Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Скутин Александр Андреевич

Некоторые вопросы теории алгебр Ли и p-групп

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел
и дискретная математика

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук,
доцент Клячко Антон Александрович

Москва 2023

Оглавление

Введение

Общая характеристика работы

Диссертация подготовлена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В Ломоносова. В диссертации затрагивается ряд вопросов, относящихся к теории алгебр Ли и p-групп.

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

Определение. Шириной $b(x)$ элемента x конечной p-группы G называется число удовлетворяющее равенству $|G : C_G(x)| = p^{b(x)}$, где $C_G(x)$ является централизатором x в G. Ширина группы G определяется как максимум ширин её элементов и обозначается $b(G)$.

В 1957 году Джеймс Уайголд [1, Вопрос 4.69] сформулировал следующие гипотезы.

Гипотеза 1. Для каждой группы G, для которой известно, что размер каждой орбиты действия сопряжениями ограничен некоторым числом n, выполнено $|G'| \leq n^{(1+\lambda(n))/2}$, где $\lambda(n)$ – число (необязательно различных) простых делителей n.

В случае, когда G – конечная p-группа, получаем следующий частный случай гипотезы 1.

Гипотеза 2. Для каждой конечной p-группы G выполнено неравенство

$$|G'| \leq p^{b(G)(b(G)+1)/2}.$$

И. М. Брайд [2] доказал гипотезу 2 для p-групп класса нильпотентности 2.

П. Нейман [5] доказал, что $|G'| \leq p^{b(G)^2}$ для каждой конечной p-группы G. Позже М. Р. Вон-Ли [6] доказал гипотезу 2 для метабелевых p-групп, используя методы изложенные в статьях [4], [5]. В 1974 году Вон-Ли [7] доказал гипотезу 2 и, более того доказал, что равенство достигается лишь в случаях, когда G имеет класс нильпотентности 2, или когда $b(G) = 2$ и G имеет класс нильпотентности 3.

В 1973 году Дж. Уайголдом в «Коуровской тетради» [8, Вопрос 4.69] была сформулирована следующая более сильная гипотеза.

Гипотеза 3 ([8, Вопрос 4.69]). Пусть G – конечная p-группа, для которой известно, что $G' > p^{n(n-1)/2}$, для некоторого целого n. Тогда G порождается элементами ширины не менее n.

Дж. Уайголд и М.Р. Вон-Ли [3] доказали гипотезу 3 в случаях, когда G имеет класс нильпотентности 2 и в случае $b(G) \leq p$. Также, для каждого $n \geq 1$ привели пример группы, для которой выполняется $|G'| > p^{(n^2-5n+12)/2}$, $b(G) = n$, но группа G не порождается элементами ширины n.

Гипотеза 3 будет доказана автором диссертации в главе 1.

Определение. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольная алгебра Ли. Шириной $b(x)$ элемента x алгебры Ли $\mathcal{A}$ называется число удовлетворяющее равенству

$$b(x) = \dim \mathcal{A} - \dim C_{\mathcal{A}}(x),$$

где $C_{\mathcal{A}}(x)$ является централизатором x в $\mathcal{A}$.

В главе 2 автором будет доказан следующий аналог гипотезы 3 для нильпотентных алгебр Ли

Теорема 1. Пусть $\mathcal{A}$ – нильпотентная алгебра Ли, для которой известно, что $\dim \mathcal{A}' > n(n-1)/2$ для некоторого целого n. Тогда $\mathcal{A}$ порождается элементами ширины не менее n.

Второй решаемой задачей настоящей диссертации является вопрос описания максимальных подалгебр Ли среди локально нильпотентных дифференцирований коммутативной алгебры.

Рассмотрим произвольную коммутативную алгебру с единицей, конечной степени трансцендентности, без делителей нуля B над полем k нулевой характеристики.

Определение. Подалгебра Ли $\mathcal{A}$ алгебры Ли $\mathrm{Der}_k(B)$ дифференцирований называется максимальной по вложению алгеброй Ли среди локально нильпотентных дифференцирований алгебры B, если $\mathcal{A}$ состоит из локально нильпотентных дифференцирований алгебры B и каждая подалгебра Ли алгебры Ли $\mathrm{Der}_k(B)$, состоящая из локально нильпотентных дифференцирований алгебры B и содержащая $\mathcal{A}$, совпадает с $\mathcal{A}$.

В монографии [9] Дж. Фройденбургом были поставлены следующие гипотезы о строении всех максимальных по вложению алгебр Ли среди локально нильпотентных дифференцирований.

Гипотеза 4. Треугольная алгебра Ли дифференцирований

$$k\partial_{x_1} \oplus k[x_1]\partial_{x_2} \oplus \ldots \oplus k[x_1, \ldots, x_{n-1}]\partial_{x_n}$$

алгебры многочленов $k[x_1, \ldots, x_n]$ является максимальной по вложению алгеброй Ли среди локально нильпотентных дифференцирований этой алгебры.

Гипотеза 5. Все максимальные по вложению алгебры Ли среди локально нильпотентных дифференцирований алгебры многочленов $k[x_1, \ldots, x_n]$ являются сопряженными к треугольной алгебре Ли дифференцирований

$$k\partial_{x_1} \oplus k[x_1]\partial_{x_2} \oplus \ldots \oplus k[x_1, \ldots, x_{n-1}]\partial_{x_n}.$$

В настоящей диссертации автором доказывется гипотеза 4 и строится контрпример к гипотезе 5 в случае $n = 3$. Более того, автором доказывается следующая теорема, являющаяся уточнением гипотезы 5.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{A}$ – максимальная по вложению алгеброй Ли среди локально нильпотентных дифференцирований алгебры B такая, что $\ker \mathcal{A} = \mathbb{K}$. Тогда найдутся элементы $x_i \in B$ такие, что $B = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ и

$$\mathcal{A} = \mathbb{K}\partial_{x_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]\partial_{x_n}.$$

Цели и задачи работы

Основной целью работы является доказательство некоторых нерешенных гипотез в теории алгебр Ли и p-групп.

Положения, выносимые на защиту

Основными результатами, полученными в настоящей диссертации, являются:

- доказательство гипотезы Уайголда для p-групп;
- доказательство аналога гипотезы Уайголда для нильпотентных алгебр Ли;
- формулировка и доказательство усиленной версии гипотезы Уайголда для конечномерных нильпотентных алгебр Ли;
- доказательство первой части гипотезы 11.7, поставленной Дж.Фройденбургом в [9];
- опровержение второй части гипотезы 11.7, поставленной Дж.Фройденбургом в [9];
- доказательство уточнённой версии гипотезы 11.7, поставленной Дж.Фройденбургом в [9].

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются конечные p-группы и их коммутанты, нильпотентные алгебры Ли, алгебры Ли дифференцирований и их подалгебры Ли.

Предметом исследования являются конечные p-группы, нильпотентные алгебры Ли, подалгебры Ли среди локально нильпотентных дифференцирований произвольных коммутативных алгебр и их свойства.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми. Среди них:

1. Доказательство гипотезы Уайголда о конечных p-группах.

2. Формулировки и доказательства усиленных версий гипотезы Уайголда в случае конечных p-групп.

3. Формулировка и доказательство аналога гипотезы Уайголда для нильпотентных алгебр Ли.

4. Формулировки и доказательства усиленных версий гипотезы Уайголда в случае нильпотентных алгебр Ли.

5. Доказательство максимальности треугольной алгебры Ли локально нильпотентных дифференцирований алгебры многочленов.

6. Описаны свойства максимальных по вложению подалгебр Ли среди локально нильпотентных дифференцирований произвольной коммутативной алгебры B с единицей, без делителей нуля, и имеющей конечную степень трансцендентности.

Методы исследования

В работе используются методы теории алгебр Ли, p-групп, а также известные теоремы коммутативной алгебры.

Теоретическая и практическая значимость

Работа имеет теоретический характер.

Результаты и методы, полученные в диссертации, представляют интерес для специалистов в абстрактной алгебре, могут найти применение в теории групп и алгебр Ли.

Степень достоверности и апробация результатов

Соискатель имеет 4 опубликованные работы, в том числе 4 статьи по теме диссертации [34, 35, 36, 37], из них 4 работы [34, 35, 36, 37] опубликованы в научных журналах из списка, рекомендованного ВАК.

Опубликованные статьи [34, 35, 36, 37] соответствуют пункту 2.3. положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова.

Основные результаты диссертации докладывались на:

– на семинаре «Теория групп» под руководством профессора А.Ю. Ольшанского, доцента А.А. Клячко и доцента О.В. Куликовой (механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2013–2021, неоднократно)

– на конференции «Postgraduate Group Theory Conference» University of Southampton 11th - 15th January 2021.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка публикаций из 37 наименований. Общий объем диссертации составляет 64 страниц.

Содержание работы

Введение посвящено актуальности рассматриваемой темы, краткой истории вопроса, изложению цели работы и основных результатов.

Глава 1. В этой главе доказавыется гипотеза Уайголда для конечных p-групп и её усиления. Результаты этой главы опубликованы в статье [34]. Основными результатами главы являются:

- Доказательство теоремы о том, что в случае, когда $p > 2$ и размер коммутанта p-группы G превышает $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$, множество элементов группы G ширины не менее n не может быть покрыто $p-1$ собственными подгруппами группы G.

- Доказательство теоремы о том, что в случае, когда $p = 2$ и размер коммутанта p-группы G превышает $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$, множество элементов группы G ширины не менее n не может быть покрыто двумя собственными подгруппами группы G, одна из которых имеет индекс не менее 4 в G.

В разделе 1.1 предлагаются формулировки основных теорем.

Определение. Шириной $b(x)$ элемента x конечной p-группы G называется число удовлетворяющее равенству

$$|G : C_G(x)| = p^{b(x)},$$

где $C_G(x)$ является ценрализатором x в G.

Доказывается следующая теорема.

Теорема. Пусть G – конечная p-группа, и пусть $|G'| > p^{\frac{n(n-1)}{2}}$ для некоторого целого неотрицательного n. Тогда группа G порождается элементами ширины не меньше n.

В случае $p \neq 2$ доказывается следующая более сильная теорема.

Теорема. Пусть $p \neq 2$ – простое число. Пусть G – конечная p-группа такая, что $|G'| > p^{\frac{n(n-1)}{2}}$ для некоторого целого неотрицательного n. Тогда множество элементов группы G ширины не меньше n не может быть покрыто $p-1$ собственными подгруппами группы G.

В случае $p = 2$ получаем также более сильный результат.

Теорема. Пусть G – конечная 2-группа такая, что $|G'| > 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ для некоторого целого неотрицательного n. Тогда множество элементов группы G ширины не меньше n не может быть покрыто двумя собственными подгруппами группы G, одна из которых является подгруппой индекса не менее 4 в G.

В разделе 1.2 вводятся основные определения и вспомогательные утверждения, используемые на протяжении всего текста.

Определение. Шириной $b_H(g)$ элемента g конечной p-группы G относительно подгруппы $H \subseteq G$ будем называть число удовлетворяющее уравнению

$$|H : C_H(g)| = p^{b_H(g)},$$

где $C_H(g) = \{h \in H | hg = gh\}$ – централизатор элемента g в H.

Основным инструментом для доказательства гипотезы Уайголда для конечных p-групп является следующая лемма.

Лемма. Пусть G – конечная p-группа и пусть C её подгруппа индекса p. Тогда для каждого элемента g из множества $G \setminus C$ выполнено

$$\log_p |G'| \leq b(g) + \log_p |C'|.$$

В разделах 1.3, 1.4 приводятся доказательства основных теорем главы.

Глава 2. посвящена формулировке и доказательству аналога гипотезы Уайголда для нильпотентных алгебр Ли. Результаты этой главы опубликованы в статье [35].

Основными результатами главы являются:

- Доказательство теоремы о том, что в случае, когда $2 < |\mathbb{F}| < \infty$ и размерность коммутанта $\mathbb{F}$-алгебры Ли $\mathcal{A}$ превышает $\frac{n(n-1)}{2}$, множество элементов алгебры Ли $\mathcal{A}$ ширины не менее n не может быть покрыто $|\mathbb{F}|-1$ собственными подалгебрами Ли алгебры Ли $\mathcal{A}$.

- Доказательство теоремы о том, что в случае, когда $|\mathbb{F}| = 2$ и размерность коммутанта $\mathbb{F}$-алгебры Ли $\mathcal{A}$ превышает $\frac{n(n-1)}{2}$, множество элементов алгебры Ли $\mathcal{A}$ ширины не менее n не может быть покрыто двумя собственными подалгебрами Ли алгебры Ли $\mathcal{A}$, одна из которых имеет коразмерность не менее 2 в $\mathcal{A}$.

- Доказательство теоремы о том, что в случае, когда $|\mathbb{F}| = \infty$ и размерность коммутанта $\mathbb{F}$-алгебры Ли $\mathcal{A}$ превышает $\frac{n(n-1)}{2}$, множество элементов алгебры Ли $\mathcal{A}$ ширины не менее n не может быть покрыто конечным числом собственных подалгебр Ли алгебры Ли $\mathcal{A}$.

В разделе 2.1 излагается краткая история вопроса, а также формулировки основных теорем.

Определение. Шириной $b(x)$ элемента x алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{F}$ называется число удовлетворяющее уравнению

$$\dim \mathfrak{g} - \dim C_{\mathfrak{g}}(x) = b(x),$$

где $C_{\mathfrak{g}}(x)$ является централизатором элемента x в $\mathfrak{g}$.

Доказывается следующая теорема.

Теорема. Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли над полем $\mathbb{F}$ и пусть размерность её коммутанта больше $n(n-1)/2$ для некоторого неотрицательного целого n. Тогда $\mathfrak{g}$ порождается элементами ширины не меньше n.

В случае $|\mathbb{F}| = \infty$ доказываем следующую более сильную теорему.

Теорема. Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли над бесконечным полем $\mathbb{F}$ и пусть размерность её коммутанта больше $n(n-1)/2$ для некоторого неотрицательного целого n. Тогда множество элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ширины не менее чем n не может быть покрыто конечным числом собственных подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

В случае $2 < |\mathbb{F}| < \infty$ получаем следующий более сильный результат.

Теорема. Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли над конечным полем $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}_2$ и пусть размерность её коммутанта больше $n(n-1)/2$ для некоторого неотрицательного целого n. Тогда множество элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ширины не менее чем n не покрывается $|\mathbb{F}| - 1$ собственными подалгебрами алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

В случае $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ получаем также более сильный результат.

Теорема. Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли над полем $\mathbb{F}_2$ и пусть размерность её коммутанта больше $n(n-1)/2$ для некоторого неотрицательного целого n. Тогда множество элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ширины не менее чем n не может быть покрыто двумя собственными подалгебрами алгебры Ли $\mathfrak{g}$, одна из которых имеет коразмерность не менее 2 в $\mathfrak{g}$.

В разделе 2.2 вводятся основные определения и вспомогательные утверждения, используемые далее в тексте.

Определение. Шириной $b_{\mathfrak{h}}(x)$ элемента x конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно её собственной подалгебры $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ называется число удовлетворяющее равенству
$$\dim \mathfrak{h} - \dim C_{\mathfrak{h}}(x) = b_{\mathfrak{h}}(x),$$
где $C_{\mathfrak{h}}(x) = \{h \in \mathfrak{h} | [x, h] = 0\}$ является централизатором x в $\mathfrak{h}$. Из этого определения следует, что $b(x) = b_{\mathfrak{g}}(x)$.

Основным инструментом для доказательства аналога гипотезы Уайголда для нильпотентных алгебр Ли является следующая лемма.

Лемма. Пусть $\mathfrak{g}$ является конечномерной алгеброй Ли, тогда для каждого её идеала $\mathfrak{h}$ коразмерности 1 и для каждого элемента x, лежащего в множестве $\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$, имеем $\dim \mathfrak{g}' \leq b(x) + \dim \mathfrak{h}'$.

В разделах 2.3, 2.4, 2.5 приводятся доказательства основных теорем главы.

Глава 3. В этой главе формулируется и доказывается усиленная версия гипотезы Уайголда в случае конечномерных нильпотентных алгебр Ли над бесконечным полем. Результаты этой главы опубликованы в статье [36].

