{(LL)}(1 - \alpha_1 - \alpha_3/3)$, $g_z = g_z^{(LL)}(1 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2/3 + 2\alpha_3/3)$ и $G_{zz} = G_{zz}^{(LL)}(1 + \alpha_2/3)$ намного больше остальных компонент векторов \mathbf{S} , \mathbf{g} и тензора \hat{G} . В этих формулах $S_z^{(LL)} = U_0/\sqrt{\varepsilon}$, $g_z^{(LL)} = U_0\sqrt{\varepsilon}$, а $G_{zz}^{(LL)} = U_0$. Благодаря произведению $\rho_{0,1}M$, коэффициенты $\alpha_{1,3}$ могут иметь любой знак, т.е. могут как увеличивать, так и уменьшать U , \mathbf{S} , \mathbf{g} и \hat{G} . При этом в фокусирующей среде α_2 всегда положительно.

Будем считать, что на среду падает эллиптически поляризованный гауссов пучок:

$$\mathcal{E}_{\pm}(x, y, 0) = \sqrt{I_0(1 \pm M_0)} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right), \quad (2.124)$$

где $M_0 = M(x, y, 0)$, а $I_0 = I(x, y, 0)$. Переходя к безразмерным переменным x/w , y/w , z/L_d и $\mathcal{E}_{\pm}/\sqrt{I_0}$, где $L_d = kw^2$, легко установить, что характер самовоздействия света определяется следующими параметрами падающего излучения и непоглощающей изотропной гиротропной среды: $I_{\sigma} = \sigma_1 I_0 L_d/2$, M_0 , $\rho_0 L_d$, $2\rho_1/\sigma_1$ и $2\sigma_2/\sigma_1$.

Анализ формул для $\alpha_{1,2,3}$ показывает, что отношение $U^{(nN)}/U^{(LN)} = \alpha_3/\alpha_2$ достигает своего максимального значения ρ_1/σ_1 в тех точках пространства, где излучение циркулярно

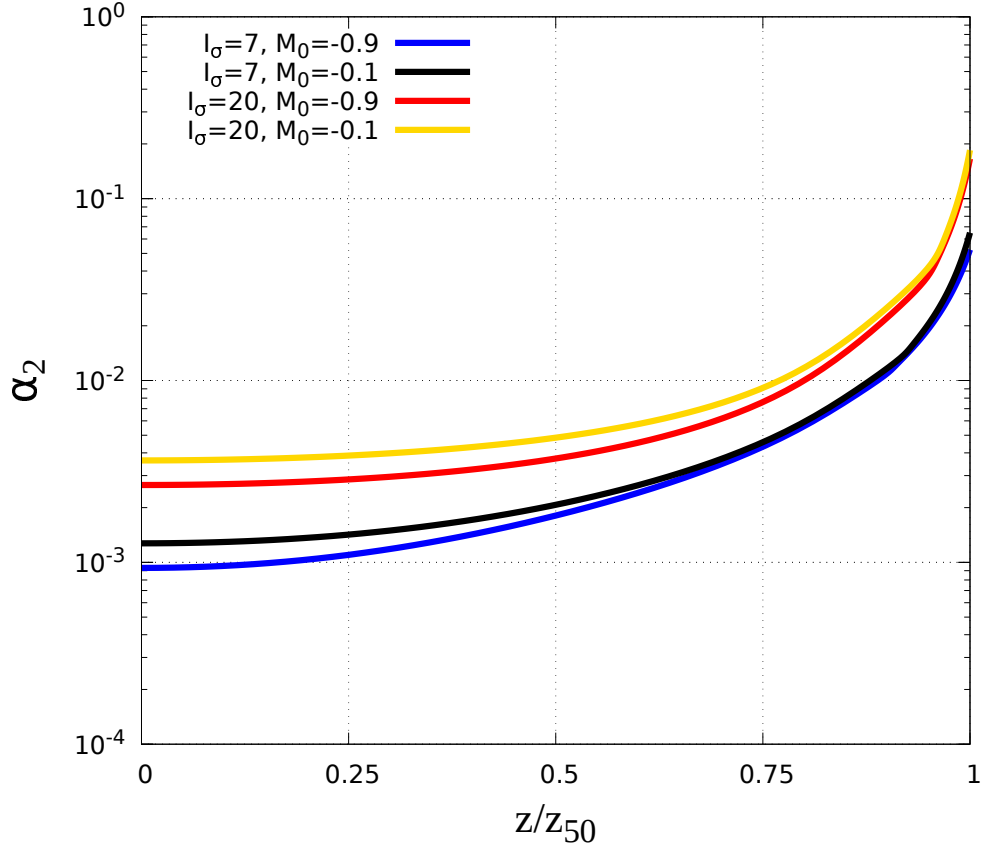


Рис. 2.1: Зависимость α_2 от координаты распространения при $\rho_0 L_d = 0.1$, $\sigma_2/\sigma_1 = 0.5$, $\rho_1/\sigma_1 = 0.05$ при $I_\sigma = 7$ и $I_\sigma = 20$ в случае падения на среду почти линейно ($M_0 = -0.1$) поляризованного пучка и излучения с поляризацией близкой к круговой ($M_0 = -0.9$). Единица на оси абсцисс соответствует значению z/L_d при котором I в пятьдесят раз превышает I_0 .

поляризовано ($M = \pm 1$, точки сингулярности поляризации C -типа). Это отношение в обычных средах не превышает 0.01, но в отдельных случаях может достигать 0.1 (например, в изотропной фазе холестерического жидкого кристалла вблизи температуры перехода в мезофазу) [39; 41]. Максимальный вклад нелинейного оптического отклика среды в \mathbf{S} , \mathbf{g} и \hat{G} происходит в тех точках пространства, в которых при самофокусировке узких эллиптически поляризованных пучков излучение становится линейно поляризованным ($M = 0$, точки сингулярности поляризации L -типа). Именно в этом случае $\alpha_2 \approx 2 \cdot 10^{-2} (\lambda/w)^2 I_\sigma (I/I_0)$ и при $w \approx 25\lambda$, где $\lambda = 2\pi/k$, значение α_2 может достигать десяти процентов. В качестве примера на рис. 2.1 приведены результаты решения системы уравнений (2.120) при $\rho_0 L_d = 0.1$, $\sigma_2/\sigma_1 = 0.5$, $\rho_1/\sigma_1 = 0.05$ для нормированных интенсивностей $I_\sigma = 7$ и $I_\sigma = 20$ в случае падения на среду почти линейно ($M_0 = -0.1$) поляризованного пучка и излучения с поляризацией близкой к круговой ($M_0 = -0.9$). Значение $I_\sigma \approx 1$ соответствует порогу самофокусировки линейно поляризованного излучения в случае самофокусировки пучка в изотропной негиротропной среде, при ее описании в приосевом приближении [99]. Единица на оси абсцисс соответствует значению z/L_d при котором I в пятьдесят раз превышает I_0 .

Отношение α_3/α_2 зависит не только от значения степени эллиптичности падающего пучка, но и от её знака. Поэтому различие компонент плотности энергии, плотности потока

энергии и плотности импульса в случае падения пучков с одинаковыми интенсивностями, но равными по модулю и отличающимися знаком степенями эллиптичности, будет обусловлено как различием соответствующих решений системы (2.120), так и противоположным вкладом в формулах для этих величин слагаемых, обусловленных нелокальным оптическим откликом среды. Хотя это различие невелико, оно напрямую связано с длиной самофокусировки пучка: для пучка, у которого нелокальная компонента увеличивает плотность энергии и импульса электромагнитного поля в процессе распространения, коллапс наступает на меньшем расстоянии от границы среды. Это различие тем больше заметно, чем меньше начальная интенсивность падающего пучка превышает порог самофокусировки. Так, например, при $I_\sigma = 7$, $M_0 = -0.9$ значение z_{50} , при которой максимальная интенсивность превышает I_0 в пятьдесят раз, равно $0.31L_d$, а для $I_\sigma = 7$, $M_0 = 0.9$ оно равно $0.26L_d$ (при одних и тех же параметрах нелинейной гиротропной среды). При тех же состояниях поляризации падающего излучения, но большем превышении порога самофокусировки, значения z_{50} оказываются существенно меньшими. Например, при $I_\sigma = 20$ и $M_0 = -0.9$ значение $z_{50} = 0.11L_d$, а при $M_0 = 0.9$ величина $z_{50} = 0.10L_d$.

Основные результаты второй главы.

Получены явные аналитические выражения для плотности энергии, плотности потока энергии, плотности импульса и плотности потока импульса электромагнитного поля в средах, обладающих нелокальностью нелинейного оптического отклика. Выражения для плотностей энергии и импульса отличаются от аналогичных им выражений в средах, не обладающих нелокальностью оптического отклика, только видом входящей в эти выражения поляризации среды. Выражения для плотностей потоков энергии и импульса содержат принципиально новые слагаемые, не пропорциональные поляризации среды. Для вырожденных по частотам нелинейных оптических процессов продемонстрированы два способа равнозначного учёта всех частот взаимодействующих волн, основанные на двух подходах к формальному определению числа взаимодействующих волн в нелинейной среде. Численная оценка отношения компонент плотностей и плотностей потоков энергии и импульса, связанных с нелинейным оптическим откликом, к связанным с линейным оптическим откликом компонентам этих же величин при самофокусировке гауссова пучка в изотропной гиротропной среде показывает, что это отношение может достигать десяти процентов. Учёт нелокальности оптического отклика может приводить как к увеличению, так и к уменьшению энергии и импульса пучка в этом процессе в зависимости от начальной степени эллиптичности, причём самофокусировка пучка, энергия и импульс которого оказываются больше благодаря нелокальному отклику среды, происходит раньше, чем для пучка, энергия и импульс которого меньше.

Глава 3

Закон сохранения углового момента электромагнитного поля в средах с нелокальностью нелинейного оптического отклика

§ 3.1 Влияние эффектов среды на угловой момент электромагнитного поля: обзор литературы

Как и законы сохранения энергии и импульса, закон сохранения углового момента является одним из фундаментальных законов физики. В теоретической физике выполнение этого закона сохранения связано с симметрией физической системы относительно вращения вокруг некоторой оси [2]. В электродинамике этот закон сохранения имеет вид балансного уравнения, связывающего плотность углового момента, плотность потока углового момента, а также плотность вращающего момента, обусловленную анизотропией среды [6; 58]. Существуют два основных подхода к построению математической формулировки закона сохранения углового момента.

В первом подходе закон сохранения углового момента электромагнитного поля может быть получен как следствие закона сохранения его импульса (2.16). В результате, входящие в него величины будут выражены непосредственно через компоненты плотности и плотности потока импульса [6; 58; 100; 101]. Как следствие, особенности оптического отклика среды также принципиально влияют на вид выражений для плотности углового момента, плотности потока углового момента и плотности вращающего момента электромагнитного поля. В простейшем случае распространения света в вакууме плотность вращающего момента τ_i тождественно равна нулю, а плотность J_i и плотность потока M_{ik} углового момента задаются выражениями [100]:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (3.1)$$

$$M_{il} = e_{ijk} x_j \left[\frac{1}{2} \delta_{kl} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) - E_k E_l - B_k B_l \right]. \quad (3.2)$$

В [100] обоснованием для выражения (3.2) для плотности потока углового момента электромагнитного поля являлся тот факт, что дивергенция именно такого произведения радиус-вектора \mathbf{r} , компоненты которого здесь обозначены как x_i , на плотность потока импульса

вместе с производной по времени от векторного произведения того же радиус-вектора на плотность импульса (3.1), определяющего плотность углового момента [102], удовлетворяет однородному балансному уравнению.

В работах [6; 58] был рассмотрен более формальный подход к получению закона сохранения углового момента света из закона сохранения импульса. Авторы этих работ векторно умножали закон сохранения импульса электромагнитного поля, распространяющегося в линейной среде, в форме (2.16) на радиус-вектор \mathbf{r} слева, после чего вносили радиус-вектор под операторы производных по времени и пространственным координатам. При этом в работе [6] рассматривались различные формы выражений для плотности и плотности потока импульса электромагнитного поля, включая форму Минковского, и закон сохранения углового момента был получен для каждой из них. В частности, при использовании тензора энергии-импульса Минковского плотность углового момента, плотность потока углового момента и плотность вращающего момента записываются в виде:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{D} \times \mathbf{B}, \quad (3.3)$$

$$M_{il} = e_{ijk} x_j \left[\frac{1}{2} \delta_{kl} (\mathbf{D}\mathbf{E} + |\mathbf{B}|^2) - E_k D_l - B_k B_l \right], \quad (3.4)$$

$$\tau_i = \mathbf{D} \times \mathbf{E}. \quad (3.5)$$

В работе [58], где использовался такой же метод, также учитывались пространственная и частотная дисперсия оптического отклика линейной среды, однако авторы накладывали ограничения на пространственный и частотный спектр излучения. В работе [103], основываясь на рассмотрении взаимодействия света с веществом на микроскопическом уровне, было также показано, что формулы (3.3) и (3.5) остаются справедливыми и для нелинейных сред без дисперсии. Вопросы потока углового момента света в указанной работе не рассматривались.

Другой распространённый способ получения выражений для плотности и плотности потока углового момента электромагнитного поля основан на анализе плотности функции Лагранжа электромагнитного поля в среде [94; 104]. Эта процедура хорошо развита в теоретической физике [2; 98] и в полной мере отражает связь закона сохранения углового момента света с симметрией среды. Эта связь проявляется не только в равенстве нулю проекции плотности вращающего момента на ось симметрии среды бесконечного порядка, но и в представлении как плотности, так и плотности потока углового момента в виде сумм двух слагаемых. Первое слагаемое, обычно называемое внешней или орбитальной составляющей углового момента, связано с вращением системы координат, тогда как второе, обычно называемое внутренней или спиновой составляющей, обусловлено вращением векторов электрического и магнитного поля [105–107]. Названия «внешняя» и «внутренняя» отражают тот факт, что первая составляющая углового момента явным образом зависит от выбора начала координат, тогда как вторая зависит только от величин компонент электрического и магнитного поля и их потенциалов, а названия «орбитальная» и «спиновая» — с их интерпретацией в квантовой физике [108]. В простейшем случае распространения электромагнитного поля в вакууме выражения для компонент вектора плотности L_i и плотности потока L_{ik} орбитальной составляющей углового момента электромагнитного поля записываются в виде

[104; 109]:

$$L_i = e_{ijk}x_j E_l \partial_k A_l, \quad (3.6)$$

$$L_{ik} = e_{ijp}x_p \left[\frac{\delta_{pk}}{2} (|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2) + e_{knl} B_l \partial_p A_n + E_k \partial_p \varphi \right], \quad (3.7)$$

где A_i — компоненты вектор-потенциала электромагнитного поля, φ — его скалярный потенциал. Плотность σ_i и плотность потока S_{ik} спинового углового момента электромагнитного поля в вакууме задаются выражениями [104; 109]:

$$\sigma_i = e_{ijk} E_j A_k, \quad (3.8)$$

$$S_{ik} = \delta_{ik} B_l A_l - B_i A_k. \quad (3.9)$$

Выражения (3.6)–(3.9) называются каноническими выражениями для плотностей и плотностей потоков орбитальной и спиновой составляющих углового момента [3]. Зависимость этих величин не только от компонент электрического и магнитного полей, но и от потенциалов электромагнитного поля, а значит и от выбора калибровки, хорошо известа с первых работ, в которых были получены эти величины, и физически значимыми они являются при использовании калибровки Кулона $\nabla \mathbf{A} = 0$ [104; 108]. Помимо этого, орбитальная и спиновая составляющие углового момента, получаемые интегрированием соответственно (3.6) и (3.8) по всему пространству, в общем случае не удовлетворяют критериям, которые позволили бы считать эти величины самостоятельными угловыми моментами. Это связано с тем фактом, что независимые вращения системы координат и вектора электромагнитного поля приводят к нарушениям уравнений Максвелла [107]. Как следствие, существуют сомнения относительно принципиальной возможности разделения углового момента на самостоятельные орбитальную и спиновую составляющие. В то же время, существуют эксперименты, показывающие возможность независимого детектирования этих величин [110–114].

Недостатком основанного на рассмотрении плотности функции Лагранжа метода получения компонент плотности и плотности потока углового момента заключается в необходимости найти такой вид этой функции, при котором уравнения Лагранжа в точности совпадут с уравнениями Максвелла в рассматриваемой среде. Приведённые выше выражения следуют из хорошо известного выражения для плотности функции Лагранжа электромагнитного поля в вакууме [4]. Этот результат, естественно, легко обобщается на линейные среды, в том числе обладающие частотной дисперсией [115; 116]. В работе [94] также рассматривается плотность функции Лагранжа электромагнитного поля в линейной гиротропной среде с использованием симметричной формы материальных уравнений. Хотя в указанной работе рассматривается закон сохранения углового момента и приводится явное выражение для компонент вектора плотности вращающего момента τ_i , авторы не приводят выражений для плотности и плотности потока углового момента. Наконец, отметим работы [95; 117] в которых впервые была получена плотность функции Лагранжа для электромагнитного поля в нелинейных средах с частотной дисперсией линейного оптического отклика. Выражение для плотности функции Лагранжа, описывающей электромагнитное поле в нелинейной среде, обладающей пространственной дисперсией оптического отклика, на данный момент неизвестно.

К вопросу о разделении углового момента света на орбитальную и спиновую составляющие можно подойти и без использования плотности функции Лагранжа. В большом количестве работ для этого в интегралах по всему пространству от выражений (3.1)–(3.2) (или, реже, (3.3)–(3.4) для линейных сред) некоторые из компонент напряжённости электрического поля и индукции магнитного поля представляют через скалярный и векторный потенциалы, после чего путём интегрирования по частям и исключения обращающихся в нуль поверхностных интегралов получают интегралы от выражений (3.6)–(3.9) [100; 107; 118; 119]. Другой способ разделения рассматривается в работе [120] и основывается на спектральном представлении электромагнитного поля. В отличие от приведённых выше выражений, получаемые таким образом компоненты спинового и орбитального углового момента электромагнитного поля оказываются независимыми от калибровки потенциала, однако оказываются принципиально нелокальными величинами. Наконец, отметим оригинальный вывод закона сохранения спинового углового момента электромагнитного поля в линейных гиротропных средах, продемонстрированный в [121] при использовании симметричной формы материальных уравнений. В отличие от описанных выше методов, в которых законы сохранения орбитальной и спиновой составляющих углового момента по отдельности не являются однородными балансными уравнениями даже в вакууме, авторы этой работы получили однородный закон сохранения спиновой составляющей углового момента непосредственно из уравнений Максвелла. При этом плотность потока спиновой составляющей углового момента отличается от канонической (3.9) и оказывается обобщением полученного для вакуума в [109] выражения на случай линейных гиротропных сред.

