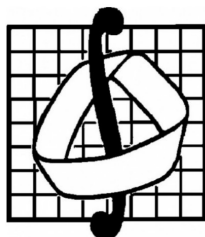


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи



ХАРЧЕВА ИРИНА СЕРГЕЕВНА

УДК 517.938.5

БИЛИАРДНЫЕ КНИЖКИ КАК СПОСОБ РЕАЛИЗАЦИИ ОСОБЕННОСТЕЙ
ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Специальность 1.1.3 — геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
академик РАН Фоменко
Анатолий Тимофеевич,
д.ф.-м.н, проф. Ведюшкина
Виктория Викторовна

Москва–2023 г.

Оглавление

Введение	3
1 Математический бильярд	18
1.1 Бильярд в области евклидова пространства	18
1.2 Элементарный бильярд	19
1.3 Интегрируемость элементарного бильярда	20
1.4 Особые траектории элементарного бильярда	21
1.5 Бильярдная книжка	22
1.6 Интегрируемость бильярдной книжки	24
1.7 Невыпуклые склейки	25
1.8 Особые траектории бильярдной книжки	26
1.9 Лемма о коммутирующих перестановках	27
2 Необходимые определения и элементы теории топологической классификации интегрируемых систем	31
2.1 Атомы и молекулы для функций Морса на двумерных многообразиях	31
2.2 Атомы и грубые молекулы для интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы	33
2.3 Грубая лиувиллева эквивалентность динамических систем с двумя степенями свободы	34
2.4 Конструкция 2-атомов	35
2.5 Конструкция 3-атомов	36
2.6 Конструирование дублей для атомов	39
2.7 Представление 3-атома с помощью f -графа	40
3 Фазовое пространство бильярдной книжки и интегралы на нем	44
3.1 Описание фазового пространства произвольной бильярдной книжки	44
3.2 Явный вид первых интегралов бильярдной книжки	47
3.3 Изоэнергетическое многообразие бильярдной книжки	48

3.4	Обобщение теории инвариантов Фоменко-Цишанга на кусочно-гладкий случай бильярдных книжек	52
4	Описание слоения Лиувилля бильярдных книжек в терминах перестановок	54
4.1	Классы бильярдных книжек	54
4.2	Семейство перестановок на квадраках и переформулировка леммы о коммутирующих перестановках	55
4.3	Лемма о конструировании бильярдной книжки по семейству перестановок на квадраках	57
4.4	Операция несвязного объединения двух книжек	59
4.5	Метод изучения слоения Лиувилля бильярдных книжек	60
4.6	Перестановка уровня и ее связь с торами Лиувилля бильярдной книжки	61
5	Реализация трехмерных бифуркаций бильярдными книжками	65
5.1	Алгоритм реализации произвольного седлового 3-атома	65
5.2	Грубая молекула бильярдной книжки, построенной по алгоритму реализации	68
5.3	Примеры реализации 3-атомов	69
5.4	Доказательство теоремы реализации 3-атомов	71
5.5	Переформулировка алгоритма реализации на язык f -графов	79
6	Реализация баз слоений Лиувилля бильярдными книжками	82
6.1	Алгоритм реализации произвольной грубой молекулы	82
6.2	Примеры реализации грубых молекул	89
6.3	Доказательство теоремы реализации грубых молекул	101
	Заключение	116
	Литература	118
	Список литературы	118
	Список публикаций автора по теме диссертации	121
	Тезисы докладов автора по теме диссертации	122

Введение

Актуальность темы

Диссертация находится на стыке двух научных направлений: теории топологических инвариантов интегрируемых гамильтоновых систем и теории математических бильярдов. Между ними была обнаружена неожиданная связь. Было доказано, что для любой невырожденной трехмерной бифуркации алгоритмически строится интегрируемый бильярд, слоение Лиувилля которого содержит такую бифуркацию. А также, опираясь на этот результат, было показано, что бильярды позволяют реализовывать произвольные базы слоений Лиувилля, содержащих такие особенности.

Классической теории математического бильярда посвящено множество работ. Например, в книгах В. В. Козлова и Д. В. Трещева [1], С. Л. Табачникова [2], В. Драговича и М. Раднович [3] и статье Е. Гуткина [4] дается обзор классических и новых задач в теории бильярда. В последние годы эта область получила ряд существенных продвижений. Российскими учеными, в том числе, совместно с зарубежными коллегами, были получены следующие прорывные результаты. С одной стороны, А. А. Глуцюком [5], А. Е. Мироновым и М. Бялым [6], В. Ю. Калошиным и А. Соррентино [7] были получены доказательства ряда аналогов и частных случаев классической гипотезы Биркгофа о неинтегрируемости бильярдов на плоских столах вне нескольких узких классов таких столов: софокусных и круговых. С другой стороны, В. В. Ведюшкина открыла конструкцию “бильярдных книжек” — нового класса интегрируемых бильярдов на кусочно-плоских клеточных комплексах специального вида. Бильярдные книжки склеены по общим дугам границы из двумерных плоских интегрируемых бильярдов, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол либо концентрических окружностей и их радиусами. Перестановки на получившихся ребрах склейки — “корешках” книжки — задают переход шара с одного листа книжки на другой после удара о границу. В главе 3 диссертации показано, что при наличии естественных условий изоэнергетическая поверхность является кусочно-гладким трехмерным многообразием. Конструкция бильярдной книжки хорошо комбинируется, в том числе с сохранением свойства интегрируемости системы, с уже известными: например, можно добавить потенциал или магнитное поле.

Как оказалось, интегрируемые бильярдные книжки обладают весьма широким классом раз-

личных слоений Лиувилля. Это было установлено с помощью методов теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем, развитой А. Т. Фоменко, его соавторами и учениками [8, 9]. Две интегрируемые системы называются лиувиллево эквивалентными, если существует диффеоморфизм, переводящий слоение Лиувилля одной системы в слоение другой с сохранением ориентации некоторых критических окружностей. В большинстве невырожденных классических случаев интегрируемости тора Лиувилля являются замыканиями нерезонансных траекторий на всюду плотном множестве. В таких случаях лиувиллева эквивалентность систем означает, что сравниваемые системы имеют “одинаковые” замыкания интегральных траекторий на трехмерных уровнях постоянной энергии. Топология слоения Лиувилля полностью определяется инвариантом Фоменко-Цишанга (меченой молекулой), который является некоторым графом с числовыми метками. В вершинах этого графа стоят атомы — классы невырожденных бифуркаций двумерных торов Лиувилля. При этом инвариант Фоменко-Цишанга без меток (грубая молекула) является классом гомеоморфности одномерной базы слоения Лиувилля на изоэнергетической поверхности с условием послонной гомеоморфности самих слоений в прообразе малой окрестности произвольной точки базы.

В. Драговичем и М. Раднович [10], В. В. Ведюшкиной [11], А. Т. Фоменко и В. А. Кибкало [12], С. Е. Пустовойтовым [13], Г. В. Белозеровым [14], Е. Е. Каргиновой [15] и другими была получена серия результатов вычисления инвариантов Фоменко-Цишанга для различных видов билиардов. В том числе, оказалось, что для некоторых билиардов вычисленные инварианты совпадают с инвариантами классических интегрируемых систем гамильтоновой механики [16, 17], например, со случаем Горячева-Чаплыгина [18]. Описанные выше результаты показали, насколько широк класс билиардов, и позволили поднять вопрос о реализации всех слоений Лиувилля с помощью интегрируемых билиардов. Этот вопрос был сформулирован [19] в виде следующей гипотезы.

Гипотеза (А. Т. Фоменко). Интегрируемыми билиардными книжками можно моделировать:

- **(Гипотеза А)** любой атом или, другими словами, любую невырожденную (боттовскую) бифуркацию двумерных торов Лиувилля;
- **(Гипотеза В)** любую грубую молекулу, или, другими словами, базу любого слоения Лиувилля с невырожденными особенностями;
- **(Гипотеза С)** любую меченую молекулу, или, другими словами, любое слоение Лиувилля;
- **(Гипотеза D)** любое трехмерное замкнутое изоэнергетическое многообразие любой невырожденной интегрируемой гамильтоновой системы. Гипотеза D является частным случаем гипотезы С.

Первый пункт общей гипотезы — гипотеза А — доказан автором совместно с В. В. Ведюшкиной и изложен в главе 5 диссертации. Согласно этому результату, любая бифуркация торов

Лиувилля реализуется в изоэнергетическом многообразии подходящей бильярдной книжки. Следующий шаг о справедливости гипотезы **В** также доказан автором совместно с В. В. Ведюшкиной и изложен в главе 6 диссертации. В этой главе алгоритмически построена бильярдная книжка, которая содержит произвольную наперед заданную базу слоения Лиувилля. Представляется полезной следующая интерпретация результата. Гипотеза **А** вместе с доказанной недавно В. В. Ведюшкиной и В. А. Кибкало локальной версией гипотезы А. Т. Фоменко гарантирует, что каждый элемент инварианта Фоменко-Цишанга — метка или тип атома — действительно встречается в инвариантах бильярдов. Доказательство гипотезы **В** означает, что для относительно более слабого, чем лиувиллева эквивалентность, отношения эквивалентности класс интегрируемых бильярдов будет не уже, чем класс всех невырожденных интегрируемых систем с двумя степенями свободы.

Построение бильярдной книжки по заданной бифуркации согласуется с построением f -графа по атому. Упомянутые f -графы были введены Ошемковым [20], как способ кодирования атомов с помощью графа специального вида, который в свою очередь можно закодировать с помощью трех перестановок. Эти же перестановки возникают на корешках бильярдной книжки, реализующей данный трехмерный атом. Сделанный в диссертации шаг по алгоритмической реализации баз слоений Лиувилля опирается на реализацию атомов. В результате алгоритма бильярдная книжка, реализующая базу слоения Лиувилля, является “склеивкой” бильярдных книжек, реализующих каждую бифуркацию по отдельности. Алгоритм позволяет предъявить перестановки на корешках получившейся бильярдной книжки. Это означает, что любая база слоения Лиувилля кодируется набором алгоритмически вычисляемых перестановок.

Отметим недавнюю работу В. Драговича и М. Раднович [21], совместно с S. Gasiorek, написанную в близкой парадигме: с помощью алгоритмически конструируемых бильярдных книжек авторами работы промоделированы введенные ими ранее [22] упорядоченные бильярдные игры — режимы движения бильярдного шара по плоскости с отражениями от нескольких софокусных эллипсов. В указанной работе также вычисляются грубые молекулы некоторых построенных книжек.

Цели и задачи диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели.

1. Доказать, что фазовое пространство динамической системы бильярдной книжки ненулевого уровня энергии является четырехмерным топологическим кусочно-гладким многообразием, а его ограничение на произвольный уровень энергии является топологическим изоэнергетическим трехмерным многообразием.
2. Показать возможность реализации любой невырожденной (боттовской) бифуркации двумерных торов Лиувилля с помощью бильярдных книжек. Предъявить алгоритм в явном

виде, по которому для любой наперед заданной бифуркации из указанного класса конструируется бильярдная книжка, реализующая ее.

3. Также, как и с реализацией бифуркаций, предъявив явный алгоритм, продемонстрировать реализацию любой базы слоения Лиувилля с помощью бильярдных книжек.

Положения, выносимые на защиту

Следующие результаты являются основными и выносятся на защиту.

1. Изоэнергетическая поверхность произвольного ненулевого уровня энергии и их объединение в фазовом пространстве для произвольной бильярдной книжки являются соответственно трехмерным и четырехмерным кусочно-гладкими топологическими многообразиями.
2. Справедлива гипотеза А. Т. Фоменко о реализации произвольной невырожденной (боттовской) бифуркации двумерных торов Лиувилля при помощи бильярдных книжек.
3. Справедлива гипотеза А. Т. Фоменко о реализации при помощи бильярдных книжек произвольной базы слоения Лиувилля, ограниченной на трехмерное изоэнергетическое многообразие.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования является бильярдная книжка — обобщение интегрируемых бильярдов в областях плоскости, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол. Бильярдная книжка получается склейкой нескольких таких бильярдов по их общим гладким дугам границы. Движение шара на них задается одним и тем же гамильтонианом, имеет один и тот же дополнительный интеграл, являющийся почти всюду независимым и находящимся в инволюции с гамильтонианом системы. Для таких систем, как и для гладких интегрируемых гамильтоновых систем, оказывается применима теория инвариантов Фоменко-Цишанга. Последние в рамках диссертации являются предметом исследования.

Научная новизна

Все положения диссертации, выносимые на защиту, являются исключительно оригинальными, получены автором самостоятельно или при равноценном вкладе с соавторами. Кроме того, диссертация содержит следующие вспомогательные результаты, которые также являются новыми:

1. лемма о коммутирующих перестановках — необходимое и достаточное условие задания корректной динамики на бильярдной книжке;
2. конструирование бильярдной книжки по конечному набору перестановок;
3. кусочно-гладкий аналог теоремы Лиувилля для определенного класса бильярдных книжек;
4. явный алгоритм реализации произвольной невырожденной (боттовской) бифуркации двумерных торов Лиувилля при помощи бильярдных книжек;
5. явный алгоритм реализации произвольной невырожденной (боттовской) бифуркации двумерных торов Лиувилля при помощи бильярдных книжек в терминологии f -графов;
6. явный алгоритм реализации произвольной базы слоения Лиувилля на трехмерном изоэнергетическом многообразии при помощи бильярдных книжек.

Методы исследования

В исследовании применяются методы теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем с одной и двумя степенями свободы, построенной А. Т. Фоменко, Х. Цишангом, А. В. Болсиновым и многими другими, а также методы вычисления таких инвариантов для математических бильярдных, разработанные В. В. Ведюшкиной.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер и находится на стыке теории топологических инвариантов интегрируемых гамильтоновых систем и теории математических бильярдных. Результаты, полученные в диссертации, позволяют реализовывать с помощью бильярдных книжек элементы других гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, большинство из которых не решаются в численном виде. Преимущество бильярдных книжек по сравнению с другими интегрируемыми системами заключается в том, что динамика на них устроена просто, а сложность динамических систем реализуется наглядной сложностью двумерного клеточного комплекса — области, по которой движется материальная точка (бильярдный шар). Клеточный комплекс и движение материальной точки на нем, в свою очередь, задается конечным набором перестановок. Таким образом, ценность данного исследования заключается в том, что разной степени сложности интегрируемые гамильтоновы системы с некоторой точностью возможно описать наглядными бильярдными книжками, задающимися перестановками и обладающими каноническим квадратичным интегралом. Кроме того, результаты диссертации являются важными для дальнейшего развития вопроса доказательства или опровержения гипотезы А. Т. Фоменко,

работа над которой сейчас активно продолжается А. Т. Фоменко, В. В. Ведюшкиной, В. А. Кибкало, С. Е. Пустовойтовым и другими.

Апробация диссертации

Основные результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств, опубликованы в пяти статьях [33, 34, 35, 36, 37] в журналах, удовлетворяющих положению о присуждении ученых степеней в МГУ, а также прошли апробацию на следующих научных конференциях и семинарах:

1. Молодежная Международная научная конференция “Методы современного математического анализа и геометрии и их приложения”, Воронеж, Воронежский государственный педагогический университет, Россия, 23-25 декабря 2016;
2. XXIV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов — 2017”, Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, Россия, 20 апреля 2017;
3. Международная молодежная научная школа “Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы”, Воронеж, Россия, 13-16 ноября 2017;
4. “Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна — 2018”, Воронеж, Россия, 25-31 января 2018;
5. XXV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов 2018”, Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, Россия, 9-13 апреля 2018;
6. “Geometry, Dynamics, Integrable Systems — GDIS 2018”, Долгопрудный, МФТИ, Россия, 5-9 июня 2018;
7. “International Conference on Topology and its Applications — 2018”, Нафпактос, Греция, 7-11 июля 2018;
8. “Integrable Systems and Nonlinear Dynamics”, Ярославль, Россия, 1-5 октября 2018;
9. Вторая Международная Молодежная Научная Школа “Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы”, Воронеж, Россия, 13 ноября - 16 декабря 2018;
10. “Workshop on Applied Topology 2019”, Kyoto University, Киото, Япония, 7-11 января 2019;
11. XXVI Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2019”, Москва, Россия, 11 апреля 2019;
12. “Workshop on Mathematical Billiards: 2019”, Сидней, Австралия, 24-27 июня 2019;

13. “New Methods in Differential Geometry”, Йена, Friedrich-Schiller University, Германия, 18-20 декабря 2019;
14. “Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна — 2020”, Воронеж, Россия, 27-30 января 2020;
15. “Ломоносовские чтения 2020”, Москва, Россия, 19-28 октября 2020;
16. IV-ая международная молодежная научная школа “Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы”, посвященная 90-летию со дня рождения профессора Ю.Г. Борисовича, Воронеж, Россия, 9-11 ноября 2020;
17. XXVII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2020”, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 10-27 ноября 2020;
18. School for young mechanics and mathematicians “Mathematical Methods of Mechanics”, Москва, Россия, 10-12 ноября 2020;
19. “Dynamics in Siberia-2021”, Новосибирск, НГУ, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия, 1-6 марта 2021;
20. Student Educational School-Conference “Mathematical Spring 2021: Invitation to Dynamical Systems”, ВШЭ, Россия, 30 марта - 2 апреля 2021;
21. XXVIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов 2021”, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 12-23 апреля 2021;
22. “Конференция международных математических центров мирового уровня 2021”, Сочи, Сириус, Россия, 9-13 августа 2021;
23. Международная конференция “Лобачевские чтения”, Казань, Россия, 30 июня - 4 июля 2022;
24. Семинар “Современные геометрические методы” под руководством акад. А. Т. Фоменко, проф. А. С. Мищенко, проф. А. В. Болсинова, проф. А. А. Ошемкова, проф. Е. А. Кудрявцевой, проф. В. В. Ведюшкиной, доц. И. М. Никонова, доц. А. Ю. Коняева, асс. В. А. Кибкало на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова, неоднократно: 6 апреля 2017, 4 октября 2017, 20 февраля 2019, 12 февраля 2020, 19 февраля 2020, 28 октября 2020;
25. Семинар “Kyoto Saturday Topology Seminar”, University of Education, Киото, Япония, 12 января 2019;

26. Семинар “Дифференциальная геометрия и приложения” под руководством акад. А. Т. Фоменко на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова, 31 октября 2022.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, шести глав и заключения. Текст работы изложен на 123 страницах. Список литературы содержит 53 наименования.