Основными результатами главы являются:

- Введено понятие итерированных конструкций подалгебр Ли и элементов, связанных с произвольной конечномерной нильпотентной алгеброй Ли.

- Доказана теорема о том, что для произвольной конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ выполнятся $\dim\mathfrak{g}' \leq n(n+1)/2$, в случае существования некоторой итерированной конструкции подалгебр Ли и элементов определённого вида.

В разделе 3.1 излагается краткая история вопроса, а также формулировки основных теорем.

Определение. Шириной $b(x)$ элемента x алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{F}$ называется число удовлетворяющее уравнению

$$\dim \mathfrak{g} - \dim C_{\mathfrak{g}}(x) = b(x),$$

где $C_{\mathfrak{g}}(x)$ является централизатором элемента x в $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим некоторую конечномерную нильпотентную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ над бесконечным полем $\mathbb{F}$ и произвольную последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_{\dim \mathfrak{g}-1}$. Обозначим $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\varnothing := \mathfrak{g}$ и пусть $a = a_\varnothing$ – произвольный элемент, лежащий в $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$. Для каждого набора индексов

$$i_0 = \varnothing, i_1 \in [1, n_1], \ldots, i_k \in [1, n_k],$$

$k \in [0, \dim \mathfrak{g} - 1]$ определим подалгебры Ли $\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k} \subseteq \mathfrak{g}$ и элементы

$$a_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k} \setminus (\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k})'$$

индуктивно по k. Пусть для некоторого $k \in [0, \dim \mathfrak{g} - 2]$ уже построены подалгебры Ли $\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_t} \subseteq \mathfrak{g}$ и элементы $a_{i_1,\ldots,i_t}$, где

$$i_0 = \varnothing, i_1 \in [1, n_1], \ldots, i_t \in [1, n_t], t \in [0, k].$$

Для каждой алгебры Ли $\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k}$ рассмотрим произвольное множество попарно различных максимальных идеальных подалгебр Ли

$$\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k,1}, \mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k,2}, \ldots, \mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k,n_{k+1}}$$

алгебры Ли $\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k}$, не содержащих элемент $a_{i_1,\ldots,i_k}$ (такие алгебры Ли всегда найдутся, так как $|\mathbb{F}| = \infty$ и $a_{i_1,\ldots,i_k} \notin (\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k})'$). В качестве элемента $a_{i_1,\ldots,i_{k+1}}$ рассмотрим произвольный элемент, содержащийся в

$$\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_{k+1}} \setminus (\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_{k+1}})', i_1 \in [1, n_1], \ldots, i_{k+1} \in [1, n_{k+1}].$$

Продолжая данное построение по индукции, получаем семейство подалгебр Ли $\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k} \subseteq \mathfrak{g}$ и элементов $a_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k}$, где

$$i_0 = \varnothing, i_1 \in [1, n_1], \ldots, i_k \in [1, n_k], k \in [0, \dim \mathfrak{g} - 1].$$

Определение. Семейство подалгебр Ли

$$\{\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k} \subseteq \mathfrak{g} \mid i_0 = \varnothing, i_1 \in [1, n_1], \ldots, i_k \in [1, n_k], k \in [0, \dim \mathfrak{g} - 1]\},$$

а также множество элементов

$$\{a_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k} \mid i_0 = \varnothing, i_1 \in [1, n_1], \ldots, i_k \in [1, n_k], k \in [0, \dim \mathfrak{g} - 1]\},$$

построенные описанным выше способом, будем называть итерированной конструкцией подалгебр Ли и элементов нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ типа $(n_1, n_2, \ldots, n_{\dim \mathfrak{g} - 1})$.

Доказываем следующую теорему.

Теорема. Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная нильпотентная алгебра Ли над бесконечным полем $\mathbb{F}$. Предположим, что для некоторого натурального числа n нашлась итерированная конструкция подалгебр Ли $\{A_{i_1,\ldots,i_k} \subseteq \mathfrak{g}\}$ и элементов $\{a_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k}\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеющая тип $(n_1, n_2, \ldots, n_{\dim \mathfrak{g} - 1})$, где $n_i \geq \min(i, n)$. Пусть также выполнено $b_{\mathfrak{g}}(a_{i_1,\ldots,i_k}) \leq n$ для каждого из элементов $a_{i_1,\ldots,i_k}$. Тогда $\dim \mathfrak{g}' \leq n(n+1)/2$.

В разделе 3.2 вводятся основные определения и вспомогательные утверждения, используемые далее в тексте.

Определение. Шириной $b_{\mathfrak{h}}(x)$ элемента x конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно её собственной подалгебры $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ называется число, удовлетворяющее равенству

$$\dim \mathfrak{h} - \dim C_{\mathfrak{h}}(x) = b_{\mathfrak{h}}(x),$$

где

$$C_{\mathfrak{h}}(x) = \{h \in \mathfrak{h} | [x, h] = 0\}$$

является централизатором x в $\mathfrak{h}$. Из этого определения следует, что $b(x) = b_{\mathfrak{g}}(x)$.

Основными инструментами для доказательства усиленной гипотезы Уайгольда для конечномерных нильпотентных алгебр Ли являются следующие леммы.

Лемма. Рассмотрим произвольную максимальную идеальную подалгебру Ли $\mathfrak{h}$ конечномерной нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Обозначим за $\mathfrak{f}$ идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденный элементами $x \in \mathfrak{h}$ такими, что $b_{\mathfrak{h}}(x) = b(x)$. Тогда в случае $\mathfrak{f} = \mathfrak{h}$, имеем $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h}'$.

Лемма. Пусть $\mathfrak{g}$ является конечномерной нильпотентной алгеброй Ли, тогда для каждого её идеала $\mathfrak{h}$ коразмерности 1 и для каждого элемента x, лежащего в множестве $\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$, имеем $\dim \mathfrak{g}' \leq b(x) + \dim \mathfrak{h}'$.

Лемма. Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная нильпотентная алгебра Ли над бесконечным полем $\mathbb{F}$. Рассмотрим некоторую итерированную конструкцию подалгебр Ли $\{\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k} \subseteq \mathfrak{g}\}$ и элементов $\{a_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k}\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ типа $(n_1, n_2, \ldots, n_{\dim \mathfrak{g}-1})$. Пусть $n = \min_i n_i$, тогда множество $\{a_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathfrak{g}\}$ не покрывается n собственными векторными подпространствами пространства $\mathfrak{g}$.

В разделах 3.3, 3.4 приводятся доказательства основных теорем главы.

Глава 4. посвящена решению вопроса 11.7, поставленного Дж.Фройденбургом в монографии [9]. Результаты этой главы опубликованы в статье [37].

Основными результатами главы являются:

- Введено понятие локально нильпотентного множества дифференцирований и доказаны некоторые свойства локально нильпотентных множеств дифференцирований.

- Построен контрпример ко второй части гипотезы 11.7, поставленной Дж.Фройденбургом в монографии [9].

- Доказано, что треугольная алгебра Ли дифференцирований

$$k\partial_{x_1} \oplus k[x_1]\partial_{x_2} \oplus \ldots \oplus k[x_1, \ldots, x_{n-1}]\partial_{x_n}$$

  алгебры многочленов $k[x_1, \ldots, x_n]$ является максимальной по включению алгеброй Ли среди локально нильпотентных дифференцирований этой алгебры.

- Доказана уточнённая версия второй части гипотезы 11.7, поставленной Дж.Фройденбургом в монографии [9].

В разделе 4.1 даётся краткая история вопроса, а также формулировки основных теорем.

Доказываем следующую теорему.

Теорема. Пусть дана алгебра Ли $\mathcal{A}$, лежащая в $\mathrm{LND}(B)$ и известно, что $\ker \mathcal{A} = \mathbb{K}$. Тогда найдутся x_i такие, что $B = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ и

$$\mathcal{A} \subseteq \mathbb{K}\partial_{x_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]\partial_{x_n}.$$

В разделе 4.2 вводятся основные определения и вспомогательные утверждения, используемые далее в тексте.

Рассмотрим произвольную коммутативную алгебру B с единицей, без делителей нуля, над полем нулевой характеристики $\mathbb{K}$. Пусть также известно, что B имеет конечную степень трансцендентности. Далее в работе всегда будем рассматривать только такие алгебры.

Используем следующие обозначения:

— Для произвольного конечного числа элементов $x_1, \ldots, x_n$, лежащих в алгебре B, пишем $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ в том случае, когда элементы x_i алгебраически независимы и алгебра $A \subseteq B$ порождается этими элементами;

— Для каждой алгебры Ли $\mathcal{A}$, определим $d(\mathcal{A})$ как её ступень разрешимости. Также, обозначим через $\mathcal{A}^{(i)}$ – i-ый коммутант алгебры Ли $\mathcal{A}$;

— Для произвольного семейства линейных операторов S векторного пространства V, ядром $\ker S$ этого семейства назовём пересечение ядер всех операторов, лежащих в множестве S;

— Для произвольной пары семейств линейных операторов S_1, S_2 векторного пространства V, обозначим через $[S_1, S_2]$ – множество всевозможных коммутаторов вида $[A, B] = AB - BA$, где $A \in S_1$, $B \in S_2$;

— Для произвольного семейства линейных операторов S векторного пространства V и произвольного элемента $v \in V$, обозначим через $S(v)$ множество элементов вида $A(v)$, где A–всевозможные операторы из S;

— Для произвольного семейства линейных операторов S векторного пространства V, обозначим через $\mathrm{ad}S$ множество присоединённых эндоморфизмов

$$\{\mathrm{ad}A : X \to [A, X] | A \in S, X \in \mathrm{End}(V)\}$$

векторного пространства $\mathrm{End}(V)$.

Определение. Линейный оператор A на векторном пространстве V называется *локально нильпотентным*, если для каждого вектора v из V найдётся натуральное число $k = k(v) > 0$ такое, что $A^k(v) = 0$.

Определение. Множество линейных операторов T на векторном пространстве V назовём *локально нильпотентным*, если для любой бесконечной последовательности операторов $A_1, A_2, \ldots$, лежащих в T, и любого вектора $v \in V$, существует такое $k = k(v, \{A_i\}) > 0$, что выполнено равенство $A_k \ldots A_1(v) = 0$.

Лемма. Пусть T – локально нильпотентное множество линейных операторов на векторном пространстве V. Тогда для произвольного собственного векторного подпространства $U \subset V$ найдётся элемент $v \in V \setminus U$, для которого $T(v) \subseteq U$.

Каждое локально нильпотентное дифференцирование алгебры B также является локально нильпотентным линейным оператором на векторном пространстве $B_{\mathbb{K}}$. Поэтому все предыдущие леммы о локально нильпотентных операторах применимы к случаю локально нильпотентных дифференцирований. Причем, в случае с дифференцированиями алгебры B, локально нильпотентным множеством дифференцирований алгебры B называется произвольное множество дифференцирований алгебры B, являющееся локально нильпотентным множеством линейных операторов на векторном пространстве $B_{\mathbb{K}}$.

Лемма. Множество

$$\mathbb{K}\partial_{x_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]\partial_{x_n}$$

является локально нильпотентным множеством дифференцирований алгебры $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Лемма. Рассмотрим произвольное локально нильпотентное множество дифференцирований S алгебры B. Тогда для любого конечного множества локально нильпотентных дифференцирований $D_1, D_2, \ldots, D_k$ такого, что

$$[S \cup \{D_1, D_2, \ldots, D_k\}, S \cup \{D_1, D_2, \ldots, D_k\}] \subseteq S,$$

имеем $S \cup \{D_1, D_2, \ldots, D_k\}$ – локально нильпотентное подмножество дифференцирований алгебры B.

Лемма. Рассмотрим произвольное подмножество S, лежащее в $\mathrm{Der}(B)$. Тогда для некоторого конечного числа элементов $D_1, \ldots, D_k \in S$, $\ker S = \cap_{i=1}^{k} \ker D_i$. Более того, k можно выбрать равным $\mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{K}}(B) - \mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{K}}(\ker S)$.

Лемма. Любая абелева алгебра Ли $\mathcal{A}$, лежащая в $\mathrm{LND}(B)$ такая, что $\ker \mathcal{A} = \mathbb{K}$ является конечномерной алгеброй Ли размерности не более чем $\mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{K}}(B)$.

Лемма. Рассмотрим произвольное локально нильпотентное множество линейных операторов T на векторном пространстве V. Тогда для любого локально нильпотентного оператора A на векторном пространстве V такого, что $[A, T] \subseteq T$, имеем $T \cup \{A\}$ – локально нильпотентное множество линейных операторов на V.

В разделе 4.3 приводится контрпример ко второй части гипотезы 11.7, поставленной Дж.Фройденбургом в монографии [9].

В разделе 4.4 формулируются и доказываются основные свойства локально нильпотентных множеств дифференцирований.

Теорема. Пусть S – произвольное локально нильпотентное множество дифференцирований алгебры B, для которого $\ker S = \mathbb{K}$. Тогда найдутся x_i такие, что $B = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ и

$$S \subseteq \mathbb{K}\partial_{x_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]\partial_{x_n}.$$

Теорема. Множество дифференцирований S алгебры B является локально нильпотентным тогда и только тогда, когда каждое его конечное подмножество

$S' \subseteq S$ является локально нильпотентным множеством дифференцирований алгебры B.

Теорема. Пусть S – произвольное локально нильпотентное множество дифференцирований алгебры B. Тогда множество $ad(S)$ является локально нильпотентным множеством линейных операторов на векторном пространсве $\mathrm{Der}(B)$.

В разделах 4.5, 4.6 приводятся доказательства основных теорем главы.

Благодарность

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю кандидату физико-математических наук Антону Александровичу Клячко за помощь, неоценимую поддержку и постоянное внимание к работе. Также, автор выражает благодарность доктору физико-математических наук Ивану Владимировичу Аржанцеву за постановку задачи четвёртой главы диссертации.

Глава 1

Гипотеза Уайголда для конечных p-групп

1.1 Введение

В этой главе докажем гипотезу Дж. Уайголда [8, Вопрос 4.69].

Определение 1.1.1. Шириной $b(x)$ элемента x конечной p-группы G называется число удовлетворяющее равенству

$$|G : C_G(x)| = p^{b(x)},$$

где $C_G(x)$ является ценрализатором x в G.

В этой главе доказываем следующую теорему.

Теорема 1.1.1. *Пусть G – конечная p-группа, и пусть $|G'| > p^{\frac{n(n-1)}{2}}$ для некоторого целого неотрицательного n. Тогда группа G порождается элементами ширины не меньше n.*

В случае $p \neq 2$ доказываем следующую более общую теорему.

Теорема 1.1.2. *Пусть $p \neq 2$ – простое число. Пусть G – конечная p-группа такая, что $|G'| > p^{\frac{n(n-1)}{2}}$ для некоторого целого неотрицательного n. Тогда множество элементов группы G ширины не меньше n не может быть покрыто двумя собственными подгруппами группы G.*

В случае $p = 2$ получаем более общий результат.

Теорема 1.1.3. *Пусть G – конечная 2-группа такая, что $|G'| > 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ для некоторого целого неотрицательного n. Тогда множество элементов группы G ширины не меньше n не может быть покрыто двумя собственными подгруппами группы G, где одна из которых является подгруппой индекса не менее 4 в G.*

Таким образом, теорема 1.1.1 является следствием теорем 1.1.2 и 1.1.3.

1.2 Используемые утверждения

Определение 1.2.1. Шириной $b_H(g)$ элемента g конечной p-группы G относительно подгруппы $H \subseteq G$ будем называть число удовлетворяющее уравнению

$$|H : C_H(g)| = p^{b_H(g)},$$

где $C_H(g) = \{h \in H | hg = gh\}$ – централизатор элемента g в H.

Лемма 1.2.1. *Пусть G – конечная p-группа и*

$$G = H_1 \cup H_2 \cup H_3$$

для некоторых собственных подгрупп H_1, H_2, H_3 группы G. Тогда $p = 2$ и H_i имеют индекс 2 в G для $i = 1, 2, 3$.

Лемма 1.2.1 является хорошо известным и доказанным фактом в теории p-групп.