§ 3.2 Плотность потока углового момента электромагнитного поля при невырожденных процессах в средах с нелокальностью нелинейного оптического отклика

Прежде всего, покажем, что при учёте нелокальности оптического отклика среды выражение для плотности потока углового момента электромагнитного поля требует изменений по сравнению с аналогичным ему выражением для среды, не обладающей нелокальностью, причём эти изменения не сводятся к одному только учёту новых слагаемых в выражении для плотности потока импульса. Из закона сохранения импульса (2.16) может быть получена формула, выражающая закон сохранения углового момента электромагнитного поля [6; 10]:

$$\frac{1}{c} \partial_t [e_{ijp} x_j g_p] + \partial_k [e_{ijp} x_j G_{pk}] = e_{ikp} G_{pk}. \quad (3.10)$$

Здесь x_j — декартовы координаты радиус-вектора. Аналогично тому, как балансные уравнения для энергии (2.15) и импульса (2.16) связывают плотности этих величин с плотностями их потоков, уравнение (3.10) можно записать в виде балансного уравнения для плотности углового момента J_i и плотности потока углового момента M_{ik} :

$$\frac{1}{c} \partial_t J_i + \partial_k M_{ik} = \tau_i. \quad (3.11)$$

В (3.11) τ_i — компонента вектора плотности вращающего момента, обусловленного анизотропией среды. Если среда обладает симметрией относительно вращения вокруг некоторой оси, то компонента вектора плотности вращающего момента, направленная вдоль этой оси, должна быть равна нулю. Поэтому, в частности, в изотропной среде $\boldsymbol{\tau} \equiv 0$. Сравнивая (3.10) и (3.11), естественно предположить, что $J_i = e_{ijk}x_jg_k$, $M_{ij} = e_{ikl}x_kG_{lj}$ и $\tau_i = e_{ikl}G_{lk}$ [6; 100; 109]. Из последнего равенства в оптике сред, не обладающих пространственной дисперсией, следует утверждение, что если тензор плотности потока импульса \hat{G} несимметричен, то угловой момент света не сохраняется [101].

Тензор плотности потока импульса (2.50) (или (2.90)) оказывается несимметричным, например, в изотропной гиротропной среде с пространственной дисперсией квадратичной нелинейности. Покажем, что из этого не следует, что, например, при генерации суммарной частоты в изотропной гиротропной среде ($n = 2$, $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$) угловой момент электромагнитного поля не сохраняется. Чтобы убедиться в этом, подставим в (2.56) явный вид тензора нелокальной квадратичной оптической восприимчивости $\gamma_{ijkl}^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2)$ [82]:

$$\begin{aligned} \gamma_{ijkl}^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) &= \gamma_1(\omega_3, \omega_1, \omega_2)\delta_{ij}\delta_{kl} + \\ &+ \gamma_2(\omega_3, \omega_1, \omega_2)\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma_3(\omega_3, \omega_1, \omega_2)\delta_{il}\delta_{jk}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь $\gamma_{1,2,3}(\omega_3, \omega_1, \omega_2)$ — единственные ненулевые компоненты этого тензора, зависящие от частот взаимодействующих волн. Подставляя (3.12) в (2.56), можно убедиться, что получаемое в результате выражение для τ_i может быть записано в виде пространственной производной $\tau_i = e_{ikl}G_{lk} = \partial_j S_{ij}^{(2)}$, где

$$\begin{aligned} S_{ij}^{(2)} &= \frac{1}{3}e_{ikj} \left\{ [\gamma_3(\omega_3; \omega_1, \omega_2) + \gamma_3(\omega_3; \omega_2, \omega_1)] E_k^{(3)*} E_p^{(1)} E_p^{(2)} + \right. \\ &+ [\gamma_3(-\omega_1; \omega_2, -\omega_3) + \gamma_3(-\omega_1; -\omega_3, \omega_2)] E_k^{(1)} E_p^{(3)*} E_p^{(2)} + \\ &+ \left. [\gamma_3(-\omega_2; -\omega_3, \omega_1) + \gamma_3(-\omega_2; \omega_1, -\omega_3)] E_k^{(2)} E_p^{(3)*} E_p^{(1)} \right\} - \\ &- e_{ikl} \left[\gamma_2(\omega_3; \omega_1, \omega_2) E_l^{(3)*} E_j^{(1)} E_k^{(2)} + \gamma_2(\omega_3; \omega_2, \omega_1) E_l^{(3)*} E_k^{(1)} E_j^{(2)} + \right. \\ &+ \left. \gamma_3(\omega_3; \omega_1, \omega_2) E_j^{(3)*} E_l^{(1)} E_k^{(2)} + \gamma_3(\omega_3; \omega_2, \omega_1) E_j^{(3)*} E_k^{(1)} E_l^{(2)} \right] + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Как следствие, уравнение (3.11) принимает вид $c^{-1}\partial_t J_i + \partial_j (M_{ij} - S_{ij}^{(2)}) = 0$, т.е. угловой момент света в изотропной среде с нелокальностью квадратичного отклика, естественно, сохраняется, но формула для плотности потока углового момента оказывается более сложной, чем в средах без пространственной дисперсии. Целью настоящей главы является получение общих выражений для поправок к плотности потока углового момента электромагнитного поля в средах с нелокальностью нелинейного оптического отклика.

Пусть в среде, проявляющей нелокальность оптического отклика n -го порядка нелинейности, распространяются $n + 1$ волн на различных частотах $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \omega_{n+1}$, где $\omega_{n+1} = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$. В этом случае плотность импульса и плотность потока импульса могут быть представлены в виде:

$$g_p = g_p^{(1,loc)} + g_p^{(1,nloc)} + g_p^{(n,loc)} + g_p^{(n,nloc)}, \quad (3.14)$$

$$G_{pk} = G_{pk}^{(1,loc)} + G_{pk}^{(1,nloc)} + G_{pk}^{(n,loc)} + G_{pk}^{(n,nloc)}, \quad (3.15)$$

где $g_p^{(1,loc)}$ и $G_{pk}^{(1,loc)}$ определяются формулами (2.3) и (2.4) соответственно, $g_p^{(n,loc)}$ и $G_{pk}^{(n,loc)}$ — формулами (2.33) и (2.38), а $g_p^{(n,nloc)}$ и $G_{pk}^{(n,nloc)}$ — формулами (2.42) и (2.50). Выражения для $g_p^{(1,nloc)}$ и $G_{pk}^{(1,nloc)}$ могут быть получены как частные случаи $g_p^{(n,loc)}$ и $G_{pk}^{(n,nloc)}$ при $n = 1$.

Подставим (3.14), (3.15) в (3.10), в результате чего это равенство примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \partial_t J_i + \partial_k \left[e_{ijp} x_j \left(G_{pk}^{(1,loc)} + G_{pk}^{(1,nloc)} + G_{pk}^{(n,loc)} + G_{pk}^{(n,nloc)} \right) \right] = \\ & = e_{ikp} \left(G_{pk}^{(1,loc)} + G_{pk}^{(1,nloc)} + G_{pk}^{(n,loc)} + G_{pk}^{(n,nloc)} \right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $J_i = e_{ijp} x_j \left(g_p^{(1,loc)} + g_p^{(1,nloc)} + g_p^{(n,loc)} + g_p^{(n,nloc)} \right)$ — плотность углового момента в среде с нелокальностью нелинейного оптического отклика. Если $g_p^{(1,nloc)} = 0$, $G_{pk}^{(1,nloc)} = 0$, $g_p^{(n,nloc)} = 0$ и $G_{pk}^{(n,nloc)} = 0$, то формула (3.16) корректно отражает закон изменения углового момента электромагнитного поля. В этом случае выражение в квадратных скобках в (3.16) является плотностью потока углового момента, а сумма оставшихся двух слагаемых в правой части — плотностью вращающего момента, проекция которой на x_i обращается в нуль (как того требует закон сохранения углового момента) при наличии у среды оси симметрии бесконечного порядка, совпадающей с x_i . Однако в среде с нелокальностью нелинейного оптического отклика слагаемое $e_{ikp} G_{pk}^{(n,nloc)}$ в правой части (3.16) отлично от нуля, что не соответствует определению углового момента электромагнитного поля в такой среде как величины, сохранение которой связано с наличием вращательной симметрии. Ниже будет показано, что в отсутствие поглощения в случае взаимодействия волн, медленно меняющиеся амплитуды $\tilde{\mathbf{E}}^{(m)}(\mathbf{r}, t, \omega_m)$ которых имеют достаточно узкий частотный спектр вблизи ω_m (см. (2.21)), $e_{ikp} G_{pk}^{(n,nloc)}$ можно представить в виде:

$$e_{ikp} G_{pk}^{(n,nloc)} = \partial_j S_{ij}^{(n)} + \tilde{\tau}_i^{(n)}. \quad (3.17)$$

Формула (3.17) позволяет корректно записать закон сохранения углового момента электромагнитного поля в среде с нелокальностью нелинейного оптического отклика:

$$\frac{1}{c} \partial_t J_i + \partial_k M_{ik} = \tau_i. \quad (3.18)$$

Здесь плотность потока углового момента M_{ik} и плотность вращающего момента τ_i , определяются формулами:

$$M_{ik} = e_{ijp} x_j \left(G_{pk}^{(1,loc)} + G_{pk}^{(1,nloc)} + G_{pk}^{(n,loc)} + G_{pk}^{(n,nloc)} \right) - S_{ik}^{(1)} - S_{ik}^{(n)}, \quad (3.19)$$

$$\tau_i = e_{ikp} \left(G_{pk}^{(1,loc)} + G_{pk}^{(n,loc)} \right) + \tilde{\tau}_i^{(1)} + \tilde{\tau}_i^{(n)}. \quad (3.20)$$

Подчеркнем, что $\tilde{\tau}_i^{(n)}$ обращается в нуль, если нелинейная среда имеет ось симметрии бесконечного порядка, совпадающую с x_i .

С учетом (2.38) вклады в плотность потока углового момента и в плотность вращающего момента, обусловленные наличием нелинейного отклика n -го порядка, в средах без пространственной дисперсии принимают вид:

$$\begin{aligned} e_{ijp} x_j G_{pk}^{(n,loc)} &= \sum_{m=1}^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} e_{ijk} x_j P_l^{(n,loc)}(\omega_m) E_l^{(m)*} - \right. \\ & \left. - e_{ijp} x_j P_k^{(n,loc)}(\omega_m) E_p^{(m)*} \right) + \text{с.с.}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$e_{ikp}G_{pk}^{(n,loc)} = \sum_{m=1}^{n+1} e_{ipk}P_k^{(n,loc)}(\omega_m)E_p^{(m)*} + \text{с.с.}, \quad (3.22)$$

где поляризация $P_{l,k}^{(n,loc)}(\omega_m)$ определяется формулами (2.24) и (2.25). Отметим, что (3.22) определяет вращающий момент, противоположный вращающему моменту, действующему на диполь в электрическом поле (на это также обращено внимание в [103]). В частном случае электромагнитного поля в вакууме все компоненты вращающего момента (3.22) равны нулю.

Найдём явный вид добавок $S_{ik}^{(n)}$ и $\tilde{\tau}_i^{(n)}$, определяющих выражения для плотности потока углового момента электромагнитного поля (3.19) и плотности вращающего момента (3.20). Для этого подставим в $e_{ikp}G_{pk}^{(n,nloc)}$ задаваемый формулой (2.50) тензор $G_{pk}^{(n,nloc)}$, и далее подставим в получившееся выражение $P_k^{(n,nloc)}(\omega_m)$ и Γ_{ijk} , явный вид которых определяется равенствами (2.26), (2.27), (2.28) и (2.29). Каждое слагаемое в получившейся сумме содержит произведение напряженностей n электрических полей на различных n частотах из $\omega_{1,2,\dots,n,n+1}$ на пространственную производную напряженности электрического поля, зависящую от отсутствующей среди них $n + 1$ -й частоты. Переобозначим в каждом слагаемом индексы, по которым производится суммирование, так, чтобы для каждой частоты ω_m электрическое поле на частоте ω_m имело индекс i_m , а оператор дифференцирования по координате везде имел одинаковый индекс, используя равенства $E_p^{(m)} = \delta_{pi_m}E_{i_m}^{(m)}$ и $\partial_p = \delta_{pj}\partial_j$. Для более краткой записи дальнейших выражений введём тензоры:

$$\Theta_{i_{n+1}i_1^n p}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^n) = \sum_{m=1}^n \gamma_{i_{n+1}i_1^{m-1}i_{m+1}^n i_m p}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{m-1}, \bar{\omega}_{m+1}^n, \omega_m), \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} & \Theta_{i_m i_1^{m-1} i_{m+1}^{n+1} p}(\omega_m; -\bar{\omega}_1^{m-1}, -\bar{\omega}_{m+1}^n, \omega_{n+1}) = \\ & = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^n \gamma_{i_m i_{n+1} i_1^{\min(m,s)-1} i_{\min(m,s)+1}^{\max(m,s)-1} i_m i_{s+1}^n}^{(n)}(\omega_m; \omega_{n+1}, \\ & -\bar{\omega}_1^{\min(m,s)-1}, -\bar{\omega}_{\min(m,s)+1}^{\max(m,s)-1}, -\bar{\omega}_{\max(m,s)+1}^n, -\omega_s) + \\ & + \gamma_{i_m i_1^{m-1} i_{m+1}^{n+1} p}^{(n)}(\omega_m; -\bar{\omega}_1^{m-1}, -\bar{\omega}_{m+1}^n, \omega_{n+1}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Тензоры (3.23)–(3.24) являются симметричными по перестановке всех индексов кроме первого и последнего при одновременной перестановке соответствующих частот. Они представляют собой суммы всех компонент тензора нелокальной нелинейной восприимчивости, описывающих при разных значениях частотных аргументов генерацию частоты ω_{n+1} и ω_m со-

ответственно. В результате сделанных преобразований $e_{ikp}G_{pk}^{(n,nloc)}$ принимает вид:

$$\begin{aligned}
e_{ikp}G_{pk}^{(n,nloc)} = & -e_{ikp} \left[\sum_{s=1}^n \delta_{pi_s} \gamma_{ki_1^{s-1}i_{s+1}^n j}^{(n)} (\omega_s; -\bar{\omega}_1^{s-1}, -\bar{\omega}_{s+1}^n, \omega_{n+1}) - \right. \\
& - \frac{1}{n+1} \delta_{pj} \Theta_{i_{n+1}i_1^n k} (\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^n) \left. \right] \left(\prod_{s=1}^n E_{i_s}^{(s)*} \right) \partial_j E_{i_{n+1}}^{(n+1)} - \\
& - e_{ikp} \sum_{m=1}^n \left[\delta_{pi_{n+1}} \gamma_{ki_1^{m-1}i_{m+1}^n i_m j}^{(n)} (-\omega_{n+1}; -\bar{\omega}_1^{m-1}, -\bar{\omega}_{m+1}^n, -\omega_m) + \right. \\
& + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^n \delta_{pi_s} \gamma_{ki_{n+1}i_1^{\min(m,s)-1}i_{\min(m,s)+1}^{\max(m,s)-1}i_n^{\max(m,s)+1}i_m j}^{(n)} (\omega_s; \omega_{n+1}, \\
& -\bar{\omega}_1^{\min(m,s)-1}, -\bar{\omega}_{\min(m,s)+1}^{\max(m,s)-1}, -\bar{\omega}_{\max(m,s)+1}^n, -\omega_m) - \\
& \left. - \frac{1}{n+1} \delta_{pj} \Theta_{i_m i_1^{m-1}i_{m+1}^n k} (\omega_m; -\bar{\omega}_1^{m-1}, -\bar{\omega}_{m+1}^n, \omega_{n+1}) \right] \times \\
& \times \left(\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^n E_{i_s}^{(s)*} \right) E_{i_{n+1}}^{(n+1)} \partial_j E_{i_m}^{(m)*} + \text{c.c.}, \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Преобразуем получившуюся формулу (3.25). Запишем равенство (3.25) $n+1$ раз и заменим в первом из них слагаемое, содержащее $\partial_j E_{i_1}^{(1)}$, во втором равенстве слагаемое, содержащее $\partial_j E_{i_2}^{(2)}$, и так далее, в m -м равенстве ($1 \leq m \leq n$) слагаемое, содержащее $\partial_j E_{i_m}^{(m)}$, равными им выражениями:

$$\begin{aligned}
E_{i_{n+1}}^{(n+1)} \left(\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^n E_{i_s}^{(s)*} \right) \partial_j E_{i_m}^{(m)*} = & \partial_j \left(E_{i_{n+1}}^{(n+1)} \prod_{s=1}^n E_{i_s}^{(s)*} \right) - \\
& - \left[\prod_{s=1}^n E_{i_s}^{(s)*} \partial_j E_{i_{n+1}}^{(n+1)} + E_{i_{n+1}}^{(n+1)} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^n \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq s}}^n E_{i_q}^{(q)*} \partial_j E_{i_s}^{(s)*} \right], \tag{3.26}
\end{aligned}$$

где $1 \leq m \leq n$, а в последнем $(n+1)$ равенстве слагаемое, содержащее $\partial_j E_{i_{n+1}}^{(n+1)}$, следующим ему выражением:

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{s=1}^n E_{i_s}^{(s)*} \right) \partial_j E_{i_{n+1}}^{(n+1)} = & \partial_j \left(E_{i_{n+1}}^{(n+1)} \prod_{s=1}^n E_{i_s}^{(s)*} \right) - \\
& - E_{i_{n+1}}^{(n+1)} \sum_{s=1}^n \left(\prod_{q=1}^{s-1} E_{i_q}^{(q)*} \prod_{q=s+1}^n E_{i_q}^{(q)*} \partial_j E_{i_s}^{(s)*} \right). \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Справедливость соотношений (3.26) и (3.27) следует из правила дифференцирования произведения функций. Далее приравняем сумму левых частей всех получившихся в результате таких преобразований $n+1$ равенств сумме их правых частей и поделим обе части найденного выражения на $n+1$. Левая часть получившегося выражения окажется равной $e_{ikp}G_{pk}^{(n,nloc)}$.