Содержание работы

Во введении формулируется цель работы, кратко излагаются ее результаты и содержание. В **первой главе** приведены основные понятия теории математического бильярда, а также вводится понятие бильярдной книжки и описываются естественные ограничения на перестановки бильярдных книжек. Сформулируем в этом разделе некоторые определения из этой главы для более детального изложения.

Определение. Рассмотрим некоторую область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей и углами излома $\pi/2$. Пусть материальная точка движется по прямой с постоянной скоростью внутри этой области Ω и отражается от гладкой части границы $\partial\Omega$ без потери скорости и естественным образом: угол падения равен углу отражения. В остальных случаях движение этой материальной точки определяется по непрерывности (детали см. в первой главе). Тогда *бильярдом* в области Ω называется динамическая система, описываемая движением этой материальной точки.

Классическим случаем бильярда является бильярд в области плоскости, ограниченной дугами софокусных эллипсов и гипербол. Такой бильярд в работах В. В. Ведюшкиной (Фокичевой) [11] называется элементарным. Этот класс широко известен благодаря интегрируемости рассматриваемой динамической системы. Ее интегрируемость вытекает из теоремы Якоби-Шаля. Она была освещена, например, в книге В. В. Козлова и Д. В. Трещева [1] и имеет следующую наглядную интерпретацию. В таком бильярде вектор скорости материальной точки на протяжении всей траектории направлен по касательной к фиксированному эллипсу или гиперболе из того же софокусного семейства, что и дуги границы.

Бильярдная книжка — это обобщение элементарного бильярда, полученное склейкой нескольких областей, ограниченных дугами софокусных квадрик, в клеточный комплекс (см. рис. 1). Более детально, рассмотрим двумерный клеточный комплекс, двумерными клетками которого являются элементарные бильярды. Одномерными клетками комплекса являются сегменты границ элементарных бильярдов — участки между изломами граничных кривых. Описанный

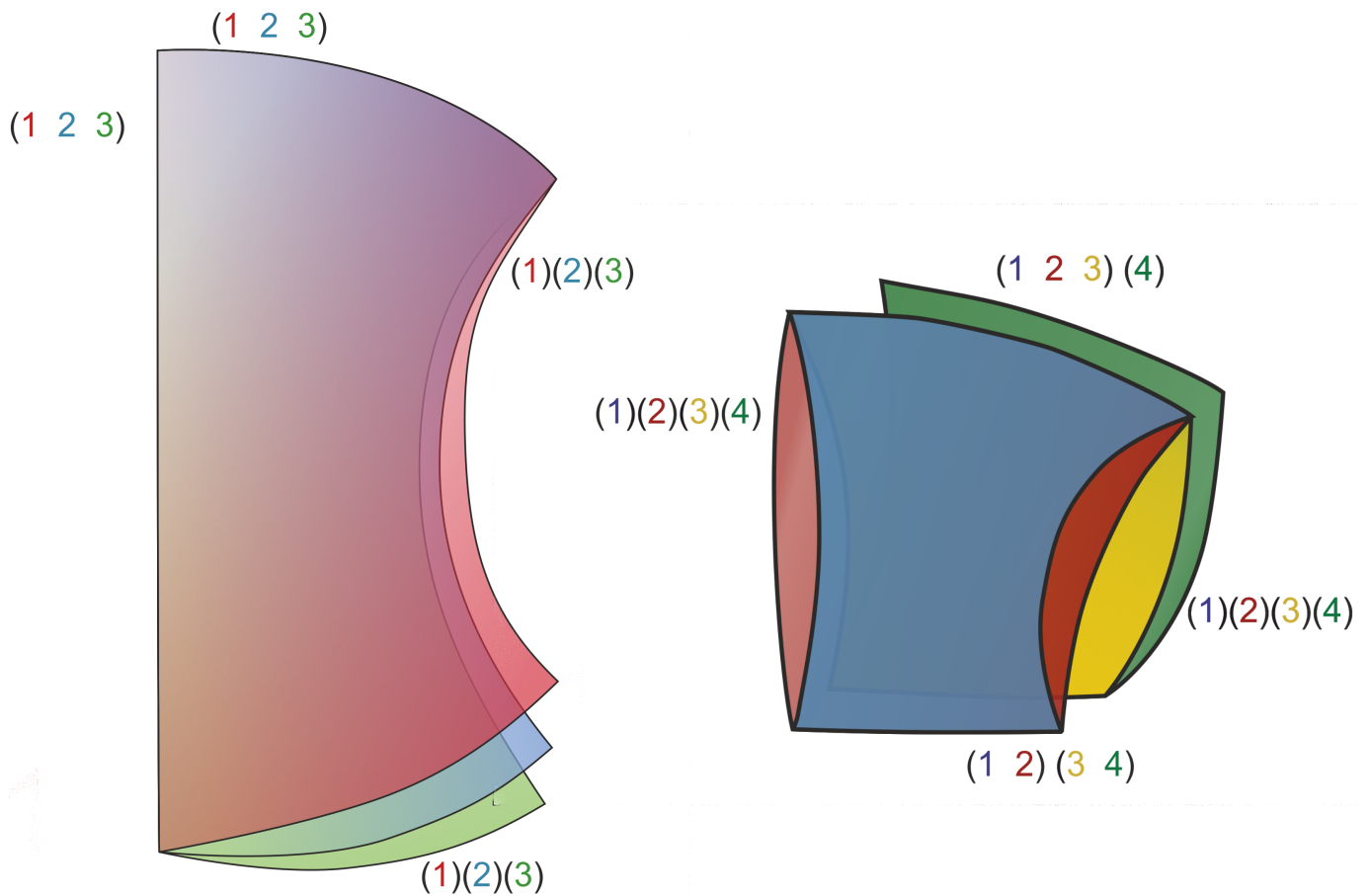


Рис. 1: Примеры бильярдных книжек.

выше клеточный комплекс назовем *бильярдным комплексом*. Рассмотрим движение на этом комплексе. Материальная точка движется внутри областей (двумерных клеток комплекса или листов книжки) по прямой, абсолютно упруго отражается и переходит с одной области на другую. Переход между областями (листами) задается с помощью перестановок на ребрах склейки (одномерных клетках комплекса или корешках книжки). Такие перестановки являются циклическими перестановками из номеров листов, примыкающих к рассматриваемому ребру. Динамическая система, заданная описанным выше движением материальной точки по бильярдному комплексу называется *бильярдной книжкой*.

Также заметим, что на перестановки есть естественное ограничение. Изометрично спроектируем все листы бильярдного комплекса на плоскость. Если образ нескольких ребер клеточного комплекса при этой проекции является одной и той же дугой плоскости, то объединим соответствующие им циклы в одну перестановку (эти циклы, очевидно, независимы). Для непрерывности движения частицы по книжке потребуем коммутирование перестановок в нульмерных клетках. В терминах проекции это означает, что перестановки, соответствующие дугам двух квадрик в окрестности точки пересечения последних, коммутируют. Условие коммутирования перестановок в углах книжки является необходимым и достаточным условием для того чтобы

продолжение траектории, попавшей в вершину угла, было корректно определено. Обозначим через l_1 и l_2 дуги квадрик, которые имеют общую точку O и обозначим через σ_1 и σ_2 соответствующие им коммутирующие перестановки. Траектория, попавшая в вершину O , с одной стороны является пределом близких траекторий, которые сначала ударяются о корешок l_1 , а потом о корешок l_2 . Такие траектории меняют лист согласно перестановке $\sigma_2 \circ \sigma_1$. С другой стороны, она же является пределом траекторий, которые ударяются о корешки в другом порядке и меняют лист по перестановке $\sigma_1 \circ \sigma_2$. Получается, что материальная точка при попадании в вершину угла поменяет лист по перестановке $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$ вследствие коммутирования σ_1 и σ_2 . Такое ограничение подробно описано в первой главе в лемме о коммутирующих перестановках.

Бильярдная книжка, также как и элементарный бильярд, является кусочно-гладкой интегрируемой системой, поскольку дополнительный интеграл элементарных бильярдов порождает дополнительный интеграл бильярдных книжек. Но преимуществом бильярдных книжек является тот факт, что динамическая система получается более богатой и сложной по сравнению с элементарными бильярдами.

Во **второй главе** описаны элементы теории инвариантов Фоменко-Цишанга, основанной на изучении лиувиллевой эквивалентности замыканий траекторий интегрируемых гамильтоновых систем. Эта эквивалентность слабее траекторной, поскольку описывает не сами решения, а их замыкания. В случае невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем почти все решения имеют вид иррациональной обмотки тора Лиувилля. Поэтому лиувиллева эквивалентность, хоть и не дает решения в явном виде, позволяет достаточно подробно описывать решения системы. А именно, она показывает, как фазовые пространства расслоены на торы Лиувилля.

В этой главе приводятся основные определения, конструкции и теоремы теории инвариантов Фоменко-Цишанга интегрируемых гамильтоновых систем, в том числе дано описание атомов — бифуркаций торов Лиувилля — и их представление в виде f -графа. Напомним ключевые понятия, активно используемые в диссертации — атом, грубая молекула (инвариант Фоменко), грубая лиувиллева эквивалентность.

Пусть задана интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система (M^4, ω, H, f) на симплектическом многообразии M^4 с формой ω и функционально независимым гамильтонианом H и дополнительным первым интегралом f , находящимися в инволюции. Для этой системы рассмотрим неособые *изоэнергетические многообразия* $Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = h\}$, являющиеся поверхностями уровня гамильтониана H при некоторой константе h . На изоэнергетическом многообразии Q^3 задано слоение дополнительным первым интегралом f . Это слоение является *слоением Лиувилля*, все регулярные слои которого — двумерные гладкие торы. Базой слоения Лиувилля является *граф Роба*. Каждой точке на ребре графа Роба соответствует связная компонента слоя, являющаяся двумерным тором. Вершинам графа соответствует критическая связная компонента слоя, инвариантная окрестность которого называется *атомом*, являющимся бифуркацией одного набора двумерных торов в другой. В теории инвариантов Фоменко-Цишанга все

атомы полностью описаны и закодированы буквами. Граф Роба, вершины которого оснащены соответствующими им атомами, называется *грубой молекулой* или *инвариантом Фоменко*.

Определение. Две интегрируемые по Лиувиллю динамические системы называются *грубо лиувиллево эквивалентными*, если существует гомеоморфизм баз слоений Лиувилля, который может быть локально (в окрестности каждой точки базы) поднят до послойного гомеоморфизма.

Теорема (А.Т. Фоменко [8]). *Две интегрируемые по Лиувиллю динамические системы грубо лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их грубые молекулы совпадают.*

Атомы и грубые молекулы используются при построении более тонкого инварианта интегрируемых гамильтоновых систем — *меченой молекулы*. Она получается из грубой молекулы путем оснащения ее ребер и некоторых связных подграфов числовыми метками. Диссертация посвящена реализации грубых молекул, поэтому детально останавливаться на полном инварианте не будем.

Из результатов А.Т. Фоменко об особенностях функций Морса-Ботта следует, что все невырожденные (боттовские) трехмерные атомы являются расслоением Зейферта с особыми слоями типа $(2, 1)$ над двумерными атомами, то есть бифуркациями гамильтоновой системы с одной степенью свободы. А они, в свою очередь, склеены из крестов (подробнее см. вторую главу). Благодаря такому виду стала возможна реализация всех атомов при помощи бильярдных книжек.

Кроме того, существует представление атомов в виде f -графов, введенное А. А. Ошемковым (см. [20]). Такие графы кодируются тремя перестановками, а ориентируемые ребра графа соответствуют движению материальной точки в окрестности бифуркаций. Представление атомов в виде f -графов, как оказывается, также удобно для иллюстрации алгоритма реализации атомов с помощью бильярдных книжек.

Третья глава посвящена формальному представлению бильярдной книжки в виде интегрируемой по Лиувиллю системы. В нем есть несколько неочевидных элементов, которые подробно разобраны в этой главе.

Во-первых, определено фазовое пространство M^4 бильярдной книжки и заданы на нем явные формулы гамильтониана H и дополнительного первого интеграла Λ , отвечающего параметру каустики. Чтобы для бильярдной книжки на бильярдном комплексе $X = X^0 \cup X^1 \cup X^2$ описать фазовое пространство M^4 , нужно рассмотреть несвязное объединение всех листов, считая границу для каждого листа отдельно:

$$[X]^2 := \bigsqcup_{e^2 \in X^2} \bar{e}^2,$$

и каждой точке из этого объединения сопоставить ненулевой вектор скорости $[X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Затем, у полученного декартового произведения необходимо отождествить точки, которые соответствуют отражению материальной точки от границы листов бильярдной книжки и переходу

с листа на лист. Это отношение эквивалентности в зависимости от положения точки на бильярдном комплексе и направления вектора скорости подробно описано в третьей главе.

Во-вторых, доказано, что фазовое пространство бильярдной книжки, а также ее изоэнергетические многообразия положительного уровня энергии являются кусочно-гладкими топологическими многообразиями. Потенциально они могли оказаться более сложным объектом, например, клеточными комплексами, поскольку движение определено на бильярдном комплексе, который в общем случае не является кусочно-гладким многообразием. Для этого результата важно, что бильярдная книжка удовлетворяет критерию из леммы о коммутирующих перестановках. Этот результат выносится на защиту.

Теорема (Харчева: см. теорему в [35] и следствие из нее; в диссертации теорема 3.1 и следствие 3.2). *Для любой бильярдной книжки фазовое пространство и изоэнергетическое многообразие положительного уровня энергии являются топологическими кусочно-гладкими четырехмерными и трехмерными многообразиями соответственно.*

В-третьих, рассматриваемая динамическая система бильярдной книжки является не гладкой, а кусочно-гладкой, как и большинство других бильярдных. Это означает, что к системе не применима теорема Лиувилля. Значит, к такой системе также не применима теория инвариантов Фоменко-Цишанга в классическом виде. В этой главе было сформулировано обобщение инвариантов Фоменко-Цишанга для кусочно-гладких бильярдных книжек. Но заметим, что в отличие от гладких систем, для кусочно-гладких бильярдных книжек необходимо отдельно рассматривать регулярные слои и доказывать, что они состоят из двумерных торов.

В **четвертой главе** в классе бильярдных книжек выделяется два подкласса **a** и **b**, которые необходимы для реализации атомов и грубых молекул.

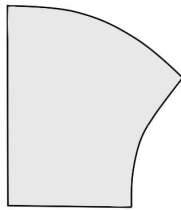


Рис. 2: Область A'_0 .

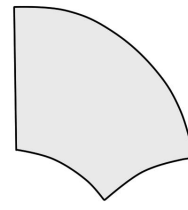


Рис. 3: Область B_0 .

Определение. Бильярдная книжка принадлежит *классу a* (*классу b*), если все ее листы имеют тип A'_0 (A'_0 или B_0), изображенный на рис. 2 (рис. 2 и 3), и правым границам всех листов соответствуют тождественные перестановки, а нижним границам всех листов — нетождественные.

Начиная с этой главы, будем рассматривать бильярдные книжки только из этих классов. Для них упрощается описание слоения Лиувилля и движения материальной точки, а также верно несколько вспомогательных лемм.

Глава содержит переформулировку леммы о коммутирующих перестановках для классов **a** и **b** бильярдных книжек. Далее в диссертации мы будем неоднократно пользоваться описанным в этой лемме ограничением на перестановки и проверять с помощью него корректность задания движения на бильярдном комплексе. Например, лемма о коммутирующих перестановках используется при конструировании бильярдных книжек класса **a** по трем перестановкам и бильярдных книжек класса **b** по семейству перестановок, описанных в этой главе. Бильярдные книжки, построенные этими способами, корректны согласно лемме о коммутирующих перестановок.

Также в этой главе доказывается кусочно-гладкий аналог теоремы Лиувилля для бильярдных книжек классов **a** и **b**. А именно, явно указываются критические слои и доказывается, что остальные слои гомеоморфны несвязному объединению двумерных кусочно-гладких торов. Более того, каждый из торов соответствует некоторому движению на комплексе, которое можно явно задать с помощью перестановки, построенной по перестановкам бильярдных книжек.