Лемма 1.2.2. *Пусть G – конечная p-группа и пусть C её подгруппа индекса p. Тогда для каждого элемента g из множества $G \setminus C$ выполнено*

$$\log_p |G'| \leq b(g) + \log_p |C'|.$$

Доказательство. Размер множества $X = \{[g, c] | c \in C\}$ не превышает $p^{b(g)}$, поэтому достаточно доказать, что $G' = XC'$. Доказательство этого факта следует из следующих свойств множества XC':

1. XC' является подгруппой в G: $[g, c_1][g, c_2]C' = [g, c_1c_2]C'$;

2. XC' – нормальная подгруппа;

3. Группа G/XC' является абелевой.

Эти свойства влекут доказательство леммы.

$\square$

Следующая лемма является хорошо известной в теории p-групп, поэтому сформулируем её без доказательства.

Лемма 1.2.3. *Пусть G – конечная p-группа такая, что $|G : Z(G)| \leq p^2$. Тогда $\log_p |G'| \leq 1$.*

1.3 Доказательство теоремы 1.1.2

Предположим противное: пусть собственные подгруппы H_1 и H_2 покрывают все элементы ширины не менее n группы G. Докажем, что тогда $|G'| \leq p^{n(n-1)/2}$. Ведем индукцию по $|G|$. Можно считать, что $|G : H| = p$ (так как каждая собственная подгруппа содержится в подгруппе индекса p) и $H_1 \neq H_2$ (так как в каждой не циклической p-группе имеется не менее двух различных максимальных собственных подгрупп).

Рассмотрим произвольную подгруппу C индекса p в G такую, что

$$C \cap H_1 = C \cap H_2 = H_1 \cap H_2.$$

Заметим, что множество

$$\{c \in C | b_C(c) = b(c)\}$$

содержится в подгруппе

$$Y = \{c \in C | [c, g] \in C', \forall g \in G\}.$$

Воспользовались тем, что для произвольных элементов $c \in C$ с $b_C(c) = b(c)$ и $g \in G$ найдется элемент $c' \in C$ такой, что $[c, g] = [c, c']$.

Рассмотрим случай $Y = C$. В этом случае группа C/C' является центральной подгруппой группы G/C' индекса p. Поэтому G/C' – абелева и $G' = C'$.

Дальнейшее следует из предположения индукции: группа C имеет меньший порядок и все её элементы ширины не менее n содержатся в подгруппе $C \cap H_1 = C \cap H_2$ (так как $b_C(c) \leq b(c)$).

Теперь рассмотрим случай $Y \neq C$.

Заметим, что множество

$$\{c \in C | b_C(c) \geq n-1\}$$

содержится в $(C \cap H_1) \cup Y$ (так как $b_C(c) < b(c)$ при $c \notin Y$). Применяя предположение индукции к группе C и ее собственным подгруппам $C \cap H_1$ и Y, приходим к выводу, что

$$\log_p |C'| \leq \frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

Рассмотрим произвольный элемент g, не лежащий в $H_1 \cap H_2 \cap C$ (такой элемент существует по лемме 1.2.1). Ширина элемента g меньше чем n (так как $g \notin H_1 \cap H_2$), поэтому по лемме 1.2.2 получаем, что

$$\log_p |G'| \leq b(g) + \log_p |C'| \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

1.4 Доказательство теоремы 1.1.3

Теорема 1.4.1. *Пусть G – конечная p-группа. Предположим, что для некоторых целых чисел $n \leq k+1$ выполнено*

1. *множество всех элементов ширины не менее n покрывается двумя собственными подгруппами группы G;*

2. *множество элементов ширины не более чем k порождает группу G.*

Тогда $\log_p |G'| \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + k$.

Доказательство. Ведем индукцию по $|G|$. Пусть собственные подгруппы H_1, H_2 покрывают все элементы группы G ширины не менее n. Можно считать, что $|G : H_i| = p$ (так как каждая собственная подгруппа конечной p-группы содержится в некоторой подгруппе индекса p) и $H_1 \neq H_2$ (так как в каждой не циклической p-группе существует по крайне мере две различные максимальные подгруппы).

Рассмотрим произвольную подгруппу C группы G индекса p такую, что

$$C \cap H_1 = C \cap H_2 = H_1 \cap H_2.$$

Заметим, что множество

$$\{c \in C | b_C(c) = b(c)\}$$

содержится в подгруппе

$$Y = \{c \in C | [c, g] \in C', \forall g \in G\}.$$

Это следует из того, что при $b_C(c) = b(c)$ имеем, что для каждого $g \in G$ существует $c' \in C$ такой, что $[c, g] = [c, c']$. Поэтому приходим к выводу, что множество

$$\{c \in C | b_C(c) \geq n - 1\}$$

содержится в $(C \cap H_1) \cup Y$ (так как $b_C(c) \leq b(c)$ при $c \notin Y$).

Рассмотрим случай $Y = C$. В этом случае центральная подгруппа C/C' имеет простой индекс в G/C', откуда G/C' – абелева и $G' = C'$. Окончание доказательства следует из предположения индукции: группа C имеет меньший порядок и все её элементы ширины не менее n содержатся в подгруппе $C \cap H_1 = H_1 \cap H_2$ (так как $b_C(c) \leq b(c)$), более того множество $C \setminus H_1$ содержится в множестве

$$\{c \in C | b_C(c) \leq k\}$$

(так как $b_C(c) \leq b(c) \leq n - 1 \leq k$ для $c \in C \setminus H_1$), а значит C порождается элементами ширины не более k в подгруппе C.

Можем считать, что Y является собственной подгруппой в C.

Рассмотрим случай $|C : Y| = p$. Пусть $\pi : G \to G/C'$ – гомоморфизм факторизации. Ясно, что $\pi(Y)$ является центральной подгруппой для $\pi(G)$ такой, что $|\pi(G) : \pi(Y)| \leq p^2$. Применим лемму 1.2.3 к $\pi(G)$. Получаем, что $\log_p |\pi(G)'| \leq 1$ и $\log_p |G'| \leq \log_p |C'| + 1$. Применим предположение индукции к группе C и ее собственным подгруппам $H_1 \cap H_2$, Y. Получаем, что

$$\log_p |C'| \leq \frac{(n-3)(n-2)}{2} + n - 1$$

(каждый элемент из множества $C\setminus H_1$ порождающего C имеет ширину не более $n-1$ в C и для каждого элемента g из $C\setminus(H_1\cup Y)$ имеем $b_C(g)\le n-2$). Поэтому при $k\ge 2$ имеем

$$\log_p|G'|\le\log_p|C'|+1\le\frac{(n-3)(n-2)}{2}+n=$$

$$=\frac{(n-2)(n-1)}{2}+2\le\frac{(n-2)(n-1)}{2}+k$$

и переход индукции доказан. В случае $k\le 1$ получаем, что $n=2$ (случай $n\le 1$ тривиален) и множество $C\setminus(H_1\cup Y)$ содержится в центре группы C ($b_C(g)\le b(g)-1\le 0$, для $g\in C\setminus(H_1\cup Y)$). Множество $C\setminus(H_1\cup Y)$ порождает центральную подгруппу группы C индекса не более p, откуда C абелева. Из условий теоремы существует элемент $g\notin C$ такой, что $b(g)\le k\le 1$. Поэтому $C_G(g)$ имеет индекс не более чем p в G, а значит, $C_G(g)\cap C$ имеет индекс не более p^2 в G и является центральной в G. Применим лемму 1.2.3 к группе G. Получаем, что

$$\log_p|G'|\le 1\le\frac{(n-1)(n-2)}{2}+k.$$

Наконец, можем считать, что $|C:Y|\ge p^2$. А значит, множество $C\setminus(H_1\cup Y)$ порождает C, так как иначе, если оно порождает собственную подгруппу H группы C, тогда $C=(H_1\cap C)\cup Y\cup H$ и из леммы 1.2.1 приходим к выводу, что $|C:Y|\le 2$, что противоречит условию $|C:Y|\ge p^2$. Из того, что множество $C\setminus(H_1\cup Y)$ содержится в

$$\{g\in C|b_C(g)\le n-2\}.$$

Получаем, что C порождается элементами ширины не более $n-2$.

По предположению индукции для C и двух её подгрупп $C\cap H_1$, Y имеем

$$\log_p|C'|\le\frac{(n-3)(n-2)}{2}+n-2=\frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

Из условий теоремы существует элемент $a\notin C$ такой, что $b(a)\le k$.

По лемме 1.2.2 для C и элемента a имеем

$$\log_p|G'|\le b(a)+\log_p|C'|\le\frac{(n-2)(n-1)}{2}+k.$$

$\square$

Докажем теорему 1.1.3.

Предположим противное. Пусть собственные подгруппы H_1 и H_2 покрывают все элементы ширины не менее n и $|G : H_2| \geq 4$.

Докажем, что тогда $|G'| \leq 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Множество $G \setminus (H_1 \cup H_2)$ порождает G, так как, в противном случае, если оно порождает собственную подгруппу H в G, тогда $G = H_1 \cup H_2 \cup H$ и из леммы 1.2.1 приходим к выводу, что $|G : H_2| \leq 2$, что противоречит условию $|G : H_2| \geq 4$. Заметим, что элементы из $G \setminus (H_1 \cup H_2)$ имеют ширину не более чем $n-1$ в G. Поэтому, по теореме 1.4.1 для G, H_1, H_2 и $k = n-1$ получаем, что

$$\log_2 |G'| \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Теорема 1.1.3 доказана.

Замечание 1.4.1. Теорема 1.1.2 также является следствием теоремы 1.4.1.

Глава 2

Гипотеза Уайголда для нильпотентных алгебр Ли

2.1 Введение

В этой главе докажем аналог гипотезы Дж. Уайголда [8, Вопрос 4.69] для нильпотентных алгебр Ли.

Гипотеза 2.1.1 (Гипотеза Уайголда)**.** *Пусть G – конечная p -группа и пусть $|G'| > p^{n(n-1)/2}$ для некоторого неотрицательного целого n. Тогда G порождается элементами ширины не меньше n. Ширина $b(x)$ элемента x определяется равенством $|G : C_G(x)| = p^{b(x)}$, где $C_G(x)$ – централизатор элемента x в G.*

Обзор этой гипотезы можно найти в [3]. В [2] М.Р.Вон-Ли доказал, что для каждой конечной p-группы G ширины $b = \max_{g\in G} b(g)$, выполнено $|G'| \leq p^{b(b-1)/2}$. Также было показано, что для каждой нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ширины $b = \max_{g\in\mathfrak{g}} b(g)$, выполнено $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \leq b(b+1)/2$.

Гипотеза 2.1.1 была доказана автором в главе 1 настоящей диссертации.

В настоящей главе доказываем аналог Гипотезы 2.1.1 для нильпотентных алгебр Ли.

Определение 2.1.1. Шириной $b(x)$ элемента x алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{F}$ называется число, удовлетворяющее уравнению

$$\dim \mathfrak{g} - \dim C_{\mathfrak{g}}(x) = b(x),$$

где $C_{\mathfrak{g}}(x)$ является централизатором элемента x в $\mathfrak{g}$.

В этой главе докажем следующую гипотезу.

Гипотеза 2.1.2 (Гипотеза Уайголда для нильпотентных алгебр Ли)**.** *Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли над полем $\mathbb{F}$ и пусть размерность её коммутанта больше $n(n-1)/2$ для некоторого неотрицательного целого n. Тогда $\mathfrak{g}$ порождается элементами ширины не меньше n.*

В этой главе докажем Гипотезу 2.1.2, а также следующие две более общие теоремы:

Теорема 2.1.1. *Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли над бесконечным полем $\mathbb{F}$ и пусть размерность её коммутанта больше $n(n-1)/2$ для некоторого неотрицательного целого n. Тогда её множество элементов ширины не менее чем n не может быть покрыто конечным числом собственных подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

Теорема 2.1.2. *Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли над конечным полем $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}_2$ и пусть размерность её коммутанта больше $n(n-1)/2$ для некоторого неотрицательного целого n. Тогда её множество элементов ширины не менее чем n не покрывается $|\mathbb{F}| - 1$ собственными подалгебрами алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

В частном случае $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ верен следующий более общий факт:

Теорема 2.1.3. *Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли над полем $\mathbb{F}_2$ и пусть размерность её коммутанта больше $n(n-1)/2$ для некоторого неотрицательного целого n. Тогда её множество элементов ширины не менее чем n не может быть покрыто двумя собственными подалгебрами алгебры Ли $\mathfrak{g}$, одна из которых имеет коразмерность не менее 2 в $\mathfrak{g}$.*

2.2 Формулировки и доказательства основных лемм

Определение 2.2.1. Шириной $b_{\mathfrak{h}}(x)$ элемента x конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно её собственной подалгебры $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ называется число удовлетворяющее равенству

$$\dim \mathfrak{h} - \dim C_{\mathfrak{h}}(x) = b_{\mathfrak{h}}(x),$$

где
$$C_{\mathfrak{h}}(x) = \{h \in \mathfrak{h} | [x, h] = 0\}$$
является централизатором x в $\mathfrak{h}$.

Из этого определения следует, что $b(x) = b_{\mathfrak{g}}(x)$.

Следующие две леммы являются хорошо известными в теории алгебр Ли, поэтому приводим их без доказательств.

Лемма 2.2.1. *Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли над конечным полем $\mathbb{F}$. Тогда $\mathfrak{g}$ не может быть покрыта $|\mathbb{F}|$ собственными подалгебрами. Более того, в случае если $\mathfrak{g}$ покрыта $|\mathbb{F}| + 1$ собственными подалгебрами $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$, ..., $\mathfrak{h}_{|\mathbb{F}|+1}$, тогда каждая их этих подалгебр $\mathfrak{h}_i$ имеет коразмерность 1 в $\mathfrak{g}$.*

Лемма 2.2.2. *Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентна алгебра Ли над полем $\mathbb{F}$ такая, что в ней существует центральная подалгебра $\mathfrak{f}$ коразмерности 2. Тогда $\dim \mathfrak{g}' \leq 1$.*

Лемма 2.2.3. *Рассмотрим идеал $\mathfrak{h}$ конечномерной нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Обозначим за $\mathfrak{f}$ идеал, лежащий в $\mathfrak{g}$, порожденный элементами $g \in \mathfrak{h}$ такими, что $b_{\mathfrak{h}}(g) = b(g)$. Тогда*

1. *В случае $\mathfrak{f} = \mathfrak{h}$, имеем $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h}'$;*

2. *В случае, когда $\mathfrak{f}$ имеет коразмерность не более чем 1 в $\mathfrak{h}$, коммутант $\mathfrak{h}'$ также имеет коразмерность не более чем 1 в $\mathfrak{g}'$.*

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм факторизации $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$. Для каждого элемента g, лежащего в $\mathfrak{h}$ такого, что $b_{\mathfrak{h}}(g) = b(g)$ имеем
$$\{[g, g'] | g' \in \mathfrak{g}\} = \{[g, h] | h \in \mathfrak{h}\} \subseteq \mathfrak{h}',$$
поэтому $\pi(g)$ содержится в центре $\pi(\mathfrak{g})$ и $\pi(\mathfrak{f})$ является центральной подалгеброй Ли в $\pi(\mathfrak{g})$.

В случае $\mathfrak{f} = \mathfrak{h}$, имеем $\pi(\mathfrak{f}) = \pi(\mathfrak{h})$ является центральной подалгеброй Ли в $\pi(\mathfrak{g})$ коразмерности 1, поэтому $\pi(\mathfrak{g})$ – абелева и $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h}'$.

В случае, когда $\mathfrak{f}$ имеет коразмерность не более чем 1 в $\mathfrak{h}$, имеем $\pi(\mathfrak{f})$ является центральной подалгеброй Ли в $\pi(\mathfrak{g})$ коразмерности не более 2, поэтому по лемме 2.2.2 получаем, что $\dim \mathfrak{g}' \leq 1$ и $\mathfrak{h}'$ имеет коразмерность не более чем 1 в $\mathfrak{g}'$.

