

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Ворушилов Константин Сергеевич

**Инварианты Жордана–Кронекера
конечномерных алгебр Ли**

Специальность 1.1.3 (01.01.04) — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научные руководители:

Болсинов Алексей Викторович,
доктор физико-математических наук,
профессор,

Ошемков Андрей Александрович,
доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты:

Миллионщиков Дмитрий Владимирович,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ ВО «МГУ имени М. В. Ломоносова»,
механико-математический факультет,
кафедра высшей геометрии и топологии, профессор

Рябов Павел Евгеньевич,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ ВО «Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации»,
департамент анализа данных, принятия решений
и финансовых технологий, профессор

Козлов Иван Константинович,
кандидат физико-математических наук

Защита диссертации состоится 23 сентября 2022 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4(МГУ.01.17) при ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: sbgashkov@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27 и на сайте ИАС «ИСТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/464596427/>

Автореферат разослан 22 августа 2022 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
МГУ.01.17 ФГБОУ ВО МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор

Гашков С. Б.

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень ее разработанности

Диссертация посвящена исследованию некоторых свойств согласованных пуассоновых структур на алгебрах Ли.

Эффект интегрируемости для большинства из известных интегрируемых гамильтоновых систем связан с наличием бигамильтоновой структуры^{1,2,3,4}. Однако до сих пор остается открытым вопрос об эффективном методе построения биинтегрируемой системы по заданному пучку согласованных скобок Пуассона. Если пучок является кронекеровым или, наоборот, полупростым (т.е. допускающим полупростой оператор рекурсии с различными собственными значениями), то вопрос решается довольно легко. Трудности возникают в том случае, когда пуассонов пучок имеет сложную алгебраическую структуру. Под алгебраической структурой здесь понимается класс эквивалентности пары бивекторов, задающих согласованные скобки в точке общего положения, по отношению к заменам переменных в рассматриваемой точке. Такие классы эквивалентности описываются теоремой Жордана–Кронекера о разложении⁵, аналогичной классической теореме о приведении к жордановой нормальной форме. Даже в линейном приближении⁶, т.е. в предположении, что пуассонов пучок является линейным (одна из скобок линейная, а другая - постоянная в подходящих координатах), этот вопрос является открытым. Именно такая ситуация является основным объектом анализа диссертационной работы. Отметим, что многие известные интегрируемые системы, возникающие в физике, механике и геометрии допускают бигамильтонову реализацию именно такого типа, т.е. естественным образом определены на двойственном пространстве некоторой алгебры Ли и являются гамильтоновыми относительно пучка скобок Пуассона, заданного скобкой Пуассона–Ли и постоянной скобкой.

Одним из первых важных результатов об интегрируемых системах на алгебрах Ли был метод сдвига аргумента, предложенный А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко⁷. В дальнейшем критерий полноты семейства функций, построенных с помощью метода сдвига аргумента, был получен в работах А. В. Болсинова. В недавней работе А. В. Болсинова и Pumei Zhang⁸ были введены инварианты Жордана–Кронекера алгебр Ли. Эти инварианты представляют собой наборы индексов двух типов (жордановы и кронекеровы индексы), описывающие

¹F. Magri, *A simple model of the integrable Hamiltonian equation* // Journal of Mathematical Physics. — 1978. — Vol. 19, no. 5. — P. 1156–1162.

²А. В. Болсинов, А. В. Борисов, *Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли* // Математические заметки. — 2002. — Т. 72, № 1. — С. 11–34

³И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман, *Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры*, // Функциональный анализ и его приложения. — 1979. — Т. 13, № 4. — С. 13–30.

⁴А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тянь-Шаньский, *Интегрируемые системы*, Ижевск, Изд. Регулярная и Хаотическая Динамика, 352 стр. (2003).

⁵R. Thompson, *Pencils of complex and real symmetric and skew matrices*// Linear Algebra and its Applications. — 1991. — Vol. 147. — P. 323–371.

⁶A. V. Bolsinov, A. M. Izosimov, *Singularities of bi-Hamiltonian systems* Communications in Mathematical Physics. — 2014. — Vol. 331, no. 2. — P. 507–543.

⁷А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, *Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли* // Известия АН СССР. — 1978. — Т. 42, № 2. — С. 396–415.