Пятая глава содержит один из основных результатов — теорему о реализации атомов при помощи бильярдных книжек, подтверждающую справедливость гипотезы Фоменко **A**.

Теорема (Ведюшкина-Харчева: см. теорему 2 в [33]; в диссертации теорема 5.1). *Гипотеза Фоменко **A** верна, а именно, для любого невырожденного (боттовского) атома алгоритмически строится бильярдная книжка класса **a**, такая что в ее изоэнергетическом многообразии Q^3 слоение Лиувилля в прообразе окрестности особого значения интеграла Λ , отвечающего траекториям, направленным к или от одного из фокусов, послойно гомеоморфно данному атому.*

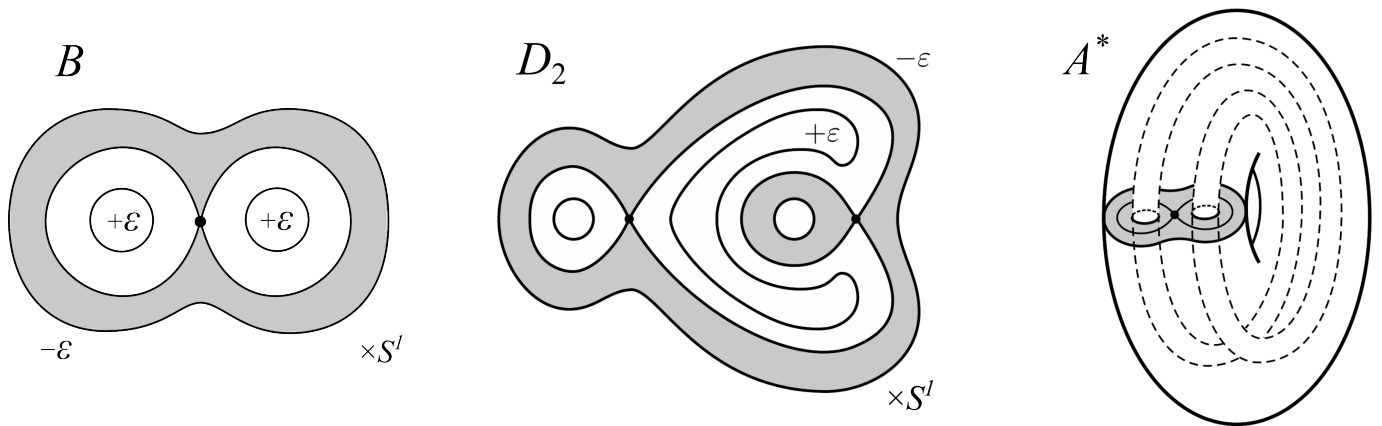


Рис. 4: Атомы B , D_2 и A^* .

В этой главе приводится явный алгоритм построения бильярдной книжки, реализующей произвольный боттовский атом, вычисляется грубая молекула для такой бильярдной книжки, демонстрируется алгоритм на примерах атомов B , D_2 и A^* (см. рис. 4), а затем, предьявляется

доказательство теоремы о реализации атомов, подтверждающее корректность сформулированного алгоритма. В конце главы дается более простая переформулировка алгоритма на язык f -графов.

Шестая глава посвящена заключительному основному результату, опирающемуся на предыдущие. В ней содержится теорема о реализации произвольной грубой молекулы при помощи бильярдных книжек, подтверждающая справедливость гипотезы Фоменко **В**.

Теорема (Ведюшкина-Харчева: см. теорему 6 в [36]; в диссертации теорема 6.1). *Гипотеза Фоменко В верна, то есть любая грубая молекула интегрируемой гамильтоновой системы с невырожденными (боттовскими) бифуркациями торов Лиувилля реализуется бильярдными книжками. Более точно: по любой такой грубой молекуле алгоритмически строится бильярдная книжка класса **B** с каноническим квадратичным интегралом Λ , отвечающим параметру каустики, такая что грубая молекула, соответствующая этой системе, изоморфна заданной изначально грубой молекуле.*

Изложение в шестой главе структурировано так же, как и в предыдущей. Сначала приводится явный алгоритм построения бильярдной книжки, реализующей произвольную грубую молекулу. Согласно этому алгоритму, для реализации произвольной грубой молекулы сначала необходимо реализовать каждый из атомов, содержащийся в ней, затем расположить их на разных уровнях интеграла и последовательно склеивать ребра в произвольном порядке. Все эти действия соответствуют некоторому последовательному изменению бильярдной книжки. Доказано, что склейка ребра по алгоритму действует локально и не затрагивает оставшуюся часть молекулы. После склейки всех ребер получается необходимая меченая молекула.

Далее, алгоритм проиллюстрирован на примере реализации грубой молекулы, содержащей в себе атомы B , D_2 и A^* . Эти атомы были реализованы в виде примера в пятой главе. В шестой главе они последовательно склеиваются по ребрам. При этом для наглядности на каждом этапе преобразования бильярдной книжки производится вычисление перестановок, соответствующих торах на регулярных уровнях и движению на бильярдном комплексе. Напомним, что в четвертой главе было сформулировано это соответствие.

В конце приводится доказательство теоремы о реализации грубых молекул, разбитое на несколько лемм и показывающее корректность алгоритма.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям академику РАН проф. А. Т. Фоменко и проф. В. В. Ведюшкиной за интересные непростые задачи. Ваше вдохновляющее руководство, профессионализм, а также теплая поддержка и внимание на протяжении длительного этапа совместной работы позволили преодолеть множество трудностей, дали уверенность и силы продолжать исследование.

Также, автор искренне благодарит весь коллектив кафедры дифференциальной геометрии и приложений за предоставленные большие возможности в реализации своего научного потенциала, за открытость к обсуждению любых задач, за творческую и доброжелательную атмосферу.

Глава 1

Математический бильярд

1.1 Бильярд в области евклидова пространства

Определение 1.1. Пусть закон движения $x(t)$ материальной точки в некотором метрическом пространстве Ω является непрерывной функцией и однозначно определяется начальным положением $x_0 \in \Omega$ и некоторыми другими начальными условиями. Тогда для любого набора начальных условий можно рассмотреть функцию, сопоставляющую начальному значению x_0 , закон движения $x(t)$ в пространстве непрерывных функций $C^0(\mathbb{R}, \Omega)$. Если функция, отображающая начальное положение x_0 в пространство $C^0(\mathbb{R}, \Omega)$, непрерывна, то будем говорить о *непрерывности закона движения $x(t)$ материальной точки в зависимости от начального положения*.

Определение 1.2. Рассмотрим некоторую область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей и углами излома $\pi/2$. Пусть материальная точка движется по прямой с постоянной скоростью внутри этой области Ω и отражается от гладкой части границы $\partial\Omega$ абсолютно упруго, т.е. без потери значения модуля скорости, при этом угол падения равен углу отражения. В остальных случаях движение этой материальной точки определяется исходя из непрерывности ее закона движения относительно начального положения. Тогда *бильярдом* в области Ω называется динамическая система, описывающая движение этой материальной точки.

Замечание 1.1. Движение материальной точки по прямой внутри области и отражение ее от гладкой границы задает непрерывный закон движения относительно начального положения. Особые случаи, такие как попадание траектории бильярда в угол излома и касание границы, доопределяются так, что закон движения все также остается непрерывным относительно начального положения (см. подробности в разделе 1.4 далее). Эти особые траектории составляют множество меры нуль, поэтому их можно доопределить по непрерывности. Таким образом, мы гарантируем непрерывность фазового потока на фазовом пространстве (см. подробнее раздел 3.1).

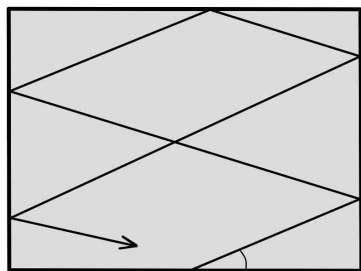


Рис. 1.1: Биллиард в прямоугольнике.

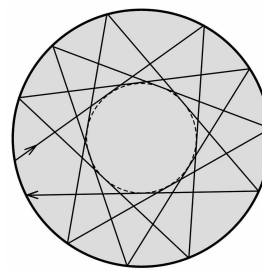


Рис. 1.2: Биллиард в круге.

Замечание 1.2 (о первых интегралах в биллиардах). Отметим, что любой биллиард является гамильтоновой динамической системой с двумя степенями свободы (см. подробнее о гамильтоновости кусочно-гладких динамических систем в разделе 3.4). Гамильтонианом этой системы является ее полная энергия, равная половине квадрата длины вектора скорости. Из определения интегрируемости автономной гамильтоновой системы следует, что для интегрируемости биллиарда необходим еще один первый интеграл, функционально независимый с гамильтонианом. В общем случае, для произвольной области Ω его не существует. Но если подобрать “хорошую” область Ω , то можно найти функцию, которая будет первым интегралом. Например, если Ω является прямоугольником, то первым интегралом является угол наклона траектории биллиарда, если кругом — то интегралом является радиус окружности, которой касается траектория (см. рис. 1.1, 1.2). Есть еще один класс интегрируемых биллиардов, о котором пойдет речь ниже.

1.2 Элементарный биллиард

Определение 1.3. *Софокусным семейством (семейством софокусных квадрик)* называется множество кривых на плоскости \mathbb{R}^2 с евклидовыми координатами (x, y) , описываемых уравнением

$$x^2 \cdot (b - \lambda) + y^2 \cdot (a - \lambda) = (a - \lambda)(b - \lambda), \quad (1.2.1)$$

где $a > b > 0$ — параметры этого семейства, а число $\lambda \in (-\infty, a]$ — параметр кривой из этого семейства или параметр квадрики.

Параметры софокусного семейства a, b будут фиксированы на протяжении всей работы, поэтому в дальнейшем мы будем говорить просто о софокусном семействе, не уточняя его параметров.

Замечание 1.3. Кривая из софокусного семейства является эллипсом при $\lambda \in (-\infty, b)$, гиперболой при $\lambda \in (b, a)$, прямой при $\lambda = a$ и $\lambda = b$. Эллипсы и гиперболы из этого семейства имеют одни и те же фокусы и пересекаются под прямым углом. Прямая в случае $\lambda = b$ является осью Ox , проходящей через фокусы семейства, а в случае $\lambda = a$ она является осью Oy и проходит через середину отрезка, соединяющего фокусы, и ортогональна ему (см. рис. 1.3).

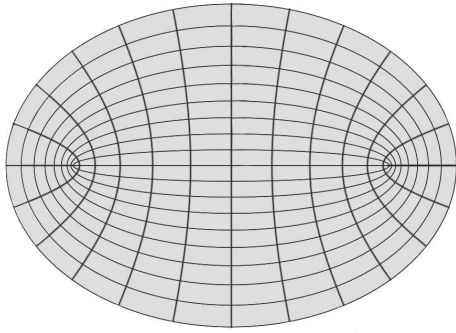


Рис. 1.3: Семейство софокусных эллипсов и гипербол.

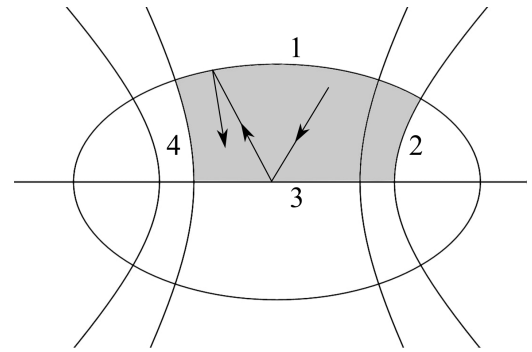


Рис. 1.4: Пример элементарного билиарда. 1, 3 — выпуклые дуги, 2, 4 — невыпуклые.

Определение 1.4. Рассмотрим *элементарную билиардную область* — компактную область Ω в плоскости \mathbb{R}^2 , граница которой состоит из дуг софокусных квадрик (см. пример на рис. 1.4), пересекающихся под углом $\frac{\pi}{2}$, направленным внутрь области Ω . Билиард в области Ω называется *элементарным билиардом*.

Определение 1.5. В элементарной билиардной области Ω дуга квадрики l называется *выпуклой*, если для каждой точки $x \in l$ существует такая окрестность $U(x)$, что $U(x) \cap \Omega$ является выпуклым множеством (см. рис. 1.4). В противном случае дуга называется *невыпуклой*.

1.3 Интегрируемость элементарного билиарда

Из классической теоремы Якоби-Шаля вытекает следующее свойство элементарного билиарда (см. подробности в работе [1] В.В. Козлова и Д.В. Трещева).

Лемма 1.1. *Звенья любой траектории в элементарном билиарде либо лежат на касательных к фиксированной квадрике из того же софокусного семейства, что и граница элементарной билиардной области, либо их продолжения проходят через любой из фокусов (см. рис. 1.5).*

Определение 1.6. Кривая, которой касаются звенья траектории или их продолжения в элементарном билиарде, называется *каустикой (огibaющей)*.

Замечание 1.4 (об интегрируемости элементарного билиарда). Элементарный билиард является интегрируемой гамильтоновой динамической системой с двумя первыми интегралами (см. стр. 105 в [1]): гамильтонианом H (полной энергией системы) и дополнительным интегралом Λ , значение которого в точке (x, y, v_1, v_2) фазового пространства принимает значение параметра каустики, которой касается траектория билиарда, проходящей через точку (x, y) с вектором скорости (v_1, v_2) .

Подробнее фазовое пространство и формулы описанных выше интегралов будут представлены ниже для более общего случая.

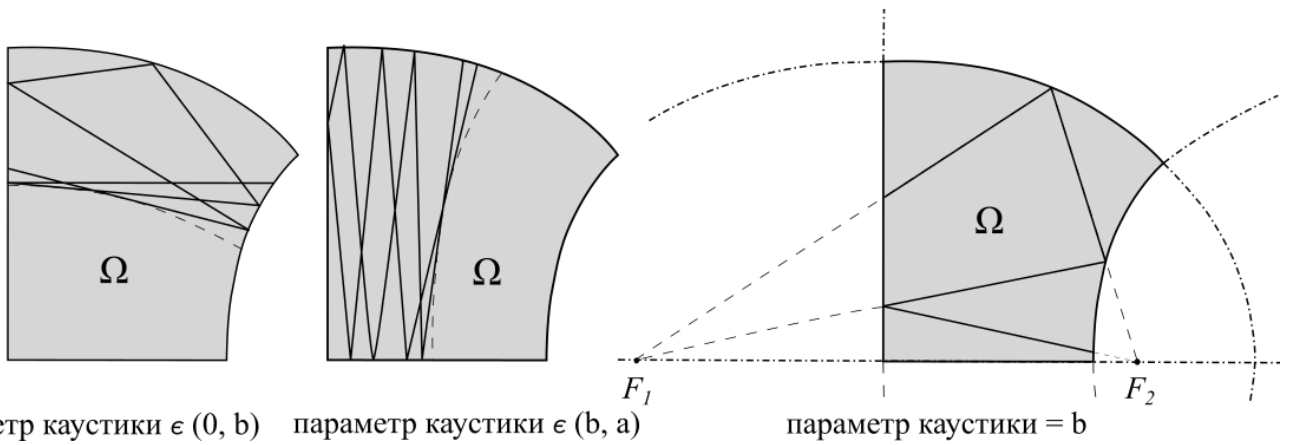


Рис. 1.5: Иллюстрация леммы 1.1: примеры траекторий, продолжения звеньев которых касаются эллипса, гиперболы или проходят через фокусы.

1.4 Особые траектории элементарного бильярда

Опишем подробнее, как выглядит движение материальной точки элементарного бильярда в области Ω в случаях, отличающихся от движения по прямой внутри области и отражения от гладкой части границы. Его мы определяем по непрерывности закона движения относительно начального положения (см. опр.. 1.1). Есть два случая такого движения.

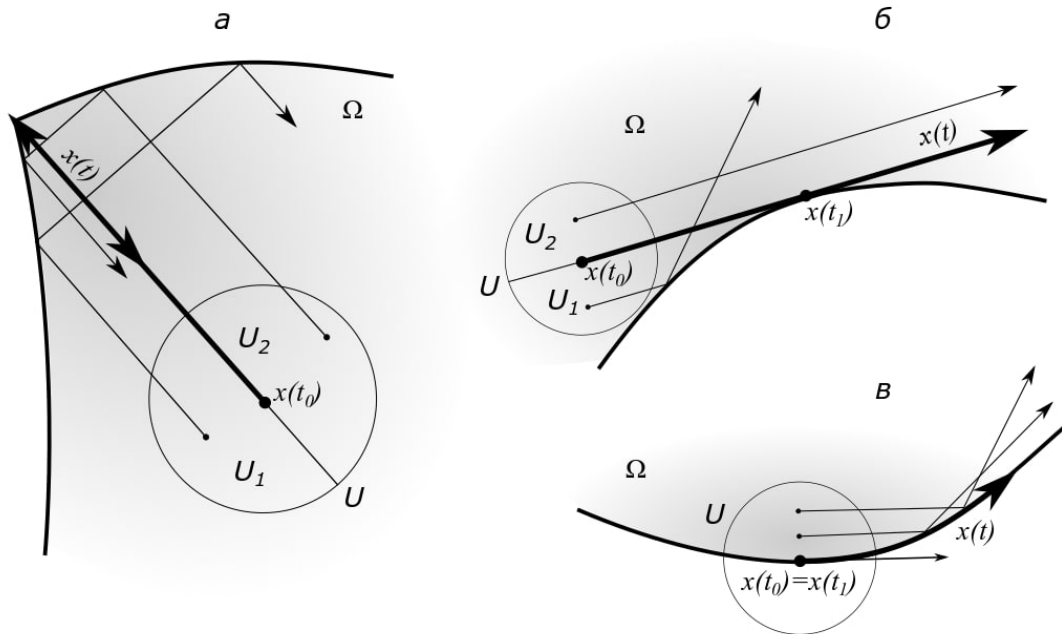


Рис. 1.6: Особые траектории в элементарном бильярде.