□

Лемма 2.2.4. *Пусть $\mathfrak{g}$ является конечномерной алгеброй Ли, тогда для каждого её идеала $\mathfrak{h}$ коразмерности 1 и для каждого элемента x, лежащего в множестве $\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$, имеем $\dim \mathfrak{g}' \leq b(x) + \dim \mathfrak{h}'$.*

Доказательство. Множество $V = \{[x, h] | h \in \mathfrak{h}\}$ образует векторное пространство размерности не более чем $b(x)$. Поэтому достаточно доказать, что $\mathfrak{g}' = V + \mathfrak{h}'$. Это следует из следующих свойств множества $V + \mathfrak{h}'$:

1. $V + \mathfrak{h}'$ является векторным пространством;

2. $V + \mathfrak{h}'$ – идеал в $\mathfrak{g}$: $[[x, h], g] + \mathfrak{h}' = \overbrace{[x, \underbrace{[h, g]}_{\in \mathfrak{h}}]}^{\in V} + \overbrace{[h, \underbrace{[x, g]}_{\in \mathfrak{h}}]}^{\in \mathfrak{h}'} + \mathfrak{h}'$;

3. Алгебра Ли $\mathfrak{g}/(V + \mathfrak{h}')$ абелева.

□

2.3 Доказательство теоремы 2.1.1

Доказательство от противного. Пусть собственные подалгебры $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$, ..., $\mathfrak{h}_k$ покрывают все элементы ширины не менее чем n. Докажем в этом случае, что $\dim \mathfrak{g}' \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Рассмотрев достаточно большую конечномерную подалгебру Ли $\mathfrak{g}$, можем считать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является конечномерной. Ведем индукцию по размерности $\mathfrak{g}$. Можем считать, что $\mathfrak{h}_i$ являются максимальными идеалами коразмерности 1 в $\mathfrak{g}$ (так как каждая собственная подалгебра Ли конечномерной и нильпотентной алгебры Ли содержится в некотором идеале коразмерности 1).

Рассмотрим произвольный идеал $I \neq \mathfrak{h}_i$ коразмерности 1 в $\mathfrak{g}$. Обозначим за J идеал в $\mathfrak{g}$ порожденный элементами g, лежащими в I такими, что $b_I(g) = b(g)$.

Рассмотрим случай $J = I$. Применяя лемму 2.2.3 получаем, что $I' = \mathfrak{g}'$. Окончание доказательства следует из предположения индукции: алгебра Ли I имеет меньшую размерность и все её элементы ширины не меньше n содержатся в объединении собственных подалгебр Ли $I \cap \mathfrak{h}_i$ (мы пользуемся тем, что $b_I(x) \leq b(x)$).

Рассмотрим оставшийся случай $I \neq J$. Заметим, что множество $I \setminus (J \cup_i \mathfrak{h}_i)$ состоит из элементов ширины не более чем $n - 2$ (потому, что J порожден элементами $\{g \in I | b_I(g) = b(g)\}$ и $b_I(x) \leq b(x)$).

Таким образом, по предположению индукции применённому к алгебре Ли I и и её $k+1$ собственным подалгебрам J, $I \cap \mathfrak{h}_1$, $I \cap \mathfrak{h}_2$, …, $I \cap \mathfrak{h}_k$ приходим к выводу, что $\dim I' \leq (n-1)(n-2)/2$. Наконец, рассмотрим произвольный элемент a, не лежащий в $I \cup_i \mathfrak{h}_i$, его ширина не превосходит $n-1$, поэтому по лемме 2.2.4 получаем, что

$$\dim \mathfrak{g}' \leq b(a) + \dim I' \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

□

2.4 Доказательство теоремы 2.1.2

Доказательство от противного. Пусть собственные подалгебры $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_{|\mathbb{F}|-1}$ покрывают все элементы ширины не менее чем n. Докажем в этом случае, что $\dim \mathfrak{g}' \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Рассмотрев достаточно большую конечномерную подалгебру $\mathfrak{g}$, можем считать, что $\mathfrak{g}$ является конечномерной. Доказательство по индукции по размерности $\mathfrak{g}$. Можем считать, что $\mathfrak{h}_i$ являются максимальными идеалами коразмерности 1 в $\mathfrak{g}$ (так как каждая собственная подалгебра Ли конечномерной и нильпотентной алгебры Ли содержится в некотором идеале коразмерности 1) и $\mathfrak{h}_1 \neq \mathfrak{h}_2$ (так как в каждой неабелевой конечномерной и нильпотентной алгебре Ли $\mathfrak{g}$, найдутся по крайне мере два различных максимальных идеала).

Рассмотрим произвольный идеал $I \neq \mathfrak{h}_i$ коразмерности 1 в $\mathfrak{g}$ такой, что $I \cap \mathfrak{h}_1 = I \cap \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$. Обозначим за J идеал в $\mathfrak{g}$ порожденный элементами g, лежащими в I такими, что $b_I(g) = b(g)$.

Рассмотрим случай $J = I$. Применяя лемму 2.2.3 получим, что $I' = \mathfrak{g}'$. Окончание доказательства следует из предположения индукции: алгебра Ли I имеет меньшую размерность и все её элементы ширины не меньше n содержатся в объединении собственных подалгебр $I \cap \mathfrak{h}_i$ (так как $b_I(x) \leq b(x)$). Можем считать, что $I \neq J$. Заметим, что множество $I \setminus (J \cup_i \mathfrak{h}_i)$ состоит из элементов ширины не более чем $n-2$ (J порожден элементами $\{g \in I | b_I(g) = b(g)\}$ и $b_I(x) \leq b(x)$).

Таким образом, по предположению индукции применённому к алгебре Ли I и её $|\mathbb{F}|-1$ собственным подалгебрам J, $I \cap \mathfrak{h}_1 = I \cap \mathfrak{h}_2$, $I \cap \mathfrak{h}_3$ …, $I \cap \mathfrak{h}_{|\mathbb{F}|-1}$

приходим к выводу, что $\dim I' \le (n-1)(n-2)/2$.

Наконец, рассмотрим произвольный элемент a, не лежащий в $I \cup_i \mathfrak{h}_i$ (такой элемент существует по лемме 2.2.1), его ширина не превосходит $n-1$, поэтому по лемме 2.2.4 получаем, что

$$\dim \mathfrak{g}' \le b(a) + \dim I' \le \frac{n(n-1)}{2}.$$

□

2.5 Доказательство теоремы 2.1.3

Теорема 2.5.1. *Пусть $\mathfrak{g}$ нильпотентная алгебра Ли над конечным полем $\mathbb{F}$, для которой выполнены следующие два условия для некоторых целых неотрицательных чисел $n \le k+1$*

1. *Множество всех элементов ширины не менее n покрываются $|\mathbb{F}|$ собственными подалгебрами алгебры Ли $\mathfrak{g}$;*
2. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается множеством элементов ширины не более чем k.*

Тогда $\dim \mathfrak{g}' \le \frac{(n-1)(n-2)}{2} + k$.

Доказательство. Рассмотрев достаточно большую конечномерную подалгебру $\mathfrak{g}$, можем считать, что $\mathfrak{g}$ является конечномерной. Доказательство по индукции по размерности $\mathfrak{g}$. Предположим, что собственные подалгебры $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_{|\mathbb{F}|}$ покрывают все элементы ширины хотя бы n. Можем считать, что $\mathfrak{h}_i$ являются максимальными идеалами коразмерности 1 в $\mathfrak{g}$ (так как каждая собственная подалгебра Ли конечномерной и нильпотентной алгебры Ли содержится в некотором идеале коразмерности 1) и $\mathfrak{h}_1 \ne \mathfrak{h}_2$ (так как в каждой неабелевой конечномерной и нильпотентной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ найдутся по крайне мере два различных максимальных идеала).

Рассмотрим произвольный идеал $I \ne \mathfrak{h}_i$ коразмерности 1 в $\mathfrak{g}$ такой, что $I \cap \mathfrak{h}_1 = I \cap \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$. Обозначим за J идеал в $\mathfrak{g}$ порожденный элементами g, лежащими в I такими, что $b_I(g) = b(g)$.

Рассмотрим случай $J = I$.

Применяя лемму 2.2.3 получим, что $I' = \mathfrak{g}'$. Окончание доказательства следует из предположения индукции: алгебра Ли I и все её элементы ширины не меньше n содержатся в объединении собственных подалгебр $I \cap \mathfrak{h}_i$ (так как $b_I(x) \leq b(x)$), также множество $I \setminus \cup_{i\geq 2}\mathfrak{h}_i$ порождает I (по лемме 2.2.1) и содержит элементы, ширина которых не превосходит $n-1 \leq k$.

Таким образом, можем считать, что J является собственным идеалом алгебры Ли I.

Рассмотрим случай, когда коразмерность идеала J в I равна 1.

Применяя лемму 2.2.3 к алгебре Ли I приходим к выводу, что $\dim \mathfrak{g}' \leq \dim I' + 1$.

Применяя предположение индукции к алгебре Ли I и её собственным подалгебрам J, $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}_3$, ..., $\mathfrak{h}_{|\mathbb{F}|}$ получаем, что

$$\dim I' \leq \frac{(n-3)(n-2)}{2} + n - 1$$

(каждый элемент, лежащий в множестве

$$I \setminus \big((\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2) \cup \mathfrak{h}_3 \cup \ldots \cup \mathfrak{h}_{|\mathbb{F}|}\big)$$

имеет ширину не превосходящую $n-1$ в I и последнее множество порождает I (по лемме 2.2.1), также для каждого элемента g, лежащего в множестве

$$I \setminus \big(J \cup (\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2) \cup \mathfrak{h}_3 \cup \ldots \cup \mathfrak{h}_{|\mathbb{F}|}\big)\,,$$

имеем $b_I(g) \leq n-2$). Поэтому, в случае $k \geq 2$ имеем

$$\dim \mathfrak{g}' \leq \dim I' + 1 \leq \frac{(n-3)(n-2)}{2} + n =$$

$$= \frac{(n-2)(n-1)}{2} + 2 \leq \frac{(n-2)(n-1)}{2} + k$$

и переход индукции доказан. В случае $k \leq 1$, имеем $n = 2$ (случай $n \leq 1$ тривиален) и множество

$$I \setminus \big(J \cup (\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2) \cup \mathfrak{h}_3 \cup \ldots \cup \mathfrak{h}_{|\mathbb{F}|}\big)$$

содержится в центре алгебры Ли I. По лемме 2.2.1 множество

$$I \setminus \big(J \cup (\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2) \cup \mathfrak{h}_3 \cup \ldots \cup \mathfrak{h}_{|\mathbb{F}|}\big)$$

порождает центральную подалгебру Ли коразмерности не более чем 1 в I, таким образом I – абелева. По условию теоремы 2.5.1, существует элемент $g \notin I$ такой, что $b(g) \leq k \leq 1$.

Таким образом, алгебра Ли $C_{\mathfrak{g}}(g)$ имеет коразмерность не более чем 1 в $\mathfrak{g}$. Также, подалгебра $C_{\mathfrak{g}}(g) \cap I$ имеет коразмерность не более чем 2 в $\mathfrak{g}$ и является центральной в $\mathfrak{g}$. Применяя лемму 2.2.2 к алгебре Ли $\mathfrak{g}$ получаем, что

$$\dim \mathfrak{g}' \leq 1 \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + k.$$

В итоге, можем считать, что J имеет коразмерность не менее чем 2 в I. Таким образом, множество

$$I \setminus \big(J \cup (\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2) \cup \mathfrak{h}_3 \cup \ldots \cup \mathfrak{h}_{|\mathbb{F}|}\big)$$

порождает I (по лемме 2.2.1), а значит I порождается элементами ширины не более чем $n-2$ в I. В таком случае, возможно применить предположение индукции к алгебре Ли I и её собственным подалгебрам J, $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}_3$, …, $\mathfrak{h}_{|\mathbb{F}|}$ и получить, что

$$\dim I' \leq \frac{(n-3)(n-2)}{2} + n - 2 = \frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

Наконец, по условию теоремы 2.5.1 найдётся элемент $a \notin I$ такой, что $b(a) \leq k$. Применяя лемму 2.2.4 к максимальному идеалу I и элементу a получаем, что

$$\dim \mathfrak{g}' \leq b(a) + \dim I' \leq \frac{(n-2)(n-1)}{2} + k.$$

□

Докажем теорему 2.1.3.

Предположим противное. Пусть две собственные подалгебры $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ покрывают все элементы ширины хотя бы n и пусть $\mathfrak{h}_2$ имеет коразмерность не менее

2 в $\mathfrak{g}$. По лемме 2.2.1 множество $\mathfrak{g} \setminus (\mathfrak{h}_1 \cup \mathfrak{h}_2)$ порождает $\mathfrak{g}$. Все элементы из $\mathfrak{g} \setminus (\mathfrak{h}_1 \cup \mathfrak{h}_2)$ имеют ширину не более чем $n-1$ в $\mathfrak{g}$, поэтому можем применить теорему 2.5.1 к $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$, $k = n-1$ и получить, что

$$\dim \mathfrak{g}' \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Противоречие. $\square$

Замечание 2.5.1. На самом деле, теорема 2.1.2 также следует из теоремы 2.5.1.

Глава 3

Усиленная гипотеза Уайголда в теории нильпотентных алгебр Ли

3.1 Введение

Определение 3.1.1. Шириной $b(x)$ элемента x, лежащего в конечной p-группе G, называется число удовлетворяющее равенству

$$p^{b(x)} = |G : C_G(x)|,$$

где $C_G(x)$ – централизатор элемента x в G.

В статье [1] Дж. Уайголд предположил, что для каждой конечной p-группы G ширины $b = \max_{g \in G} b(G)$ имеет место оценка на коммутант

$$|G'| \leq p^{b(b-1)/2}.$$

Частичные результаты в направлении решения гипотезы Уайголда были получены Дж. Уайголдом [1], [2], [3], И. М. Брайдом [3], М. Р. Воном-Ли [3], [6].

В 1974 г. М. Р. Вон-Ли получил окончательное доказательство этой гипотезы (см. [7]). Более того, Вон-Ли доказал, что равенство досигается только в случаях, когда G имеет класс 2 или $b(G) = 2$ и G – группа класса 3.

В том же 1974 году в «Коуровской тетради» [8, Вопрос 4.69] Дж. Уайголдом было предложено более сильное утверждение

Гипотеза 3.1.1. *Пусть G – конечная p-группа и пусть $|G'| > p^{n(n-1)/2}$ для некоторого неотрицательного целого n. Тогда G порождается элементами ширины не меньше n.*

Гипотеза 3.1.1 была доказана автором диссертации в главе 1. В настоящей главе, автором будет доказан следующий аналог гипотезы 3.1.1 для нильпотентных алгебр Ли

Определение 3.1.2. Шириной $b(x)$ элемента x, лежащего в нильпотентной алгебре Ли $\mathcal{A}$, называется число удовлетворяющее равенству

$$b(x) = \dim(\mathcal{A}/C_{\mathcal{A}}(x)),$$

где $C_{\mathcal{A}}(x)$ – централизатор элемента x в $\mathcal{A}$.

Теорема 3.1.1. *Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли, для которой известно, что $\dim \mathfrak{g}' > n(n-1)/2$ для некоторого неотрицательного n. Тогда $\mathfrak{g}$ порождается элементами ширины не меньше n.*

Кроме того, в настоящей главе автором диссертации будет доказана следующая теорема

Теорема 3.1.2. *Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли над полем $\mathbb{F}$ и пусть размерность её коммутанта строго больше $n(n-1)/2$ для некоторого неотрицательного целого n. Тогда множество элементов ширины не менее чем n в $\mathfrak{g}$ не покрывается*

1. *$|\mathbb{F}|-1$ собственными подалгебрами алгебры Ли $\mathfrak{g}$ при $|\mathbb{F}| < \infty$*

2. *конечным числом собственных подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{g}$ при $|\mathbb{F}| = \infty$.*

Далее в работе усилим утверждение теоремы 3.1.2 в случае бесконечного поля $\mathbb{F}$.

3.2 Используемые определения и обозначения

Определение 3.2.1. Для двух произвольных целых чисел $a \leq b$ обозначим за $[a, b]$ множество целых чисел c таких, что $a \leq c \leq b$.

Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – некоторая её подалгебра Ли.