В результате (3.25) примет вид:

$$e_{ikp} G_{pk}^{(n, nloc)} = \frac{e_{ikp}}{n+1} \left[-Q_{i_1^{n+1} jkp} \partial_j \left(E_{i_{n+1}}^{(n+1)*} \prod_{m=1}^n E_{i_m}^{(m)} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^n R_{i_1^{n+1} jkp}^{(m)} E_{i_{n+1}}^{(n+1)*} \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^n E_{i_s}^{(s)} \partial_j E_{i_m}^{(m)} + R_{i_1^{n+1} jkp}^{(n+1)} \prod_{s=1}^n E_{i_s}^{(s)} \partial_j E_{i_{n+1}}^{(n+1)*} + \text{c.c.} \right]. \quad (3.28)$$

Здесь $Q_{i_1^{n+1} jkp}$, $R_{i_1^{n+1} jkp}^{(m)}$ и $R_{i_1^{n+1} jkp}^{(n+1)}$ являются сложными линейными комбинациями компонент нелокальных оптических восприимчивостей n -го порядка. Их явный вид из-за громоздкости здесь не приводится. В окончательные выражения для $S_{ij}^{(n)}$ и $\tilde{\tau}_i^{(n)}$ они не входят, но позволяют более понятно изложить последующие математические преобразования.

В множителе $Q_{i_1^{n+1} jkp}$ формально присутствуют $n+2$ символа Кронекера с индексом p . Сгруппируем слагаемые при этих символах Кронекера. В результате δ_{pi_1} окажется умноженным на сумму компонент тензора нелокального нелинейного оптического отклика, равную $\Theta_{ki_2^{n+1} j}(-\omega_1; \bar{\omega}_2^n, -\omega_{n+1})$, δ_{pi_2} — на сумму, равную $\Theta_{ki_1 i_3^{n+1} j}(-\omega_2; \omega_1, \bar{\omega}_3^n, -\omega_{n+1})$, δ_{pi_3} — на $\Theta_{ki_1^2 i_4^{n+1} j}(-\omega_3; \bar{\omega}_1^2, \bar{\omega}_4^n, -\omega_{n+1})$ и т.д. Символ Кронекера $\delta_{pi_{n-1}}$ окажется умноженным на сумму $\Theta_{ki_1^{n-2} i_n^{n+1} j}(-\omega_{n-1}; \bar{\omega}_1^{n-2}, \omega_n, -\omega_{n+1})$, δ_{pi_n} — на $\Theta_{ki_1^{n-1} i_{n+1} j}(-\omega_n; \bar{\omega}_1^{n-1}, -\omega_{n+1})$, а $\delta_{pi_{n+1}}$ — на $\Theta_{ki_1^n j}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^n)$. Коэффициент при $n+2$ символе Кронекера δ_{pj} будет равен нулю в силу соотношения симметрии (1.33).

Преобразуем теперь второе и третье слагаемые в правой части (3.28). Также вынесем в каждом $R_{i_1^{n+1} jkp}^{(m)}$ ($1 \leq m \leq n+1$) все содержащие индекс p символы Кронекера за скобки. В $R_{i_1^{n+1} jkp}^{(n+1)}$ множитель перед $\delta_{pi_{n+1}}$ окажется равным $\Theta_{ki_1^{n+1} j}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^n)$. Присутствующие в $R_{i_1^{n+1} jkp}^{(n+1)}$ множители перед δ_{pi_s} ($1 \leq s \leq n$) содержат сумму n одинаковых компонент тензора нелокального нелинейного отклика $\gamma_{ki_1^{s-1} i_{s+1}^{n+1} j}^{(n)}(\omega_s; -\bar{\omega}_1^{s-1}, -\bar{\omega}_{s+1}^n, \omega_{n+1})$, из которой вычитаются $n-1$ компонента $\gamma_{ki_{n+1} i_1^{\min(q,s)-1} i_{\min(q,s)+1}^{\max(q,s)-1} i_{\max(q,s)+1}^{n+1} j}^{(n)}(\omega_s; \omega_{n+1}, -\bar{\omega}_1^{\min(q,s)-1}, -\bar{\omega}_{\min(q,s)+1}^{\max(q,s)-1}, -\bar{\omega}_{\max(q,s)+1}^n, -\omega_q)$, соответствующие различным значениям q от 1 до n (кроме $q=s$). Заменим каждую из этих $n-1$ компонент равной ей величиной $-\gamma_{i_q i_{n+1} i_1^{\min(q,s)-1} i_{\min(q,s)+1}^{\max(q,s)-1} i_{\max(q,s)+1}^{n+1} k j}^{(n)}(\omega_q; \omega_{n+1}, -\bar{\omega}_1^{\min(q,s)-1}, -\bar{\omega}_{\min(q,s)+1}^{\max(q,s)-1}, -\bar{\omega}_{\max(q,s)+1}^n, -\omega_s)$, используя соотношение внутренней симметрии тензора нелокального нелинейного отклика (1.28). В результате каждая из $n-1$ разностей (соответствующих различным значениям q) превратится в сумму:

$$\gamma_{ki_1^{s-1} i_{s+1}^{n+1} j}^{(n)}(\omega_s; -\bar{\omega}_1^{s-1}, -\bar{\omega}_{s+1}^n, \omega_{n+1}) + \gamma_{i_q i_{n+1} i_1^{\min(q,s)-1} i_{\min(q,s)+1}^{\max(q,s)-1} i_{\max(q,s)+1}^{n+1} k j}^{(n)}(\omega_q; \omega_{n+1}, -\bar{\omega}_1^{\min(q,s)-1}, -\bar{\omega}_{\min(q,s)+1}^{\max(q,s)-1}, -\bar{\omega}_{\max(q,s)+1}^n, -\omega_s) = -\gamma_{i_{n+1} k i_1^{\min(q,s)-1} i_{\min(q,s)+1}^{\max(q,s)-1} i_{\max(q,s)+1}^{n+1} i_q j}^{(n)}(-\omega_{n+1}; -\omega_s, -\bar{\omega}_1^{\min(q,s)-1}, -\bar{\omega}_{\min(q,s)+1}^{\max(q,s)-1}, -\bar{\omega}_{\max(q,s)+1}^n, -\omega_q), \quad (3.29)$$

преобразуемую к правой части (3.29) с помощью соотношения симметрии тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$ (1.29). Складывая полученные $n-1$ слагаемых и прибавляя к ним $-\gamma_{i_{n+1} i_1^{s-1} i_{s+1}^{n+1} k j}^{(n)}(-\omega_{n+1}; -\bar{\omega}_1^{s-1}, -\bar{\omega}_{s+1}^n, -\omega_s)$, равную последней (n -ой) из одинаковых компонент $\gamma_{ki_1^{s-1} i_{s+1}^{n+1} i_{n+1} j}^{(n)}(\omega_s; -\bar{\omega}_1^{s-1}, -\bar{\omega}_{s+1}^n, \omega_{n+1})$, не участвующей в описанных выше преобразованиях, получаем, что множитель перед

δ_{pi_s} в $R_{i_1^{n+1}j_{kp}}^{(n+1)}$ равен $\Theta_{i_{n+1}i_1^{s-1}i_{s+1}^n kj}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{s-1}, \bar{\omega}_{s+1}^n, \omega_s)$. В $R_{i_1^{n+1}j_{kp}}^{(n+1)}$ также присутствует символ Кронекера δ_{pj} . Формально прибавим к стоящему перед ним множителю тензор $\Theta_{i_{n+1}i_1^n k}$, делённый на $n+1$, и вычтем такое же выражение. Эта операция дает возможность перегруппировать в преобразуемом множителе слагаемые и после этого упростить его воспользовавшись равенством (1.33). В итоге множитель, стоящий перед δ_{pj} в коэффициенте $R_{i_1^{n+1}j_{kp}}^{(n+1)}$, окажется равным $\Theta_{i_{n+1}i_1^n k}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^n)$.

При $1 \leq m \leq n$ стоящий перед δ_{pi_m} множитель в $R_{i_1^{n+1}j_{kp}}^{(m)}$, входящем в формулу (3.28), оказывается равным $\Theta_{ki_{n+1}i_1^{m-1}i_{m+1}^n j}(-\omega_m; -\omega_{n+1}, \bar{\omega}_1^{m-1}, \bar{\omega}_{m+1}^n)$. Коэффициент перед символом Кронекера $\delta_{pi_{n+1}}$ равен сумме $2n-1$ слагаемых. Среди них n одинаковых компонент тензора $\gamma_{ki_1^{m-1}i_{m+1}^n i_m j}^{(n)}(-\omega_{n+1}; -\bar{\omega}_1^{m-1}, -\bar{\omega}_{m+1}^n, -\omega_m)$ и $n-1$ взятых с обратным знаком компонент вида $\gamma_{ki_1^{s-1}i_{s+1}^n i_s j}^{(n)}(-\omega_{n+1}; -\bar{\omega}_1^{s-1}, -\bar{\omega}_{s+1}^n, -\omega_s)$, где s пробегает все значения от 1 до n за исключением m . Преобразование этой суммы из $2n-1$ слагаемых аналогично преобразованию, использованному при нахождении множителя перед δ_{pi_s} в $R_{i_1^{n+1}j_{kp}}^{(n+1)}$. Заменяя каждую из взятых с обратным знаком компонент $\gamma_{ki_1^{s-1}i_{s+1}^n i_s j}^{(n)}(-\omega_{n+1}; -\bar{\omega}_1^{s-1}, -\bar{\omega}_{s+1}^n, -\omega_s)$, содержащих ω_s , на равную ей в силу симметричного соотношения (1.28) компоненту $-\gamma_{i_s i_1^{s-1} i_{s+1}^n k j}^{(n)}(\omega_s; -\bar{\omega}_1^{s-1}, -\bar{\omega}_{s+1}^n, \omega_{n+1})$, прибавляя к их сумме $(n-1)\gamma_{ki_1^{m-1}i_{m+1}^n i_m j}^{(n)}(-\omega_{n+1}; -\bar{\omega}_1^{m-1}, -\bar{\omega}_{m+1}^n, -\omega_m)$ и группируя слагаемые, получаем $n-1$ сумм вида левой части равенства:

$$\begin{aligned} & \gamma_{ki_1^{m-1}i_{m+1}^n i_m j}^{(n)}(-\omega_{n+1}; -\bar{\omega}_1^{m-1}, -\bar{\omega}_{m+1}^n, -\omega_m) + \gamma_{i_s i_1^{s-1} i_{s+1}^n k j}^{(n)}(\omega_s; -\bar{\omega}_1^{s-1}, \\ & -\bar{\omega}_{s+1}^n, \omega_{n+1}) = -\gamma_{i_m k i_1^{\min(m,s)-1} i_{\min(m,s)+1}^{\max(m,s)-1} i_{\max(m,s)+1}^n i_s j}^{(n)}\left(\omega_m; \omega_{n+1}, -\bar{\omega}_1^{\min(m,s)-1}, \right. \\ & \left. -\bar{\omega}_{\min(m,s)+1}^{\max(m,s)-1}, -\bar{\omega}_{\max(m,s)+1}^n, -\omega_s\right), \end{aligned} \quad (3.30)$$

каждая из которых преобразуется в правую часть (3.30) с помощью соотношения симметрии тензора нелокальной нелинейной восприимчивости (1.29). Складывая $n-1$ слагаемых вида правой части (3.30), соответствующих различным значениям s , и прибавляя оставшееся в множителе перед символом Кронекера $\delta_{pi_{n+1}}$ слагаемое $\gamma_{ki_1^{m-1}i_{m+1}^n i_m j}^{(n)}(-\omega_{n+1}; -\bar{\omega}_1^{m-1}, -\bar{\omega}_{m+1}^n, -\omega_m)$, получаем, что этот множитель равен $\Theta_{i_m k i_1^{m-1} i_{m+1}^n j}(-\omega_m; -\omega_{n+1}, -\bar{\omega}_1^{m-1}, -\bar{\omega}_{m+1}^n)$. Аналогичным способом можно также найти коэффициент при δ_{pi_s} , который оказывается равным $\Theta_{i_m i_{n+1} i_1^{\min(m,s)-1} i_{\min(m,s)+1}^{\max(m,s)-1} i_{\max(m,s)+1}^n k j}(-\omega_m; -\omega_{n+1}, \bar{\omega}_1^{\min(m,s)-1}, \bar{\omega}_{\min(m,s)+1}^{\max(m,s)-1}, \bar{\omega}_{\max(m,s)+1}^n, \omega_s)$.

Наконец, формально прибавим к множителю, стоящему перед δ_{pj} в $R_{i_1^{n+1}j_{kp}}^{(m)}$ ($1 \leq m \leq n$), тензор $\Theta_{i_m i_1^{m-1} i_{m+1}^n i_{n+1} k}(\omega_m; -\bar{\omega}_1^{m-1}, -\bar{\omega}_{m+1}^n, \omega_{n+1})$, делённый на $n+1$, и вычтем такое же выражение. Эта операция, также как и ранее, дает возможность перегруппировать слагаемые в преобразуемом выражении и после этого упростить его воспользовавшись (1.33). В итоге стоящий перед δ_{pj} множитель станет равным $\Theta_{i_m i_1^{m-1} i_{m+1}^n i_{n+1} k}(\omega_m; -\bar{\omega}_1^{m-1}, -\bar{\omega}_{m+1}^n, \omega_{n+1})$.

В результате выполненных преобразований (3.25) приобретает вид (3.17), в котором

$$\begin{aligned}
S_{ij}^{(n)} = & -\frac{e_{ikp}}{n+1} \left\{ \sum_{s=1}^n \gamma_{ki_1^{s-1}i_{s+1}^n i_s j}^{(n)}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{s-1}, \bar{\omega}_{s+1}^n, \omega_s) E_p^{(n+1)*} \prod_{s=1}^n E_{i_s}^{(s)} + \right. \\
& + \sum_{m=1}^n \left[\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^n \gamma_{ki_{n+1}i_1^{\min(m,s)-1} i_{\min(m,s)+1}^{\max(m,s)-1} i_n^{\max(m,s)-1} i_s j}^{(n)}(-\omega_m; -\omega_{n+1}, \bar{\omega}_1^{\min(m,s)-1}, \right. \\
& \left. \bar{\omega}_{\min(m,s)+1}^{\max(m,s)-1}, \bar{\omega}_{\max(m,s)-1}^n, \omega_s) + \gamma_{ki_1^{m-1}i_{m+1}^n i_{n+1} j}^{(n)}(-\omega_m; \bar{\omega}_1^{m-1}, \bar{\omega}_{m+1}^n, -\omega_{n+1}) \right] \times \\
& \left. \times E_{i_{n+1}}^{(n+1)*} E_p^{(m)} \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^n E_{i_s}^{(s)} \right\} + \text{c.c.} \tag{3.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_i^{(n)} = & \frac{e_{ikp}}{n+1} \left\{ \left[\delta_{pj} \Theta_{i_{n+1}i_1^n k}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^n) + \sum_{s=1}^n \delta_{pis} \Theta_{i_{n+1}i_1^{s-1}i_{s+1}^n kj}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{s-1}, \bar{\omega}_{s+1}^n, \omega_s) + \right. \right. \\
& + \delta_{pi_{n+1}} \Theta_{ki_1^n j}(\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^n) \prod_{s=1}^n E_{i_s}^{(s)} \partial_j E_{i_{n+1}}^{(n+1)*} + \sum_{m=1}^n \left[\delta_{pj} \Theta_{i_m i_{n+1} i_1^{m-1} i_{m+1}^n k}(-\omega_m; -\omega_{n+1}, \right. \\
& \left. \bar{\omega}_1^{m-1}, \bar{\omega}_{m+1}^n) + \delta_{pi_m} \Theta_{ki_{n+1}i_1^{m-1}i_{m+1}^n j}(-\omega_m; -\omega_{n+1}, \bar{\omega}_1^{m-1}, \bar{\omega}_{m+1}^n) + \right. \\
& + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^n \delta_{pis} \Theta_{i_m i_{n+1} i_1^{\min(m,s)-1} i_{\min(m,s)+1}^{\max(m,s)-1} i_n^{\max(m,s)+1} kj}(-\omega_m; -\omega_{n+1}, \bar{\omega}_1^{\min(m,s)-1}, \bar{\omega}_{\min(m,s)+1}^{\max(m,s)-1}, \\
& \left. \bar{\omega}_{\max(m,s)+1}^n, \omega_s) + \delta_{pi_{n+1}} \Theta_{i_m k i_1^{m-1} i_{m+1}^n j}(-\omega_m; -\omega_{n+1}, \bar{\omega}_1^{m-1}, \bar{\omega}_{m+1}^n) \right] \times \\
& \left. \times E_{i_{n+1}}^{(n+1)*} \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^n E_{i_s}^{(s)} \partial_j E_{i_m}^{(m)} \right\} + \text{c.c.} \tag{3.32}
\end{aligned}$$

В качестве примера приведем формулы (3.31) и (3.32) в случае распространения волн в линейной среде ($n = 1$) и в среде с квадратичной нелинейностью ($n = 2$), демонстрирующими нелокальность оптического отклика на внешнее световое поле. В первом случае

$$S_{ij}^{(1)} = -\frac{e_{ikp}}{2} \left[\gamma_{kmj}^{(1)}(\omega) E_m(\omega) E_p^*(\omega) + \gamma_{kmj}^{(1)}(-\omega) E_p(\omega) E_m^*(\omega) \right], \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_i^{(1)} = & \frac{e_{ikp}}{2} \left[\left(\delta_{pj} \gamma_{msk}^{(1)}(\omega) + \delta_{pm} \gamma_{ksj}^{(1)}(\omega) + \delta_{ps} \gamma_{mkj}^{(1)}(\omega) \right) E_s(\omega) \partial_j E_m^*(\omega) + \right. \\
& \left. + \left(\delta_{pj} \gamma_{smk}^{(1)}(-\omega) + \delta_{ps} \gamma_{kmj}^{(1)}(-\omega) + \delta_{pm} \gamma_{skj}^{(1)}(-\omega) \right) E_m^*(\omega) \partial_j E_s(\omega) \right]. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

В изотропной гиротропной среде (пространственная группа симметрии $\infty\infty$) все ненулевые компоненты тензора $\gamma_{ijk}^{(1)}(\omega)$ определяются одной константой: $\gamma_{ijk}^{(1)}(\omega) = \gamma(\omega) e_{ijk}$. В этом случае формула (3.33) принимает вид:

$$S_{ij}^{(1)ig} = \frac{\gamma}{2} (E_i^*(\omega) E_j(\omega) + E_i(\omega) E_j^*(\omega)) - \gamma \delta_{ij} E_k^*(\omega) E_k(\omega), \tag{3.35}$$

а плотность вращающего момента оказывается тождественно равной нулю.