1. Пусть траектория материальной точки, отвечающая закону движения $x(t)$, попала в угол излома. Из определения элементарной бильярдной области следует, что он равен $\pi/2$.

Без ограничения общности будем считать, что начальный момент времени t_0 был до попадания траектории в угол, но после последнего отражения от границы области. А также расположим область на плоскости так, как показано на рис. 1.6 (а) (это нужно лишь для простоты дальнейшего рассуждения). Рассмотрим малую окрестность U точки $x(t_0)$ траектории бильярда. Тогда для одного подмножества (U_1 на рис. 1.6 (а)) начальных значений из окрестности U есть траектории, в которых материальная точка отразилась от левой границы, а потом от верхней, для другого подмножества (U_2 на рис. 1.6 (а)) — сначала от верхней, потом от левой. Причем, так как угол равен $\pi/2$, то предел с обеих сторон одинаковый: материальная точка движется по прямой, попадает в угол, отражается и продолжает движение в обратную сторону вдоль той же прямой.

2. Пусть траектория $x(t)$ в момент времени t_1 касается гладкой части границы $\partial\Omega$. Если дуга, которой касается траектория, является невыпуклой дугой границы, то материальная точка продолжает движение по прямой. Если же эта дуга является выпуклой, то траектория лежит на границе бильярда. Такой результат можно получить, рассмотрев, как и в предыдущем случае, близкие траектории. В этих двух случаях они изображены на рис. 1.6 (б) и 1.6 (в). Обозначения на этих рисунках аналогичны обозначениям на рис. 1.6 (а).

1.5 Бильiardная книжка

Рассмотрим обобщение элементарного бильiardа: склеим несколько элементарных бильiardных областей (листов), и пусть материальная точка, ударяясь от границы, переходит с одного листа на другой (правило такого перехода задается приписанной перестановкой и будет подробно определено ниже) (см. рис. 1.7).

Определение 1.7. Рассмотрим несколько элементарных бильiardных областей. Выберем из них несколько с общей, как подмножество плоскости, дугой границы. Склеим изометрично эти области вдоль этой дуги. Такая операция называется *склеивкой элементарных бильiardных областей*. Отметим, что результатом нескольких склеек является некоторый двумерный клеточный комплекс.

Определение 1.8. Рассмотрим двумерный клеточный комплекс $X = X^0 \cup X^1 \cup X^2$, полученный несколькими склейками элементарных бильiardных областей, со следующим естественным разбиением на клетки. Двумерными клетками является внутренность этих элементарных бильiardных областей. Одномерными — дуги квадрик (гладкие сегменты границ этих областей). Нульмерными — точки излома границ этих областей.

Заметим, что на двумерных клетках этого комплекса можно ввести метрику (структуру метрического пространства), индуцированную метрикой плоскости, в которую эти области вложены. Поскольку склейка была изометричной, то эту метрику можно кусочно-гладким образом

расширить на весь клеточный комплекс X . Клеточный комплекс X с метрикой на нем называется *бильярдным комплексом*. Его двумерные клетки называются *листами*, одномерные — *корешками*, нульмерные — *угловыми точками*.

Также заметим, что на элементарных бильярдных областях по определению задано изометричное вложение в плоскость \mathbb{R}^2 . Значит, на двумерных клетках X^2 этого комплекса определено непрерывное отображение $\rho : X^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (это отображение не обязано быть вложением). Доопределим его на всем комплексе X по непрерывности. Получившееся отображение $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ бильярдного комплекса в плоскость называется *каноническим*.

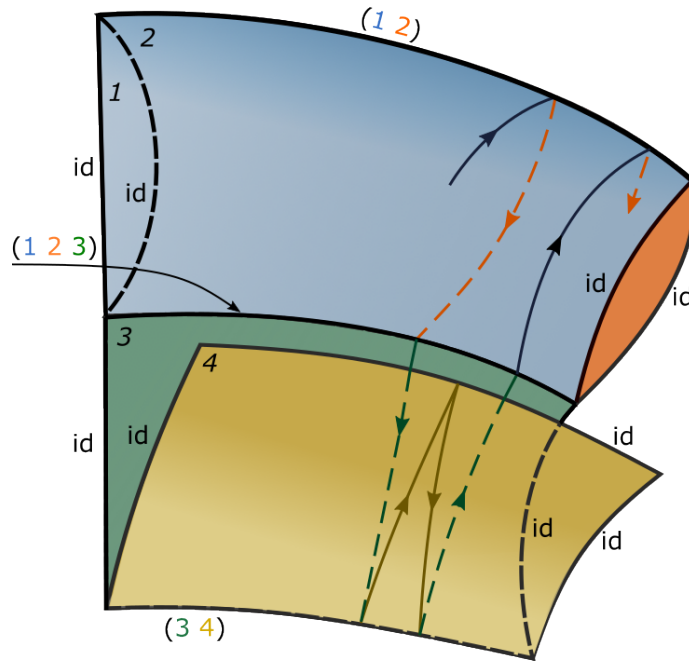


Рис. 1.7: Пример бильярдной книжки, содержащей четыре листа, и бильярдной траектории на ней.

Определение 1.9. *Бильярдной книжкой* \mathcal{B} называется динамическая система, описывающая движение материальной точки в бильярдном комплексе $X = X^0 \cup X^1 \cup X^2$ (см. рис. 1.7) со следующими свойствами.

1. Корешкам $e^1 \in X^1$ сопоставлены перестановки $\Sigma[e^1]$, действующие на листах бильярдного комплекса и описывающие переход материальной точки с одного листа на другой.
2. Для любого корешка $e^1 \in X^1$ перестановка $\Sigma[e^1]$ является циклической перестановкой тех листов, в границу которых входит этот корешок.
3. Материальная точка внутри листов движется по прямой (в смысле образа канонического отображения).

4. Если материальная точка с листа $e^2 \in X^2$ попадает на корешок $e^1 \in X^1$ транстрверсально, то она переходит на другой лист по перестановке $\Sigma[e^1]$, либо абсолютно-упруго отражаясь от корешка e^1 , либо продолжая свое движение без отражения. Последнее зависит от расположения листов e^2 и $\Sigma[e^1](e^2)$. Если они при канонической проекции на плоскость расположены по одну сторону от корешка e^1 , то материальная точка абсолютно-упруго отражается, если по разные — продолжает движение по прямой.
5. Считаем движение на бильярдном комплексе X неопределенным в точке касания траекторией корешка, являющегося невыпуклой частью границы для хотя бы одного листа (в смысле опр. 1.5), если его невозможно доопределить исходя из его непрерывности относительно начального положения (подробнее см. раздел 1.7 “выпуклые склейки”).
6. Во всех остальных случаях, кроме предыдущего, движение материальной точки возможно доопределить исходя из его непрерывности относительно начального положения. Если это не так, то считаем, что бильiardная книжка задана некорректно, то есть движение на бильiardном комплексе задать невозможно (подробнее см. раздел 1.9 “лемма о коммутирующих перестановках”).

Замечание 1.5 (о нумерации листов бильiardной книжки). Для удобства описания перестановок введем нумерацию на листах $N : X^2 \rightarrow \mathbb{N}$ и будем рассматривать перестановки уже не на листах, а на их номерах. При этом обозначение бильiardной книжки расширяется до $\mathcal{B}(X, \Sigma, N)$. В расширенном определении бильiardные книжки считаются эквивалентными, если они совпадают с точностью до перенумерации листов.

Замечание 1.6. Обратим внимание, что система бильiardной книжки необратима, то есть при замене времени на обратное, траектория движения шара меняется. Это указывает на богатые свойства рассматриваемого класса динамических систем. Например, для фиксированной бильiardной книжки можно рассмотреть обратную ей (в общем случае другую бильiardную книжку), полученную заменой всех перестановок на обратные им. Легко заметить, что все траектории обратной книжки являются траекториями исходной, полученные заменой времени на обратное.

1.6 Интегрируемость бильiardной книжки

Рассмотрим образ канонического отображения ρ (см. опр. 1.8) любой неособой траектории материальной точки в бильiardной книжке $\mathcal{B}(X, \Sigma, N)$. Получим некоторое движение в плоскости. Оно является либо движением по прямой, либо отражением от некоторой квадрики из фиксированного семейства. Значит, у такого движения есть те же функции, которые сохраняются вдоль траектории, что и у элементарного бильiardа. Значит, в бильiardной книжке есть

такие же первые интегралы, как и в элементарном бильярде: полная энергия и параметр каустики. Из этого следует, что бильярдная книжка так же, как и элементарный бильярд, является интегрируемой кусочно-гладкой гамильтоновой динамической системой. Явные формулы первых интегралов будут даны ниже в разделе 3.2. Но динамические системы бильярдных книжек устроены сложнее и позволяют реализовывать больший класс интегрируемых кусочно-гладких гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Поэтому далее мы будем работать не с самими элементарными бильярдами, а с их обобщениями.

1.7 Невыпуклые склейки

Есть два случая невыпуклых склеек, при которых движение после касания корешка невозможно доопределить. Рассмотрим их подробнее.

- Пусть корешок e^1 в бильярдном комплексе является невыпуклым для листов e_1^2 и e_2^2 , границей которых он является, а перестановка $\Sigma[e^1]$ переводит лист e_1^2 в e_2^2 . Тогда траекторию бильярдной книжки, которая идет по листу e_1^2 и касается дуги e^1 , невозможно определить исходя из непрерывности закона движения материальной точки относительно начального положения. Это происходит из-за того, что есть близкие ей траектории, которые соответствуют движению материальной точки по одному и тому же листу e_1^2 , и траектории, которые переходят по перестановке $\Sigma[e^1]$ на лист e_2^2 (см. рис. 1.8 (а)). Поэтому траектория, которая касается такого корешка, не определена в точках касания согласно п. 5 опр. 1.9 бильярдной книжки.
- Пусть корешок e^1 в бильярдном комплексе является невыпуклым для листа e_1^2 и выпуклым для как минимум еще двух листов e_2^2 и e_3^2 , а перестановка $\Sigma[e^1]$ переводит лист e_1^2 в лист e_2^2 и лист e_2^2 в лист e_3^2 . Тогда траекторию бильярдной книжки, которая идет по листу e_1^2 и касается дуги e^1 , также, как и в предыдущем случае, невозможно определить исходя из непрерывности закона движения материальной точки относительно начального положения. Это происходит из-за того, что есть близкие ей траектории, которые продолжают движение по тому же листу, что и шли (по листу e_1^2), и траектории, которые переходят по перестановке $\Sigma[e^1]$ на лист e_2^2 и затем на лист e_3^2 (см. рис. 1.8 (б)).

Можно было бы запретить такие корешки (невыпуклые склейки). Тогда определялись бы все траектории, и фазовый поток был бы полным. Но нас в первую очередь интересуют слоения Лиувилля. А они корректно определены даже в случае невыпуклых склеек (см. подробнее раздел 3.1 “описание фазового пространства произвольной бильярдной книжки” ниже). То обстоятельство, что на некоторых слоях интегральные траектории системы не определены, не влияет на бифуркации слоев. Кроме того, для реализации грубых молекул нам необходимы бильярдные книжки с невыпуклыми склейками, так как они обеспечивают необходимое количество

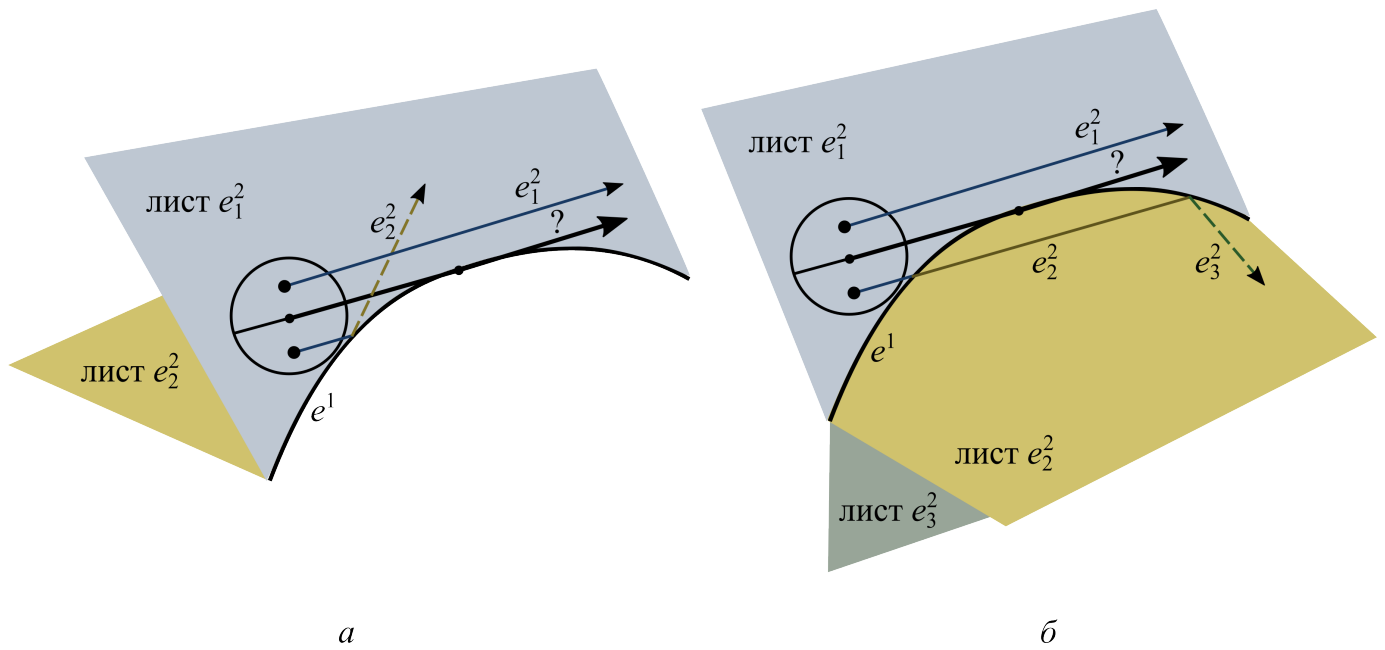


Рис. 1.8: Два случая невыпуклых склеек листов и траекторий, которые невозможно доопределить по непрерывности после касания невыпуклого корешка.

бифуркационных уровней дополнительного первого интеграла. Если все склейки выпуклы, то особых слоев всего три, а этого недостаточно для реализации произвольной молекулы со сколь угодно большим числом седловых особенностей.

1.8 Особые траектории бильярдной книжки

Особые траектории на бильярдной книжке (те, которые доопределены в п. 6 опр. 1.9 бильярдной книжки) строятся аналогично особым траекториям в элементарном бильярде (см. раздел 1.4), но с добавлением переходов с листа на лист. Опишем их подробнее.

Пусть дана бильярдная книжка $\mathcal{B}(X, \Sigma, N)$. Рассмотрим траекторию, которая касается некоторого корешка $e^1 \in X^1$. Есть несколько случаев касания в зависимости от расположения листов.