⁸A. V. Bolsinov, P. Zhang, *Jordan–Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras* // Transformation Groups. — 2016. — Vol. 21, no. 1. — P. 51–86.

алгебраическую структуру пучка скобок Пуассона общего положения на двойственном пространстве к алгебре Ли. В работе Болсинова и Zhang также была получена переформулировка критерия полноты семейства функций, построенных с помощью метода сдвига аргумента, на языке этих инвариантов. Этот и другие результаты (например, связанные со структурой особенностей интегрируемой гамильтоновой системы на алгебре Ли) стимулировали изучение различных свойств инвариантов Жордана–Кронекера для алгебр Ли. В частности, эти инварианты были вычислены для полупростых алгебр Ли и алгебр Ли размерности не больше 5. В настоящее время имеется лишь несколько отдельных результатов о вычислении инвариантов Жордана–Кронекера для некоторых специальных классов алгебр Ли.

Отметим, что задачи, связанные с изучением инвариантов Жордана–Кронекера и проблемой построения биинтегрируемой системы с полиномиальными интегралами на произвольной конечномерной алгебре Ли (так называемая *обобщенная гипотеза Мищенко–Фоменко*, подробнее см. стр. 12 основного текста диссертации) включены в список наиболее важных открытых проблем теории конечномерных интегрируемых систем^{9 10, 11, 12}. В частности, в перечисленных работах сформулированы следующие задачи:

Задача 1 (Problem 14¹⁰). *Доказать обобщенную гипотезу Мищенко–Фоменко, или привести контрпример.*

Задача 2 (Problem 5.6¹¹). *Вычислить инварианты Жордана–Кронекера для наиболее интересных классов алгебр Ли, в частности, для*

- a) *полупрямых сумм $\mathfrak{g} + \varphi V$, где $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ – представление простой алгебры Ли \mathfrak{g} , а V – коммутативный идеал;*
- b) *борелевских подалгебр простых алгебр Ли;*
- c) *параболических подалгебр простых алгебр Ли;*
- d) *централлизаторов сингулярных элементов простых алгебр Ли;*
- e) *алгебр Ли малой размерности.*

Диссертационная работа посвящена именно решению задачи 1 для маломерных алгебр Ли, а также пунктов a) и b) задачи 2.

Цели и задачи диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели:

⁹ А.В. Болсинов, А.М. Изосимов, А.Ю. Коняев, А.А. Ошемков, *Алгебра и топология интегрируемых систем. Задачи для исследования* // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. — 2012. — Т. 28. — С. 119–191.

¹⁰ A. Bolsinov, A. Izosimov, D. Tsonev, *Finite-dimensional integrable systems: A collection of research problems*, Journal of Geometry and Physics, published online 16 November 2016, <http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2016.11.003>

¹¹ Bolsinov A. V., Matveev V. S., Miranda E., Tabachnikov S. *Open Problems, Questions and Challenges in Finite-Dimensional Integrable Systems* // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2018. — Vol. 376, no. 2131. — P. 1–40.

¹²S. Rosemann, K. Schöbel, *Open problems in the theory of finite-dimensional integrable systems and related fields* // Journal of Geometry and Physics. — 2015. — Vol. 87. — P. 396–414.

1. Вычисление инвариантов Жордана–Кронекера для полупрямых сумм алгебр Ли вида $\mathfrak{g} + \varphi(\mathbb{R}^n)^k$, где \mathfrak{g} - алгебра Ли $so(n)$ или $sp(n)$, для всех значений n и k .
2. Вычисление инвариантов Жордана–Кронекера для полупрямых сумм алгебр Ли вида $\mathfrak{g} + \varphi(\mathbb{R}^n)^k$, где \mathfrak{g} - алгебра Ли $sl(n)$ или $gl(n)$, для всех значений n и k , кроме случаев, когда $k < n$ и n не кратно k .
3. Вычисление инвариантов Жордана–Кронекера для борелевских подалгебр $Bso(n)$ и $Bsp(n)$ для всех возможных n .
4. Нахождение полных наборов полиномиальных функций в биинволюции для всех семимерных нильпотентных алгебр Ли из списка, представленного в работе М.-Р. Gong¹³.