В случае трехволнового взаимодействия $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ в среде с квадратичной нелинейностью ($n = 2$) добавки $S_{ij}^{(2)}$ и $\tilde{\tau}_i^{(2)}$, определяющие выражения для плотности углового момента электромагнитного поля и плотности вращающего момента, выражаются формулами:

$$\begin{aligned}
S_{ij}^{(2)} = & -\frac{e_{ikp}}{3} \left\{ \delta_{pl} [\gamma_{ksmj}^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) + \gamma_{kmsj}^{(2)}(\omega_3; \omega_2, \omega_1)] + \right. \\
& + \delta_{ps} [\gamma_{kmlj}^{(2)}(-\omega_1; \omega_2, -\omega_3) + \gamma_{klmj}^{(2)}(-\omega_1; -\omega_3, \omega_1)] + \\
& + \delta_{pm} [\gamma_{klsj}^{(2)}(-\omega_2; -\omega_3, \omega_1) + \gamma_{kslj}^{(2)}(-\omega_2; \omega_1, -\omega_3)] \left. \right\} \times \\
& \times E_s^{(1)} E_m^{(2)} E_l^{(3)*} + \text{c.c.}, \tag{3.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_i^{(2)} = & \frac{e_{ikp}}{3} \left\{ \left[\delta_{pj} \left(\gamma_{lsmk}^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) + \gamma_{lmsk}^{(2)}(\omega_3; \omega_2, \omega_1) \right) + \right. \right. \\
& + \delta_{pl} \left(\gamma_{ksmj}^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) + \gamma_{kmsj}^{(2)}(\omega_3; \omega_2, \omega_1) \right) + \\
& + \delta_{ps} \left(\gamma_{lkmj}^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) + \gamma_{lmkj}^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) \right) + \\
& + \delta_{pm} \left(\gamma_{lskj}^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) + \gamma_{lksj}^{(2)}(\omega_3; \omega_2, \omega_1) \right) \left. \right] \times \\
& \times E_s^{(1)} E_m^{(2)} \partial_j E_l^{(3)*} + \\
& + \left[\delta_{pj} \left(\gamma_{smlk}^{(2)}(-\omega_1; \omega_2, -\omega_3) + \gamma_{slmk}^{(2)}(-\omega_1; -\omega_3, \omega_2) \right) + \right. \\
& + \delta_{ps} \left(\gamma_{kmlj}^{(2)}(-\omega_1; \omega_2, -\omega_3) + \gamma_{klmj}^{(2)}(-\omega_1; -\omega_3, \omega_2) \right) + \\
& + \delta_{pm} \left(\gamma_{sklj}^{(2)}(-\omega_1; \omega_2, -\omega_3) + \gamma_{slkj}^{(2)}(-\omega_1; -\omega_3, \omega_2) \right) + \\
& + \delta_{pl} \left(\gamma_{smkj}^{(2)}(-\omega_1; \omega_2, -\omega_3) + \gamma_{skmj}^{(2)}(-\omega_1; -\omega_3, \omega_2) \right) \left. \right] \times \\
& \times E_m^{(2)} E_l^{(3)*} \partial_j E_s^{(1)} + \\
& + \left[\delta_{pj} \left(\gamma_{mslk}^{(2)}(-\omega_2; \omega_1, -\omega_3) + \gamma_{mlsk}^{(2)}(-\omega_2; -\omega_3, \omega_1) \right) + \right. \\
& + \delta_{pm} \left(\gamma_{kslj}^{(2)}(-\omega_2; \omega_1, -\omega_3) + \gamma_{klsj}^{(2)}(-\omega_2; -\omega_3, \omega_1) \right) + \\
& + \delta_{ps} \left(\gamma_{mklj}^{(2)}(-\omega_2; \omega_1, -\omega_3) + \gamma_{mlkj}^{(2)}(-\omega_2; -\omega_3, \omega_1) \right) + \\
& + \delta_{pl} \left(\gamma_{mskj}^{(2)}(-\omega_2; \omega_1, -\omega_3) + \gamma_{mksj}^{(2)}(-\omega_2; -\omega_3, \omega_1) \right) \left. \right] \times \\
& \times E_l^{(3)*} E_s^{(1)} \partial_j E_m^{(2)} \left. \right\} + \text{c.c.} \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Подстановка выражения (3.12) для компонент тензора нелокальной квадратичной восприимчивости в (3.36) и (3.37) приводит к выражению (3.13) для $S_{ij}^{(2)}$ и $\tilde{\tau}_i^{(2)ig} = 0$. Эти два примера отчетливо показывают, что в среде с пространственной дисперсией оптического отклика выражения для плотности потока углового момента электромагнитного поля и плотности действующего на него вращающего момента становятся значительно более сложными по сравнению со средой, демонстрирующей локальный отклик на внешнее электрическое поле.

§ 3.3 Учёт вырождения частот в нелинейных оптических процессах в выражении для плотности потока углового момента электромагнитного поля в нелокальных средах

Если среди частот волн, распространяющихся в среде, обладающей нелокальным нелинейным оптическим откликом n -го порядка, только $m+1 < n+1$ являются различными, связанные с локальной и нелокальной составляющими нелинейного отклика компоненты плотности импульса и плотности потока импульса электромагнитного поля задаются выражениями (2.82), (2.83), (2.89) и (2.90). Целью настоящего раздела является получение явных аналитических выражений для компонент тензора $S_{ij}^{(n)}$ и вектора $\tilde{\tau}_i^{(n)}$, входящих в правую часть (3.17), при учёте вырождения частот взаимодействующих волн. Как и в разделе 2.3, будем считать для простоты, что вырожденной является только одна частота ω_m , тогда как для всех остальных частот кратность вырождения равна единице.

Как и в предыдущем разделе, для нахождения явного вида $S_{ij}^{(n)}$ и $\tilde{\tau}_i^{(n)}$ в каждом из слагаемых, входящих в формулу (2.90) для $G_{pk}^{(n,nloc)}$, переобозначим индексы у компонент напряжённостей электрических полей с помощью символа Кронекера так, чтобы поля на одинаковых частотах в каждом из них имели один и тот же индекс, а индекс оператора дифференцирования всегда был равен j . Домножим преобразованное таким способом выражение для $G_{pk}^{(n,nloc)}$ на e_{ikp} и сгруппируем в нём все слагаемые, содержащие одинаковые комбинации компонент напряжённостей электрических полей и их пространственных производных. В слагаемом, содержащем пространственную производную от поля на вырожденной частоте, внесём под оператор дифференцирования все оставшиеся компоненты напряжённости электрического поля на этой же частоте. В результате, в дальнейших выражениях это слагаемое будет содержать множитель $[F(\omega_m)]^{-1}$. Выполненное преобразование оказывается возможным благодаря полученному в разделе 1.3 соотношению внутренней симметрии тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$, позволяющему свободно переставлять между собой индексы полей, относящихся к одной и той же частоте.

Если среди частот взаимодействующих волн несколько различных частот оказываются вырожденными, то эту процедуру нужно повторить в каждом из слагаемых, содержащих производные от полей на каждой из этих частот. Чтобы после выполнения этой процедуры все слагаемые имели похожий вид, каждое из остальных слагаемых, содержащих под пространственной производной компоненты электрических полей на невырожденных частотах, формально домножим на равный единице коэффициент $[F(\omega_l)]^{-1}$, где ω_l — частота поля, от напряжённости которого берётся пространственная производная. Затем, выберем одну из частот ω_l и в преобразованном таким образом выражении для $\varepsilon_{ikp} G_{pk}^{(n,nloc)}$ представим с помощью соотношений (3.26)–(3.27) слагаемое, содержащее пространственную производную от произведения компонент поля на частоте ω_l (или одной компоненты, если частота ω_l является невырожденной), в виде разности двух выражений, первое из которых содержит производную от произведения всех напряжённостей электрических полей на всех частотах взаимодей-

ствующих волн, а второе равно произведению всех полей на частоте ω_l на пространственную производную от произведения всех остальных полей, частоты которых отличны от ω_l . Далее следует последовательно записать $m + 1$ раз получившуюся формулу для $\varepsilon_{ikp} G_{pk}^{(n, nloc)}$, выбирая в качестве ω_l каждую из частот $\omega_{1,2,\dots,m,n+1}$, и сложить их. При этом, как и в разделе 2.3, можно рассмотреть два подхода к формальному определению числа взаимодействующих волн.

При реализации прямого подхода выполняется суммирование $m + 1$ формулы для $\varepsilon_{ikp} G_{pk}^{(n, nloc)}$ с различными значениями ω_l , после чего результат следует поделить на $m + 1$. При подходе, основанном на предельном переходе от взаимодействия $n + 1$ волн с разными частотами к случаю, когда среди частот взаимодействующих волн есть равные друг другу, необходимо непосредственно после записи вышеупомянутых $m + 1$ выражений умножить каждое из них на $F(\omega_l)$ ($l = 1, 2, \dots, m, n + 1$). Результат суммирования получившихся $m + 1$ выражений следует в этом случае разделить на $n + 1$. После деления соответствующих сумм вышеупомянутых $m + 1$ равенств на $m + 1$ или $n + 1$ соответственно, при использовании обоих подходов будет получено равенство (3.17), в котором после выполнения преобразований, аналогичных описанным при получении (3.31)–(3.32), выражение для $S_{ij}^{(n)}$ будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
S_{ij}^{(n)} = & -e_{ikp} \left\{ \left[\sum_{s=1}^{m-1} K(\omega_s) \gamma_{ki_1^{s-1} i_{s+1}^n i_{s,j}} (\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{s-1}, \bar{\omega}_{s+1}^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m))}, \omega_s) + \right. \right. \\
& + K(\omega_m) \gamma_{ki_1^n j} (\omega_{n+1}; \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m))}) \left. \right] E_p^*(\omega_{n+1}) \prod_{r=1}^{m-1} E_{i_r}(\omega_r) \prod_{r=m}^n E_{i_r}(\omega_m) + \\
& + \sum_{l=1}^{m-1} \left[K(-\omega_{n+1}) \gamma_{ki_1^{l-1} i_{l+1}^n i_{n+1,j}} (-\omega_l; \bar{\omega}_1^{l-1}, \bar{\omega}_{l+1}^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m))}, -\omega_{n+1}) + \right. \\
& + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq l}}^{m-1} K(\omega_s) \gamma_{ki_{n+1} i_1^{\min(l,s)-1} i_{\min(l,s)+1}^{\max(l,s)-1} i_{\max(l,s)+1}^n i_{s,j}} (-\omega_l; -\omega_{n+1}, \\
& \bar{\omega}_1^{\min(l,s)-1}, \bar{\omega}_{\min(l,s)+1}^{\max(l,s)-1}, \bar{\omega}_{\max(l,s)+1}^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m))}, \omega_s) \left. \right] + \\
& + K(\omega_m) \gamma_{ki_{n+1} i_1^{l-1} i_{l+1}^n j} (-\omega_l; -\omega_{n+1}, \bar{\omega}_1^{l-1}, \bar{\omega}_{l+1}^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m))}) \left. \right] \times \\
& \times E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) E_p(\omega_l) \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq l}}^{m-1} E_{i_r}(\omega_r) \prod_{r=m}^n E_{i_r}(\omega_m) + \\
& + \left[\sum_{s=1}^{m-1} K(\omega_s) \gamma_{ki_{n+1} i_1^{s-1} i_{s+1}^{m-1} i_{m+1}^n i_{s,j}} (-\omega_m; -\omega_{n+1}, \bar{\omega}_1^{s-1}, \bar{\omega}_{s+1}^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m)-1)}, -\omega_s) + \right. \\
& + K(-\omega_{n+1}) \gamma_{ki_1^{m-1} i_{m+1}^n i_{n+1,j}} (-\omega_m; \bar{\omega}_1^{m-1}, \tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m)-1)}, -\omega_{n+1}) \left. \right] \times \\
& \times E_{i_{n+1}}^*(\omega_{n+1}) E_p(\omega_m) \prod_{r=1}^{m-1} E_{i_r}(\omega_r) \prod_{r=m+1}^n E_{i_r}(\omega_m) \left. \right\} + \text{c.c.} \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Здесь $K(\omega_{l,n+1}) = [(m + 1)F(\omega_{l,n+1})]^{-1}$, если как при записи $G_{pk}^{(n, nloc)}$, так и при получении (3.38) был использован прямой подход, и $K(\omega_{l,n+1}) = (n + 1)^{-1}$, если $G_{pk}^{(n, nloc)}$ и $S_{ij}^{(n)}$ были записаны в рамках подхода, основанного на предельном переходе. При $m = n$ для всех значений l $F(\omega_l) = 1$ и использование любого из подходов приводит к одинаковому выражению

для $S_{ij}^{(n)}$. Как и выражение (3.31), выражение (3.38) не содержит слагаемого с символом Кронекера δ_{pj} . Если же при записи выражений для $G_{pk}^{(n,nloc)}$ и $S_{ij}^{(n)}$ будут использованы различные подходы, то формула (3.38) будет иметь более сложный вид, в том числе содержащий ненулевое слагаемое с δ_{pj} . Величина $\tilde{\tau}_i^{(n,nloc)}$ определяется разностью $e_{ikp}G_{pk}^{(n,nloc)} - \partial_j S_{ij}^{(n)}$, которая обращается в нуль, если нелинейная среда имеет совпадающую с x_i ось симметрии бесконечного порядка. Явный вид $\tilde{\tau}_i^{(n,nloc)}$ оказывается существенно более громоздким, чем приведённая в предыдущем разделе формула (3.32), и не приводится здесь.

Основные результаты этого раздела, а также разделов 2.2, 2.3 и 3.2, явным образом включают в себя комплексное сопряжение. В то же время, среди различных режимов взаимодействия волн, вызванных нелинейностями нечётных порядков (включая линейный отклик), существуют такие, для которых суммы в выражениях (2.80), (2.82), (2.83), (2.87), (2.88), (2.89), (2.90) и (3.38) (а также в аналогичных формулах для невырожденных процессов) являются действительными, и поэтому эти формулы должны быть записаны без слагаемого с.с.. В качестве критерия таких процессов можно сформулировать следующий. Выберем одну из волн, участвующих в таком взаимодействии, и обозначим её частоту как ω_{n+1} . Далее запишем все частотные аргументы входящих в выражения для $P_i^{(n,loc)}(\omega_{n+1})$ и $P_i^{(n,nloc)}(\omega_{n+1})$ тензоров $\hat{\chi}^{(n)}$ и $\hat{\gamma}^{(n)}$ справа от точки с запятой в виде последовательности, добавим в неё частоту $-\omega_{n+1}$ и исключим все повторения частот. В результате будет получена последовательность частот $\omega_{n+1}, -\omega_1, -\omega_2, \dots, -\omega_m$. Если частоты в этой последовательности могут быть переставлены таким образом, чтобы сумма рядом стоящих на нечетных и четных местах частот была равна нулю, то выражения для связанных с этим нелинейнооптическим процессом компонент плотностей и плотностей потоков энергии, импульса и углового момента электромагнитного поля не требуют комплексного сопряжения. Примером такого процесса является самовоздействие света в среде с кубической нелинейностью.

Приведём примеры выражения для компонент тензора $S_{ij}^{(n)}$ для генерации второй гармоники в среде с квадратичной нелинейностью и генерации третьей гармоники и самофокусировки в среде с кубической нелинейностью. Полные выражения для связанных с нелинейным оптическим откликом объема среды компонент плотности углового момента $J_i^{(n,nloc)} = e_{ijp}x_j g_p^{(n,nloc)}$, плотности потока углового момента $M_{ik}^{(n,nloc)} = e_{ijp}x_j G_{pk}^{(n,nloc)} - S_{ik}^{(n)}$ и $\tilde{\tau}_i^{(n,nloc)}$ для этих процессов при необходимости могут быть записаны с помощью приведенных ниже выражений для $S_{ij}^{(n)}$, а также соответствующих им выражений для $g_p^{(n,nloc)}$ и $G_{pk}^{(n,nloc)}$, приведённых в разделе 2.3.

При генерации второй гармоники в среде с квадратичной нелинейностью $n = 2$, $\omega_{1,2} = \omega$, $m = 1$, $\omega_3 = 2\omega$, а $F(\omega) = 2$, $F(-2\omega) = 1$. Поэтому

$$S_{ij}^{(2)} = -e_{ikp} [K(\omega)\gamma_{klmj}(2\omega; \omega, \omega) E_p^*(2\omega) E_m(\omega) + K(-2\omega)\gamma_{klmj}(-\omega; \omega, -2\omega) E_p(\omega) E_m^*(2\omega)] E_l(\omega) + \text{с.с.} \quad (3.39)$$

Здесь $K(\omega) = \frac{1}{4}$ и $K(-2\omega) = \frac{1}{2}$ для прямого подхода, и $K(\omega) = K(-2\omega) = \frac{1}{3}$ для подхода, основанного на предельном переходе.

В случае генерации третьей гармоники в среде с кубической нелинейностью $n = 3$, $\omega_{1,2,3} =$

ω , $\omega_4 = 3\omega$, т.е. $m = 1$, $F(\omega) = 3$, а $F(-3\omega) = 1$ и в результате получаем:

$$\begin{aligned} S_{ij}^{(3)} = & -e_{ikp} [K(\omega)\gamma_{klmnj}(3\omega; \omega, \omega, \omega)E_p^*(3\omega)E_n(\omega) + \\ & + K(-3\omega)\gamma_{klmnj}(-\omega; \omega, \omega, -3\omega)E_p(\omega)E_n^*(3\omega)] \times \\ & \times E_l(\omega)E_m(\omega) + \text{с.с.} \end{aligned} \quad (3.40)$$

В этих формулах $K(\omega) = \frac{1}{6}$ и $K(-3\omega) = \frac{1}{2}$ при использовании прямого подхода, и $K(\omega) = K(-3\omega) = \frac{1}{4}$ при использовании подхода, основанного на предельном переходе.