- Есть два случая, которые были рассмотрены ранее в разделе 1.7 “выпуклые склейки”. В них траектория в точке касания неопределена.
- Корешок e^1 является выпуклым по отношению ко всем листам, границе которых он принадлежит (см. рис. 1.9 (а)). Обозначим эти листы через $e_1^2, e_2^2, \dots, e_m^2$, где $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим любую траекторию, касающуюся корешка e^1 . Покажем, что она идет вдоль него по выпуклой дуге и при этом принадлежит сразу всем листам $e_1^2, e_2^2, \dots, e_m^2$. Действительно, в любой достаточно малой окрестности U точки касания можно найти траекторию со сколь угодно конечным числом отражений. Поскольку по определению 1.9 бильярдной книжки

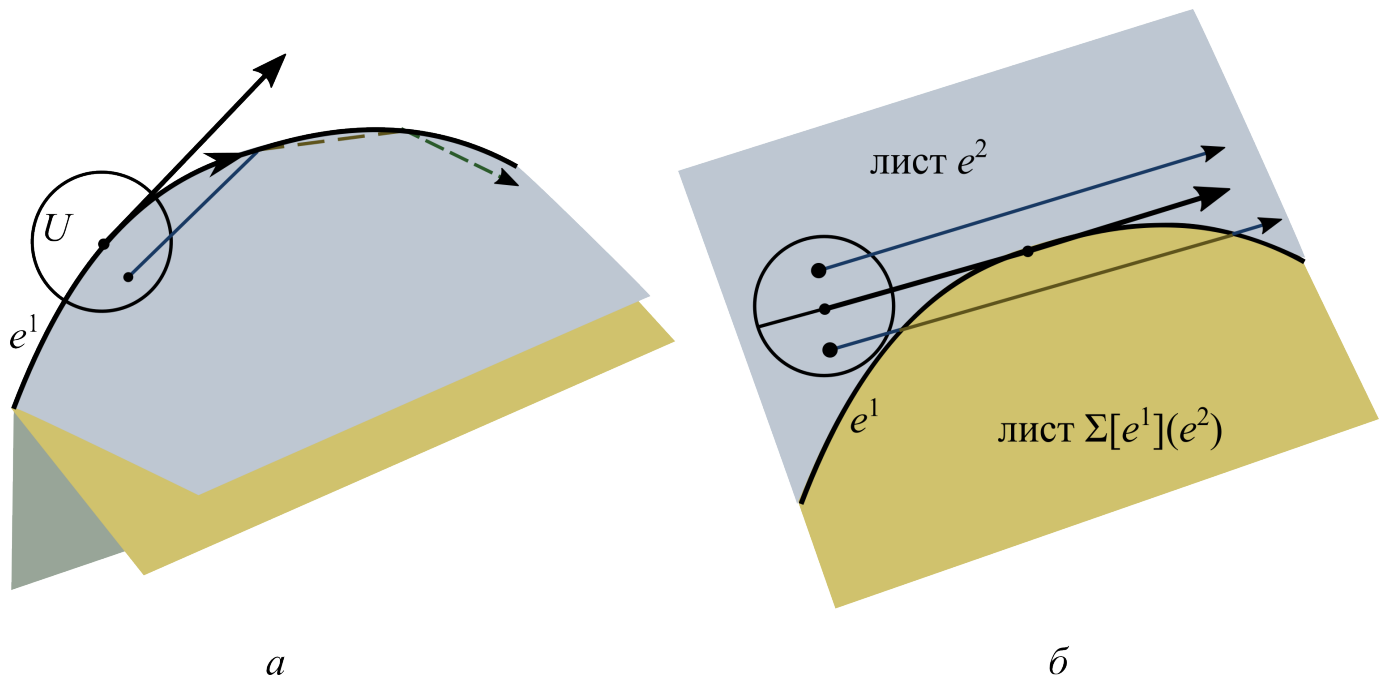


Рис. 1.9: Особые траектории бильярдной книжки, касающиеся некоторого корешка e^1 .

перестановка $\Sigma(e^1)$ переставляет по циклу все листья $e_1^2, e_2^2, \dots, e_m^2$, то мы можем с любого листа из набора $\{e_1^2, e_2^2, \dots, e_m^2\}$ перейти на любой другой из этого же набора, задав нужное число отражений. Значит, в пределе траектория принадлежит сразу всем листьям $e_1^2, e_2^2, \dots, e_m^2$.

- Траектория идет по некоторому листу $e^2 \in X^2$, который содержит в своей границе корешок e^1 , и попадает на него, касаясь. При этом корешок e^1 является невыпуклым по отношению к листу e^2 и выпуклым по отношению к листу $\Sigma[e^1](e^2)$, а $\Sigma^2[e^1](e^2) = e^2$ (см. рис. 1.9 (б)). Иными словами, корешок e^1 соединяет между собой только два листа по разные стороны от себя, и листья e^2 и $\Sigma[e^1](e^2)$, по сути, соединены в один лист. При этом движение после касания невыпуклой границы продолжается по прямой на листе e^2 .

Случаи, когда траектория попадает в угол, будут подробнее разобраны ниже в лемме 1.2 о коммутирующих перестановках.

1.9 Лемма о коммутирующих перестановках

В этом разделе будет доказана лемма, которая задает естественное ограничение на перестановки. Без этого ограничения было бы невозможно корректно задать движение на бильярдном комплексе и фазовое пространство бильярдной книжки.

Зафиксируем бильярдный комплекс $X = X^0 \cup X^1 \cup X^2$ и перестановки Σ на нем.

Определение 1.10. Выберем произвольную нульмерную клетку $e^0 \in X^0$ этого комплекса. Для нее рассмотрим все одномерные клетки $e_1^1, \dots, e_l^1, l \in \mathbb{N}$, содержащие в своей границе клетку e^0 . Под действием канонического отображения ρ (см. опр. 1.8), непрерывно переводящего билиардный комплекс X в плоскость, эти одномерные клетки переходят в дуги квадрик, граница которых содержит точку $\rho(e^0)$. Есть две квадрики, которые содержат точку $\rho(e^0)$. Они пересекаются под прямым углом. Пусть они имеют параметры λ_1 и λ_2 . Каждая из дуг $\rho(e_1^1), \dots, \rho(e_l^1)$ лежит на одной из этих двух квадрик. Без ограничения общности будем считать, что $\lambda_1 < \lambda_2$ и одномерные клетки упорядочены так, что $\rho(e_1^1), \dots, \rho(e_k^1), k \in \mathbb{N}, k < l$ являются частями дуги с параметром λ_1 , а $\rho(e_{k+1}^1), \dots, \rho(e_l^1)$ являются частями дуги с параметром λ_2 . Тогда введем следующие перестановки (см. пример их вычисления на рис. 1.10):

$$\sigma_1(e^0) = \prod_{i=1}^k \Sigma[e_i^1] \quad \text{и} \quad \sigma_2(e^0) = \prod_{i=k+1}^l \Sigma[e_i^1]. \quad (1.9.1)$$

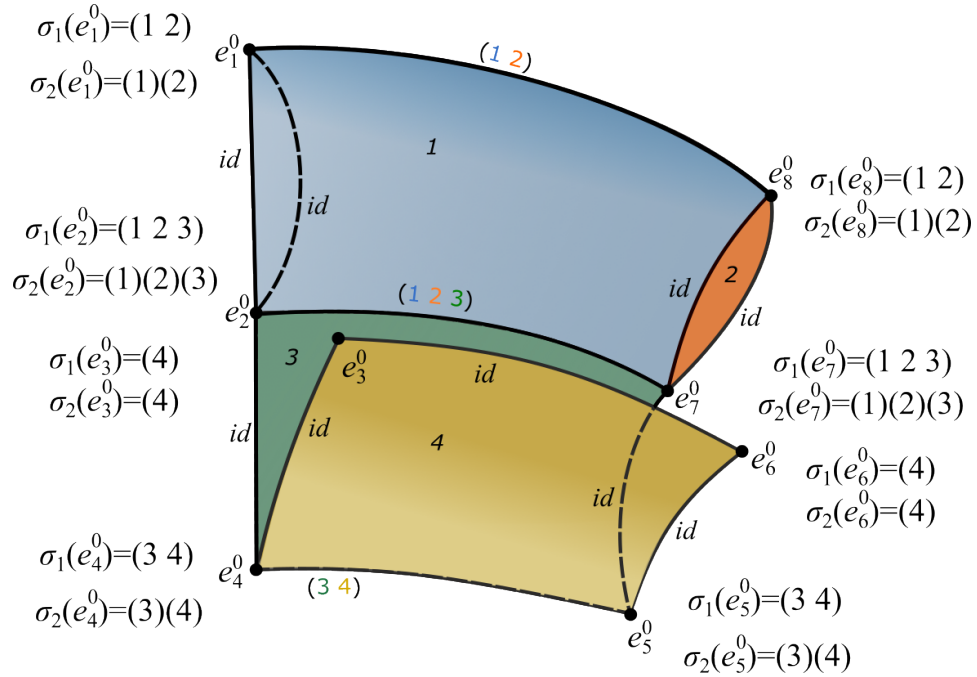


Рис. 1.10: Пример вычисления перестановок из опр. 1.10 на билиардной книжке для каждой из отмеченных нульмерных клеток: $e_1^0, e_2^0, e_3^0, e_4^0, e_5^0, e_6^0, e_7^0$ и e_8^0 .

Эти композиции помогут нам описать движение “в угле” билиардного комплекса.

Лемма 1.2 (о коммутирующих перестановках). *Перестановки Σ задают билиардную книжку $\mathcal{B}(X, \Sigma)$ (движение) на билиардном комплексе X тогда и только тогда, когда для любой нульмерной клетки $e^0 \in X^0$ перестановки $\sigma_1(e^0)$ и $\sigma_2(e^0)$ из опр. 1.10 коммутируют.*

Доказательство. Для удобства обозначений зафиксируем нумерацию N на билиардном комплексе X . Корректность билиардной книжки может быть нарушена в том случае, когда не

выполнен п. 6 определения 1.9 бильярдной книжки. То есть, только когда существует такое движение $x(t)$ материальной точки, которое невозможно доопределить исходя из непрерывности ее закона движения относительно начального положения (см. опр. 1.1). Это может возникнуть, когда существует два принципиально разных, но при этом близких движения к $x(t)$. Изучим, когда такая ситуация может возникнуть. Для этого рассмотрим, какие могут возникать особые движения материальной точки (которые не покрываются п. 3-5 опр. 1.9).

- Материальная точка движется по корешку e^1 , являющимся выпуклым по отношению ко всем смежным листам. Тогда это движение можно всегда доопределить по непрерывности. Оно определяется аналогично п. 2 раздела 1.4 “особые траектории элементарного бильярда”. А именно, траектория идет вдоль выпуклой дуги, причем она принадлежит сразу всем листам, в границе которых содержится дуга e^1 . Эти листы циклическая перестановка $\Sigma[e^1]$ переводит нетождественно, то есть цикл $\Sigma[e^1]$ состоит из номеров этих листов.
- Материальная точка касается невыпуклой дуги, которой соответствует тождественная перестановка. В этом случае материальная точка продолжает движение по прямой.
- Траектория попадает в угловую точку. Здесь продолжение движения зависит от перестановок на квадриках.

Заметим, что во всех случаях, за исключением последнего, траекторию возможно определить однозначно по непрерывности из опр. 1.1. Таким образом, бильярдная книжка корректно определена тогда и только тогда, когда возможно определить по непрерывности любую траекторию, попавшую в некоторую угловую точку.

Покажем сначала, что если существует такая нульмерная клетка $e^0 \in X^0$, что перестановки $\sigma_1(e^0)$ и $\sigma_2(e^0)$ не коммутируют, то существует траектория бильярда, продолжение которой невозможно доопределить по непрерывности после попадания в эту нульмерную клетку.

Действительно, так как $\sigma_1(e^0) \circ \sigma_2(e^0) \neq \sigma_2(e^0) \circ \sigma_1(e^0)$, то существует такой лист с номером i , что $\sigma_1(e^0) \circ \sigma_2(e^0)(i) \neq \sigma_2(e^0) \circ \sigma_1(e^0)(i)$. Тогда рассмотрим траекторию, которая идет по i -му листу и попадает в угол на клетку e^0 .

В зависимости от расположения листов с номерами i , $\sigma_1(e^0)(i)$, $\sigma_2(e^0)(i)$, $\sigma_1(e^0) \circ \sigma_2(e^0)(i)$ и $\sigma_2(e^0) \circ \sigma_1(e^0)(i)$, получаем один из трех случаев, изображенных на рис. 1.11. Расположение листов влияет только на то, продолжает ли траектория движение по прямой или отражается от квадрик. Поскольку оно не влияет на переходы с листа на лист, то все три случая аналогичны. Без ограничения общности рассмотрим случай (а), когда все листы находятся по одну сторону от квадрик с параметрами λ_1 и λ_2 .

Итак, пусть рассматриваемая траектория задается законом движения $x(t)$ с начальным моментом времени t_0 . Рассмотрим малую окрестность U точки $x(t_0)$. Тогда для одного подмножества (U_1 на рис. 1.11) начальных значений из окрестности U найдутся траектории, в которых материальная точка отразилась от квадрики с параметром λ_1 и перешла на лист с номером

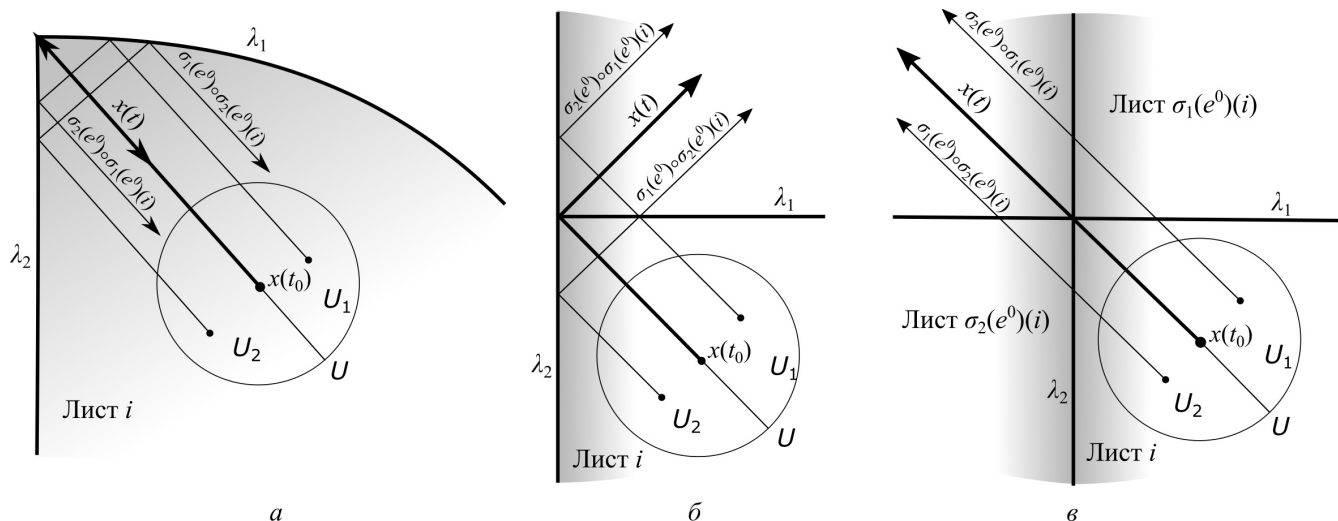


Рис. 1.11: Иллюстрация леммы 1.2 о коммутующих перестановках.

$\sigma_1(e^0)(i)$, а затем от квадрики с параметром λ_2 и перешла на лист с номером $\sigma_2(e^0) \circ \sigma_1(e^0)(i)$. Для другого подмножества (U_2 на рис. 1.11) — наоборот. Таким образом, в любой окрестности U вершины угла есть неблизкие друг к другу траектории, которые продолжают свое движение на разных листах $\sigma_2(e^0) \circ \sigma_1(e^0)(i)$ и $\sigma_1(e^0) \circ \sigma_2(e^0)(i)$, а значит, однозначно и непрерывно определить траекторию, попавшую в вершину угла на i -м листе, мы не можем, так как пределы с разных сторон не совпадают. Это обусловлено тем, что перестановки $\sigma_1(e^0)$ и $\sigma_2(e^0)$ не коммутуют.

Обратно: пусть для нульмерной клетки e^0 перестановки $\sigma_1(e^0)$ и $\sigma_2(e^0)$ коммутуют. Рассмотрим любую траекторию, проходящую через эту клетку. Пусть траектория идет по листу с номером i . Тогда после прохождения через клетку (точку) e^0 она в зависимости от расположений листов с номерами i , $\sigma_1(e^0)(i)$, $\sigma_2(e^0)(i)$ и $\sigma_1(e^0) \circ \sigma_2(e^0)(i)$ продолжит свое движение согласно рис. 1.11 на листе с номером $\sigma_1(e^0) \circ \sigma_2(e^0)(i) (= \sigma_2(e^0) \circ \sigma_1(e^0)(i))$. При этом изображенные на рисунках траектории близки, так как перестановки $\sigma_1(e^0)$ и $\sigma_2(e^0)$ коммутуют и угол в клетке e^0 равен $\pi/2$ для каждого листа. Лемма доказана. \square

Глава 2

Необходимые определения и элементы теории топологической классификации интегрируемых систем

Этот раздел посвящен элементам теории инвариантов Фоменко-Цишанга, а именно: понятиям атомов, f -графов и грубых молекул (см. работы [20, 23, 24]), их классификации (см. книги [8]) и важным теоремам.

2.1 Атомы и молекулы для функций Морса на двумерных многообразиях

Рассмотрим гладкое компактное многообразие X^2 и на нем гладкую функцию $f : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 2.1. Точка $x \in X^2$ называется *критической* для функции f , если df в этой точке равен нулю. В противном случае точка называется *регулярной*.

Определение 2.2. Критическая точка $x \in X^2$ называется *невыврожденной* для функции f , если определитель матрицы вторых частных производных в регулярной системе координат отличен от нуля.

Определение 2.3. Уровень $\{f = c\}$ называется *критическим*, если на этом уровне есть хотя бы одна критическая точка, в противном случае он называется *регулярным*.

Определение 2.4. Гладкая функция называется *функцией Морса*, она имеет конечное число изолированных критических точек, каждая из которых является невырожденной.

Далее, пусть f — функция Морса.