Положения, выносимые на защиту

1. Вычислены инварианты Жордана–Кронекера для полупрямых сумм алгебр Ли вида $\mathfrak{g} + \varphi(\mathbb{R}^n)^k$, где \mathfrak{g} - алгебра Ли $so(n)$ или $sp(n)$, для всех значений n и k .
2. Вычислены инварианты Жордана–Кронекера для полупрямых сумм алгебр Ли вида $\mathfrak{g} + \varphi(\mathbb{R}^n)^k$, где \mathfrak{g} - алгебра Ли $sl(n)$ или $gl(n)$, для всех значений n и k , кроме случаев, когда $k < n$ и n не кратно k .
3. Вычислены инварианты Жордана–Кронекера для борелевских подалгебр $Bso(n)$ и $Bsp(n)$ для всех возможных n .
4. Обобщенная гипотеза Мищенко–Фоменко верна для всех семимерных нильпотентных алгебр Ли из полного списка, представленного в работе М.-Р. Gong.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно.

Методы исследования

В диссертации используются методы линейной алгебры, дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли. При вычислении инвариантов Жордана–Кронекера алгебр Ли используются методы, предложенные А. В. Болсиновым, Pumei Zhang, А. С. Воронцовым. Для построения полных наборов в биинволюции на маломерных алгебрах Ли применяется пакет символьных вычислений «Wolfram Mathematica 12».

¹³Ming-Peng Gong, *Classification of Nilpotent Lie Algebras of Dimension 7 (over Algebraically Closed Field and R)*, UWSpace, published online, University of Waterloo, Ontario, Canada (1998), <http://hdl.handle.net/10012/1148>

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании интегрируемых систем на алгебрах Ли. Разработанные в диссертации методы могут быть применены для вычисления инвариантов Жордана–Кронекера и построения наборов полиномов в биинволюции на других классах алгебр Ли.

Апробация работы

Основные результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и прошли апробацию на следующих научных конференциях и семинарах:

- XXIII международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2016» (Москва, Россия, 11–15 апреля 2016 г.);
- международная молодежная научная школа «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы» (Воронеж, Россия, 13–16 ноября 2017 г.);
- международная конференция «Зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2018» (Воронеж, 25–31 января 2018 г.);
- XX geometric seminar (Vrnjaska Banja, Serbia, May 20–23, 2018);
- международная конференция «Геометрические методы в теории управления и математической физике» (Рязань, 25–28 сентября 2018 г.);
- PhD Seminar, Friedrich-Schiller-Universität Jena. (December 3, 2018);
- XXVI Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2019" (Москва, Россия, 8-12 апреля 2019 г.);
- International conference “Scientific heritage of Sergey A. Chaplygin: nonholonomic mechanics, vortex structures and hydrodynamics” (Cheboksary, June 2–6, 2019);
- Equadiff - 2019 (Leiden, Netherlands, July 8–12, 2019);
- Ломоносовские чтения 2020. Секция математики (Москва, Россия, 21-28 октября 2020 г.);
- XXVIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2021» (Москва, Россия, 12-23 апреля 2021 г.);
- Семинар «Современные геометрические методы» под руководством акад. А. Т. Фоменко, проф. А. С. Мищенко, проф. А. В. Болсинова, проф. А. А. Ошемкова, проф. Е. А. Кудрявцевой, доц. И. М. Никонова, доц. А. Ю. Коняева, доц. В. В. Ведюшкиной (механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова);
- Семинар «Алгебра и топология интегрируемых систем» под руководством проф. Е. А. Кудрявцевой, проф. А. В. Болсинова, проф. А. А. Ошемкова, доцента А. Ю. Коняева.

Публикации автора

Основные результаты диссертации изложены в четырех работах [1, 2, 3, 4], в том числе по теме диссертации 4, из них 4 статьи опубликованы в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Текст диссертации изложен на 97 страницах и содержит одну таблицу. Список литературы содержит 30 наименований.

Содержание работы

В главе 1 приведены основные определения и утверждения, связанные с обобщенной гипотезой Мищенко–Фоменко и теорией инвариантов Жордана–Кронекера.