Определение 3.2.2. В случае, если $\mathfrak{h}$ является идеалом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ коразмерности 1, алгебру Ли $\mathfrak{h}$ будем называть *максимальной идеальной подалгеброй Ли* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Определение 3.2.3. Шириной $b_{\mathfrak{h}}(x)$ элемента x алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$ называется число удовлетворяющее равенству

$$b_{\mathfrak{h}}(x) = \dim(\mathfrak{h}) - \dim(C_{\mathfrak{h}}(x)),$$

где $C_{\mathfrak{h}}(x) = \{h \in \mathfrak{h} | [x, h] = 0\}$ является централизатором x в $\mathfrak{h}$.

3.3 Итерированные конструкции, связанные с конечномерной нильпотентной алгеброй Ли

Рассмотрим некоторую конечномерную нильпотентную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ над бесконечным полем $\mathbb{F}$ и произвольную последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_{\dim \mathfrak{g} - 1}$. Обозначим $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\varnothing := \mathfrak{g}$ и пусть $a = a_\varnothing$ – произвольный элемент, лежащий в $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$. Для каждого набора индексов

$$i_0 = \varnothing, i_1 \in [1, n_1], \ldots, i_k \in [1, n_k],$$

$k \in [0, \dim \mathfrak{g} - 1]$ определим подалгебры Ли $\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k} \subseteq \mathfrak{g}$ и элементы

$$a_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k} \setminus (\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k})'$$

индуктивно по k.

Пусть для некоторого $k \in [0, \dim \mathfrak{g} - 2]$ уже построены подалгебры Ли

$\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_t} \subseteq \mathfrak{g}$ и элементы $a_{i_1,\ldots,i_t}$, где

$$i_0 = \varnothing, i_1 \in [1, n_1], \ldots, i_t \in [1, a_t], t \in [0, k].$$

Для каждой алгебры Ли $\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k}$ рассмотрим произвольное множество попарно различных максимальных идеальных подалгебр Ли

$$\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k,1}, \mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k,2}, \ldots, \mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k,n_{k+1}}$$

алгебры Ли $\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k}$, не содержащих элемент $a_{i_1,\ldots,i_k}$ (такие алгебры Ли всегда найдутся так как $|\mathbb{F}| = \infty$ и $a_{i_1,\ldots,i_k} \notin (\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k})'$). В качестве элемента $a_{i_1,\ldots,i_{k+1}}$ рассмотрим произвольный элемент, содержащийся в

$$\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_{k+1}} \setminus (\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_{k+1}})', i_1 \in [1, n_1], \ldots, i_{k+1} \in [1, n_{k+1}].$$

Продолжая данное построение по индукции, получаем семейство подалгебр Ли $\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k} \subseteq \mathfrak{g}$ и элементов $a_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k}$, где

$$i_0 = \varnothing, i_1 \in [1, n_1], \ldots, i_k \in [1, n_k], k \in [0, \dim \mathfrak{g} - 1].$$

Определение 3.3.1. Семейство подалгебр Ли

$$\{\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k} \subseteq \mathfrak{g} \mid i_0 = \varnothing, i_1 \in [1, n_1], \ldots, i_k \in [1, n_k], k \in [0, \dim \mathfrak{g} - 1]\},$$

а также множество элементов

$$\{a_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k} \mid i_0 = \varnothing, i_1 \in [1, n_1], \ldots, i_k \in [1, n_k], k \in [0, \dim \mathfrak{g} - 1]\},$$

построенные описанным выше способом, будем называть итерированной конструкцией подалгебр Ли и элементов нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ типа $(n_1, n_2, \ldots, n_{\dim \mathfrak{g} - 1})$.

Замечание 3.3.1. Из определения 3.3.1 следует, что для каждой конечномерной нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над бесконечным полем и произвольного набора натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_{\dim \mathfrak{g}-1}$ итерированная конструкция подалгебр Ли и элементов типа $(n_1, n_2, \ldots, n_{\dim \mathfrak{g}-1})$ не является однозначно определенной, и существует множество таких конструкций.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема

Теорема 3.3.1. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *– конечномерная нильпотентная алгебра Ли над бесконечным полем* $\mathbb{F}$. *Предположим, что для некоторого натурального числа* n *нашлась итерированная конструкция подалгебр Ли* $\{A_{i_1,\ldots,i_k} \subseteq \mathfrak{g}\}$ *и элементов* $\{a_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k}\}$ *алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *имеющая тип* $(n_1, n_2, \ldots, n_{\dim \mathfrak{g}-1})$*, где* $n_i \geq \min(i, n)$. *Пусть также выполнено* $b_{\mathfrak{g}}(a_{i_1,\ldots,i_k}) \leq n$ *для каждого из элементов* $a_{i_1,\ldots,i_k}$. *Тогда* $\dim \mathfrak{g}' \leq n(n+1)/2$.

3.4 Используемые леммы

Лемма 3.4.1. *Рассмотрим произвольную максимальную идеальную подалгебру Ли* $\mathfrak{h}$ *конечномерной нильпотентной алгебры Ли* $\mathfrak{g}$. *Обозначим за* $\mathfrak{f}$ *идеал алгебры Ли* $\mathfrak{g}$*, порожденный элементами* $x \in \mathfrak{h}$ *такими, что* $b_{\mathfrak{h}}(x) = b(x)$. *Тогда в случае* $\mathfrak{f} = \mathfrak{h}$*, имеем* $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h}'$.

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм факторизации $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$. Для каждого элемента x, лежащего в $\mathfrak{h}$ такого, что $b_{\mathfrak{h}}(x) = b(x)$ имеем

$$\{[x, y] | y \in \mathfrak{g}\} = \{[x, z] | z \in \mathfrak{h}\} \subseteq \mathfrak{h}'.$$

Поэтому $\pi(x)$ содержится в центре $\pi(\mathfrak{g})$ и $\pi(\mathfrak{f})$ является центральной подалгеброй Ли в $\pi(\mathfrak{g})$. В случае $\mathfrak{f} = \mathfrak{h}$, имеем $\pi(\mathfrak{f}) = \pi(\mathfrak{h})$ является центральной подалгеброй Ли в $\pi(\mathfrak{g})$ коразмерности 1, поэтому $\pi(\mathfrak{g})$ – абелева и $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h}'$.

□

Лемма 3.4.2. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *является конечномерной нильпотентной алгеброй Ли, тогда для каждого её идеала* $\mathfrak{h}$ *коразмерности* 1 *и для каждого элемента* x*, лежащего в множестве* $\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$*, имеем* $\dim \mathfrak{g}' \leq b(x) + \dim \mathfrak{h}'$.

Доказательство. Множество $V = \{[x, h] | h \in \mathfrak{h}\}$ образует векторное пространство размерности не более чем $b(x)$. Поэтому достаточно доказать, что $\mathfrak{g}' = V + \mathfrak{h}'$. Коммутант $\mathfrak{h}'$ идеала $\mathfrak{h}$ также является идеалом алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Проверим, что $V + \mathfrak{h}'$ – идеал в $\mathfrak{g}$:

$$[[x, h], g] \in \overbrace{[x, \underbrace{[h, g]}_{\in \mathfrak{h}}]}^{\in V} + \overbrace{[h, \underbrace{[x, g]}_{\in \mathfrak{h}}]}^{\in \mathfrak{h}'} + \mathfrak{h}'.$$

Очевидно, что образ элемента x при гомоморфизме $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/(V+\mathfrak{h}')$ коммутирует с собой и идеалом $\pi(\mathfrak{h})$ коразмерности 1 в $\pi(\mathfrak{g})$, а значит, $\pi(x)$ содержится в центре $\pi(\mathfrak{g})$. Также, $\pi(\mathfrak{h})$ является абелевой алгеброй Ли, так как коммутант алгебры Ли $\mathfrak{h}$ лежит в $\ker\pi$. Откуда, $\pi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/(V+\mathfrak{h}')$ абелева и

$$\mathfrak{g}' \subseteq V + \mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}', \quad \mathfrak{g}' = V + \mathfrak{h}'.$$

□

Лемма 3.4.3. *Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная нильпотентная алгебра Ли над бесконечным полем $\mathbb{F}$. Рассмотрим некоторую итерированную конструкцию подалгебр Ли $\{\mathcal{A}_{i_1,\dots,i_k} \subseteq \mathfrak{g}\}$ и элементов $\{a_{i_1,\dots,i_k} \in \mathcal{A}_{i_1,\dots,i_k}\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ типа $(n_1, n_2, \dots, n_{\dim\mathfrak{g}-1})$. Пусть $n = \min_i n_i$, тогда множество элементов $\{a_{i_1,\dots,i_k} \in \mathfrak{g}\}$ не покрывается n собственными векторными подпространствами пространства $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Ведём индукцию по размерности $\dim\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. База индукции при $\dim\mathfrak{g} = 1$ очевидна. Индукционный переход: предположим, что утверждение леммы выполнено при $\dim\mathfrak{g} \le d$, докажем, что оно выполнено и для случая $\dim\mathfrak{g} = d+1$.

Рассмотрим произвольные собственные векторные подпространства $V_1, \dots, V_n \subset \mathfrak{g}$. В случае, если каждая из алгебр Ли $\mathcal{A}_r$ содержится в пространстве V_j для некоторого $j \le n$, из условия $n = \min_i n_i \le n_1$ и из максимальности $\mathcal{A}_r$ в $\mathfrak{g}$ получаем, что $\{V_i\}_{i \le n} = \{\mathcal{A}_r\}_{r \le n_1}$ и элемент $a = a_\varnothing$ не может содержаться в объединении пространств V_i, поскольку не содержится в объединении алгебр Ли $\mathcal{A}_r$.

Таким образом, можно считать, что $\mathcal{A}_l \not\subseteq V_i$ для некоторого $l \le n_1$ и всех $i \le n$.

Рассмотрим итерированную подконструкцию конструкции

$$\{a_{i_1,\dots,i_k} \in \mathcal{A}_{i_1,\dots,i_k} \subseteq \mathfrak{g}\}$$

имеющую тип $(n_2, \dots, n_{\dim\mathfrak{g}-1})$ и состоящую из алгебр Ли

$$\{\mathcal{B}_{i_2,\dots,i_k} := \mathcal{A}_{l,i_2,\dots,i_k} \subseteq \mathcal{A}_l | i_1 = \varnothing, i_2 \in [1, n_2], \dots, i_k \in [1, n_k], k \in [1, \dim\mathfrak{g} - 1]\}$$

и элементов

$$\{b_{i_2,\dots,i_k} := a_{l,i_2,\dots,i_k} \in \mathcal{B}_{i_2,\dots,i_k} | i_1 = \varnothing, i_2 \in [1,n_2], \dots, i_k \in [1,n_k], k \in [1, \dim \mathfrak{g} - 1]\}.$$

Применим предположение индукции к алгебре Ли $\mathcal{A}_l$, меньшей размерности чем $\mathfrak{g}$, её собственным подпространствам $V_i' = V_i \cap \mathcal{A}_l$ и итерированной конструкции $\{b_{i_2,\dots,i_k} \in \mathcal{B}_{i_2,\dots,i_k} \subseteq \mathcal{A}_l\}$ типа $(n_2, \dots, n_{\dim \mathfrak{g}-1})$. Получаем, что $\{b_{i_2,\dots,i_k}\} \not\subset \cup V_i'$, откуда $\{a_{i_1,\dots,i_k}\} \nsubseteq \cup V_i$. Из произвольности множества векторных пространств $V_1, \dots, V_n \subset \mathfrak{g}$, получаем доказательство перехода индукции. □

Лемма 3.4.4. *Пусть $\mathfrak{g}$ является нильпотентной алгеброй Ли, тогда для каждого числа $n \leq \dim \mathfrak{g}'$ существует конечномерная подалгебра Ли $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ такая, что* $\dim \mathfrak{g}' \geq \dim \mathfrak{h}' \geq n$.

Доказательство. По условию $n \leq \dim \mathfrak{g}'$, откуда существуют линейно независимые элементы $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{g}'$. Пусть $A \subseteq \mathfrak{g}$ – конечное подмножество такое, что линейное пространство $\langle [A, A] \rangle$ содержит $a_1, \dots, a_n$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является нильпотентной, откуда получаем, что алгебра Ли $\mathfrak{h}$ порожденная множеством A является конечномерной. По построению получаем, что $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathfrak{h}'$, $\dim \mathfrak{h}' \geq n$.

□

3.5 Доказательство теоремы 3.3.1

Ведём индукцию по размерности $\dim \mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. База индукции: при $\dim \mathfrak{g} = 1$ алгебра Ли $\mathfrak{g}$ – абелева и $n = 0$, $\dim \mathfrak{g}' = 0 \leq n(n+1)/2$. Индукционный переход: предположим, что утверждение теоремы выполнено при $\dim \mathfrak{g} \leq d$ для некоторого натурального d, докажем, что оно также выполнено и для случая $\dim \mathfrak{g} = d + 1$. В случае $\dim \mathcal{A}_1' = \dim \mathfrak{g}'$ утверждение теоремы для $\mathfrak{g}$ следует из предположения индукции, применённого к алгебре Ли $\mathcal{A}_1$ и её итерированной конструкции подалгебр Ли и элементов

$$\{a_{1,j_2,\dots,j_k} \in \mathcal{A}_{1,j_2,\dots,j_k} \subseteq \mathcal{A}_1 | j_1 = \varnothing, j_2 \in [1,n_2], \dots, j_k \in [1,n_k], k \in [1, \dim \mathfrak{g} - 1]\}$$

(воспользовались оценкой $b_{\mathcal{A}_1}(x) \leq b_{\mathfrak{g}}(x)$ для $x \in \mathcal{A}_1$).

Таким образом, можем считать, что $\dim \mathcal{A}_1' < \dim \mathfrak{g}'$. Пусть $\mathfrak{f}$ – идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденный элементами $x \in \mathcal{A}_1$ такими, что $b_{\mathcal{A}_1}(x) = b_{\mathfrak{g}}(x)$. По лемме 3.4.1 получаем, что $\mathfrak{f} \neq \mathcal{A}_1$. Из определения идеала $\mathfrak{f}$ следует, что для каждого элемента $x \in \mathcal{A}_1 \setminus \mathfrak{f}$ выполнена оценка $b_{\mathcal{A}_1}(x) < b_{\mathfrak{g}}(x)$. Из максимальности подалгебр Ли $\mathcal{A}_{1,1}, \ldots, \mathcal{A}_{1,n_2}$ в алгебре Ли $\mathcal{A}_1$ следует, что алгебра Ли $\mathfrak{f} \cap \mathcal{A}_1$, являющаяся собственной подалгеброй Ли алгебры Ли $\mathcal{A}_1$, не может содержать более чем одну из этих подалгебр Ли. Поэтому для определенности можем считать, что каждая из алгебр Ли $\mathcal{A}_{1,1}, \ldots, \mathcal{A}_{1,n_2-1}$ не содержится в $\mathfrak{f} \cap \mathcal{A}_1$, а значит и в $\mathfrak{f}$. Продолжая аналогичное рассуждение для каждой из алгебр Ли $\mathcal{A}_{1,i}$, $i \in [1, n_2 - 1]$, можно считать, что каждая из алгебр Ли

$$\mathcal{A}_{1,i_2,i_3}, i_2 \in [1, n_2 - 1], i_3 \in [1, n_3 - 1]$$

не содержится в $\mathfrak{f}$. Откуда, продолжив рассуждение, можно считать, что каждая из алгебр Ли

$$\mathcal{A}_{1,i_2,\ldots,i_k}, i_2 \in [1, n_2 - 1], \ldots, i_k \in [1, n_k - 1], k \in [2, \dim \mathfrak{g} - 1]$$

не содержится в алгебре Ли $\mathfrak{f}$. Исключив некоторые из алгебр Ли $\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_k}$ и элементов $a_{i_1,\ldots,i_k}$, будем считать, что $n_i = \min(i, n)$.