Определение 2.5. Введем на многообразии X^2 следующее отношение эквивалентности: точки x_1 и $x_2 \in X^2$ считаем эквивалентными, если они принадлежат одной компоненте связности множества уровня $\{f = c\}$. Профакторизуем многообразие X^2 по этому отношению эквивалентности. Полученный граф (см. рис. 2.1) назовем *графом Рибо* функции f на многообразии X^2 . Отметим, что это определение расширяется на многообразии любой размерности.

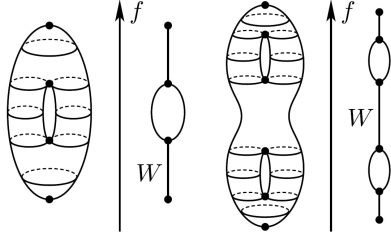


Рис. 2.1: Граф Рибо W функций высоты на торе и сфере с двумя ручками

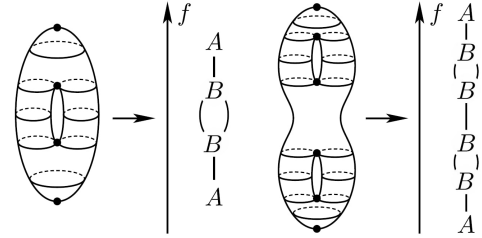


Рис. 2.2: Молекула для функций высоты на торе и сфере с двумя ручками

Определение 2.6. Рассмотрим достаточно малую ε -окрестность некоторой точки графа Рибо, в прообразе которой лежит критическая точка функции f . Тогда прообраз всей ε -окрестности с точностью до послынного диффеоморфизма называется *атомом*.

Замечание 2.1. Все атомы сложности не больше трех перечислены и закодированы общепринятыми обозначениями в книге [8] А.В. Болсинова, А.Т. Фоменко. В нашей работе мы будем пользоваться обозначениями этой книги.

Замечание 2.2. Каждая вершина графа Рибо соответствует некоторому критическому слою (а значит, и атому). Кроме того, множество критических значений функции f имеет меру нуль, а в прообразе каждого регулярного значения, принадлежащего области значений функции, лежит окружность или несвязное объединение нескольких окружностей.

Определение 2.7. Граф Рибо, в котором каждой точке-образу критического слоя сопоставлен соответствующий атом, называется *молекулой* функции f на многообразии X^2 (см. рис. 2.2).

Замечание 2.3 (об ориентации ребер на молекуле). Молекула, отвечающая некоторой функции f , обычно рассматривается, как неориентированный граф, но, вообще говоря, при ее построении можно ввести ориентацию так, что ребра графа будут направлены по возрастанию функции f . Обычно (например, в книге [8]), это направление отражается положением молекулы на плоскости. Поскольку ребра молекулы ориентированы по возрастанию гладкой функции f , то на грубой молекуле, как на ориентируемом графе, нет циклов.

Также заметим, что топология слоения не поменяется, если все ребра графа развернуть в противоположном направлении, то есть заменить функцию f на $-f$.

2.2 Атомы и грубые молекулы для интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы

Теперь перейдем к четырехмерным фазовым многообразиям и определим аналогичным образом граф Роба, 3-атомы и грубые молекулы в этом случае. Иными словами, рассмотрим интегрируемую по Лиувиллю систему с двумя степенями свободы.

Пусть дана динамическая система $g^t : \mathbb{R} \times M^4 \rightarrow M^4$ на гладком симплектическом многообразии (M^4, ω) (фазовом пространстве). Обозначим $v = \frac{\partial g^t}{\partial t}$.

Определение 2.8. Функция f является первым интегралом динамической системы g^t , если производная Ли $\mathcal{L}_v f = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ равна нулю.

Определение 2.9. Динамическая система g^t называется *гамильтоновой*, если на фазовом пространстве (M^4, ω) существует гладкая функция H , такая, что динамическая система имеет вид $v^i = \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j}$ в некоторой регулярной системе координат x . Функция H называется *гамильтонианом*.

Отметим, что в силу автономности системы гамильтониан является ее первым интегралом. Положим, что у гамильтоновой системы есть дополнительный первый интеграл Λ , функционально независимый с гамильтонианом H , то есть дифференциалы dH и $d\Lambda$ линейно независимы почти всюду. И более того, векторные поля v^i и $\omega^{ij} \frac{\partial \Lambda}{\partial x^j}$ полны, то есть естественный параметр (время) на их интегральных траекториях определен на всей числовой прямой.

Определение 2.10. Если для первых интегралов H и Λ выполнено равенство

$$\{H, \Lambda\} := \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial x^j} = 0,$$

то говорят, что эти интегралы *находятся в инволюции*, а система является *вполне интегрируемой по Лиувиллю*.

Определение 2.11. *Слоением Лиувилля*, отвечающим вполне интегрируемой по Лиувиллю системе, называется разбиение многообразия M^4 на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов H и Λ .

Оказывается, локальная структура слоения Лиувилля устроена очень просто почти всюду на многообразии M^4 . А именно, верна теорема Лиувилля, доказательство которой можно найти, например, в книге А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко [8] (теорема 1.2). Приведем ее краткую формулировку.

Теорема 2.1. (*Лиувилль*) Пусть на M^4 задана вполне интегрируемая гамильтонова система с гамильтонианом H . Обозначим через $T_{h,\lambda}$ регулярную, компактную, связную компоненту поверхности уровня первых интегралов $H = h$ и $\Lambda = \lambda$. Тогда:

1. $T_{h,\lambda}$ диффеоморфно двумерному тору, который называется тором Лиувилля;
2. слоение Лиувилля в достаточно малой окрестности тора Лиувилля послойно диффеоморфно прямому произведению двумерного тора на двумерный диск;

Будем считать, что данная система g^t на M^4 — вполне интегрируемая по Лиувиллю. Для такой системы рассмотрим изоэнергетическое пространство $Q^3 := \{m \in M^4 : H(m) = c\}$, где c — некоторая фиксированная константа, причем потребуем, что дифференциал dH в этом пространстве нигде не обращается в нуль. В этом случае пространство Q^3 является ориентируемым многообразием. Соответствующий уровень энергии будем называть *неособым*. Дополнительный первый интеграл Λ можно теперь рассмотреть как функцию на многообразии Q^3 .

Определение 2.12. *Функцией Ботта* на неособом многообразии Q^3 называется такая гладкая функция, все критические точки которой образуют невырожденные многообразия, называемые *критическими*.

Будем далее считать, что первый интеграл $\Lambda : Q^3 \rightarrow \mathbb{R}$ является функцией Ботта, причем все критические многообразия которой являются окружностями (см. подробнее раздел 2.5).

Определение 2.13. Рассмотрим достаточно малую ε -окрестность некоторой точки графа Роба (см. опр. 2.5), прообраз которой содержит хотя бы одну критическую окружность. Тогда прообраз всей этой окрестности с точностью до послойного диффеоморфизма, сохраняющего как глобальную ориентацию, так и ориентацию критических окружностей, называется *3-атомом*. Отметим, что каждый 3-атом задает перестройку (бифуркацию) торов Лиувилля в изоэнергетическом многообразии Q^3 .

Определение 2.14. Граф Роба, в котором каждой точке-образу критического слоя сопоставлен соответствующий 3-атом, называется *грубой молекулой* для функции Λ на многообразии Q^3 (см. рис. 2.2).

2.3 Грубая лиувиллева эквивалентность динамических систем с двумя степенями свободы

Определение 2.15. Две вполне интегрируемые системы с двумя степенями свободы называются *грубо лиувиллево эквивалентными*, если существует гомеоморфизм баз слоений Лиувилля, который может быть локально (в окрестности каждой точки базы) поднят до гомеоморфизма, сохраняющего слоение Лиувилля.

Теорема 2.2 (Фоменко). *Две интегрируемые гамильтоновы системы грубо лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их грубые молекулы совпадают.*

Замечание 2.4. Отметим, что 3-атомы и грубые молекулы используются при построении более тонкого инварианта вполне интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, ограниченных на неособые изоэнергетические многообразия, — меченой молекулы или инварианта Фоменко-Цишанга (см. работы [25, 8]).

2.4 Конструкция 2-атомов

Назовем *2-атомами* ориентируемые атомы как двумерные многообразия с краем. Как было отмечено ранее, каждый 2-атом описывает перестройку одного набора регулярных слоев-окружностей в другой. При этом 3-атомы описывают перестройку двумерных торов Лиувилля.

Как 2-атомы, так и 3-атомы бывают двух видов: атомы A , отвечающие минимуму или максимуму интеграла Λ , и седловые атомы, отвечающие промежуточным (седловым) критическим значениям интеграла Λ .

Минимаксные 2-атомы A послойно гомеоморфны двумерному диску D^2 , расслоенному на concentric окружности и одну критическую точку. И аналогично минимаксные 3-атомы A послойно гомеоморфны прямому произведению расслоенного диска D^2 (т.е. 2-атома A) на окружность S^1 (т.е. расслоенному полноторию с одной критической окружностью). Седловые же 2 и 3-атомы устроены сложнее. Для их описания нам понадобятся следующие определения.

Определение 2.16. *Крестом* называется прообраз ε -окрестности нулевого значения функции $x^2 - y^2$, заданной в некоторой достаточно малой δ -окрестности точки $(0, 0)$, расслоенной на кривые уровней этой функции, что позволит говорить о послойном гомеоморфизме (см. рис. 2.3). Здесь уровень $x^2 - y^2 = 0$ — критический.

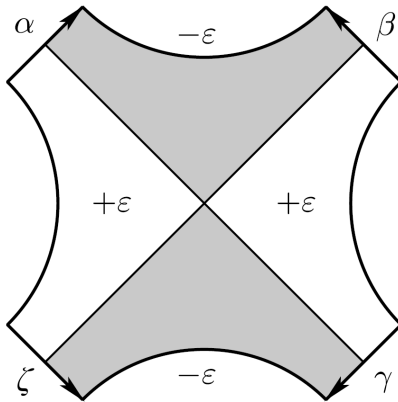


Рис. 2.3: Крест. Слои $x^2 - y^2 \in (-\varepsilon, 0)$ закрашены серым, слои $x^2 - y^2 \in (0, +\varepsilon)$ не закрашены.

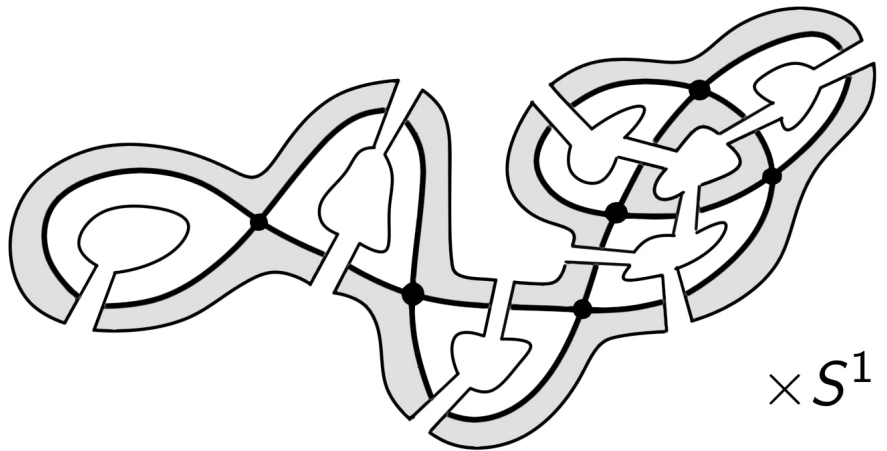


Рис. 2.4: Иллюстрация теоремы 2.3 Фоменко.

Определение 2.17. *Ребра креста* назовем пересечение креста с границей δ -окрестности точки $(0, 0)$, то есть $(|x^2 - y^2| < \varepsilon) \cap (x^2 + y^2 = \delta)$.

Ребра креста дополнены стрелками и буквами $\alpha, \beta, \gamma, \zeta$ на рис. 2.3. Такие обозначения позволят работать с крестами в дальнейшем, а именно склеивать их вдоль ребер, помеченных одной буквой, с сохранением ориентации приписанной стрелки. Так, например, подобная операция склейки появляется в следующей теореме.

Теорема 2.3 (Фоменко). *Любой седловой атом P (как ориентируемый 2-атом, так и неориентируемый) можно представить как склейку из $k \in \mathbb{N}$ крестов вдоль их ребер, потребовав, что каждый уровень $(x^2 - y^2 = c)$, $c \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$ на одном кресте склеивается с таким же уровнем на другом кресте (см. рис. 2.5). Число k называется сложностью атома P (см. рис. 2.4).*

№	Атом	Код
Сложность 1 Ориентируемые		
1		$A-$
2		$>B-$
Неориентируемый		
$\tilde{1}$		$- \tilde{B} -$

Сложность 2 Ориентируемые		
1		$-C_1-$
2		$>C_2<$
3		$-D_1\leq$
4		$>D_2<$

Рис. 2.5: Таблица некоторых атомов. Можно увидеть, каким образом они склеиваются из крестов.

2.5 Конструкция 3-атомов

Согласно теореме Фоменко (см. теорему 3.3 в [8]), любой 3-атом является расслоением Зейфферта над 2-атомом, причем особые слои этого расслоения могут иметь только тип $(2,1)$. Иными словами, любой седловой 3-атом может быть получен одним из двух способов:

1. Прямым произведением некоторого седлового 2-атома на окружность S^1 .

2. Второй способ устроен несколько сложнее. Здесь мы опишем *атом со звездочками*. Пусть дан седловой 2-атом \hat{P} . Для определенности фиксируем на нем функцию Морса \hat{f} , которая задает слоение. Предположим, что на нем задано гладкое отображение $\tau : \hat{P} \rightarrow \hat{P}$, обладающее следующими свойствами:

- (a) $\tau^2 = id$ (инволюция),
- (b) τ сохраняет уровни функции f , т.е. $\hat{f}(\tau(x)) = \hat{f}(x)$,
- (c) τ сохраняет ориентацию,
- (d) лишь критические точки этого 2-атома являются неподвижными точками инволюции τ .

Для построения 3-атома рассмотрим цилиндр $\hat{P} \times [0, 2\pi]$ и склеим его основания по инволюции τ , отождествляя точки $(x, 2\pi)$ и $(\tau(x), 0)$ для каждого $x \in \hat{P}$. В результате мы получим ориентируемое трехмерное многообразие U с краем. Функция \hat{f} естественным образом продолжается на U , поскольку $\hat{f}(\tau(x)) = \hat{f}(x)$, и ее поверхности уровня задают структуру слоения на U с единственным особым слоем. Многообразие U со структурой слоения, заданной функцией f , является *3-атомом со звездочками*.

Профакторизуем 2-атом \hat{P} по инволюции τ и выделим звездочками те точки на полученном расслоенном двумерном многообразии, которые являются образами неподвижных точек. Результирующее слоение со звездочками обозначим через P и назовем *2-атомом со звездочками*, а 2-атом \hat{P} — *дублем 2-атома P* .

Отметим, что после факторизации полученное слоение P , вообще говоря, не является 2-атомом. Так, оно может представлять собой кольцо, тривиально расслоенное на окружности, причем на одной из таких окружностей стоит несколько звездочек. В этом случае будем говорить, что полученное слоение имеет вид *2-атома A со звездочками*.

В случае 3-атома U , соответствующему 2-атому P со звездочками, будем говорить, что 3-атом U является *атомом со звездочками*, а 3-атом $\hat{P} \times S^1$ является его *дублем*.

Таким образом, все 3-атомы можно описать обычными 2-атомами (без звездочек) и 2-атомами, на критическом уровне которых стоит конечное число звездочек.

Отметим, что дубль \hat{P} является разветвленным двулистным накрытием над 2-атомом P , причем точками ветвления являются как раз звездочки атома P .

Пример 2.1. На рис. 2.6 приведены примеры 3-атомов. Здесь 3-атом A минимума и максимума функции описывает сжатие торов Лиувилля на окружность. Далее, 3-атом B является прямым произведением 2-атома B на окружность и описывает перестройку одного тора Лиувилля в два. При этом 3-атом A^* устроен несколько сложнее 3-атома B : нужно удалить из полнотория лишь одно полноторие, но обходящее два раза вдоль оси. Особый слой получается протаскиванием

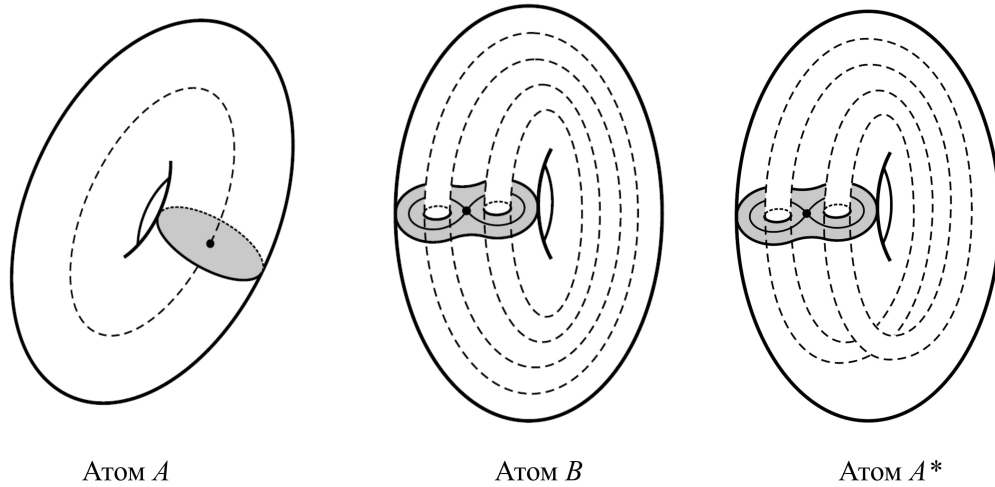


Рис. 2.6: Примеры 3-атомов.