В главе 2 вычислены инварианты Жордана–Кронекера полупрямых сумм алгебр Ли вида $\mathfrak{g} + \varphi(\mathbb{R}^n)^k$, где \mathfrak{g} - алгебра Ли $so(n)$ или $sp(n)$, для всех значений n и k :

- Алгебры Ли $so(n) + \varphi(\mathbb{R}^n)^k$ имеют кронекеров тип (то есть, инвариантами Жордана–Кронекера являются только кронекеровы индексы).

1. $k < n - 2$: Кронекеровы индексы равны

$$\underbrace{2, \dots, 2}_{\frac{k(k+1)}{2} \text{ раз}}, 2k + 2, 2k + 4, \dots, n + k - 1; \quad n + k = 2m + 1;$$

$$\underbrace{2, \dots, 2}_{\frac{k(k+1)}{2} \text{ раз}}, 2k + 2, 2k + 4, \dots, n + k - 2, \frac{n + k}{2}; \quad n + k = 2m.$$

2. $k = n - 1$ и $k = n - 2$: Кронекеровы индексы равны

$$\underbrace{2, \dots, 2}_{\frac{n(n-1)}{2} \text{ раз}}; \quad k = n - 1;$$

$$\underbrace{2, \dots, 2}_{\frac{(n-2)(n-1)}{2} \text{ раз}}, \quad n - 1; \quad k = n - 2.$$

3. $k \geq n$: Кронекеровы индексы равны

$$\underbrace{1, \dots, 1}_{n(k-n+1) \text{ раз}}, \quad \underbrace{2, \dots, 2}_{\frac{n(n-1)}{2} \text{ раз}}$$

- Алгебры Ли $\mathfrak{g} = sp(n) + \varphi(\mathbb{R}^n)^k$, $n = 2m$, в зависимости от m и k могут иметь кронекеров (только кронекеровы индексы) или смешанный тип (и кронекеровы, и жордановы индексы).

1. $k = 2l - 1, l \leq m$: алгебра Ли имеет кронекеров тип, инвариантами Жордана–Кронекера являются $\frac{k(k-1)}{2}$ кронекеровых индексов, равных 2, и $m - \frac{k-1}{2}$ кронекеровых индексов, равных k_i , где k_i - нечетные числа, начиная с числа $k(k-1)+1$.
2. $k > 2m$: алгебра Ли имеет кронекеров тип, инвариантами Жордана–Кронекера являются следующие кронекеровы индексы:

$$\underbrace{1, \dots, 1}_{-2m(2m+1) + 2mk \text{ раз}} \quad \underbrace{2, \dots, 2}_{m(2m+1) \text{ раз}}$$

3. $k = 2l, l \leq m$: алгебра Ли имеет смешанный тип, инвариантами Жордана–Кронекера являются k жордановых индексов, равных 2, а также $\frac{k(k-1)}{2}$ кронекеровых индексов 3, и $m - \frac{k}{2}$ индексов, равных k_i , где k_i - четные числа, начиная с числа $2k + 2$.

В главе 3 вычислены инварианты Жордана–Кронекера для полупрямых сумм алгебр Ли вида $\mathfrak{g} + \varphi(\mathbb{R}^n)^k$, где \mathfrak{g} - алгебра Ли $sl(n)$ или $gl(n)$, для всех значений n и k , кроме случаев, когда $k < n$ и n не кратно k :