Рассмотрим произвольную из алгебр Ли

$$\mathcal{A}_{1,l_2,\ldots,l_r}, l_1 = \varnothing, l_2 \in [1, n_2 - 1], \ldots, l_r \in [1, n_r - 1], r \in [1, \dim \mathfrak{g} - 2]$$

и итерированную конструкцию подалгебр Ли и элементов

$$\{a_{1,l_2,\ldots,l_r,i_{r+1},\ldots,i_k} \in \mathcal{A}_{1,l_2,\ldots,l_r,i_{r+1},\ldots,i_k} \subseteq \mathcal{A}_{1,l_2,\ldots,l_r} | i_r = \varnothing,$$

$$i_{r+1} \in [1, n_{r+1}], \ldots, i_k \in [1, n_k], k \in [r, \dim \mathfrak{g} - 1]\}$$

типа $(n_{r+1}, \ldots, n_{\dim \mathfrak{g}-1})$. По лемме 3.4.3 множество элементов

$$L = \{a_{1,l_2,\ldots,l_r,i_{r+1},\ldots,i_k} | i_r = \varnothing,$$

$$i_{r+1} \in [1, n_{r+1}], \ldots, i_k \in [1, n_k], k \in [r, \dim \mathfrak{g} - 1]\}$$

не покрывается n_{r+1} собственными векторными подпространствами пространства $\mathcal{A}_{1,l_2,\dots,l_r}$.

Таким образом, алгебры Ли $\mathfrak{f}\cap\mathcal{A}_{1,l_2,\dots,l_r}, \mathcal{A}_{1,l_2,\dots,l_r,i_{r+1}}$, где $i_{r+1}\in[1,n_{r+1}-1]$ не покрывают множество L и существует элемент

$$a'_{1,l_2,\dots,l_r}\in L\setminus\left(\mathfrak{f}\bigcup_{i_{r+1}\in[1,n_{r+1}-1]}\mathcal{A}_{1,l_2,\dots,l_r,i_{r+1}}\right).$$

Аналогично строим элементы $a'_{1,i_2,\dots,i_r}$ для произвольных чисел

$$i_1=\varnothing, i_2\in[1,n_2-1],\dots,i_r\in[n_r-1], r\in[1,\dim\mathfrak{g}-2].$$

Доопределим элементы

$$a'_{1,i_2,\dots,i_{\dim\mathfrak{g}-1}}:=a_{1,i_2,\dots,i_{\dim\mathfrak{g}-1}}, i_1=\varnothing, i_2\in[1,n_2-1],\dots,i_{\dim\mathfrak{g}-1}\in[1,n_{\dim\mathfrak{g}-1}-1].$$

По построению, элемент $a'_{1,i_2,\dots,i_r}$ содержится в алгебре Ли $\mathcal{A}_{1,i_2,\dots,i_r}$ и не содержится в объединении алгебр Ли

$$\mathcal{A}_{1,i_2,\dots,i_r,1},\dots,\mathcal{A}_{1,i_2,\dots,i_r,2},\dots,\mathcal{A}_{1,i_2,\dots,i_r,n_{r+1}-1}.$$

Таким образом, множество алгебр Ли и элементов

$$\{a'_{1,i_2,\dots,i_r}\in\mathcal{A}_{1,i_2,\dots,i_r}\subseteq\mathcal{A}_1|i_1=\varnothing,$$

$$i_2\in[1,n_2-1],\dots,i_r\in[1,n_r-1], r\in[1,\dim\mathfrak{g}-1]\}$$

подходит под определение 3.3.1 и является итерированной конструкцией алгебр Ли и элементов типа $(n_2-1,\dots,n_{\dim\mathfrak{g}-1})$. Из определения элементов $a'_{1,i_2,\dots,i_r}$ получаем, что

$$b_{\mathcal{A}_1}(a'_{1,i_2,\dots,i_r})\le n-1$$

(так как $a'_{1,i_2,\dots,i_r}\notin\mathfrak{f}$, а значит, $b_{\mathcal{A}_1}(a'_{1,i_2,\dots,i_r})<b_{\mathfrak{g}}(a'_{1,i_2,\dots,i_r})\le n$).

Применим предположению индукции к алгебре Ли $\mathcal{A}_1$, $\dim\mathcal{A}_1<\dim\mathfrak{g}$ и итерированной конструкции алгебр Ли и элементов

$$\{a'_{1,i_2,\dots,i_k}\in\mathcal{A}_{1,i_2,\dots,i_k}\subseteq\mathcal{A}_1|i_1=\varnothing,$$

$$i_2 \in [1, n_2 - 1], \ldots, i_k \in [1, n_k - 1], k \in [1, \dim \mathfrak{g} - 1]\}.$$

Получаем, что

$$\dim(\mathcal{A}_1)' \leq n(n-1)/2.$$

Применим лемму 3.4.2 к алгебре Ли $\mathfrak{g}$, её подалгебре Ли $\mathcal{A}_1$ и элементу $a = a_{\varnothing} \in \mathfrak{g} \setminus \mathcal{A}_1$. Получаем, что

$$\dim \mathfrak{g}' \leq b_{\mathfrak{g}}(a) + \dim \mathcal{A}_1' \leq n + \dim \mathcal{A}_1' \leq n + n(n-1)/2 \leq n(n+1)/2.$$

Переход индукции доказан. □

В заключении докажем, что теорема 3.1.2 в случае бесконечного поля $\mathbb{F}$ следует из теоремы 3.3.1.

Лемма 3.5.1. *Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная нильпотентная алгебра Ли над бесконечным полем $\mathbb{F}$ и $V_1, \ldots, V_k$ – её некоторое конечное семейство собственных векторных подпространств. Тогда для любого натурального числа n существует элемент $a \in \mathfrak{g}$ и n попарно различных максимальных идеальных подалгебр Ли $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ такие, что $a \notin \cup_{i \leq n} \mathcal{A}_i \cup_{j \leq k} V_j$ и $\mathcal{A}_t \neq V_l$ для всех $t \leq n$, $l \leq k$.*

Доказательство. Очевидно, из бесконечности поля $\mathbb{F}$, что существует элемент $a \in \mathfrak{g} \setminus \cup_{i \leq k} V_i$ и бесконечное число попарно различных векторных подпространств $\mathcal{A}_i \subset \mathfrak{g}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ коразмерности 1 в $\mathfrak{g}$ таких, что $\mathfrak{g}' \subseteq \mathcal{A}_i$, $a \notin \mathcal{A}_i$. Выберем n пространств $\mathcal{A}_{i_1}, \ldots, \mathcal{A}_{i_n}$ из этих подпространств такие, что $\mathcal{A}_{i_l} \neq V_j$ для всех $l \leq n$ и $j \leq k$. Ясно, что пространства $\mathcal{A}_{i_1}, \ldots, \mathcal{A}_{i_n}$ являются максимальными идеальными подалгебрами Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$ удовлетворяющими условию леммы 3.5.1.

□

Следствие 3.5.1. *Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли над бесконечным полем $\mathbb{F}$ и пусть размерность её коммутанта строго больше $n(n-1)/2$ для некоторого неотрицательного целого n. Тогда множество элементов ширины не менее чем n в $\mathfrak{g}$ не покрывается конечным числом собственных векторных подпространств в $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Доказательство от противного. Пусть собственные векторные подпространства V_1, V_2, …, V_k покрывают все элементы ширины не менее чем n.

Применим лемму 3.4.3 к алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и числу

$$\min(\dim \mathfrak{g}', \frac{n(n-1)}{2} + 1) \leq \dim \mathfrak{g}',$$

получаем, что существует конечномерная подалгебра $\mathfrak{u}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ такая, что

$$\dim \mathfrak{u}' \geq \min(\dim \mathfrak{g}', \frac{n(n-1)}{2} + 1).$$

Также можем считать, что $\mathfrak{u}$ не содержится ни в одном из подпространств V_i. Заменив $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{u}$ и подпространства V_i на $V_i \cap \mathfrak{u}$, можем считать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является конечномерной. Обозначим $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\varnothing = \mathfrak{g}$.

Применим лемму 3.5.1 к алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и векторным подпространствам $V_1, \dots, V_k$.

Таким образом, существует элемент $a = a_\varnothing \in \mathfrak{g}$ и n попарно различных максимальных идеальных подалгебр Ли $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ такие, что $a \notin \cup_{i \leq n} \mathcal{A}_i \cup_{j \leq k} V_j$. Из определения пространств V_j следует, что $b_\mathfrak{g}(a) \leq n-1$. Аналогично предыдущему, применим лемму 3.5.1 к каждой из алгебр Ли $\mathcal{A}_i$ и соответсвующему семейству собственных векторных подпространств $V_1 \cap \mathcal{A}_i, \dots, V_n \cap \mathcal{A}_i$.

Таким образом, мы получим элементы $a_j \in \mathcal{A}_j$ и подалгебры Ли $\mathcal{A}_{j,p} \subset \mathcal{A}_j$, $j, p \in [1, n]$, для которых также выполнено $b_\mathfrak{g}(a_j) \leq n-1$. Индуктивно продолжая данное построение, получим итерированную конструкцию алгебр Ли и элементов

$$\{a_{i_1,\dots,i_k} \in \mathcal{A}_{i_1,\dots,i_k} \subseteq \mathfrak{g} | i_0 = \varnothing, i_1, \dots, i_k \in [1, n], k \in [0, \dim \mathfrak{g} - 1]\},$$

которая удовлетворяет условию теоремы 3.3.1 (здесь $b_\mathfrak{g}(a_{i_1,\dots,i_k}) \leq n-1$).

Поэтому $\dim \mathfrak{g}' \leq n(n-1)/2$. Противоречие. $\square$

Глава 4

Максимальные алгебры Ли среди локально нильпотентных дифференцирований

4.1 Введение

В своей монографии [9] Дж. Фройденбург высказал следующие гипотезы о строении максимальных по вложению подалгебр Ли среди локально нильпотентных дифференцирований алгебры многочленов от n переменных см. [9, Открытый вопрос 11.7, стр. 238].

Гипотеза 4.1.1. *Алгебра Ли треугольных дифференцирований*

$$\mathfrak{T} = \mathbb{K}\partial_{x_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]\partial_{x_n}$$

является максимальной по вложению алгеброй Ли, лежащей в

$$LND(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]).$$

Гипотеза 4.1.2. *Пусть $\mathcal{A}$ – максимальная по вложению алгебра Ли, лежа-*

щая в $LND(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n])$. *Тогда* $\mathcal{A}$ *сопряжена с алгеброй Ли*

$$\mathfrak{T} = \mathbb{K}\partial_{x_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]\partial_{x_n}.$$

Далее в работе доказывается, что гипотеза 4.1.1 верна, а гипотеза 4.1.2 не верна в общем случае. Однако, на алгебру Ли $\mathcal{A}$ можно наложить некоторые естественные дополнительные условия, при которых гипотеза 4.1.2 всё же имеет место. В этой работе докажем, что гипотеза 4.1.2 верна в следующей более слабой форме:

Теорема 4.1.1. *Пусть дана максимальная алгебра Ли*

$$\mathcal{A} \subset LND(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n])$$

и известно, что $\ker \mathcal{A} := \cap_{D \in \mathcal{A}} \ker D = \mathbb{K}$. *Тогда* $\mathcal{A}$ *сопряжена алгебре Ли*

$$\mathfrak{T} = \mathbb{K}\partial_{x_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]\partial_{x_n}.$$

4.2 Используемые утверждения

Рассмотрим произвольную коммутативную алгебру B с единицей, без делителей нуля, над полем нулевой характеристики $\mathbb{K}$. Пусть также известно, что B имеет конечную степень трансцендентности. Далее в работе всегда будем рассматривать только такие алгебры.

Используем следующие обозначения:

— Для произвольного конечного числа элементов $x_1, \ldots, x_n$, лежащих в алгебре B, будем писать $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ в том случае, когда элементы x_i алгебраически независимы и алгебра $A \subseteq B$ порождается этими элементами;

— Для каждой алгебры Ли $\mathcal{A}$, определим $d(\mathcal{A})$ как её ступень разрешимости. Также, обозначим через $\mathcal{A}^{(i)}$ – i-ый коммутант алгебры Ли $\mathcal{A}$;

— Для произвольного семейства линейных операторов S векторного пространства V, ядром $\ker S$ этого семейства будем называть пересечение ядер всех операторов, лежащих в множестве S;

— Для произвольной пары семейств линейных операторов S_1, S_2 векторного пространства V, обозначим через $[S_1, S_2]$ – множество всевозможных коммутаторов вида $[A, B] = AB - BA$, где $A \in S_1$, $B \in S_2$;

— Для произвольного семейства линейных операторов S векторного пространства V и произвольного элемента $v \in V$, обозначим через $S(v)$ множество элементов вида $A(v)$, где A–всевозможные операторы из S;

— Для произвольного семейства линейных операторов S векторного пространства V, обозначим через $\mathrm{ad}S$ множество присоединённых эндоморфизмов

$$\{\mathrm{ad}A : X \to [A, X] | A \in S, X \in \mathrm{End}(V)\}$$

векторного пространства $\mathrm{End}(V)$.

Определение 4.2.1. Линейный оператор A на векторном пространстве V называется *локально нильпотентным*, если для каждого вектора v из V найдётся натуральное число $k = k(v) > 0$ такое, что $A^k(v) = 0$.

Определение 4.2.2. Множество линейных операторов T на векторном пространстве V будем называть *локально нильпотентным*, если для любой бесконечной последовательности операторов $A_1, A_2, \ldots$, лежащих в T, и любого вектора $v \in V$, существует такое $k = k(v, \{A_i\}) > 0$, что выполнено равенство $A_k \ldots A_1(v) = 0$.

Лемма 4.2.1. *Пусть T – локально нильпотентное множество линейных операторов на векторном пространстве V. Тогда для произвольного собственного векторного подпространства $U \subset V$ найдётся элемент $v \in V \setminus U$, для которого $T(v) \subseteq U$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор $v \in V \setminus U$. Из того, что множество T является локально нильпотентным имеем, что для некоторого конечного набора элементов A_1, A_2, $\ldots$, A_k, лежащих в множестве T, элемент $A_k \ldots A_1(v)$ не принадлежит множеству U, однако, элементы $TA_k \ldots A_1(v)$ лежат в множестве U. Теперь, в качестве искомого элемента достаточно рассмотреть элемент $v' = A_k \ldots A_1(v)$. $\square$

Лемма 4.2.2. *Рассмотрим произвольное локально нильпотентное множество линейных операторов T на векторном пространстве V. Тогда для любого локально нильпотентного оператора A на векторном пространстве V такого, что $[A, T] \subseteq T$, имеем $T \cup \{A\}$ – локально нильпотентное множество линейных операторов на V.*

Доказательство. Пусть U – максимальное по вложению линейное подпространство V, инвариантное для каждого линейного оператора из множества $T \cup \{A\}$ такое, что ограничение $T \cup \{A\}$ на U является локально нильпотентным множеством линейных операторов. Предположим, что $U \neq V$. По лемме 4.2.1 существует элемент $v \in V \setminus U$ такой, что $Tv \subseteq U$.

Рассмотрим линейное пространство

$$U' = \left\langle U, v, Av, A^2v, \ldots \right\rangle.$$

Очевидно, что U' – инвариантное пространство для A и

$$U' = \left\langle U, v, Av, A^2v, \ldots, A^Nv \right\rangle$$

для достаточно большого N, так как A – локально нильпотентное дифференцирование. Докажем по индукции, что $TA^iv \subseteq U$ для $i \geq 0$. База индукции: при $i = 0$ имеем

$$TAv \subseteq AT(v) + [T, A](v) \subseteq A(U) + T(v) \subseteq U.$$

Переход индукции от $i = 1, \ldots, k$ к $i = k+1$:

$$TA^{k+1}v \subseteq A^{k+1}Tv + \sum_{j=0}^{k} A^j[T, A]A^{k-j}v \subseteq A^{k+1}Tv + \sum_{j=0}^{k} A^jTA^{k-j}v \subseteq \sum_{j=0}^{k} A^jU \subseteq U.$$

Таким образом U' – инвариантное пространство для $T \cup \{A\}$ и операторы из $T \cup \{A\}$ переводят пространства

$$\left\langle U, A^iv, A^{i+1}v, \ldots, A^Nv \right\rangle$$

в пространства

$$\left\langle U, A^{i+1}v, A^{i+2}v, \ldots, A^Nv \right\rangle.$$

Поэтому ограничение $T \cup \{A\}$ на U' является локально нильпотентным множеством линейных операторов. Противоречие к максимальности U. $\square$

Каждое локально нильпотентное дифференцирование алгебры B также является локально нильпотентным линейным оператором на векторном пространстве $B_{\mathbb{K}}$. Поэтому все предыдущие леммы о локально нильпотентных операторах применимы к случаю локально нильпотентных дифференцирований. Причем, в случае с дифференцированиями алгебры B, локально нильпотентным множеством дифференцирований алгебры B называется произвольное множество дифференцирований алгебры B, являющееся локально нильпотентным множеством линейных операторов на векторном пространстве $B_{\mathbb{K}}$.