При самовоздействии электромагнитной волны в среде с кубической нелинейностью $n = 3$, $\omega_1 = -\omega$ и $\omega_{2,3,4} = \omega$, и можно считать $m = 2$ и $F(\omega) = F(-\omega) = 2$. В этом случае выражение (3.38) принимает вид:

$$\begin{aligned} S_{ij}^{(3)} = & -\frac{e_{ikp}}{4} [\gamma_{klmnj}(\omega; -\omega, \omega, \omega)E_p^*(\omega)E_n(\omega) + \\ & + \gamma_{kmlnj}(-\omega; \omega, -\omega, -\omega)E_p(\omega)E_n^*(\omega)] E_l^*(\omega)E_m(\omega). \end{aligned} \quad (3.41)$$

В данном случае $K(\omega) = K(-\omega) = \frac{1}{4}$ при использовании как прямого подхода, так и подхода, основанного на предельном переходе.

§ 3.4 Разделение углового момента электромагнитного поля в среде с нелокальностью нелинейного оптического отклика на внешнюю и внутреннюю составляющие

Закон сохранения углового момента (3.11) в электродинамике связывает балансным уравнением компоненты вектора плотности углового момента J_i , тензора плотности потока углового момента M_{ik} и вектора вращающего момента $\boldsymbol{\tau}$. Явный вид этих величин зависит от материальных уравнений, связывающих индукции электрического и магнитного полей с их напряжённостями. Считая, как и ранее, напряжённость магнитного поля \mathbf{H} равной его индукции \mathbf{B} , индукцию электрического поля \mathbf{D} представим в виде:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}^{(n)} \quad (3.42)$$

где $\mathbf{P}^{(n)}$ — поляризация среды, связанная с нелинейным оптическим откликом n -го порядка и включающая в себя локальную и нелокальную компоненты. Отличием (3.42) от выражений для индукции, использованных в предыдущих разделах, является одновременный учёт всех порядков нелинейности. Пусть в непоглощающей однородной среде, демонстрирующей нелокальность оптического отклика на внешнее световое поле, распространяются взаимодействующие в различных нелинейных процессах волны, частоты ω которых образуют конечное множество Ω . Электрическое и магнитное поля, а также компоненты поляризации среды в

этом случае могут быть представлены в виде:

$$\mathbf{E} = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{E}(\omega) + \text{c.c.} = \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i\omega t} + \text{c.c.}, \quad (3.43)$$

$$\mathbf{D} = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{D}(\omega) + \text{c.c.} = \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{\mathbf{D}}(\omega) e^{-i\omega t} + \text{c.c.}, \quad (3.44)$$

$$\mathbf{B} = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{B}(\omega) + \text{c.c.} = \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{\mathbf{B}}(\omega) e^{-i\omega t} + \text{c.c.}, \quad (3.45)$$

$$\mathbf{P}^{(n)} = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}^{(n)}(\omega) + \text{c.c.} = \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{\mathbf{P}}^{(n)}(\omega) e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \quad (3.46)$$

Будем считать, что потерями на каждой из частот распространяющихся волн можно пренебречь, а спектры комплексных амплитуд $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$, $\tilde{\mathbf{D}}(\omega)$, $\tilde{\mathbf{P}}^{(n)}(\omega)$, $\tilde{\mathbf{B}}(\omega)$ достаточно узки, чтобы можно было пренебречь частотной дисперсией среды вблизи их центральных частот. Если ограничиться описанием нелинейного взаимодействия этих волн в рамках первого приближения по параметру пространственной дисперсии μ , равного отношению характерного масштаба проявления нелокальности оптического отклика d к минимальной из длин распространяющихся волн, локальная и нелокальная составляющие поляризации среды на каждой из взаимодействующих частот будут задаваться уравнениями вида (2.67)–(2.72). На данный момент неизвестна плотность функции Лагранжа электромагнитного поля в среде, описываемой этими материальными уравнениями, однако они представляют интерес для задач о преобразовании углового момента света в средах, проявляющих нелокальность оптического отклика.

В разделах 3.2 и 3.3 были получены связанные с локальным и нелокальным нелинейным откликом среды n -го порядка нелинейности компоненты плотности углового момента и плотности потока углового момента электромагнитного поля. Полные выражения для этих величин, учитывающие все порядки нелинейности, входящие в материальное уравнение (3.42), могут быть записаны следующим образом в первом приближении по параметру μ :

$$J_i = e_{ijk} x_j e_{klm} \sum_{\omega \in \Omega} D_l^*(\omega) B_m(\omega) + \text{c.c.}, \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} M_{ik} = & \sum_{\omega \in \Omega} e_{ijp} x_j \left[\delta_{pk} \left(\frac{1}{2} |E_l(\omega)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} E_l^*(\omega) P_l^{(n)}(\omega) \right) - E_p(\omega) D_k^*(\omega) - \right. \\ & \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\omega' \in \Omega \\ \omega' \neq \omega}} \frac{1}{n+1} E_l^*(\omega) \left(\frac{\partial P_l^{(n)}(\omega)}{\partial [\partial_k E_m(\omega')]} \partial_p E_m(\omega') + \frac{\partial P_l^{(n)}(\omega)}{\partial [\partial_k E_m^*(\omega')]} \partial_p E_m^*(\omega') \right) \right] + \\ & + \sum_{\omega \in \Omega} e_{ijp} x_j \left[\frac{1}{2} \delta_{pk} |B_l(\omega)|^2 - B_p^*(\omega) B_k(\omega) \right] + \\ & + \sum_{\omega \in \Omega} e_{ijp} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\substack{\omega' \in \Omega \\ \omega' \neq \omega}} E_p^*(\omega) \left(\frac{\partial P_j^{(n)}(\omega)}{\partial [\partial_k E_l(\omega')]} E_l(\omega') + \frac{\partial P_j^{(n)}(\omega)}{\partial [\partial_k E_l^*(\omega')]} E_l^*(\omega') \right) + \text{c.c.} \quad (3.48) \end{aligned}$$

Для простоты выражение (3.48) записано в рамках подхода, основанного на предельном переходе. Выражение (3.47), а также первые две скобки в (3.48) определяются формулами

(2.82), (2.83), (2.89) и (2.90), тогда как последнее слагаемое в (3.48), не зависящее от выбора начала координат, определяется формулой (3.38). Плотность вращающего момента τ_i обычно не рассматривается в задачах о разделении углового момента на внешнюю и внутреннюю (орбитальную и спиновую) составляющие, поэтому выражение для неё, соответствующее (3.47)–(3.48), здесь не приводится.

Далее будет показано, что как плотность углового момента (3.47), так и плотность потока углового момента (3.48) могут быть представлены в виде сумм трёх слагаемых:

$$J_i = L_i + \sigma_i + F_i, \quad (3.49)$$

$$M_{ik} = L_{ik} + S_{ik} + F_{ik}, \quad (3.50)$$

удовлетворяющих балансным уравнениям

$$\frac{1}{c} \partial_t (L_i + \sigma_i) + \partial_k (L_{ik} + S_{ik}) = \tau_i, \quad (3.51)$$

$$\frac{1}{c} \partial_t F_i + \partial_k F_{ik} = 0. \quad (3.52)$$

Здесь σ_i и S_{ik} — соответственно плотность и плотность потока спиновой (внутренней) составляющей углового момента, не зависящие явным образом от пространственных координат, а L_i и L_{ik} — соответственно плотность и плотность потока орбитальной составляющей углового момента электромагнитного поля, явно зависящие от выбора начала координат. В отсутствие пространственной и частотной дисперсии среды выражения для этих величин должны совпадать с известными каноническими выражениями для плотностей и плотностей потоков орбитальной и спиновой составляющих углового момента света [104; 109]. Отличные от нуля F_i и F_{ik} свидетельствуют о том, что плотность и плотность потока углового момента света имеют не только обычно рассматриваемые орбитальную и спиновую составляющие. Тем не менее, дополнительные слагаемые F_i и F_{ik} не вносят вклад в полный угловой момент и полный поток углового момента, поскольку, как будет показано далее, соответствующие интегралы по всему пространству от этих величин тождественно равны нулю.

Чтобы обосновать сделанные утверждения, сперва выразим напряжённость электрического и индукцию магнитного полей через скалярный потенциал $\varphi(\omega)$ и векторный потенциал $\mathbf{A}(\omega)$:

$$\mathbf{E}(\omega) = -\nabla\varphi(\omega) - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A}(\omega), \quad (3.53)$$

$$\mathbf{B}(\omega) = \nabla \times \mathbf{A}(\omega). \quad (3.54)$$

Используя эти формулы, представим явным образом входящие в выражения (3.47) и (3.48) напряжённость электрического поля и индукцию магнитного поля. Этот шаг часто используется при рассмотрении разделения полного углового момента на орбитальную и спиновую составляющие [100; 107; 118]. После выполнения этой подстановки в выражении (3.47) возникает свёртка тензоров Леви-Чивиты, которую следует преобразовать следующим образом:

$$e_{klm} e_{mj p} = \delta_{kj} \delta_{lp} - \delta_{kp} \delta_{lj}. \quad (3.55)$$

В результате плотность углового момента окажется представленной в виде двух слагаемых. Первое из них имеет вид

$$L_i = \sum_{\omega \in \Omega} e_{ijk} x_j D_i^*(\omega) \partial_k A_l(\omega) + \text{c.c.} \quad (3.56)$$

и часто встречается под интегралом при определении орбитальной составляющей полного углового момента электромагнитного поля [101; 107; 118]. В отсутствие частотной и пространственной дисперсии выражение (3.56) совпадает с каноническим выражением для плотности орбитальной составляющей углового момента света в линейных средах [104; 109] (для нелинейных сред без дисперсии такое же выражение может быть получено с помощью плотности функции Лагранжа [95; 117]). Это, а также явная зависимость L_i от выбора начала координат, дает основание считать, что (3.56) описывает плотность орбитального момента света и в нелинейных средах, проявляющих нелокальность оптического отклика.

Второе из получившихся слагаемых в выражении для плотности углового момента преобразуем, используя правила дифференцирования и уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} -e_{ijk} \sum_{\omega \in \Omega} x_j D_l^*(\omega) \partial_l A_k(\omega) + \text{с.с.} &= e_{ijk} \sum_{\omega \in \Omega} \{ \partial_l [x_j D_l^*(\omega) A_k(\omega)] - \\ &- D_j^*(\omega) A_k(\omega) \} + \text{с.с.} \end{aligned} \quad (3.57)$$

В правой части (3.57) последнее слагаемое не зависит явным образом от пространственных координат:

$$\sigma_i = \sum_{\omega \in \Omega} e_{ijk} D_j^*(\omega) A_k(\omega) + \text{с.с.} \quad (3.58)$$

В таком виде это выражение часто встречается в качестве подынтегрального выражения при определении спиновой составляющей полного углового момента электромагнитного поля [101; 107; 118]. В отсутствие частотной и пространственной дисперсии оно также совпадает с каноническим выражением для плотности спиновой составляющей углового момента [104; 109]. Также с помощью плотности функции Лагранжа [95; 117] можно показать, что для нелинейных сред без дисперсии выражение (3.58) также определяет плотность спиновой составляющей углового момента. Основываясь на этих соображениях, естественно также считать (3.58) плотностью спиновой составляющей углового момента электромагнитного поля в средах с нелокальностью нелинейного оптического отклика.

Вид оставшегося в (3.57) слагаемого

$$F_i = -\partial_l \left(\sum_{\omega \in \Omega} e_{ijk} x_j D_l^*(\omega) A_k(\omega) \right) + \text{с.с.} \quad (3.59)$$

свидетельствует о том, что плотность углового момента света имеет не только орбитальную и спиновую составляющие. Однако интеграл от этого слагаемого по всему объему равен нулю и оно не дает вклад в полный угловой момент электромагнитного поля. В связи с этим при рассмотрении разделения полного углового момента света во всём пространстве на орбитальную и спиновую составляющие многие авторы отбрасывают это слагаемое на начальном этапе [101; 107; 118]. Чтобы считать сумму $L_i + \sigma_i$ корректным представлением плотности углового момента J_i , нужно выделить из (3.48) плотность потока F_{ik} , которая с учетом явного вида (3.59) удовлетворяет однородному балансному уравнению (3.52). При этом оставшаяся часть (3.48) должна иметь вид суммы $L_{ik} + S_{ik}$ и с учетом явного вида L_i (3.56) и σ_i (3.58) должна удовлетворять балансному уравнению (3.51).

Прежде всего, заметим, что не зависящее от выбора начала координат последнее слагаемое в (3.48) отлично от нуля только если взаимодействие распространяющихся волн происходит в среде с нелокальным оптическим откликом. Оно не может быть частью определения F_{ik} , поскольку в соответствии с (3.17) оно связано с определением величины τ_i и должно сохраняться в законе сохранения (3.51). Помимо отсутствия явной зависимости от координат, можно привести следующее соображение в пользу того, что это слагаемое должно входить в определение спиновой составляющей углового момента. Если пучок распространяется в линейной изотропной гиротропной среде, то последнее слагаемое в (3.48) задаётся формулой (3.35). Пусть ось Oz является осью распространения пучка, и на этой оси компонента поля $E_z = 0$. В этом случае компонента плотности потока углового момента $S_{zz}^{(1)}$, определяемая формулой (3.35), оказывается пропорциональной интенсивности пучка на оси и не зависит от его поляризации. Компонента плотности потока орбитального углового момента L_{zz} на оси Oz равна нулю в соответствии с физическим смыслом этой величины, а если поляризация пучка отлична от линейной, то на его оси также существует ненулевая плотность потока спиновой составляющей углового момента, связанная с линейным локальным откликом среды и зависящая не только от интенсивности пучка, но и от его поляризации [109; 119]. Таким образом, физически значимая плотность потока углового момента пучка на его оси (не включающая в себя F_{zz}) оказывается представленной в виде суммы двух слагаемых, одно из которых зависит от состояния поляризации, а другое, существующее только в средах с нелокальным оптическим откликом, зависит только от интенсивности. Из этого, в частности, следует, что плотности потоков углового момента на осях двух пучков с одинаковой интенсивностью, но противоположной поляризацией, не будут строго противоположны друг другу, как это происходит в линейных изотропных негиротропных средах. Вместо этого, абсолютные величины этих плотностей потоков углового момента будут различаться на некоторую величину, зависящую от величины нелокальной оптической восприимчивости среды. Это хорошо соответствует проявлению свойственной изотропной гиротропной среде оптической активности, благодаря которой оптический отклик среды на излучение с противоположной поляризацией имеет разную величину. Более того, ненулевая суммарная плотность потока углового момента на оси линейно поляризованного пучка в линейной изотропной гиротропной среде может быть связана с вращением плоскости поляризации, также связанной с проявлением естественной оптической активности. Эти соображения позволяют считать последнее слагаемое в выражении (3.48) частью спиновой составляющей углового момента света в средах, обладающих нелокальностью оптического отклика.

Оставшиеся слагаемые в (3.48) можно разделить на содержащие только электрическое и только магнитное поле. Содержащую только компоненты индукции магнитного поля \mathbf{B} квадратную скобку преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\omega \in \Omega} e_{ijp} x_j \left(\frac{1}{2} \delta_{pk} B_l^*(\omega) B_l(\omega) - B_p^*(\omega) B_k(\omega) \right) + \text{c.c.} = \\
& = \sum_{\omega \in \Omega} \left(-\frac{1}{2} e_{ijp} x_j \delta_{pk} B_l^*(\omega) B_l(\omega) + e_{knl} e_{ijm} x_j B_l^*(\omega) \partial_m A_n(\omega) \right) + \\
& + \sum_{\omega \in \Omega} [\delta_{ik} B_l^*(\omega) A_l(\omega) - B_i^*(\omega) A_k(\omega)] + \sum_{\omega \in \Omega} e_{mkl} e_{ijn} B_l^*(\omega) \partial_m [x_j A_n(\omega)] + \text{c.c.} \quad (3.60)
\end{aligned}$$

В справедливости последнего равенства легко убедиться, преобразовав правую часть (3.60) в левую. Для этого надо представить $\partial_m[x_j A_n(\omega)]$ в виде двух слагаемых, после чего воспользоваться формулами (3.54) и (3.55). Первая группа слагаемых в правой части (3.60) совпадает с частью выражения для плотности потока орбитальной составляющей углового момента электромагнитного поля в средах, не обладающих нелокальностью оптического отклика [104; 109; 119], вторая — с каноническим выражением для плотности потока спиновой составляющей углового момента в отсутствие пространственной и частотной дисперсии [104; 109; 119]. Третья группа слагаемых не имеет аналогов в известных на данный момент выражениях для компонент плотности потока углового момента и не является специфичной для каких-либо сред, в связи с чем целесообразно считать эту группу слагаемых частью определения F_{ik} .

Для получения оставшихся компонент выражений для L_{ik} и F_{ik} среди слагаемых первой квадратной скобки в правой части формулы (3.48) требуется преобразовать только слагаемое, содержащее $D_k^*(\omega)$, выразив входящую в это слагаемое напряжённость электрического поля через скалярный и векторный потенциалы (3.53):

$$-e_{ijp}x_j \sum_{\omega \in \Omega} E_p(\omega) D_k^*(\omega) + \text{c.c.} = e_{ijp}x_j \sum_{\omega \in \Omega} D_k^*(\omega) \left(\partial_p \varphi(\omega) + \frac{1}{c} \partial_t A_p(\omega) \right) + \text{c.c.} \quad (3.61)$$

Первое слагаемое в правой части (3.61) является частью канонического выражения для плотности потока орбитальной составляющей углового момента [104; 109; 119]. Второе слагаемое в этом же выражении естественно включить в F_{ik} . Оставшиеся слагаемые, входящие в первую скобку в (3.48) входят в определение L_{ik} без изменений.