вдоль окружности вращающейся восьмерки, успевающей повернуться на угол π за один оборот. При прохождении через особый уровень этого 3-атома один тор Лиувилля перестраивается в один тор.

Замечание 2.5. Отметим, что операция построения 3-атома P со звездочками по его дублю \hat{P} , вообще говоря, является необратимой. Иными словами, одному атому со звездочкой может соответствовать несколько дублей. Это показано, например, в [8] (см. лемму 3.3).

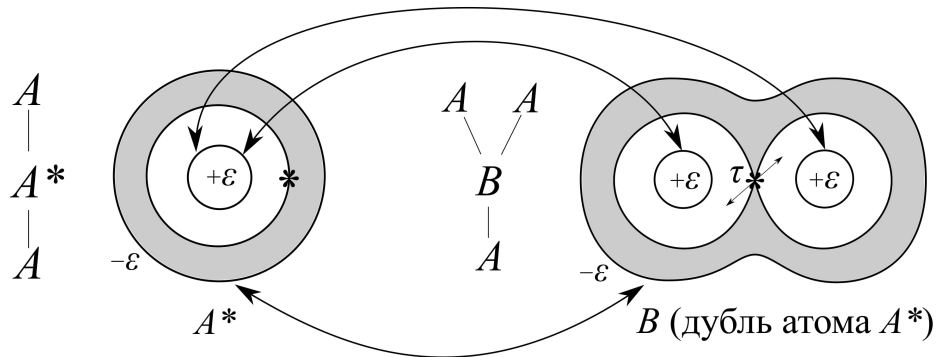


Рис. 2.7: Дубль для торов в окрестности 2-атома A^* .

Замечание 2.6 (о возможных дублях двумерных торов). Выделим регулярный слой-окружность на 2-атоме \hat{P} . Под действием инволюции τ эта окружность может перейти в другую окружность или же в себя. Таким образом, выбранной регулярной окружности на 2-атоме P со звездочками может соответствовать одна или две окружности на дубле \hat{P} . Аналогично, выбранному тору на 3-атоме со звездочками, соответствующему 2-атому P , может отвечать один или два тора на дубле $\hat{P} \times S^1$. Иными словами, дублем для окружности (тора Лиувилля) может быть одна или две окружности (тора Лиувилля). Например, рассмотрим дубль B для 2-атома A^* с инволю-

цией, заданной центральной симметрией 2-атома B . Здесь внешней окружности 2-атома A^* на рис. 2.7 соответствует одна окружность на дубле, а внутренней — две.

2.6 Конструирование дублей для атомов

Пусть дан 2-атом P сложности k с l звездочками. Сконструируем для него дубль и укажем на нем инволюцию с неподвижными точками, находящимися на месте звездочек.

Определение 2.18. Заметим, что особый слой 2-атома делит его на несколько компонент связности, каждая из которых является полуоткрытым кольцом (кольцом с одной граничной окружностью), тривиально расслоенным на регулярные окружности-уровни функции Морса. Такие компоненты связности будем называть *кольцами данного 2-атома* (со звездочками или без). При этом будем называть кольцо *отрицательным*, если значения функции Морса в его точках меньше критического значения, и *положительным* в обратном случае.

Итак, зафиксируем некоторую звездочку. Сделаем трансверсальный разрез 2-атома P по одному из его колец до этой звездочки (см. пример на рис. 2.8). Проведем эту операцию для каждой звездочки. Теперь возьмем копию так же разрезанного 2-атома P . Определим инволюцию τ на паре этих атомов: она отображает точки первого разрезанного 2-атома P в аналогичные точки на его копии. Склеим разрезанный 2-атом P с его копией по ребрам разрезов, кончающихся в соответствующих друг другу звездочках, таким образом, что окрестность каждой склеенной звездочки образует расслоенный крест, как изображено на рис. 2.3 (см. определение креста 2.16). Построенный таким образом 2-атом \hat{P} , снабженный инволюцией τ , является дублем исходного 2-атома P . При этом он является атомом без звездочек сложности $2k + l$.

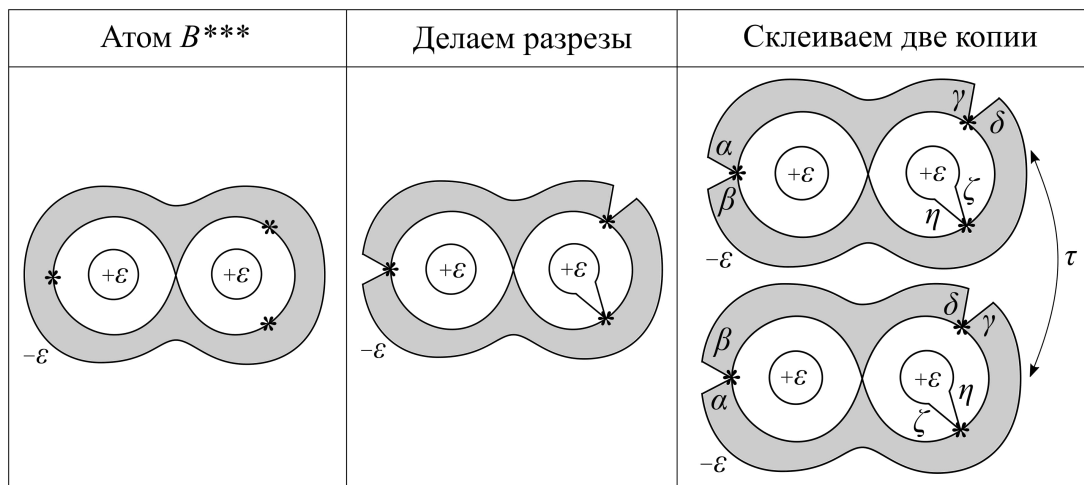


Рис. 2.8: Пример конструирования дубля для 2-атома B^{***} . $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \eta$ задают склейку двух разрезанных копий 2-атома B^{***} в дубль. Полученный 2-атом не вложим в плоскость.

Отметим, этим способом мы можем получить несколько дублей в зависимости от того, по какому из колец были выполнены разрезы для каждой звездочки: тому, который соответствуем меньшему уровню функции Морса или большему. Это — еще одна иллюстрация того, что каждому 2-атому с l звездочками соответствует несколько его дублей. А именно, их количество не меньше 2^{l-1} . Отметим, однако, что приведенный способ построения дублей не дает полный их список.

2.7 Представление 3-атома с помощью f -графа

Представление 2-атомов в виде f -графов впервые ввел А. А. Ошемков в [20]. Ниже приводится естественное обобщение этой формулировки на случай 3-атомов. В случае 3-атомов без звездочек формулировка совпадает с формулировкой для 2-атомов. В случае 3-атомов со звездочками на f -графе необходимо ввести дополнительную структуру, которую мы опишем ниже.

Отметим, что в книге А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко [8] уже было введено понятие f -графа со звездочками, являющееся обобщением f -графов на случай 3-атомов. Понятие f -графов со звездочками и понятие f -графов для 3-атомов, изложенное ниже, связаны между собой и друг из друга выводятся. Но в данной работе удобнее использовать наше понятие f -графов для 3-атомов.

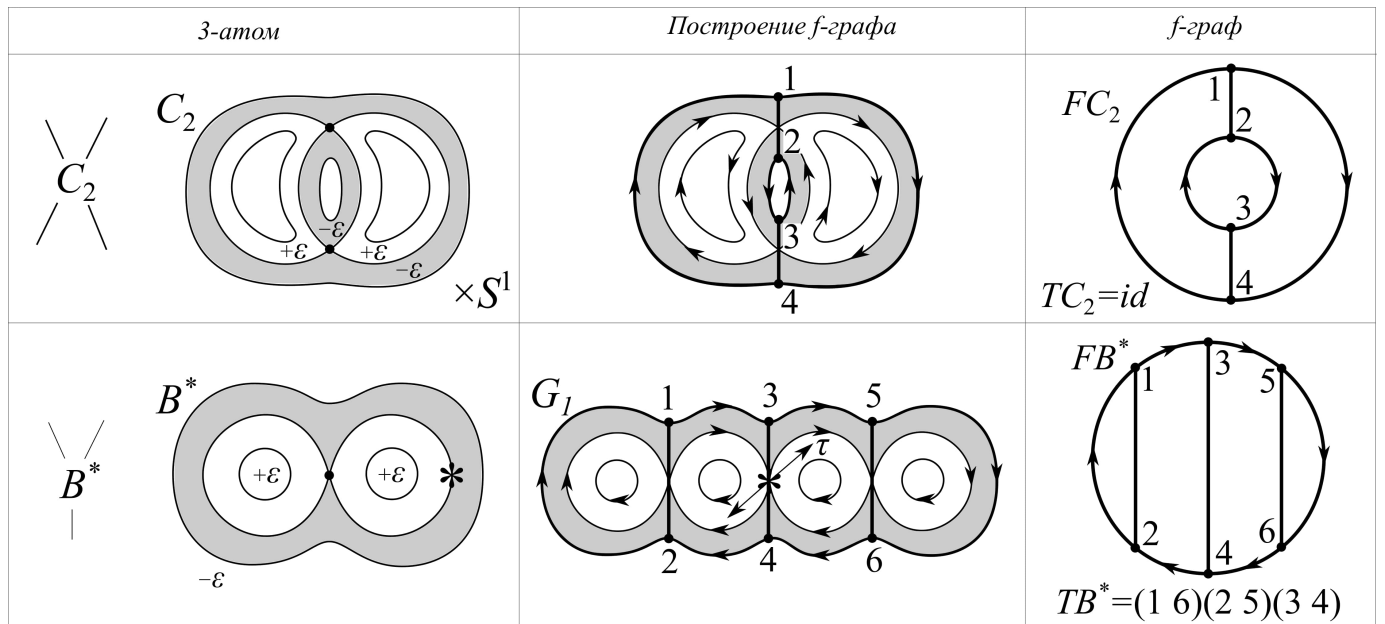


Рис. 2.9: Пример построения f -графов FC_2 , FB^* по 3-атомам C_2 , B^* соответственно.

Пример 2.2 (построения f -графа по 3-атому C_2). Покажем на примере 3-атома C_2 , изображенного на рис. 2.9, как построить f -граф. Поскольку 3-атом C_2 не имеет звездочек, то он представляется в виде прямого произведения 2-атома C_2 на окружность. Рассмотрим гладкое

погружение 2-атома C_2 в плоскость \mathbb{R}^2 . Такое погружение существует для любого 2-атома (ориентируемого двумерного атома) согласно теореме А. Т. Фоменко (см. [8]). Введем граф FC_2 , который назовем f -графом, соответствующим 3-атому C_2 , следующим образом. Рассмотрим отрезки на 2-атоме C_2 , проведенные от границы отрицательных колец 2-атома в смысле определения 2.18 к его критическим точкам (см. рис. 2.9). Каждая пара таких отрезков, входящих в критическую точку, образует неориентированное ребро f -графа FC_2 . Вершинами графа FC_2 объявим концы этих отрезков, лежащих на границе отрицательных колец. Зафиксируем ориентацию регулярных отрезков критического уровня 2-атома C_2 таким образом, что отрицательные кольца остаются слева при обходе по этой ориентации. Распространим эту ориентацию на регулярные уровни каждого из колец (как отрицательном, так и положительном). Заметим, что если ориентация задана на одном кольце, то поскольку 2-атом связан, ориентация на всем 2-атоме возникает автоматически. Границы отрицательных колец, ориентированных способом выше, объявим ориентированными ребрами графа FC_2 . Получившийся граф является f -графом, соответствующим 3-атому C_2 без звездочек. В статье [20] А. А. Ошемкова (см. главу 2) показано, что f -графы полностью определяют 2-атом, что эквивалентно утверждению о том, что f -графы полностью определяют 3-атом без звездочек.

В случае 3-атома со звездочками задание такого графа оказывается недостаточным для того, чтобы определить данный 3-атом. Для этого воспользуемся дублями 3-атомов (см. опр. дубля в [8]). Напомним, что дубль с заданной на нем инволюцией полностью определяет 3-атом со звездочками. Обобщая понятие дубля, можем считать, что если инволюция тождественна, то задан 3-атом без звездочек.

Пример 2.3 (построения f -графа по 3-атому B^*). Покажем на примере 3-атома B^* , как построить f -граф, и дополним его необходимой структурой, чтобы 3-атом со звездочкой однозначно восстанавливался. Рассмотрим дубль 3-атома B^* — 2-атом G_1 с инволюцией τ , изображенной на рис. 2.9 как центральная симметрия. Построим аналогично предыдущему примеру f -граф FB^* для 2-атома G_1 (см. рис. 2.9). Инволюция τ на 2-атоме G_1 порождает инволюцию TB^* на f -графе FB^* , являющуюся его автоморфизмом. Инволюция-автоморфизм TB^* переводит первую вершину графа в шестую, вторую в пятую, третью в четвертую и наоборот, то есть задается перестановкой $(16)(25)(34)$. Таким образом, граф FB^* вместе с инволюцией TB^* , также как и дубль G_1 вместе с инволюцией τ , однозначно задает 3-атом B^* . Для простоты будем считать, что на f -графе всегда задана инволюция-автоморфизм T . Если она тождественна, то f -граф задает 3-атом без звездочек. В противном случае f -граф вместе с инволюцией-автоморфизмом T задает дубль для 3-атома со звездочками с инволюцией на нем, по которым строится уже сам 3-атом.

Замечание 2.7. Обратим внимание, что для определения f -атомов и для дальнейшей работы нам важно различать, какие кольца у фиксированного 2-атома (3-атома) верхние (лежат на

уровне выше критического), а какие нижние (лежат на уровне ниже критического). Иными словами, для каждого из 2-атомов (3-атомов) можно рассмотреть замену функции Морса f на $-f$. При этом 2-атом (3-атом) “переворачивается” и получается тот же атом, но с другой функцией, то есть перестраивающий окружности (торы Лиувилля) в обратном порядке. Нам важно различать такие атомы. См. пример атома B и его “переворота” на рис. 2.10. В этом случае получаются разные f -графы.

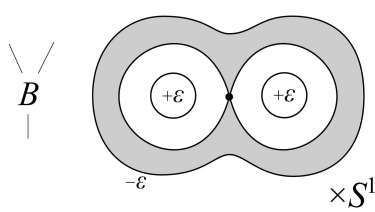
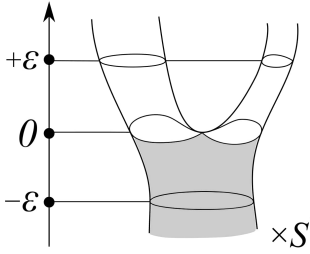
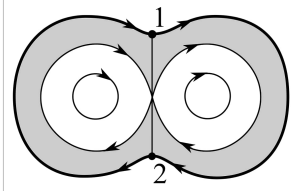
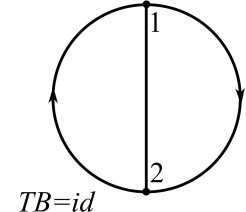
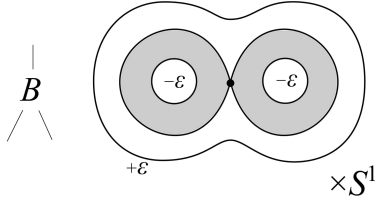
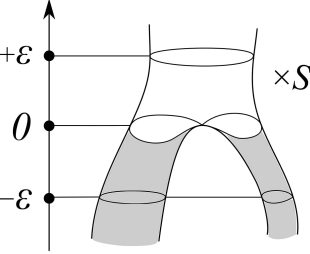
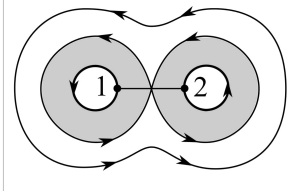
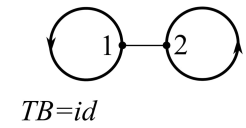
3-атом	Слоение на 3-атоме	Построение f -графа	f -граф
			
			

Рис. 2.10: Пример двух вариантов перестроек 2-атома B и соответствующих им f -графов. На одной строке таблицы 2-атом B перестраивает один тор в два. На другой — 2-атом B , перестраивающий два тора в один.

Дадим теперь общее определение f -графа, отвечающее произвольному 3-атому (не только 3-атомам C_2 , B^* и B).

Определение 2.19. Конечный связный граф F назовем f -графом, если он удовлетворяет следующим условиям:

1. К каждой вершине графа F примыкает ровно одно неориентированное ребро и два ориентированных, из которых одно входит в вершину, а другое выходит из нее. Причем эта вершина может быть началом и концом одного и того же ориентированного ребра в случае, если ориентированное ребро является петлей.
2. Задан автоморфизм T графа F , являющийся инволюцией.