Лемма 4.2.3. *Множество*

$$\mathbb{K}\partial_{x_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]\partial_{x_n}$$

является локально нильпотентным множеством дифференцирований алгебры $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Доказательство. Упорядочим переменные $x_1 \prec \ldots \prec x_n$ и введём лексикографический порядок на мономах. При действии дифференцирований из

$$\mathbb{K}\partial_{x_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]\partial_{x_n}$$

на произвольный многочлен, порядок старшего монома этого многочлена уменьшается, откуда получаем доказательство леммы. □

Лемма 4.2.4. *Рассмотрим произвольное локально нильпотентное множество дифференцирований S алгебры B. Тогда для любого конечного множества локально нильпотентных дифференцирований $D_1, D_2, \ldots, D_k$ такого, что*

$$[S \cup \{D_1, D_2, \ldots, D_k\}, S \cup \{D_1, D_2, \ldots, D_k\}] \subseteq S,$$

имеем $S \cup \{D_1, D_2, \ldots, D_k\}$ – локально нильпотентное подмножество дифференцирований алгебры B.

Доказательство. Для доказательсва леммы 4.2.4 достаточно воспользоваться индукцией по k и леммой 4.2.2. □

Лемма 4.2.5. *Рассмотрим произвольное подмножество S, лежащее в $Der(B)$. Тогда для некоторого конечного числа элементов $D_1, \ldots, D_k \in S$, $\ker S = \cap_{i=1}^{k} \ker D_i$. Более того, k можно выбрать равным $tr.deg._{\mathbb{K}}(B) - tr.deg._{\mathbb{K}}(\ker S)$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдётся счётное семейство элементов $\{D_i \in S\}_{i=1}^{\infty}$ такое, что

$$\cap_{i=1}^{l+1} \ker D_i \subsetneqq \cap_{j=1}^{l} \ker D_j,$$

для всех l. Построим бесконечную цепочку элементов

$$\{x_l \in (\cap_{i=1}^{l} \ker D_i) \setminus (\cap_{j=1}^{l+1} \ker D_j)\}_{l=1}^{\infty}.$$

Применяя [10, Prop. 1.8(d), стр. 17] к дифференцированиям D_i получаем, что $x_1, x_2, \ldots$ образует бесконечное алгебраически независимое семейство элементов, что противоречит условию того, что $\mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{K}}(B) < \infty$. $\square$

Следующая лемма является хорошо известным фактом в теории локально нильпотентных дифференцирований, поэтому приводим её без доказательства

Лемма 4.2.6. *Любая абелева алгебра Ли $\mathcal{A}$, лежащая в $LND(B)$ такая, что* $\ker \mathcal{A} = \mathbb{K}$ *является конечномерной алгеброй Ли размерности не более чем* $tr.deg._{\mathbb{K}}(B)$.

4.3 Опровержение гипотезы 4.1.2 в общем случае

Теорема 4.3.1. *Гипотеза 4.1.2 не верна в случае* $n = 3$.

Доказательство. Рассмотрим локально нильпотентное дифференцирование

$$D = -P_z \partial y + P_y \partial z,$$

где

$$P_y = 1 + y(xz + y^2), \quad P_z = (xz + y^2)/2.$$

Пусть $\mathcal{A}$ – максимальная по вложению подалгебра Ли в $\mathrm{LND}(\mathbb{K}[x, y, z])$, содержащая алгебру Ли $\mathbb{K} \cdot D$. В случае справедливости гипотезы 4.1.2 получаем, что $\mathcal{A}$ сопряжена треугольной алгебре Ли и D является триангулизируемым дифференцированием, что противоречит [12, Example 3.5, стр. 304]. $\square$

4.4 Основные свойства локально нильпотентных множеств дифференцирований

Теорема 4.4.1. *Пусть S – произвольное локально нильпотентное множество дифференцирований алгебры B, для которого* $\ker S = \mathbb{K}$. *Тогда найдутся x_i такие, что $B = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ и*

$$S \subseteq \mathbb{K}\partial_{x_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]\partial_{x_n}.$$

Доказательство. Рассмотрим семейство $\mathcal{P}$ подалгебр A алгебры B обладающих следующими свойствами:

1. A инвариантна для каждого дифференцирования из S;
2. Существуют алгебраически независимые элементы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ такие, что $A = \mathbb{K}[a_1, \ldots, a_k]$ и

$$S|_A \subseteq \mathbb{K}\partial a_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[a_1, \ldots, a_{k-1}]\partial a_k.$$

Введём частичный порядок на $\mathcal{P}$. Будем говорить, что для двух подалгебр $A_1, A_2 \in \mathcal{P}$ выполнено $A_1 \prec A_2$ тогда и только тогда, когда существуют элементы $a_1, a_2, \ldots, a_{k_1}$ и $a_{k_1+1}, a_{k_1+2}, \ldots, a_{k_2}$ такие, что

$$A_1 = \mathbb{K}[a_1, a_2, \ldots, a_{k_1}],$$

$$A_2 = A_1[a_{k_1+1}, a_{k_1+2}, \ldots, a_{k_2}] = \mathbb{K}[a_1, \ldots, a_{k_2}]$$

и

$$S|_{A_2} \subseteq \mathbb{K}\partial a_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[a_1, \ldots, a_{k_2-1}]\partial a_{k_2}.$$

Очевидно, что не существует бесконечной возрастающей цепочки подалгебр, лежащих в $\mathcal{P}$. Поэтому можно выбрать максимальную подалгебру A из $\mathcal{P}$. Предположим, что $A \neq B$ и выберем произвольный элемент $b \in B \setminus A$ такой, что $Sb \subseteq A$ (такой элемент существует по лемме 4.2.1). Проверим, что b алгебраически независим над A. Предположим противное: пусть для некоторых элементов $a_0, a_1, \ldots, a_d \in A$ выполнено $a_0 + a_1 b + \ldots + a_d b^d = 0$, причем $a_d \neq 0$. Можем считать, что $d > 0$ – минимально возможная степень аннулирующего многочлена. Заметим, что по построению алгебры A и элемента b, элементы $D(a_j), D(b)$ лежат в A для всех a_j и всех дифференцирований D, лежащих в S. Имеем

$$0 = D(a_0 + a_1 b + \ldots + a_d b^d) =$$

$$= (D(a_0) + a_1 D(b)) + \ldots + (D(a_{d-1}) + d a_d D(b)) b^{d-1} + D(a_d) b^d$$

для всех $D \in S$. Поэтому, в случае $a_d \notin \mathbb{K}$, подставляя в последнем равенстве вместо элемента $D \in S$ такой элемент $D' \in S$, что $a_d \notin \ker D'$, получим аннулирующий многочлен элемента b степени d со старшим коэффициентом равным $D'(a_d) \neq 0$.

Таким образом, из локальной нильпотентности множества дифференцирований S, после выполнения некоторого конечного числа таких операций получаем, что b имеет аннулирующий многочлен степени d со старшим коэффициентом лежащим в поле $\mathbb{K}$. Можем считать, что $a_0 + a_1 b + \ldots + a_d b^d$ – искомый многочлен с $a_d \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Заметим тогда, что для каждого дифференцирования D из S выполнено

$$0 = D(a_0 + a_1 b + \ldots + a_d b^d) = (D(a_0) + a_1 D(b)) + \ldots + (D(a_{d-1}) + d a_d D(b)) b^{d-1},$$

а значит, из минимальности d,

$$D(a_{d-1}) + d a_d D(b) = D(a_{d-1} + d a_d b) = 0$$

для всех $D \in S$. Откуда, $a_{d-1} + d a_d b \in \mathbb{K}$ и $b \in A$, что противоречит определению элемента b.

В итоге получаем, что $A \subsetneq A[b] \in \mathcal{P}$. Противоречие с максимальностью $A \in \mathcal{P}$. Значит алгебра A совпадает с B и для некоторых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $B = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ и

$$S \subseteq \mathbb{K}\partial_{x_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]\partial_{x_n}.$$

$\square$

Следствие 4.4.1. *Пусть S – произвольное локально нильпотентное множество дифференцирований алгебры B. Тогда алгебра Ли $\mathcal{A}$ порожденная множеством $(\ker S)S$ является разрешимой алгеброй Ли, которая также является* *локально нильпотентным множеством дифференцирований алгебры B.*

Доказательство. Переходя к алгебре $B' = (\ker S \setminus \{0\})^{-1} B$ над полем $(\ker S \setminus \{0\})^{-1}\mathbb{K}$ и локально нильпотентному подмножеству дифференцирований $S' = (\ker S \setminus \{0\})^{-1} S$, можем считать, что $\ker S = \mathbb{K}$. По теореме 4.4.1 найдутся x_i такие, что $B = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ и

$$S \subseteq \mathbb{K}\partial_{x_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]\partial_{x_n}.$$

Утверждение следствия теперь вытекает из того, что

$$\mathrm{d}(\mathbb{K}\partial_{x_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]\partial_{x_n}) = n$$

и леммы 4.2.3. □

Теорема 4.4.2. *Множество дифференцирований S алгебры B является локально нильпотентным тогда и только тогда, когда каждое его конечное подмножество $S' \subseteq S$ является локально нильпотентным множеством дифференцирований алгебры B.*

Доказательство. Докажем, что если каждое конечное подмножество некоторого множества дифференцирований S является локально нильпотентным, то и само S является локально нильпотентным множеством дифференцирований.

Ведём индукцию по степени трансцендентности алгебры B. В случае, если $\mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{K}}(B) = 0$, имеем $\mathrm{LND}(B) = \{0\}, S = \{0\}$ и утверждение леммы очевидно. Из следствия 4.4.1 получаем, что алгебра Ли $\mathcal{A}$, порожденная множеством S, также обладает тем свойством, что каждое её конечное подмножество образует локально нильпотентное множество дифференцирований алгебры B. Поэтому можем считать, что $S = \mathcal{A}$ – алгебра Ли. Рассматривая алгебру Ли $\mathcal{A}' = (\ker \mathcal{A} \setminus \{0\})^{-1}\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{K}' = (\ker \mathcal{A} \setminus \{0\})^{-1}\mathbb{K}$ и алгебру $B' = (\ker \mathcal{A} \setminus \{0\})^{-1} B$ можем считать, что $\ker \mathcal{A} = \mathbb{K}$. Применяя следствие 4.4.1, а также лемму 4.2.5 к множествам дифференцирований $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^{(1)}$ получаем, что существует достаточно большая конечнопорожденная разрешимая подалгебра Ли $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, являющаяся локально нильпотентным множеством дифференцирований алгебры B такая, что $\ker \mathcal{B} = \ker \mathcal{A} = \mathbb{K}$ и $\ker \mathcal{B}^{(1)} = \ker \mathcal{A}^{(1)}$. Поэтому из теоремы 4.4.1 получаем, что для некоторых элементов x_i, $B = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ и

$$\mathcal{B} \subseteq \mathbb{K}\partial_{x_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]\partial_{x_n}.$$

Таким образом,

$$\mathbb{K}[x_1] \subseteq \ker(\mathbb{K}\partial_{x_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]\partial_{x_n})^{(1)} \subseteq \ker \mathcal{B}^{(1)} = \ker \mathcal{A}^{(1)}.$$

Пусть $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}|_{\ker \mathcal{A}^{(1)}}$ – гомоморфизм ограничения алгебры Ли $\mathcal{A}$ на инвариантную подалгебру $\ker \mathcal{A}^{(1)}$. Очевидно, что каждое дифференцирование, лежащее в $\ker \pi$, содержит $\ker \mathcal{A}^{(1)}$, а следовательно и $\mathbb{K}[x_1]$, в своём ядре.

Рассмотрим алгебру $B' = (\mathbb{K}[x_1] \setminus \{0\})^{-1}B$ степени трансцендентности не более чем $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}}(B) - 1$ и алгебру Ли $\mathcal{P} = (\mathbb{K}[x_1] \setminus \{0\})^{-1} \ker \pi$. Алгебра Ли $\mathcal{P}$ является множеством дифференцирований алгебры B' меньшей степени трансцендентности чем B, откуда, по предположению индукции, $\mathcal{P}$ – локально нильпотентное множество дифференцирований алгебры B', а значит, $\ker \pi$ – локально нильпотентное множество дифференцирований алгебры B. Заметим, что $\mathcal{A}^{(1)} \subseteq \ker \pi$, поэтому $\mathcal{A}|_{\ker \mathcal{A}^{(1)}} \cong \mathcal{A}/\ker \pi$ является абелевой алгеброй Ли, лежащей в $\mathrm{LND}(\ker \mathcal{A}^{(1)})$ (воспользовались условием теоремы для одноэлементных подмножеств). По лемме 4.2.6 получаем, что $\mathcal{A}/\ker \pi$ – конечномерная алгебра Ли, откуда $\ker \pi$ – локально нильпотентное множество дифференцирований алгебры B, имеющее конечную коразмерность в $\mathcal{A}$. Применяя лемму 4.2.4 к множеству $\ker \pi$ и произвольному конечному базису $\{D_1, \ldots, D_q\}$ факторпространства $\mathcal{A}/\ker \pi$, получаем, что $\ker \pi \cup \{D_1, \ldots, D_q\}$ – локально нильпотентное множество дифференцирований алгебры B. А значит, из следствия 4.4.1 получаем, что $\mathcal{A} = \langle \ker \pi \cup \{D_1, \ldots, D_q\} \rangle$ – локально нильпотентное множество дифференцирований алгебры B. □

Следствие 4.4.2. *Пусть $S_1 \subset S_2 \subset \ldots$ – возрастающая цепочка вложенных друг в друга локально нильпотентных множеств дифференцирований алгебры B. Тогда $\cup_{i \geq 1} S_i$ также является локально нильпотентным множеством дифференцирований алгебры B.*

Теорема 4.4.3. *Пусть S – произвольное локально нильпотентное множество дифференцирований алгебры B. Тогда множество $ad(S)$ является локально нильпотентным множеством линейных операторов на векторном про-*

странсве $Der(B)$.

Доказательство. Рассмотрим алгебру $B' = (\ker S \setminus \{0\})^{-1}B$ над полем $\mathbb{K}' = (\ker S \setminus \{0\})^{-1}\mathbb{K}$ и локально нильпотентное множество дифференцирований $S' = (\ker S \setminus \{0\})^{-1}S$ алгебры B'. Из теоремы 4.4.1 следует, что существуют x_i такие, что

$$B' = \mathbb{K}'[x_1, \ldots, x_n],$$

$$S \subseteq \mathbb{K}'\partial_{x_1} \oplus \mathbb{K}'[x_1]\partial_{x_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}'[x_1, \ldots, x_{n-1}]\partial_{x_n}.$$

Умножая элементы $x_i \in B'$ на подходящие элементы из $\ker S \subseteq \mathbb{K}'$, можем считать, что $x_i \in B$. Пусть $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ – базис трансцендентности алгебры $\ker S$. Для каждого дифференцирования $D \in \mathrm{Der}(B)$ рассмотрим его координаты

$$D_1 = D(b_1), D_2 = D(b_2), \ldots, D_k = D(b_k),$$

$$D_{k+1} = D(x_1), D_{k+2} = D(x_2), \ldots, D_{k+n} = D(x_n).$$

Высотой $\mathrm{height}(D)$ дифференцирования D будем называть максимальное число $t > 0$ такое, что $D_1 = D_2 = \ldots = D_t = 0$. В случае, если $\mathrm{height}(D) = n+k$, имеем $\ker D \supseteq \mathbb{K}[b_1, \ldots, b_k, x_1, \ldots, x_n]$ – алгебра степени трансцендентности равной $\mathrm{tr.deg}._{\mathbb{K}}(B)$, являющаяся алгебраически замкнутой в B (воспользовались [10, Prop. 1.8(d), стр. 17]), а следовательно, $\ker D = B$, $D = 0$. Введём частичный порядок на множестве $\mathrm{Der}(B)$. Для произвольных дифференцирований $D, E \in \mathrm{Der}(B)$ будем говорить, что $D \prec E$ если

$$h = \mathrm{height}(D) \geq \mathrm{height}(E)$$

и порядок $h+1$-ой координаты дифференцирования D как многочлена в $\mathbb{K}'[x_1, \ldots, x_n]$ (считаем, что на многочленах уже введён лексикографический порядок с $x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_n$) строго меньше порядка соответствующей координаты дифференцирования E. По построению порядка на $\mathrm{Der}(B)$ очевидно, что не существует бесконечной строго убывающей последовательности дифференцирований.