После выполненных преобразований отдельных слагаемых (3.48) выражение для M_{ik} может быть записано в виде суммы (3.50), где

$$\begin{aligned} L_{ik} = & e_{ijp}x_j \sum_{\omega \in \Omega} \left[\delta_{pk} \left(\frac{1}{2} E_l(\omega)^* E_l(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} E_l^*(\omega) P_l^{(n)}(\omega) - \frac{1}{2} B_l^*(\omega) B_l(\omega) \right) - \right. \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\omega' \in \Omega \\ \omega' \neq \omega}} \frac{1}{n+1} E_l^*(\omega) \left(\frac{\partial P_l^{(n)}(\omega)}{\partial [\partial_k E_m(\omega')]} \partial_p E_m(\omega') + \frac{\partial P_l^{(n)}(\omega)}{\partial [\partial_k E_m^*(\omega')]} \partial_p E_m^*(\omega') \right) + \\ & \left. + e_{knl} B_l^*(\omega) \partial_p A_n(\omega) + D_k^*(\omega) \partial_p \varphi(\omega) \right] + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} S_{ik} = & \sum_{\omega \in \Omega} \left(\delta_{ik} B_l^*(\omega) A_l(\omega) - B_i^*(\omega) A_k(\omega) + e_{ijp} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\substack{\omega' \in \Omega \\ \omega' \neq \omega}} E_p^*(\omega) \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\partial P_j^{(n)}(\omega)}{\partial [\partial_k E_l(\omega')]} E_l(\omega') + \frac{\partial P_j^{(n)}(\omega)}{\partial [\partial_k E_l^*(\omega')]} E_l^*(\omega') \right) \right) + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$F_{ik} = \sum_{\omega \in \Omega} \left\{ \partial_m [e_{ijn} e_{mkl} B_l^*(\omega) x_j A_n(\omega)] + \frac{1}{c} \partial_t [e_{ijn} x_j D_k^*(\omega) A_n(\omega)] \right\} + \text{c.c.} \quad (3.64)$$

Выражение (3.64), как и (3.59), является комбинацией полных производных, причём подобно тому, как компонента F_i не содержит производной по времени, компонента F_{ik} не содержит пространственной производной по координате x_k . Нетрудно убедиться, что подстановка выражений (3.59) и (3.64) в (3.52) обращает его левую часть в нуль. Из этого следует, что

выражения $L_i + \sigma_i$ и $L_{ik} + S_{ik}$, описываемые (3.56), (3.58), (3.62) и (3.63), подчиняются тому же закону сохранения углового момента (3.11), что и исходные плотности углового момента и потока углового момента J_i и M_{ik} , определяемые формулами (3.47) и (3.48). Выражения для σ_i и S_{ik} не зависят от выбора начала координат, тогда как выражения для L_i и L_{ik} содержат явным образом пространственные координаты. В случае линейных и нелинейных сред, отклик которых является исключительно локальным, эти выражения сводятся к каноническим формулам для компонент плотностей и плотностей потоков орбитальной и спиновой составляющих углового момента [104; 109; 119]. В связи с этим естественно считать, что полученные выражения (3.56), (3.58), (3.62) и (3.63) являются обобщениями канонических выражений для этих величин на случай линейных и нелинейных сред, проявляющих нелокальность оптического отклика на внешнее световое поле.

Описанная выше процедура получения орбитальной и спиновой составляющих плотности и плотности потока углового момента света также может быть применена и к средам с более сложным оптическим откликом. Отметим также, что пропорциональная δ_{pk} часть выражения L_{ik} в случае не обладающих пространственной дисперсией линейных и нелинейных сред совпадает с плотностью функции Лагранжа электромагнитного поля [95; 117].

§ 3.5 Численная оценка долей нелинейных компонент внутреннего углового момента света в процессе самофокусировки в изотропной гиротропной среде

Приведём в качестве примера формулы для полученных выражений L_i , σ_i , F_i , L_{ik} , S_{ik} и F_{ik} в случае самовоздействия монохроматического эллиптически поляризованного излучения частоты ω в непоглощающей однородной среде, демонстрирующей нелокальность линейной и кубической составляющих оптического отклика. В этом случае связывающие \mathbf{E} и \mathbf{P} материальные уравнения принимают вид:

$$P_i^{(1)}(\omega) = \chi_{ij}^{(1)}(\omega) E_j(\omega) + \gamma_{ijk}^{(1)}(\omega) \partial_k E_j(\omega), \quad (3.65)$$

$$P_i^{(3)}(\omega) = \chi_{ijlm}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega) E_j^*(\omega) E_l(\omega) E_m(\omega) + \gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega) E_j^*(\omega) E_l(\omega) \partial_k E_m(\omega). \quad (3.66)$$

Здесь $\hat{\chi}^{(1)}$ и $\hat{\gamma}^{(1)}$ соответственно локальные и нелокальные линейные оптические восприимчивости, а $\hat{\chi}^{(3)}$ и $\hat{\gamma}^{(3)}$ — локальные и нелокальные нелинейные восприимчивости среды, демонстрирующей кубический по напряженности электрического поля оптический отклик. Как и в разделе 2.4, в данном разделе будем явным образом учитывать коэффициент 4π при описании связи индукции электрического поля \mathbf{D} с поляризацией среды \mathbf{P} . Подставим (3.65) и (3.66) в (3.56), (3.58), (3.59) и (3.62)–(3.64). Для окончательной записи этих формул также требуется определить величины скалярного и векторного потенциалов электромагнитного поля. Использование калибровки Кулона ($\varphi = 0$) для монохроматического поля позволяет с помощью уравнения (3.53) представить векторный потенциал поля в виде $\mathbf{A}(\omega) = -(ic/\omega)\mathbf{E}(\omega)$. Уравнения Максвелла для монохроматического поля также позволяют заменить входящую в компоненты плотности и плотности потока углового момента

индукцию магнитного поля $\mathbf{B}(\omega)$ на выражение $-(ic/\omega)\nabla \times \mathbf{E}(\omega)$, выражая таким образом плотности и плотности потоков составляющих углового момента с помощью одной только напряжённости электрического поля:

$$L_i = -\frac{ic}{4\pi\omega} e_{ijk} x_j \left(E_l^* + 4\pi P_l^{(1)*} + 4\pi P_l^{(3)*} \right) \partial_k E_l + \text{c.c.}, \quad (3.67)$$

$$\sigma_i = -\frac{ic}{4\pi\omega} e_{ijk} \left(E_j^* + 4\pi P_j^{(1)*} + 4\pi P_j^{(3)*} \right) E_k + \text{c.c.}, \quad (3.68)$$

$$F_i = \frac{ic}{4\pi\omega} e_{ijk} \partial_l \left[x_j \left(E_l^* + 4\pi P_l^{(1)*} + 4\pi P_l^{(3)*} \right) E_k \right] + \text{c.c.}, \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} L_{ik} = & \frac{1}{4\pi} e_{ijp} x_j \left\{ \frac{\delta_{pk}}{2} \left[|E_l|^2 + 4\pi \chi_{lm}^{(1)} E_l^* E_m + \right. \right. \\ & + 2\pi \chi_{lqrm}^{(3)} E_l^* E_q^* E_r E_m + 4\pi \left(\gamma_{lmn}^{(1)} + \frac{1}{2} \gamma_{lqrmn}^{(3)} E_q^* E_r \right) E_l^* \partial_n E_m - \\ & \left. \left. - \frac{c^2}{\omega^2} (\partial_m E_n^* \partial_m E_n - \partial_m E_n^* \partial_n E_r) \right] - 2\pi \left(\gamma_{lmk}^{(1)} + \frac{1}{2} \gamma_{lqrmk}^{(3)} E_q^* E_r \right) E_l^* \partial_p E_m + \right. \\ & \left. + \frac{c^2}{\omega^2} (\partial_k E_n^* \partial_p E_n - \partial_n E_k^* \partial_p E_n) \right\} + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} S_{ik} = & \frac{c^2}{4\pi\omega^2} (\delta_{ik} e_{lmn} E_l - e_{imn} E_k) \partial_m E_n^* + \\ & + \frac{1}{2} e_{ijp} \left(\gamma_{jlk}^{(1)} E_l + \frac{1}{2} \gamma_{jqrlk}^{(3)} E_q^* E_r E_l \right) E_p^* + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} F_{ik} = & \frac{c^2}{4\pi\omega^2} \partial_m \left[e_{ijn} e_{mkl} e_{lrp} x_j E_n \partial_r E_p^* \right] - \\ & - \frac{i}{4\pi\omega} \partial_t \left[e_{ijn} x_j \left(E_k^* + 4\pi P_k^{(1)*} + 4\pi P_k^{(3)*} \right) E_n \right] + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Частотные аргументы компонент тензоров $\hat{\chi}^{(1)}$, $\hat{\chi}^{(3)}$, $\hat{\gamma}^{(1)}$, $\hat{\gamma}^{(3)}$, вектора напряжённости электрического поля и линейной и нелинейной составляющих поляризации среды от ω здесь и далее для краткости опущены.

Пусть самофокусировка параксиального эллиптически поляризованного пучка происходит в непоглощающей изотропной гиротропной среде (симметрия $\infty\infty$), а его ось распространения совпадает с осью Oz . В этом случае компоненты тензоров локальных и нелокальных линейной и кубической оптической восприимчивости среды имеют наиболее простой вид (см. раздел 2.4): $\chi_{ij}^{(1)} = (\varepsilon - 1)\delta_{ij}/4\pi$, $\gamma_{ijk}^{(1)} = \gamma_1 e_{ijk}$, $\chi_{ijlm}^{(3)} = \chi_1(\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl})/2 + \chi_2\delta_{ij}\delta_{lm}$, $\gamma_{ijmnl}^{(3)} = \gamma_3(e_{ilm}\delta_{jn} + e_{iln}\delta_{jm} + e_{jlm}\delta_{in} + e_{jln}\delta_{im})/2$, где ε — линейная диэлектрическая проницаемость, а $\chi_{1,2}$ и $\gamma_{1,3}$ — единственные ненулевые компоненты тензоров локальной кубической и нелокальной линейной и кубической восприимчивостей соответственно. При использовании метода медленно меняющихся амплитуд напряжённость электрического поля представляется в виде $\tilde{E}_{x,y} = \mathcal{E}_{x,y}(\sqrt{\tilde{\mu}}x, \sqrt{\tilde{\mu}}y, \tilde{\mu}z) \exp(ikz)$, где k — модуль волнового вектора, $\tilde{\mu}$ — символический параметр малости, и дифференцирование $\mathcal{E}_{x,y}$ по z сводится к умножению $\mathcal{E}_{x,y}$ на ik . Продольной составляющей электрического поля в этом случае из-за её малости можно пренебречь.

Медленно меняющиеся амплитуды $\mathcal{E}_\pm = \mathcal{E}_x \pm i\mathcal{E}_y$ циркулярно поляризованных компонент электрического поля удовлетворяют системе уравнений (2.120). Ее решение позволяет записать наибольшие по величине компоненты плотности спиновой составляющей углового момента σ_z и плотности потока спиновой составляющей углового момента S_{zz} в следующем виде:

$$\sigma_z = -\frac{\varepsilon^{3/2}}{2\pi k} I(M + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3), \quad (3.73)$$

$$S_{zz} = -\frac{\varepsilon}{2\pi k} I(M + \beta_1/2 + \beta_3/4). \quad (3.74)$$

Здесь $\beta_1 = 2\rho_0/k$, $\beta_2 = 2\sigma_1 IM/k$, $\beta_3 = 2\rho_1 I(1+M^2)/k$, $I(x, y, z) = (|\mathcal{E}_+|^2 + |\mathcal{E}_-|^2)/2$ — нормированная интенсивность, а $M(x, y, z) = (|\mathcal{E}_+|^2 - |\mathcal{E}_-|^2)/(|\mathcal{E}_+|^2 + |\mathcal{E}_-|^2)$ — степень эллиптичности распространяющегося излучения. Параметры $\rho_{1,2}$ и σ_1 определены в разделе 2.4. Величины $\beta_{1,2,3}$ характеризуют вклады нелокальной линейной, локальной кубической и нелокальной кубической составляющих оптического отклика однородной непоглощающей изотропной гиротропной среды в величины σ_z и S_{zz} . В точках среды, где излучение линейно поляризовано ($M = 0$), отличные от нуля значения плотности спиновой составляющей углового момента и плотности её потока обусловлены только нелокальностью оптического отклика среды.

Будем считать, что на поверхность среды $z = 0$ падает эллиптически поляризованный гауссов пучок:

$$\mathcal{E}_\pm(x, y, 0) = \sqrt{I_0(1 \pm M_0)} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right), \quad (3.75)$$

где $M_0 = M(x, y, 0)$, а $I_0 = I(x, y, 0)$. При решении уравнения распространения пучка в безразмерных переменных x/w , y/w , z/L_d и $\mathcal{E}_\pm/\sqrt{I_0}$, где $L_d = kw^2$ характер самовоздействия света определяется следующими безразмерными параметрами, характеризующими падающее на среду излучение и её оптические свойства: $I_\sigma = \sigma_1 I_0 L_d/2$, M_0 , $\rho_0 L_d$, $2\rho_1/\sigma_1$ и $2\sigma_2/\sigma_1$. Значение $I_\sigma \approx 1$ соответствует порогу самофокусировки линейно поляризованного излучения в случае самофокусировки пучка в изотропной негиротропной среде, при ее описании в приосевом приближении [99]. Анализ формул для $\beta_{2,3}$ показывает, что они достигают максимального значения в тех точках среды, где распространяющийся пучок имеет минимальный диаметр и циркулярно поляризован ($M = \pm 1$). Именно в этом случае $|\beta_2| \approx 0.051(\lambda/w)^2 I_\sigma (I/I_0)$ и при $w \approx 25\lambda$, где $\lambda = 2\pi/k$, значение β_2 может достигать десяти процентов от M .

На рис.3.1 в качестве примера приведены результаты решения системы уравнений (2.120) для параметров задачи $\rho_0 L_d = 0.1$, $\sigma_2/\sigma_1 = 0.5$, $\rho_1/\sigma_1 = 0.05$ для $I_\sigma = 7$ и $I_\sigma = 20$ в случае падения на среду излучения с поляризацией близкой к круговой ($M_0 = -0.9$). Единица на оси абсцисс z/z_{50} соответствует значению z/L_d при котором интенсивность пучка на оси I в пятьдесят раз превышает начальную интенсивность I_0 . При $I_\sigma = 20$ и $M_0 = -0.9$ степень эллиптичности на оси пучка $M(z = z_{50}) \approx -0.6$ (рис.3.1a) и $\beta_2(z = z_{50}) \approx -0.048$ (рис.3.1б).

Вклад β_3 существенным образом зависит от поляризации пучка. В точках пространства, где поляризация излучения близка к циркулярной $\beta_3/\beta_2 \approx \rho_1/\sigma_1 \approx d/\lambda$. Это отношение в обычных средах не превышает 0.01. В то же время, в точках среды, где поляризация излучения близка к линейной, только β_1 и β_3 обеспечивают отличные от нуля значения плотностей спиновой составляющей углового момента σ_z и его потока S_{zz} .

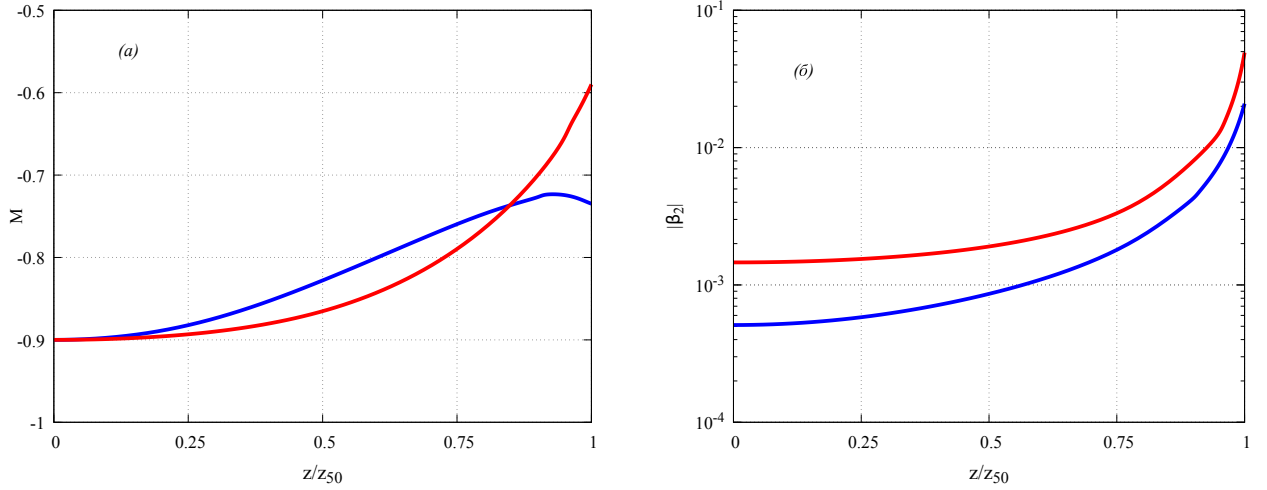


Рис. 3.1: Зависимость степени эллиптичности M (а) и $|\beta_2|$ (б) на оси пучка от координаты распространения при $w/\lambda = 25$ и $\rho_0 L_d = 0.1$, $\sigma_2/\sigma_1 = 0.5$, $\rho_1/\sigma_1 = 0.05$ при $I_\sigma = 7$ (синяя кривая) и $I_\sigma = 20$ (красная кривая) в случае падения на среду излучения с поляризацией близкой к круговой ($M_0 = -0.9$). Единица на оси абсцисс соответствует значению z/L_d при котором I в пятьдесят раз превышает I_0 .

Основные результаты третьей главы

Получены явные аналитические выражения для компонент плотности углового момента и плотности потока углового момента электромагнитного поля в средах, обладающих нелокальностью нелинейного оптического отклика. Учёт нелокальности оптического отклика в выражении для плотности углового момента сводится только к изменению определения входящей в неё поляризации среды. Плотность потока углового момента в средах с нелокальным оптическим откликом содержит принципиально новые слагаемые, включающие в себя как получаемые вследствие возникновения не пропорциональных поляризации среды слагаемых в выражении для плотности потока импульса, так и не зависящие от выбора начала координат слагаемые, получаемые при анализе плотности вращающего момента. Произведено разделение углового момента света в нелокальных средах на орбитальную и спиновую составляющие. При численной оценке величин связанных с нелокальностью и нелинейностью оптического отклика компонент плотности и плотности потока спиновой составляющей углового момента на оси гауссова пучка при его самофокусировке в изотропной гиротропной среде было показано, что отношение обусловленной локальным нелинейным откликом компоненты плотности спиновой составляющей углового момента к связанной с локальным линейным откликом компоненте этой величины может достигать десяти процентов, а нелокальность оптического отклика приводит к существованию ненулевых величин плотности и плотности потока спиновой составляющей углового момента в точках, в которых поляризация пучка является линейной.