- Алгебры Ли серии $sl(n) + \varphi(\mathbb{R}^n)^k$ в случае $k > n$ имеют кронекеров тип. Инвариантами Жордана–Кронекера являются $kn - \text{ind } \mathfrak{g}$ индексов $l+1$ и $(l-1) \text{ind } \mathfrak{g}$ индексов, равных l , где $l \text{ind } \mathfrak{g} \leq kn < (l+1) \text{ind } \mathfrak{g}$.
- Алгебры Ли серии $gl(n) + \varphi(\mathbb{R}^n)^k$ в случае $k > n$ имеют кронекеров тип. Инвариантами Жордана–Кронекера являются $kn - \text{ind } \mathfrak{g}$ индексов, равных $l+1$, и $(l-1) \text{ind } \mathfrak{g}$ индексов, равных l , где $l \text{ind } \mathfrak{g} \leq kn < (l+1) \text{ind } \mathfrak{g}$.
- Алгебры Ли $sl(n) + \varphi(\mathbb{R}^n)^n$ имеют смешанный тип. Инвариантами Жордана–Кронекера являются $n \cdot (n-1)$ жордановых индексов, равных 2, и один кронекеров индекс, равный n .
- Алгебры Ли $sl(kl) + \varphi(\mathbb{R}^{kl})^k$ имеют смешанный тип. Инвариантами Жордана–Кронекера являются один кронекеров индекс, равный $\frac{kl(l+1)}{2}$, и $\frac{kl(l+1)}{2} \cdot (k-1)$ жордановых индексов, равных 2.
- Алгебры Ли $gl(kl) + \varphi(\mathbb{R}^{kl})^k$ имеют жорданов тип (то есть, инвариантами Жордана–Кронекера являются только жордановы индексы). Инвариантами Жордана–Кронекера являются $\frac{kl(l+1)}{2} \cdot (k-1)$ жордановых индексов, из которых $\frac{kl(l+1)}{2}$ штук равны 4, а остальные равны 2.

В главе 4 вычислены инварианты Жордана–Кронекера для борелевских подалгебр $Bso(n)$ и $Bsp(n)$ для всех возможных n :

- Алгебры Ли серии $Bsp(2n)$ имеют жорданов тип. Инвариантами Жордана–Кронекера являются $\frac{n(n+1)}{2}$ жордановых индексов, равных 2.
- Алгебры Ли $Bso(4s)$ имеют жорданов тип. Инвариантами Жордана–Кронекера являются $s(s+1)$ жордановых индексов 2 и $\frac{s(s-1)}{2}$ жордановых индексов 4.

- Алгебры Ли $Bso(4s + 1)$ имеют жорданов тип. Инвариантами Жордана–Кронекера являются $s(s + 2)$ жордановых индексов 2 и $\frac{s(s-1)}{2}$ жордановых индексов 4.
- Алгебры Ли $Bso(4s + 2)$ имеют смешанный тип. Инвариантами Жордана–Кронекера являются $s(s + 1)$ жордановых индексов 2, $\frac{s(s-1)}{2}$ жордановых индексов 4, и один кронекеров индекс, равный $2s + 1$.
- Алгебры Ли серии $Bso(4s+3)$ имеют жорданов тип. Инвариантами Жордана–Кронекера являются $(s + 1)(s + 1)$ жордановых индексов 2 и $\frac{s(s+1)}{2}$ жордановых индексов 4.

В главе 5 найдены полные наборы полиномиальных функций в биинволюции для всех семимерных нильпотентных алгебр Ли из списка М.-Р. Gong. Список всех рассмотренных алгебр Ли с полными наборами в биинволюции приведен в таблице 1.

В заключении перечислены основные результаты диссертации, а также предложены возможные направления дальнейших исследований в рамках тематики работы.

Благодарности

Автор выражает благодарность своим научным руководителям А.А. Ошемкову и А.В. Болсинову за постановку задачи, постоянное внимание к работе и помощь на всех этапах ее подготовки. Автор благодарит сотрудников кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ за творческую атмосферу и поддержку.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

1. Vorushilov K. Jordan–Kronecker invariants for semidirect sums defined by standard representation of orthogonal or symplectic Lie algebras // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2017. — Vol. 38, no. 6. — P. 1121–1130.
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, RSCI WoS, **IF** SJR: 0,378 (2021).
2. Vorushilov K. S. Jordan–Kronecker invariants of semidirect sums of the form $\mathfrak{sl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ and $\mathfrak{gl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ // Journal of Mathematical Sciences — 2021. — Vol. 259, no. 5. — P. 571–582.
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, **IF** SJR: 0,357 (2021).
3. Ворушилов К. С. Полные наборы полиномов в биинволюции на нильпотентных семимерных алгебрах Ли // Математический сборник. — 2021. — Т. 212, № 9. — С. 3–17.
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, RSCI WoS, **IF** SJR: 0,843 (2021).

4. Ворушилов К. С. Инварианты Жордана–Кронекера борелевских подалгебр полупростых алгебр Ли // Чебышевский сборник. — 2021. — Т. 22, № 3 — С. 32–56.
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, **IF** SJR: 0,258 (2021).