Рассмотрим произвольную последовательность дифференцирований $\partial_1, \partial_2, \ldots \in S$ и произвольное дифференцирование $0 \neq D \in \mathrm{Der}(B)$. Для каждого $i \leq k$ и произвольных $\partial_k \in S$, $E \in \mathrm{Der}(B)$ имеем, что i-ая координата дифференцирования $(\mathrm{ad}\partial_k)(E)$ равна

$$(\mathrm{ad}\partial_k)(E)_i = [\partial_k, E](b_i) = \partial_k E(b_i) = \partial_k E_i.$$

Таким образом,

$$(\mathrm{ad}\partial_N \ldots \mathrm{ad}\partial_1)(D)_i = (\partial_N \ldots \partial_1)(D_i)$$

для всех $N > 0$. Из локальной нильпотентности множества S имеем, что для достаточно большого натурального N, $(\mathrm{ad}\partial_N \ldots \mathrm{ad}\partial_1)(D)_i = 0$ для всех $i \leq k$. Откуда, рассматривая дифференцирование $\widehat{D} = (\mathrm{ad}\partial_N \ldots \mathrm{ad}\partial_1)(D)$ и меньшую последовательность $\partial_{N+1}, \partial_{N+2}, \ldots \in S$, можем считать, что $\mathrm{height}(D) \geq k$. Далее имеем $D(b_i) = 0$ для всех $i \leq k$, откуда, $\ker S \subseteq \ker D$, а значит, D можно представить в виде

$$D = D_{h+1}\partial_{x_{h+1-k}} + \ldots + D_{k+n}\partial_{x_n},$$

где $h = \mathrm{height}(D) \geq k$. Поэтому для

$$\partial_1 = f_0^{(1)}\partial_{x_1} + \ldots + f_{n-1}^{(1)}\partial_{x_n} \in S,$$

$f_i^{(1)} \in \mathbb{K}'[x_1, \ldots, x_{i-1}]$ получаем, что дифференцирование

$$(\mathrm{ad}\partial_1)(D)_{h+1} = (\sum_{i=1}^{h+1-k} f_{i-1}^{(1)}\partial_{x_i})(D_{h+1})$$

имеет меньший лексикографический порядок чем D_{h+1}, а значит,
$(\mathrm{ad}\partial_1)(D) \prec D$. Повторяя аналогичное рассуждение для дифференцирований $(\mathrm{ad}\partial_1)(D)$, $(\mathrm{ad}\partial_2\mathrm{ad}\partial_1)(D), \ldots$ получаем, что

$$D \succ (\mathrm{ad}\partial_1)(D) \succ (\mathrm{ad}\partial_2\mathrm{ad}\partial_1)(D) \succ \ldots$$

является последовательностью дифференцирований сходящейся к 0. Из произвольности последовательности $\{\partial_i \in S\}$, $\mathrm{ad}(S)$ – локально нильпотентное множество линейных операторов на векторном пространсве $\mathrm{Der}(B)$. $\square$

4.5 Доказательство теоремы 4.1.1

Докажем несколько более сильное утверждение, имеющее место для всех коммутативных алгебр B с единицей, без делителей нуля, конечной степени трансцендентности.

Теорема 4.5.1. *Пусть дана алгебра Ли $\mathcal{A}$, лежащая в $LND(B)$ и известно, что* $\ker \mathcal{A} = \mathbb{K}$. *Тогда найдутся x_i такие, что $B = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ и*

$$\mathcal{A} \subseteq \mathbb{K}\partial_{x_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]\partial_{x_n}.$$

Для доказательства теоремы 4.5.1 остаётся показать, что всякая алгебра Ли, лежащая в $\mathrm{LND}(B)$, образует локально нильпотентное множество дифференцирований алгебры B, после чего применить теорему 4.4.1.

Утверждение 4.5.1. *Всякая алгебра Ли $\mathcal{A}$, лежащая в $LND(B)$, образует локально нильпотентное множество дифференцирований алгебры B.*

Доказательство. По следствию 4.4.2 каждая возрастающая цепочка вложенных локально нильпотентных множеств дифференцирований алгебры B, лежащих в $\mathcal{A}$, имеет верхнюю грань. Поэтому по лемме Цорна существует максимальное по вложению локально нильпотентное множество дифференцирований $S \subseteq \mathcal{A}$, которое, по следствию 4.4.1, является подалгеброй Ли в $\mathcal{A}$. Предположим, что $S \neq \mathcal{A}$. По теореме 4.4.3, $\mathrm{ad}S$ – локально нильпотентное множество линейных операторов на $\mathrm{Der}(B)$. Применим лемму 4.2.1 к локально нильпотентному множеству линейных операторов $(\mathrm{ad}S)|_{\mathcal{A}}$ на векторном пространстве $\mathcal{A}$ и собственному подпространству $S \subsetneq \mathcal{A}$. Получим, что для некоторого элемента $D \in \mathcal{A} \setminus S$, $(\mathrm{ad}S)(D) = [S, D] \subseteq S$, откуда по лемме 4.2.4, $S \cup \{D\}$ – локально нильпотентное множество дифференцирований большее чем S. Противоречие. □

4.6 Доказательство гипотезы 4.1.1

Теорема 4.6.1. *Алгебра Ли*

$$\mathfrak{T} = \mathbb{K}\partial_{x_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]\partial_{x_n}$$

является максимальной по вложению алгеброй Ли, лежащей в

$$LND(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]).$$

Доказательство. Рассмотрим максимальную по вложению алгебру Ли $\mathcal{A}$, вложенную в $\mathrm{LND}(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n])$ такую, что $\ker \mathcal{A} = \mathbb{K}$ (в качестве примера такой алгебры Ли можно рассмотреть произвольную максимальную по вложению алгебру Ли содержащую $\mathfrak{T}$ и лежащую в $\mathrm{LND}(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n])$). По теореме 4.5.1 получаем, что алгебра Ли $\mathcal{A}$ сопряжена некоторой подалгебре $\mathcal{A}'$ алгебры Ли $\mathfrak{T}$. Из максимальности $\mathcal{A}'$ среди подалгебр Ли в $\mathrm{LND}(B)$ получаем, что $\mathfrak{T} = \mathcal{A}'$ – максимальная по вложению алгебра Ли, лежащая в $\mathrm{LND}(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n])$. $\square$

Заключение

В диссертации исследовались различные аспекты теорий алгебр Ли и p-групп. Была доказана гипотеза Уайголда в теории p-групп и её аналаг в теории нильпотентных алгебр Ли, а также получены ответы на некоторые из вопросов Дж. Фройденбурга.

Результаты диссертации могут быть применимы в задачах коммутативной алгебры, теории p-групп, теории алгебр Ли.

Получены следующие результаты:

- Доказательство гипотезы Уайголда (Вопрос 4.69 из «Коуровской тетради» [8]).

- Доказательство аналога гипотезы Уайголда для нильпотентных алгебр Ли.

- Введено понятие итерированных конструкций подалгебр Ли и элементов, связанных с произвольной конечномерной нильпотентной алгеброй Ли, и доказана теорема о том, что для произвольной конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ выполнено $\dim\mathfrak{g}' \leq n(n+1)/2$ в случае, если для некоторого натурального числа n существует итерированная конструкция подалгебр Ли и элементов $\{a_{i_1,\dots,i_k} \in \mathcal{A}_{i_1,\dots,i_k} \subseteq \mathfrak{g}\}$ типа $(n_1, \dots, n_{\dim\mathfrak{g}-1})$ такая, что $n_i \geq \min(i, n)$ и ширина каждого из элементов $a_{i_1,\dots,i_k}$ не превосходит n.

- Доказано, что треугольная алгебра Ли дифференцирований

  $$k\partial_{x_1} \oplus k[x_1]\partial_{x_2} \oplus \ldots \oplus k[x_1, \dots, x_{n-1}]\partial_{x_n}$$

  алгебры многочленов $k[x_1, \dots, x_n]$ является максимальной по включению алгеброй Ли среди локально нильпотентных дифференцирований этой алгебры.

- Для произвольной области целостности B конечной степени трансцендентности над полем k нулевой характеристики, доказано, что в случае, если пересечение ядер всех дифференцирований максимальной по вложению алгебры Ли $\mathcal{A}$ среди локально нильпотентных дифференцирований алгебры B совпадает с полем k, тогда для некоторых элемнетов $x_1, \ldots, x_n$, $B = k[x_1, \ldots, x_n]$ и алгебра Ли $\mathcal{A}$ является сопряженной к треугольной алгебре Ли

$$\mathcal{T} = k\partial_{x_1} \oplus k[x_1]\partial_{x_2} \oplus \ldots \oplus k[x_1, \ldots, x_{n-1}]\partial_{x_n}.$$

Литература

[1] J. Wiegold. Groups with boundedly finite classes of conjugate elements, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, **238(1214)**, 389–401 (1957).

[2] J. Wiegold. Commutator subgroups of finite p-groups, *Journal of the Australian Mathematical Society*, **10(3-4)**, 480–484 (1969).

[3] M. R. Vaughan-Lee and J. Wiegold, Breadth, class and commutator subgroups of p-groups, *Journal of Algebra*, **32(2)**, 268–277 (1974).

[4] I. M. Bride. Second nilpotent BFC groups, *Journal of the Australian Mathematical Society*, **11(1)**, 9–18 (1970).

[5] P. M. Neumann. An improved bound for BFCp-groups, *Journal of the Australian Mathematical Society*, **11(1)**, 19-27 (1970).

[6] M. R. Vaughan-Lee. Metabelian BFC p-groups, *Journal of the London Mathematical Society*, **2(4)**, 673–680 (1972).

[7] M. R. Vaughan-Lee. Breadth and commutator subgroups of p-groups, *Journal of Algebra*, **32(2)**, 278–285 (1974).

[8] V. D. Mazurov and E. I. Khukhro. Unsolved problems in group theory. The Kourovka Notebook. no. 20, arXiv:1401.0300v25 (2022).

[9] G. Freudenburg. Algebraic theory of locally nilpotent derivations, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer-Verlag*, **136** (2006).

[10] S. Kaliman. Polynomials with general C2-fibers are variables, *Pacific journal of mathematics*, **203(1)**, 161–190 (2002).

[11] R. Rentschler. Opérations du groupe additif sur le plan affine, *CR Acad. Sci. Paris Sér. AB*, **267**, 384–387 (1968).

[12] D. Daigle. A necessary and sufficient condition for triangulability of derivations of $k[X, Y, Z]$, *Journal of Pure and Applied Algebra* **113(3)**, 297-305 (1996).

[13] R. M. Guralnick, A. Maroti, Average dimension of fixed point spaces with applications, *Journal of algebra*, **226**, 298-308 (2011)

[14] N. Gupta, S. Sidki, On torsion-free metabelian groups with commutator quotients of prime exponent, *International journal of algebra and computation*, **9**, 493–520 (1999)

[15] B. H. Neumann, Groups covered by permutable subsets, *J. London Math. Soc.*, **29**, 236–248 (1954).

[16] P. M. Neumann, M. R. Vaughan-Lee, An essay on BFC groups, *Proc. Lond. Math. Soc.* **35** 213-237, (1977).

[17] D. J. S. Robinson, A course in the theory of groups, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, **80**, Springer-Verlag (1996).

[18] D. Segal, A. Shalev, On groups with bounded conjugacy classes, *Quart. J. Math.* Oxford **50**, 505-514 (1999)

[19] J. A. Gallian, On the breadth of a p-group, *Math. Z.* **126**, 224-226 (1972).

[20] C. Leedham-Green, P. M. Neumann, J. Wiegold, The breadth and the class of B finite p-group, *J. London Math. Sot.* **1**, 409-420 (1969).

[21] I. D. Macdonald, Some explicit bounds in groups with finite derived groups, *Proc. London Math. Soc.*, **11**, 23—56 (1961).

[22] W. R. Scott, Group Theory, *Prentice-Hall*, 1964.

[23] J. A. H. Shepperd and J. Wiegold. Transitive permutation groups and groups with finite derived groups, *Math. ZeUschritt*, **81**, 279—285 (1963).

[24] M. Lazard, Sur ies groupes luipotents et les aimeaux de Lie, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **71**, 101—190 (1954).

[25] A. H. Livsic, M. S. Calenko, K. G. Sul'geifer, Varieties in categories, *Mat. Sb.*, **63(105)**, 554—581 (1964).

[26] M. Ferrero, Y. Lequain, A. Nowicki, A note on locally nilpotent derivations, *J. of Pure and Appl. Algebra*, **79**, 45–50 (1992).

[27] H. Bass, A nontriangular action of $\mathbb{G}_a$ on $\mathbb{A}^3$, *J. Pure Appl. Algebra*, **33**, 1–5 (1984).

[28] L. Makar-Limanov, On the hypersurface $x+x^2y+z^2+t^3=0$ in $\mathbf{C}^4$ or a $\mathbf{C}^3$-like threefold which is not $\mathbf{C}^3$, *Israel J. Math.*, **96**, 419–429 (1996).

[29] H. Matsumura, Commutative Algebra, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Reading, MA (1980).

[30] A. Sathaye, Polynomial ring in two variables over a D. V. R., *A criterion, Invent. Math.*, **74**, 159–168 (1983).

[31] L. Makar-Limanov, U. Turusbekova, U. Umirbaev, Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables, ıJ. Algebra, **322**, 3318–3330 (2009).

[32] M. Nagata, On automorphism group of $k[x,y]$, *Lectures in Math.*, **5** (1972).

[33] A. Nowicki, The fourteenth problem of Hilbert for polynomial derivations in Differential Galois Theory *Banach Center Publ.*, **58**, 177–188 (2002).

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

[34] A. A. Skutin. Proof of a conjecture of Wiegold, *Journal of Algebra*, **526**, 1–5 (2019).

DOI: 10.1016/j.jalgebra.2019.02.002

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: SJR 1.046.

[35] А. А. Скутин. Доказательство гипотезы Уайголда для нильпотентных алгебр Ли, *Матем. сб.*, **211(12)**, 143–148 (2020);

English transl.: A. A. Skutin. Proof of a conjecture of Wiegold for nilpotent Lie algebras, *Sb. Math.*, **211(12)**, 1795–1800 (2020).

DOI: 10.1070/SM9350

Журнал индексируется в **Scopus, RSCI**. IF: SJR 0.843.

[36] А. А. Скутин. Максимальные алгебры Ли среди локально нильпотентных дифференцирований, *Матем. сб.*, **212(2)**, 138–146 (2021);

English transl.: A. A. Skutin. Maximal Lie subalgebras among locally nilpotent derivations, *Sb. Math.*, **212(2)**, 265–271 (2021).

DOI: 10.1070/SM9360

Журнал индексируется в **Scopus, RSCI**. IF: SJR 0.843.

[37] А. А. Скутин. Усиленная гипотеза Уайголда в теории нильпотентных алгебр Ли, *Матем. заметки*, **111(5)**, 738–745 (2022);

English transl.: A. A. Skutin. Strengthened Wiegold Conjecture in the Theory of Nilpotent Lie Algebras, *Math. Notes*, **111(5)**, 747–753 (2022).

DOI: 10.1134/S000143462205008X

Журнал индексируется в **Scopus, RSCI**. IF: SJR 0.580.