Заключение

Основные результаты диссертации можно сформулировать в виде следующих положений:

1. В рамках подхода Ландау-Лифшица к построению материальных уравнений в электродинамике сплошных сред получены соотношения внутренней симметрии тензора нелокальной нелинейной оптической восприимчивости n -го порядка ($n = 2, 3, \dots$) в однородных непоглощающих средах всех классов пространственной симметрии в первом приближении по малому параметру пространственной дисперсии. Они включают в себя полную симметрию по перестановке любых индексов этого тензора, не требующих перестановки частотных аргументов, антисимметрию по перестановке первого и предпоследнего индексов с одновременной перестановкой первого и последнего частотных аргументов, а также равенство нулю суммы трёх компонент этого тензора, каждая из которых поделена на произведение кратностей вырождения первой и последней частот в последовательности частотных аргументов, с циклически переставленными (вместе с соответствующими частотам индексами) первым частотным аргументом, последним и произвольным частотным аргументом. Компоненты тензора нелокальной оптической восприимчивости, у которых первый частотный аргумент равен по величине и противоположен по знаку последнему тождественно равны нулю.
2. В рамках линейной оптики неоднородных непоглощающих сред произвольного класса пространственной симметрии получены соотношения внутренней симметрии тензоров локальной линейной оптической восприимчивости и нелокальных линейных восприимчивостей третьего и всех более высоких рангов. Их отличительной чертой, связанной с неоднородностью среды, является появление в соотношениях, связывающих компоненты тензора $p + 2$ ранга, где $p = 0, 1, 2, \dots$, пространственных производных от компонент тензоров нелокальных оптических восприимчивостей всех более высоких рангов. Учёт неоднородности таких сред в первом приближении по малому параметру пространственной дисперсии не приводит к изменениям соотношений внутренней симметрии для тензора нелокальной линейной оптической восприимчивости третьего ранга, но его пространственные производные содержатся в соотношении внутренней симметрии тензора локальной линейной оптической восприимчивости.
3. Получены формулы для компонент плотностей и плотностей потоков энергии, импульса и углового момента электромагнитного поля, распространяющегося в однородной непоглощающей среде произвольного класса пространственной симметрии, которая обладает нелокальностью нелинейного оптического отклика. В первом приближении по малому параметру пространственной дисперсии проявление нелокальности оптического отклика вещества сводится к учету в выражении для поляризации среды, входящей в формулы для плотностей энергии, импульса и углового момента электромагнитного поля в нелинейной среде без пространственной дисперсии, слагаемых, связанных с

нелокальными нелинейными оптическими восприимчивостями. Выражения для компонент плотностей потоков энергии и импульса в средах с нелокальностью оптического отклика содержат новые слагаемые, не пропорциональные поляризации среды, а связанные с ней более сложным образом. Компоненты плотности потока углового момента содержат две группы слагаемых, обусловленных нелокальностью оптического отклика среды. Первая из них появляется из-за новых слагаемых в формуле для плотности потока импульса, а вторая, не зависящая явным образом от пространственных координат, возникает в результате анализа плотности вращающего момента, входящей в балансное уравнение.

4. Проведено разделение плотности и плотности потока углового момента света, распространяющегося в однородных непоглощающих средах произвольного класса пространственной симметрии, демонстрирующих нелокальность нелинейного оптического отклика любого порядка, на три составляющие. Первые две из них интерпретируются как орбитальная и спиновая составляющие плотности и плотности потока углового момента света. Интегральные вклады третьих составляющих соответственно в полный угловой момент и в его поток тождественно равны нулю.
5. Выполнена оценка доли связанных с нелокальностью кубического по полю оптического отклика однородной непоглощающей изотропной гиротропной среды слагаемых в формулах для плотностей энергии, импульса, углового момента электромагнитного поля и плотностей потоков этих величин при самовоздействии эллиптически поляризованных лазерных пучков гауссова профиля в непоглощающей изотропной гиротропной среде. Показано, что максимальный размер вкладов нелинейного оптического отклика среды в плотность и плотность потока энергии и импульса происходит в тех точках пространства, где в процессе распространения излучение становится линейно поляризованным, и может достигать величин, приблизительно равных одной десятой вкладов в компоненты тензора энергии–импульса Минковского электромагнитного поля, связанных с линейным локальным оптическим откликом среды на внешнее световое поле. Учёт нелокальности линейного и нелинейного оптического отклика среды приводит к существованию не равных нулю величин плотности и плотности потока спиновой составляющей углового момента световых пучков в тех точках пространства, где они обладают линейной поляризацией.

В заключение я бы хотел выразить глубокую благодарность своему научному руководителю, профессору Макарову В.А., а также ассистенту кафедры Общей физики и волновых процессов Григорьеву К.С. Именно их поддержка, наставничество и экспертиза во многих проблемах современной физики сделали возможным написание этой работы.

Также я бы хотел выразить благодарность другим сотрудникам кафедры Общей физики и волновых процессов, благодаря которым стали возможными мои первые шаги в науке. В частности, я бы хотел поблагодарить профессора Чиркина А.С., направившего меня на ряд работ, которые позволили существенно упростить написание диссертации.

Наконец, я бы хотел поблагодарить свою семью, оказывавшую поддержку на протяжении всего моего обучения и выполнения диссертационного исследования.

Список используемых обозначений

c	скорость света в вакууме	$\mathbf{P}^{(n)}(\omega_m)$, $P_i^{(n)}(\omega_m)$	составляющая поляризации среды n -го порядка
\mathbf{B}, B_i	индукция магнитного поле, зависящая от (\mathbf{r}, t)		нелинейности, спектр которой сосредоточен вблизи частоты ω_m
$\mathbf{B}^{(m)},$ $B_i^{(m)}$	составляющая индукции магнитного поля, спектр которой сосредоточен вблизи частоты ω_m	\mathbf{r}, x_i	радиус-вектор
$\tilde{\mathbf{B}}^{(m)},$ $\tilde{B}_i^{(m)}$	медленно меняющаяся амплитуда индукции магнитного поля на частоте ω_m	\mathbf{S}, S_i \hat{S}, S_{ij}	плотность потока энергии плотность потока спинового углового момента
e_{ijk}	тензор Леви-Чивиты	U	плотность энергии
\mathbf{E}, E_i	напряжённость электрического поля, зависящее от (\mathbf{r}, t)	δ_{ij}	символ Кронекера
$\mathbf{E}^{(m)},$ $E_i^{(m)}$	составляющая напряжённости электрического поля, спектр которой сосредоточен вблизи частоты ω_m	$\hat{\epsilon}, \epsilon_{ij}$	тензор диэлектрической проницаемости среды
$\tilde{\mathbf{E}}^{(m)},$ $\tilde{E}_i^{(m)}$	медленно меняющаяся амплитуда напряжённости электрического поля на частоте ω_m	$\hat{\gamma}^{(n)},$ $\gamma_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}$	тензор нелокальной оптической восприимчивости n -го порядка нелинейности
$\tilde{\mathbf{E}}^{(m)},$ $\tilde{E}_i^{(m)}$	медленно меняющаяся амплитуда напряжённости электрического поля на частоте ω_m	$\bar{\omega}_m^n$	последовательность частот $\omega_m, \omega_{m+1}, \dots, \omega_n$
$F(\omega_m)$	кратность вырождения частоты ω_m	$\tilde{\omega}_m^n$	последовательность одинаковых частот ω_m , состоящая из n элементов
\mathbf{g}, g_i	плотность импульса	$\hat{\chi}^{(n)},$ $\chi_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}$	тензор локальной оптической восприимчивости n -го порядка нелинейности
\hat{G}, G_{ij}	плотность потока импульса	$\boldsymbol{\sigma}, \sigma_i$	плотность спинового углового момента
i_m^n	последовательность индексов $i_m i_{m+1} \dots i_n$	$\boldsymbol{\tau}, \tau_i$	плотность вращающего момента
\mathbf{J}, J_i	плотность углового момента		
\mathbf{k}, k_i	волновой вектор		
\mathbf{L}, L_i	плотность орбитального углового момента		
\hat{L}, L_{ij}	плотность потока орбитального углового момента		
\hat{M}, M_{ij}	плотность потока углового момента		
$\mathbf{P}^{(n)},$ $P_i^{(n)}$	поляризация среды n -го порядка нелинейности, зависящая от (\mathbf{r}, t)		

Список литературы

1. *Розанов Н. Н., Архипов Р. М., Архипов М. В.* О законах сохранения в электродинамике сплошных сред (к 100-летию Государственного оптического института им. С.И. Вавилова) // Усп. физ. наук. — 2018. — Т. 188, № 12. — С. 1347–1353. — DOI: 10.3367/UFNr.2018.07.038386.
2. *Schwichtenberg J.* Physics from Symmetry. — Springer, 2018. — DOI: 10.1007/978-3-319-66631-0.
3. *Sundermeyer K.* Constrained Dynamics. — Springer, 1982. — DOI: 10.1007/BFb0036225.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Том 2. Теория поля. — ФИЗМАТЛИТ, 2003.
5. *Топтыгин И. Н., Левина К.* Тензор энергии-импульса электромагнитного поля в средах с дисперсией // Усп. физ. наук. — 2016. — Т. 186, № 2. — С. 146–158. — DOI: 10.3367/UFNr.0186.201602с.0146.
6. *Campos-Flores I., Jimenez-Ramirez J. L., Roa-Neri J.* Balance Equations of Electromagnetic Angular Momentum // Journal of Electromagnetic Analysis and Applications. — 2017. — Jan. — Vol. 09. — P. 203–217. — DOI: 10.4236/jema.2017.912017.
7. *Soper D. E.* Classical Field Theory. — Dover Publications, 2008.
8. *Макаров В. П., Рухадзе А. А.* Электромагнитные волны с отрицательной групповой скоростью и тензор энергии-импульса // Усп. физ. наук. — 2011. — Т. 181, № 12. — С. 1357–1368. — DOI: 10.3367/UFNr.0181.201112н.1357.
9. *Stallinga S.* Energy and momentum of light in dielectric media // Phys. Rev. E. — 2006. — Feb. — Vol. 73, issue 2. — P. 026606. — DOI: 10.1103/PhysRevE.73.026606.
10. *Yamashita O.* Torque equations for spin and orbital angular momenta of radiation fields and Faraday effect // Optik. — 2011. — Vol. 122, no. 23. — P. 2119–2123. — DOI: 10.1016/j.ijleo.2010.12.040.
11. *Garrison J., Chiao R.* Quantum Optics. — Oxford University Press, 2008. — DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198508861.001.0001.
12. *Milonni P. W.* Field Quantization and Radiative Processes in Dispersive Dielectric Media // Journal of Modern Optics. — 1995. — Vol. 42, no. 10. — P. 1991–2004. — DOI: 10.1080/09500349514551741.
13. *Ахманов С. А., Никитин С. Ю.* Физическая оптика. — Наука, Москва, 2004. — С. 482.
14. *Коротеев Н. И., Шумай И. Л.* Физика мощного лазерного излучения. — Наука, Москва, 1991.
15. *Shen Y. R.* Principles of nonlinear optics. — Wiley, 1984.

16. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Том 8. Электродинамика сплошных сред. — ФИЗМАТЛИТ, 2005.
17. *Barnett S. M., Loudon R.* The enigma of optical momentum in a medium // *Phil. Trans. R. Soc. A.* — 2010. — Mar. — Vol. 368. — P. 927–939. — DOI: 10.1098/rsta.2009.0207.
18. *Abram I.* Quantum theory of light propagation: Linear medium // *Phys. Rev. A.* — 1987. — June. — Vol. 35, issue 11. — P. 4661–4672. — DOI: 10.1103/PhysRevA.35.4661.
19. *Serulnik S., Ben-Aryeh Y.* Space-time description of propagation in nonlinear dielectric media // *Quantum Optics: Journal of the European Optical Society Part B.* — 1991. — Feb. — Vol. 3, no. 1. — P. 63–74. — DOI: 10.1088/0954-8998/3/1/006.
20. *Willner A., Huang H., Yan Y., Ren Y., [et al.].* Optical communications using orbital angular momentum beams // *Advances in Optics and Photonics.* — 2015. — Mar. — Vol. 7, issue 1. — P. 66–106. — DOI: 10.1364/AOP.7.000066.
21. *Trichili A., Rosales-Guzmán C., Dudley A., Ndagano B., [et al.].* Optical communication beyond orbital angular momentum // *Scientific Reports.* — 2016. — June. — Vol. 6. — P. 27674. — DOI: 10.1038/srep27674.
22. *D'Ambrosio V., Nagali E., Walborn S., Aolita L., [et al.].* Complete experimental toolbox for alignment-free quantum communication // *Nature communications.* — 2012. — July. — Vol. 3. — P. 961. — DOI: 10.1038/ncomms1951.
23. *Brulot W., Vanbel M., Swusten T., Verbiest T.* Resolving enantiomers using the optical angular momentum of twisted light // *Science Advances.* — 2016. — Mar. — Vol. 2. — e1501349–e1501349. — DOI: 10.1126/sciadv.1501349.
24. *Polimeno P., Magazzù A., Iatì M., Patti F., [et al.].* Optical tweezers and their applications // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer.* — 2018. — July. — Vol. 218. — P. 131–150. — DOI: 10.1016/j.jqsrt.2018.07.013.
25. *Tian Y., Wang L., Duan G.* Multi-trap optical tweezers based on composite vortex beams // *Optics Communications.* — 2020. — Dec. — Vol. 485. — P. 126712. — DOI: 10.1016/j.optcom.2020.126712.
26. *Padgett M., Bowman R.* Tweezers with a twist // *Nature Photonics.* — 2011. — Aug. — Vol. 5. — P. 343–348. — DOI: 10.1038/nphoton.2011.81.
27. *Franke-Arnold S., Allen L., Padgett M.* Advances in optical angular momentum // *Laser and Photonics Review.* — 2008. — Aug. — Vol. 2. — P. 299–313. — DOI: 10.1002/lpor.200810007.
28. *Yao A., Padgett M.* Orbital angular momentum: Origins, behavior and applications // *Advances in Optics and Photonics.* — 2011. — June. — Vol. 3. — P. 161–204. — DOI: 10.1364/AOP.3.000161.
29. *Ritsch-Marte M.* Orbital angular momentum light in microscopy // *Philosophical Transactions of The Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences.* — 2017. — Feb. — Vol. 375. — P. 20150437. — DOI: 10.1098/rsta.2015.0437.

30. *Cameron R. P., Götte J. B., Barnett S. M.* Chiral rotational spectroscopy // *Phys. Rev. A.* — 2016. — Sept. — Vol. 94, issue 3. — P. 032505. — DOI: 10.1103/PhysRevA.94.032505.
31. *Cameron R. P., Götte J. B., Barnett S. M., Yao A. M.* Chirality and the angular momentum of light // *Phil. Trans. R. Soc.* — 2017. — Vol. 375. — DOI: 10.1098/rsta.2015.0433.
32. *Cameron R. P., Barnett S. M., Yao A. M.* Optical helicity, optical spin and related quantities in electromagnetic theory // *New Journal of Physics.* — 2012. — May. — Vol. 14, no. 5. — P. 053050. — DOI: 10.1088/1367-2630/14/5/053050.
33. *Barnett S. M.* On the six components of optical angular momentum // *Journal of Optics.* — 2011. — Apr. — Vol. 13, no. 6. — P. 064010. — DOI: 10.1088/2040-8978/13/6/064010.
34. *Bliokh K. Y., Bekshaev A. Y., Nori F.* Dual electromagnetism: helicity, spin, momentum and angular momentum // *New Journal of Physics.* — 2013. — Mar. — Vol. 15, no. 3. — P. 033026. — DOI: 10.1088/1367-2630/15/3/033026.
35. *Федоров Ф. И.* Теория гиротропии. — Наука и техника, Минск, 1976.
36. *Forbes K. A., Andrews D. L.* Orbital angular momentum of twisted light: chirality and optical activity // *Journal of Physics: Photonics.* — 2021. — Mar. — Vol. 3, no. 2. — P. 022007. — DOI: 10.1088/2515-7647/abdb06.
37. *Allen L., Beijersbergen M. W., Spreeuw R. J. C., Woerdman J. P.* Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes // *Phys. Rev. A.* — 1992. — June. — Vol. 45, issue 11. — P. 8185–8189. — DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.
38. *Ахманов С. А., Жариков В. И.* О нелинейной оптике гиротропных сред // *Письма в ЖЭТФ.* — 1967. — Т. 6, вып. 5. — С. 644.
39. *Голубков А. А., Макаров В. А.* Амплитудные и поляризационные эффекты при самофокусировке лазерного излучения в средах с пространственной дисперсией нелинейности // *Изв. вузов. Радиофизика.* — 1988. — Сент. — Т. 31, вып. 9. — С. 1042. — DOI: 10.1007/BF01039331.
40. *Golubkov A. A., Makarov V. A.* Spectroscopy of nonlinear gyrotropic medium and surface diagnostics based on polarization effects due to self-action of light // *J. Mod. Opt.* — 1990. — Vol. 37, issue 9. — P. 1531–543. — DOI: 10.1080/09500349014551711.
41. *Akhmanov S. A., Lyakhov G. A., Makarov V. A., Zharikov V. I.* Theory of Nonlinear Optical Activity in Isotropic Media and Liquid Crystals // *Optica Acta: International Journal of Optics.* — 1982. — Vol. 29, no. 10. — P. 1359–1369. — DOI: 10.1080/713820767.
42. *Kovrighin A. I., Yakovlev D. V., Zhdanov B. V., Zheludev N. I.* Self-induced optical activity in crystals // *Optics Communications.* — 1980. — Vol. 35, no. 1. — P. 92–95. — DOI: 10.1016/0030-4018(80)90366-1.
43. *Ахманов С. А., Жданов Б. В., Желудев Н. И., Ковригин А. И.* [и др.]. Нелинейная оптическая активность в кристаллах // *Письма в ЖЭТФ.* — 1979. — Т. 29, вып. 5. — С. 294.

44. *Petrenko A. D., Zheludev N. I.* Physical Mechanisms of Nonlinear Optical Activity in Crystals // *Optica Acta: International Journal of Optics*. — 1984. — Vol. 31, no. 10. — P. 1177–1184. — DOI: 10.1080/713821425.
45. *Голубков А. А., Макаров В. А.* Поляризационная спектроскопия нелинейного поворота и деформации эллипса поляризации света, прошедшего через нелинейные гиротропные кристаллы // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* — 1989. — № 2. — С. 54.
46. *Golubkov A. A., Makarov V. A., Perezhogin I. A.* Formation of elliptically polarized ring-shaped electric field structures on the self-focusing of light in an isotropic medium featuring a spatially disperse nonlinearity // *Moscow University Physics Bulletin*. — 2009. — Feb. — Vol. 64. — P. 54. — DOI: 10.3103/S0027134909010123.
47. *Shishkov G. M., Grigoriev K. S., Makarov V. A.* Polarization singularities in the self-focusing of an elliptically polarized laser beam in the isotropic phase of a cholesteric liquid crystal close to the temperature of mesophase transition // *J. Opt. Soc. Am. B*. — 2021. — Oct. — Vol. 38, no. 10. — P. 2932–2937. — DOI: 10.1364/JOSAB.435961.
48. *Волков С. Н., Коротеев Н. И., Макаров В. А.* Генерация второй гармоники в объеме изотропной среды с квадратичной нелинейностью сфокусированным неоднородно поляризованным пучком накачки // *ЖЭТФ*. — 1998. — Т. 113, вып. 4. — С. 1261.
49. *Балакин А. В., Буше Д., Коротеев Н. И., Масселин П.* [и др.]. Поляризационные характеристики “запрещенной” второй оптической гармоники фкмтосекундных лазерных импульсов в растворе бактериородопсина // *ЖЭТФ*. — 1998. — Т. 112, вып. 1. — С. 97.
50. *Shkurinov A. P., Dubrovskii A. V., Koroteev N. I.* Second harmonic generation in an optically active liquid: Experimental observation of a fourth-order optical nonlinearity due to molecular chirality // *Phys. Rev. Lett.* — 1993. — Feb. — Vol. 70, issue 8. — P. 1085–1088. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.70.1085.
51. *Дубровский А. В., Коротеев Н. И., Шкуринов А. П.* Экспериментальное наблюдение пятиволнового нелинейного оптического процесса в оптически-активной жидкости: генерация второй гармоники, чувствительная к зеркальной асимметрии биомолекул // *Письма в ЖЭТФ*. — 1992. — Т. 56, вып. 11. — С. 570.
52. *Агранович В. М., Гинзбург В. Л.* Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. — Наука, Москва, 1965.
53. *Popov S. V., Svirko Y. P., Zheludev N. I.* Susceptibility tensor for nonlinear optics. — Institute of Physics Publishing, Bristol, Philadelphia, 1995.
54. *Svirko Y. P., Zheludev N.* Polarization of light in nonlinear optics. — Wiley, 1998.
55. *Milonni P. W., Boyd R. W.* Momentum of Light in a Dielectric Medium // *Adv. Opt. Photon.* — 2010. — Dec. — Vol. 2, no. 4. — P. 519–553. — DOI: 10.1364/AOP.2.000519.
56. *Ben-Aryeh Y., Serulnik S.* The quantum treatment of propagation in non-linear optical media by the use of temporal modes // *Physics Letters A*. — 1991. — Vol. 155, no. 8. — P. 473–479. — DOI: 10.1016/0375-9601(91)90650-W.

57. *Rosanov N. N., Smirnov V. A.* On the electromagnetic field energy in an isotropic transparent nonlinear medium // *Optics and Spectroscopy*. — 2004. — Oct. — Vol. 97, issue 4. — P. 605. — DOI: 10.1134/1.1813704.
58. *Kirochkin Y. A., Stepanov K. N.* Transport of energy, momentum, and orbital and intrinsic angular momentum of an electromagnetic wave in dispersive media // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. — 1993. — Vol. 77. — P. 901–909.
59. *Бокуть Б. В., Сердюков А. Н.* К теории оптической активности неоднородных сред // *Журнал прикладной спектроскопии*. — 1974. — Т. 20, № 4. — С. 677–681.
60. *Бокуть Б. В., Сердюков А. Н.* К феноменологической теории естественной оптической активности // *ЖЭТФ*. — 1971. — Т. 61, № 5. — С. 1808–1813.
61. *Бокуть Б. В., Сердюков А. Н., Федоров Ф. И.* О форме уравнений связи в оптически активных кристаллах // *Оптика и спектроскопия*. — 1974. — Т. 37, № 2. — С. 288–293.
62. *Бокуть Б. В., Сердюков А. Н., Федоров Ф. И., Хило Н. А.* О граничных условиях в электродинамике оптически активных сред // *Кристаллография*. — 1973. — Т. 18, № 2. — С. 227–233.
63. *Ryzhikov P. S., Makarov V. A.* Intrinsic symmetry of nonlocal nonlinear optical susceptibilities // *Laser Physics Letters*. — 2022. — Feb. — Vol. 19, no. 3. — P. 035401. — DOI: 10.1088/1612-202x/ac503f.
64. *Рыжиков П. С., Макаров В. А.* Тензор энергии-импульса Минковского в нелинейной оптике сред с нелокальностью оптического отклика // *ЖЭТФ*. — 2022. — Т. 162, № 1. — С. 45. — DOI: 10.31857/S0044451022070000.
65. *Ryzhikov P. S., Makarov V. A.* The additional optical angular momentum flux in media with nonlocality of nonlinear optical response // *Laser Physics Letters*. — 2022. — Oct. — Vol. 19, no. 11. — P. 115401. — DOI: 10.1088/1612-202x/ac92df.
66. *Ryzhikov P. S., Makarov V. A.* Intrinsic symmetry of nonlocal nonlinear optical susceptibility tensor in degenerate multi-wave mixing // *Laser Physics Letters*. — 2023. — Aug. — Vol. 20, no. 10. — P. 105401. — DOI: 10.1088/1612-202x/acf045.
67. *Рыжиков П. С., Макаров В. А.* Энергия, импульс и угловой момент электромагнитного поля в среде с нелокальностью оптического отклика при вырожденном по частоте нелинейном взаимодействии волн // *ЖЭТФ*. — 2024. — Т. 165, № 2. — С. 152. — DOI: 10.31857/S0044451024020020.
68. *Ryzhikov P. S., Makarov V. A.* Peculiarities of the intrinsic symmetry of linear and nonlinear optical susceptibility tensors in nonabsorbing inhomogeneous media with nonlocality of optical response // *Laser Physics Letters*. — 2024. — June. — Vol. 21, no. 8. — P. 085401. — DOI: 10.1088/1612-202x/ad51e4.

69. *Ryzhikov P. S., Makarov V. A.* Effect of the Contribution of the Local and Nonlocal Optical Response of an Isotropic Gyrotropic Medium on the Components of the Minkowski Energy–Momentum Tensor of the Electromagnetic Field of the Self-Focusing Beam // *Physics of Wave Phenomena*. — 2024. — June. — Vol. 32, no. 3. — P. 227–231. — DOI: 10.3103/S1541308X24700201.
70. *Рыжиков П. С., Макаров В. А.* Орбитальная и спиновая составляющие плотности потока углового момента монохроматического излучения в непоглощающих средах с нелокальным нелинейным оптическим откликом // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* — 2024. — Авг. — Т. 79, № 4. — С. 2440403. — DOI: 10.55959/MSU0579-9392.79.2440403.
71. *Виноградов А. П.* К вопросу о форме материальных уравнений в электродинамике // *Усп. физ. наук.* — 2002. — Т. 172, № 3. — С. 363–370. — DOI: 10.3367/UFNr.0172.200203h.0363.
72. *Апанасевич А. П.* Основы теории взаимодействия света с веществом. — Наука и техника, Минск, 1977.
73. *Голубков А. А., Макаров В. А.* Граничные условия для электромагнитного поля на поверхности сред со слабой пространственной дисперсией. // *Усп. физ. наук.* — 1995. — Т. 165, № 3. — С. 339–346. — DOI: 10.3367/UFNr.0165.199503f.0339.
74. *Boyd R.* *Nonlinear optics.* — Elsevier, 2020.
75. *Bloembergen N.* *Nonlinear optics.* — World Scientific Publishing, 1965. — P. 108.
76. *Ахманов С. А., Хохлов Р. В.* Проблемы нелинейной оптики (электромагнитные волны в нелинейных диспергирующих средах). — Итоги науки, Москва, 1964.
77. *Sutherland R. L.* *Handbook of Nonlinear Optics.* — CRC Press, 2003. — P. 976.
78. *Guang S. H.* *Nonlinear Optics and Photonics.* — Oxford University Press, 2014. — P. 688.
79. *Mills D. L.* *Nonlinear Optics: Basic Concepts.* — Springer-Verlag, 1991. — P. 184.
80. *Stegeman G. I., Stegeman R. A.* *Nonlinear optics: phenomena, materials and devices.* — Wiley, 2012.
81. *Newell A., Moloney J.* *Nonlinear optics.* — CRC Press, 2004.
82. *Сиротин Ю. И., Шаскольская М.* Основы кристаллофизики. — Наука, Москва, 1979.
83. *Pershan P. S.* Nonlinear Optical Properties of Solids: Energy Considerations // *Phys. Rev.* — 1963. — May. — Vol. 130, issue 3. — P. 919–929. — DOI: 10.1103/PhysRev.130.919.
84. *Божуть Б. В., Сердюков А. Н.* К теории нелинейной оптической активности // *Оптика и спектроскопия.* — 1975. — Т. 38. — С. 327–331.
85. *Kleinman D. A.* Nonlinear Dielectric Polarization in Optical Media // *Physical Review.* — 1962. — Vol. 126. — P. 1977. — DOI: 10.1103/PhysRev.126.1977.

86. *Agranovich V. M., Yudson V. I.* On phenomenological electrodynamics of gyrotropic media // Optics Communications. — 1973. — Vol. 9, no. 1. — P. 58–60. — DOI: 10.1016/0030-4018(73)90335-0.
87. *Bungay A. R., Svirko Y. P., Zheludev N. I.* Equivalency of the Casimir and the Landau-Lifshitz approaches to continuous-media electrodynamics and optical activity on reflection // Phys. Rev. B. — 1993. — May. — Vol. 47, issue 18. — P. 11730–11735. — DOI: 10.1103/PhysRevB.47.11730.
88. *Вальков А. Ю., Романов В. П., Шалагинов А. Н.* Прохождение света через границу раздела гиротропных сред // Оптика и спектроскопия. — 1990. — Т. 69, № 3. — С. 635–639.
89. *Maker P. D., Terhune R. W.* Study of Optical Effects Due to an Induced Polarization Third Order in the Electric Field Strength // Phys. Rev. — 1965. — Feb. — Vol. 137, 3A. — A801–A818. — DOI: 10.1103/PhysRev.137.A801.
90. *Minkowski H.* Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern // Mathematische Annalen. — 1910. — Dec. — Vol. 68. — P. 472–525. — DOI: 10.1007/BF01455871.
91. *Abraham M.* Zur Elektrodynamik bewegter Körper // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. — 1909. — Dec. — Vol. 28. — P. 1–28. — DOI: 10.1007/BF03018208.
92. *Abraham M.* Sul'lelettrodinamica di Minkowski // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. — 1910. — Dec. — Vol. 30. — P. 33–46. — DOI: 10.1007/BF03014862.
93. *Ramos T., Rubilar G. F., Obukhov Y. N.* First principles approach to the Abraham–Minkowski controversy for the momentum of light in general linear non-dispersive media // Journal of Optics. — 2015. — Jan. — Vol. 17, no. 2. — P. 025611. — DOI: 10.1088/2040-8978/17/2/025611.
94. *Bokut' B. V., Serdyukov A. N.* Conservation of angular momentum of electromagnetic radiation in an optically active medium // Journal of Applied Spectroscopy. — 1970. — Vol. 12, issue 1. — P. 117–119. — DOI: 10.1007/BF00605773.
95. *Hillery M., Mlodinow L. D.* Quantization of electrodynamics in nonlinear dielectric media // Phys. Rev. A. — 1984. — Oct. — Vol. 30, issue 4. — P. 1860–1865. — DOI: 10.1103/PhysRevA.30.1860.
96. *Shevchenko A., Kaivola M.* Electromagnetic force density and energy–momentum tensor in an arbitrary continuous medium // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. — 2011. — Aug. — Vol. 44, no. 17. — P. 175401. — DOI: 10.1088/0953-4075/44/17/175401.
97. *Mansuripur M., Zakharian A. R.* Whence the Minkowski momentum? // Optics Communications. — 2010. — Vol. 283, no. 19. — P. 3557–3563. — DOI: 10.1016/j.optcom.2010.04.059.
98. *Голдстейн Г., Пул Ч., Сафко Д.* Классическая механика. — НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2012.

99. *Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.* Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде // Усп. физ. наук. — 1967. — Т. 93, № 9. — С. 19–70. — DOI: 10.3367/UFNr.0093.196709с.0019.
100. *Barnett S. M.* Optical angular-momentum flux // Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics. — 2002. — Jan. — Vol. 4, no. 2. — S7–S16. — DOI: 10.1088/1464-4266/4/2/361.
101. *Yamashita O.* Spin and orbital angular momenta defined for electromagnetic fields in planar anisotropic media // Optics Communications. — 2011. — Vol. 284, no. 10. — P. 2532–2537.
102. *Jackson J. D.* Classical Electrodynamics. — Wiley, 1998.
103. *Moe G., Happer W.* Conservation of angular momentum for light propagating in a transparent anisotropic medium // Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics. — 1977. — May. — Vol. 10, no. 7. — P. 1191–1208. — DOI: 10.1088/0022-3700/10/7/009.
104. *Belinfante F. J.* On the current and the density of the electric charge, the energy, the linear momentum and the angular momentum of arbitrary fields // Physica. — 1940. — Vol. 7, no. 5. — P. 449–474. — DOI: 10.1016/S0031-8914(40)90091-X.
105. *Van Enk S. J., Nienhuis G.* Spin and Orbital Angular Momentum of Photons // Europhysics Letters. — 1994. — Mar. — Vol. 25, no. 7. — P. 497. — DOI: 10.1209/0295-5075/25/7/004.
106. *Barnett S. M.* Rotation of electromagnetic fields and the nature of optical angular momentum // Journal of Modern Optics. — 2010. — Vol. 57, no. 14/15. — P. 1339–1343. — DOI: 10.1080/09500341003654427.
107. *Barnett S. M., Allen L., Cameron R. P., Gilson C. R., [et al.].* On the natures of the spin and orbital parts of optical angular momentum // Journal of Optics. — 2016. — Apr. — Vol. 18, no. 6. — P. 064004. — DOI: 10.1088/2040-8978/18/6/064004.
108. *Darwin C. G.* Notes on the theory of radiation // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1932. — May. — Vol. 136. — P. 36–52. — DOI: 10.1098/rspa.1932.0065.
109. *Bliokh K. Y., Dressel J., Nori F.* Conservation of the spin and orbital angular momenta in electromagnetism // New Journal of Physics. — 2014. — Sept. — Vol. 16, no. 9. — P. 093037. — DOI: 10.1088/1367-2630/16/9/093037.
110. *O’Neil A. T., MacVicar I., Allen L., Padgett M. J.* Intrinsic and Extrinsic Nature of the Orbital Angular Momentum of a Light Beam // Phys. Rev. Lett. — 2002. — Jan. — Vol. 88, issue 5. — P. 053601. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.053601.
111. *Canaguier-Durand A., Cuche A., Genet C., Ebbesen T. W.* Force and torque on an electric dipole by spinning light fields // Phys. Rev. A. — 2013. — Sept. — Vol. 88, issue 3. — P. 033831. — DOI: 10.1103/PhysRevA.88.033831.
112. *Bliokh K. Y., Bekshaev A. Y., Nori F.* Extraordinary momentum and spin in evanescent waves // Nature Communications. — 2014. — Sept. — Vol. 5, issue 1. — P. 3300. — DOI: 10.1038/ncomms4300.

113. *Curtis J. E., Grier D. G.* Structure of Optical Vortices // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Apr. — Vol. 90, issue 13. — P. 133901. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.90.133901.
114. *Garcés-Chávez V., McGloin D., Padgett M. J., Dultz W., [et al.]*. Observation of the Transfer of the Local Angular Momentum Density of a Multiringed Light Beam to an Optically Trapped Particle // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Aug. — Vol. 91, issue 9. — P. 093602. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.093602.
115. *Bliokh K. Y., Bekshaev A. Y., Nori F.* Optical momentum and angular momentum in complex media: from the Abraham–Minkowski debate to unusual properties of surface plasmon-polaritons // *New Journal of Physics.* — 2017. — Dec. — Vol. 19, no. 12. — P. 123014. — DOI: 10.1088/1367-2630/aa8913.
116. *Philbin T. G., Allanson O.* Optical angular momentum in dispersive media // *Phys. Rev. A.* — 2012. — Nov. — Vol. 86, issue 5. — P. 055802. — DOI: 10.1103/PhysRevA.86.055802.
117. *Drummond P. D.* Electromagnetic quantization in dispersive inhomogeneous nonlinear dielectrics // *Phys. Rev. A.* — 1990. — Dec. — Vol. 42, issue 11. — P. 6845–6857. — DOI: 10.1103/PhysRevA.42.6845.
118. *Arbab A. I.* New derivation of the spin of the Electromagnetic field // *Optik.* — 2019. — Vol. 184. — P. 436–445. — DOI: 10.1016/j.ijleo.2019.03.074.
119. *Yan S., Li M., Yao B.* Separation of optical angular momentum flux // *Journal of Optics.* — 2019. — Feb. — Vol. 21, no. 3. — P. 035606. — DOI: 10.1088/2040-8986/ab02d5.
120. *Bialynicki-Birula I., Bialynicka-Birula Z.* Canonical separation of angular momentum of light into its orbital and spin parts // *Journal of Optics.* — 2011. — Apr. — Vol. 13, no. 6. — P. 064014. — DOI: 10.1088/2040-8978/13/6/064014.
121. *Белый В. Н., Сердюков А. Н.* О моменте импульса электромагнитного поля в оптически активной среде // *Оптика и спектроскопия.* — 1975. — Т. 38, вып. 1. — С. 111–114.