Как было упомянуто выше, по любому f -графу однозначно восстанавливается некоторый 3-атом. Однако заметим, что для одного 3-атома может существовать несколько f -графов, которые ему соответствуют. Эта неоднозначность возникает тогда, когда появляются звездочки на

3-атомах, т.к. дубли для них определены неоднозначно. Общий алгоритм построения f -графа по произвольному атому и, наоборот, построения атома по произвольному f -графу см. в статье [20] А. А. Ошемкова.

Глава 3

Фазовое пространство бильярдной книжки и интегралы на нем

3.1 Описание фазового пространства произвольной бильярдной книжки

Рассмотрим произвольную бильярдную книжку $\mathcal{B}(X = X^0 \cup X^1 \cup X^2, \Sigma, N)$. Движение материальной точки по клеточному комплексу X задает динамическую систему бильярдной книжки на некотором фазовом пространстве M^4 . Точка на фазовом пространстве должна описывать состояние этой системы. Исходя из этого зададим фазовое пространство бильярдной книжки. Состояние динамической системы бильярдной книжки можно зафиксировать, задав положение материальной точки на комплексе и вектор скорости. Считаем, что вектор скорости не равен нулю. На границе листов из-за отражения и перехода материальной точки с листа на лист, векторы скорости будут устроены сложнее: некоторые векторы необходимо будет склеить, чтобы движение отвечало движению материальной точки в бильярдной книжке.

Итак, нужно рассмотреть несвязное объединение всех листов, считая границу для каждого листа отдельно:

$$[X]^2 := \bigsqcup_{e^2 \in X^2} \bar{e}^2. \quad (3.1.1)$$

Тогда фазовое пространство M^4 — это пространство кокасательного расслоения над $[X]^2$. Поскольку метрика локально плоская, то можем отождествить касательное и кокасательное расслоение. Учитывая отражение от границы листов и то, что вектор скорости не равен нулю, получаем:

$$M^4 = [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) / \sim, \quad (3.1.2)$$

где отношение эквивалентности описывает отражение от границы листов материальной точки и переход с листа на лист.

Опишем подробнее это отношение эквивалентности. Для этого нам понадобится определение проекции расслоения, введенное по аналогии с теорией расслоений.

Определение 3.1. *Проекцией расслоения* назовем отображение $\pi : [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow X$, которое является композицией проекции $[X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ на $[X]^2$ и отображения $[X]^2$ на X , отображающее двумерные клетки в себя тождественно, а их границу в соответствующие клетки меньшей размерности.

Функцию N (см. замечание 1.5 о нумерации листов биллиардной книжки), отвечающую номеру листа, можно расширить на многообразии $[X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ следующим естественным образом. Если $x \in X^2, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, то $\tilde{N}(x, v) = N(x)$. На границе доопределяем по непрерывности функцию

$$\tilde{N} : [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{N}. \quad (3.1.3)$$

Это доопределение возможно, поскольку границу каждого листа в $[X]^2$ мы рассматриваем отдельно.

Отношение эквивалентности в (3.1.2) задается по-разному в разных частях границы, так как отражение в них разное. А именно, есть три случая: отражение от дуги квадрики, касание дуги квадрики и попадание в угол. Первый случай задан по определению биллиардной книжки, второй и третий — доопределяются исходя из непрерывности закона движения материальной точки в зависимости от начального положения. Разберем эти три случая подробнее.

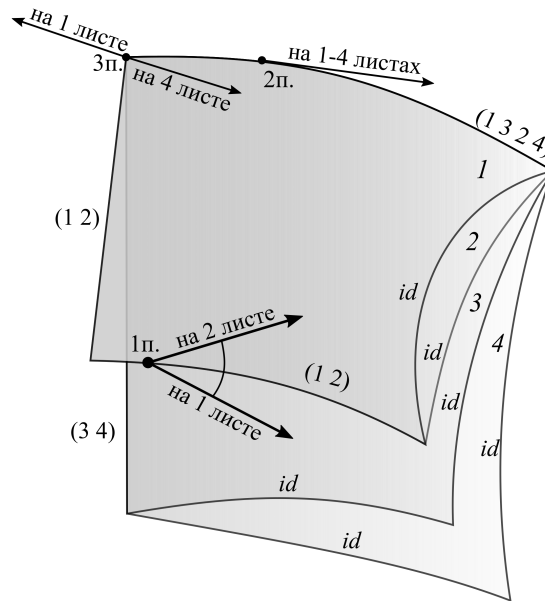


Рис. 3.1: На рисунке приведены примеры точек на $[X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, которые будут отождествлены. Точка на $[X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ соответствует паре точка-вектор на рисунке. Примеры дополнены номерами пунктов отношения эквивалентности.

1. *Случай отражения от дуги.* Когда материальная точка попадает на корешок (одномерную клетку) под углом, то она переходит на другой лист. При этом вектор скорости меняется так, что угол падения равен углу отражения в случае, когда листы находятся по одну сторону от корешка (см. рис. 3.1), и не меняется, когда листы находятся по разные стороны. Иными словами, пусть две точки $(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ удовлетворяют следующим условиям:

- $\pi(x_1, v_1) = \pi(x_2, v_2) \in e^1$ для некоторого $e^1 \in X^1$, или, иными словами, точка принадлежит корешку e^1 , который мы зафиксируем для дальнейших обозначений;
- $\Sigma[e^1](\tilde{N}(x_1, v_1)) = \tilde{N}(x_2, v_2)$, то есть под действием перестановки, соответствующей корешку e^1 номер листа с точкой (x_1, v_1) переходит в номер листа с точкой (x_2, v_2) , причем заметим, что эти номера могут совпадать;
- вектор v_1 направлен наружу листа с номером $\tilde{N}(x_1, v_1)$, а вектор v_2 — внутрь листа с номером $\tilde{N}(x_2, v_2)$, причем ни один из векторов не направлен по касательной к корешку e^1 ;
- длины векторов скорости равны: $|v_1| = |v_2|$;
- вектор $v_1 - v_2$ ортогонален касательной к корешку e^1 (когда листы находятся по одну сторону от корешка и угол падения равен углу отражения) или равен нулю (когда листы находятся по разные стороны от корешка).

2. *Случай касания кривой из границы.* Касание траектории материальной точки выпуклой границы дает движение вдоль дуги квадрики, при касании невыпуклой — движение не определено (см. опр. 1.9 бильярдной книжки и раздел 1.7 “невыпуклые склейки”). Однако, на фазовом пространстве эти два случая не отличаются. Дело в том, что такое положение материальной точки задает однозначно состояние динамической системы: материальная точка находится на некотором корешке и идет по направлению касательной. Это состояние должно отвечать точке на фазовом пространстве. Но если в невыпуклом случае интегральная кривая достигает этой точки на фазовом пространстве за конечное время, то далее она однозначно не определяется. Поэтому на траекториях мы эту точку выкалываем, а на фазовом пространстве — нет. Иными словами, слоение Лиувилля бильярдных книжек с невыпуклыми корешками остается корректным и активно изучается как в настоящей диссертации, так и в работах других авторов, включая недавнюю работу В.Драговича и М.Раднович [21], совместную с S.Gasiorsek. В последней с помощью алгоритмически конструируемых бильярдных книжек моделируются введенные теми же авторами ранее упорядоченные бильярдные игры и вычисляются грубые молекулы некоторых построенных ими книжек.

Если траектория касается дуги квадрики, то она принадлежит сразу всем листам, граничащим с этой дугой (см. раздел 1.8 “особые траектории бильярдной книжки”). Иными

словами, пусть две точки $(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ удовлетворяют следующим условиям:

- $\pi(x_1, v_1) = \pi(x_2, v_2) \in e^1$ для некоторого $e^1 \in X^1$, или, иными словами, точка принадлежит корешку e^1 , который мы зафиксируем для дальнейших обозначений;
- $\Sigma[e^1](\tilde{N}(x_1, v_1)) = \tilde{N}(x_2, v_2)$, то есть под действием перестановки, соответствующей корешку e^1 номер листа с точкой (x_1, v_1) переходит в номер листа с точкой (x_2, v_2) , причем заметим, что эти номера могут совпадать;
- векторы v_1 и v_2 равны и направлены по касательной к корешку e^1 .

Тогда считаем, что точки (x_1, v_1) и (x_2, v_2) эквивалентны.

3. *Случай угловой точки.* Рассмотрим такие точки $(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, которые под действием проекции расслоения π попадают на одну и ту же нульмерную клетку $e^0 \in X^0$, то есть $\pi(x_1, v_1) = \pi(x_2, v_2) = e^0$. Согласно определению клеточного комплекса, эта клетка является границей для некоторого конечного набора одномерных клеток e_i^1 , $i \in \{1, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда применим к таким точкам правила отождествления из предыдущих двух пунктов отношения эквивалентности, как если бы эти точки принадлежали одномерным клеткам e_i^1 .

Профакторизовав по описанному выше отношению эквивалентности, получаем фазовое пространство M^4 . Траектории в бильярдной книжке соответствуют некоторой кривой в M^4 . Также заметим, что на фазовом пространстве M^4 естественно определяется топология, полученная из топологии на клеточном комплексе и плоскости, отвечающей пространству векторов скорости.

Замечание 3.1. Расширим определение 3.1 проекции расслоения. Нетрудно заметить, что в описанном выше отношении эквивалентности мы отождествляли только точки, у которых $\pi(x_1, v_1) = \pi(x_2, v_2)$. Это означает, что проекцию расслоения можно определить не на произведении $[X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, а на фазовом пространстве M^4 , то есть далее считаем, что $\pi : M^4 \rightarrow X$.

3.2 Явный вид первых интегралов бильярдной книжки

Теперь, определив фазовое пространство M^4 , можем выписать явные формулы первых интегралов бильярдной книжки. Поскольку бильярдная книжка является кусочно-гладкой системой, то в точках негладкости мы не можем вычислить производную Ли (см. опр. 2.8). Поэтому в бильярдах под первым интегралом подразумевается непрерывная функция, которая сохраняется вдоль любой траектории.

Итак, рассмотрим точку на фазовом пространстве M^4 . Сопоставим этой точке координаты (x_1, x_2, v_1, v_2) в пространстве \mathbb{R}^4 . Две координаты (x_1, x_2) отвечают положению точки в пространстве. Их можно задать с помощью композиции $\rho \circ \pi : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $\pi : M^4 \rightarrow X$ —

проекция расслоения (см. опр. 3.1 и замечание 3.1), а $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ — каноническое отображение бильярдного комплекса в плоскость (см. опр. 1.8). Другие две координаты (v_1, v_2) отвечают направлению вектора скорости. Он задается неоднозначно на ребрах склейки, но явной подстановкой можно доказать, что от его выбора не зависит значение первых интегралов, которые в описанных выше координатах принимают вид:

$$H = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} \text{ — полная энергия;} \quad (3.2.1)$$

$$\Lambda = \frac{-(x_1v_2 - x_2v_1)^2 + v_1^2b + v_2^2a}{v_1^2 + v_2^2} \text{ — параметр каустики.} \quad (3.2.2)$$

Кроме того, явной подстановкой проверяется, что эти функции сохраняются вдоль любой траектории бильярда, то есть действительно являются первыми интегралами.

3.3 Изоэнергетическое многообразие бильярдной книжки

Определение 3.2. *Изоэнергетическим многообразием* называется топологическое пространство $Q^3 := \{m \in M^4 : H(m) = h\}$ с топологией, индуцированной топологией на M^4 , где $h > 0$ — фиксированное число, а $H(m)$ — гамильтониан (в случае бильярдных книжек он задается уравнением (3.2.1)).

Обратим внимание, что изначально не предполагается, что топологическое пространство Q^3 и фазовое пространство M^4 бильярдной книжки являются многообразиями. Поэтому важны следующая теорема и следствие из нее, доказательство которых можно найти в статье [35].

Теорема 3.1 (Харчева). *Для любой бильярдной книжки изоэнергетическое многообразие $Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = h\}$ для фиксированного $h > 0$, действительно является топологическим кусочно-гладким трехмерным многообразием.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную бильярдную книжку $\mathcal{B}(X = X^0 \cup X^1 \cup X^2, \Sigma, N)$. Фазовое пространство M^4 этой бильярдной книжки имеет вид, описанный в разделе 3.1, то есть $M^4 = [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) / \sim$. Склейка по отношению эквивалентности проходит только на границе листов. Значит, часть фазового пространства M^4 внутри листов диффеоморфна декартову произведению $X^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Исходя из вида гамильтониана H получаем, что часть изоэнергетического многообразия Q^3 внутри листов диффеоморфна декартову произведению $X^2 \times S^1$. Вдоль границы (на одномерных и нульмерных клетках) происходит склейка, и гладкие части Q^3 , диффеоморфные декартову произведению $D^2 \times S^1$, склеиваются по закону отражения. Точки склейки составляют множество меры нуль. Каждый случай отражения был подробно разобран в описании отношения эквивалентности (см. раздел 3.1). Покажем, что эта склейка не выводит Q^3 из класса многообразия, то есть склеивает внутренние части листов так, что во всех точках склейки существует окрестность, гомеоморфная трехмерному диску.

Итак, рассмотрим точку склейки $q = (x, v) \in Q^3$. Поскольку она принадлежит Q^3 , то верно $|v|^2 = 2h$. Согласно описанию отношения эквивалентности, она может быть одного из трех типов.

1. *Случай отражения от дуги.* Точка q представляет собой класс эквивалентности, состоящий из двух точек $(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, удовлетворяющим условию п. 1 отношения эквивалентности. Тогда ее окрестность является склейкой окрестностей точек (x_1, v_1) и (x_2, v_2) . Опишем эту склейку окрестностей и убедимся, что она гомеоморфна трехмерному диску.

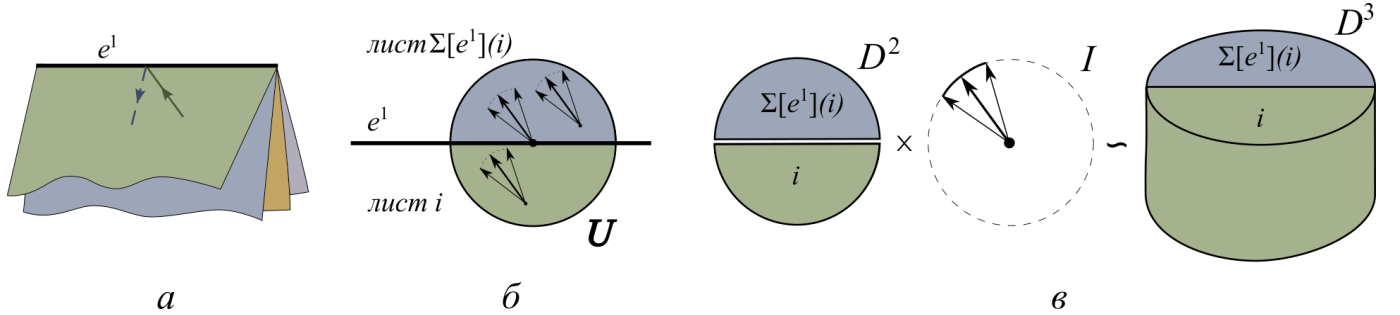


Рис. 3.2: На рисунке представлена окрестность точки склейки в случае отражения от дуги. Рис. а — движение материальной точки по бильярдной книжке. Рис. б — представление точки q и ее окрестности в виде точка-вектор на бильярдной книжке. Рис. в — явный вид окрестности точки q в Q^3 .

Итак, для точек $(x_1, v_1), (x_2, v_2)$ верно (см. рис. 3.2):

- $\pi(x_1, v_1) = \pi(x_2, v_2) \in e^1$ для некоторого $e^1 \in X^1$ (см. опр. 3.1);
- $\tilde{N}(x_1, v_1) = i$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$;
- $\tilde{N}(x_2, v_2) = \Sigma[e^1](i)$;
- вектор v_1 направлен наружу листа с номером $\tilde{N}(x_1, v_1)$, а вектор v_2 — внутрь листа с номером $\tilde{N}(x_2, v_2)$, причем ни один из векторов не направлен по касательной к корешку e^1 ;
- пусть без ограничения общности листы находятся по разные стороны от дуги при отображении ρ (см. опр. 1.8) бильярдного комплекса X на плоскость. Если это не так, то в малой окрестности листы можно “развернуть”. Тогда вектор $v_1 = v_2 = v$.

Окрестность точки (x_1, v_1) в Q^3 является полудиском на листе i , декартово умноженным на дугу I окружности $|v_1|^2 = 2h$ из пространства векторов. Окрестность точки (x_2, v_2) — полудиском на листе $\Sigma[e^1](i)$, также декартово умноженным на дугу I . Эти две окрестности склеиваются по границе этих двух полудисков. В результате склейки получаем декартово произведение $D^2 \times I$, гомеоморфное трехмерному диску.

2. *Случай касания кривой из границы.* Точка q представляет собой класс эквивалентности, состоящий из точек на фазовом пространстве, отвечающих движению по некоторому выпуклому корешку $e^1 \in X^1$. Поскольку материальная точка движется одновременно по всем листам, смежным с корешком e^1 , то класс эквивалентности состоит из $k \in \mathbb{N}$ точек, где k — длина циклической перестановки, соответствующей этому корешку.

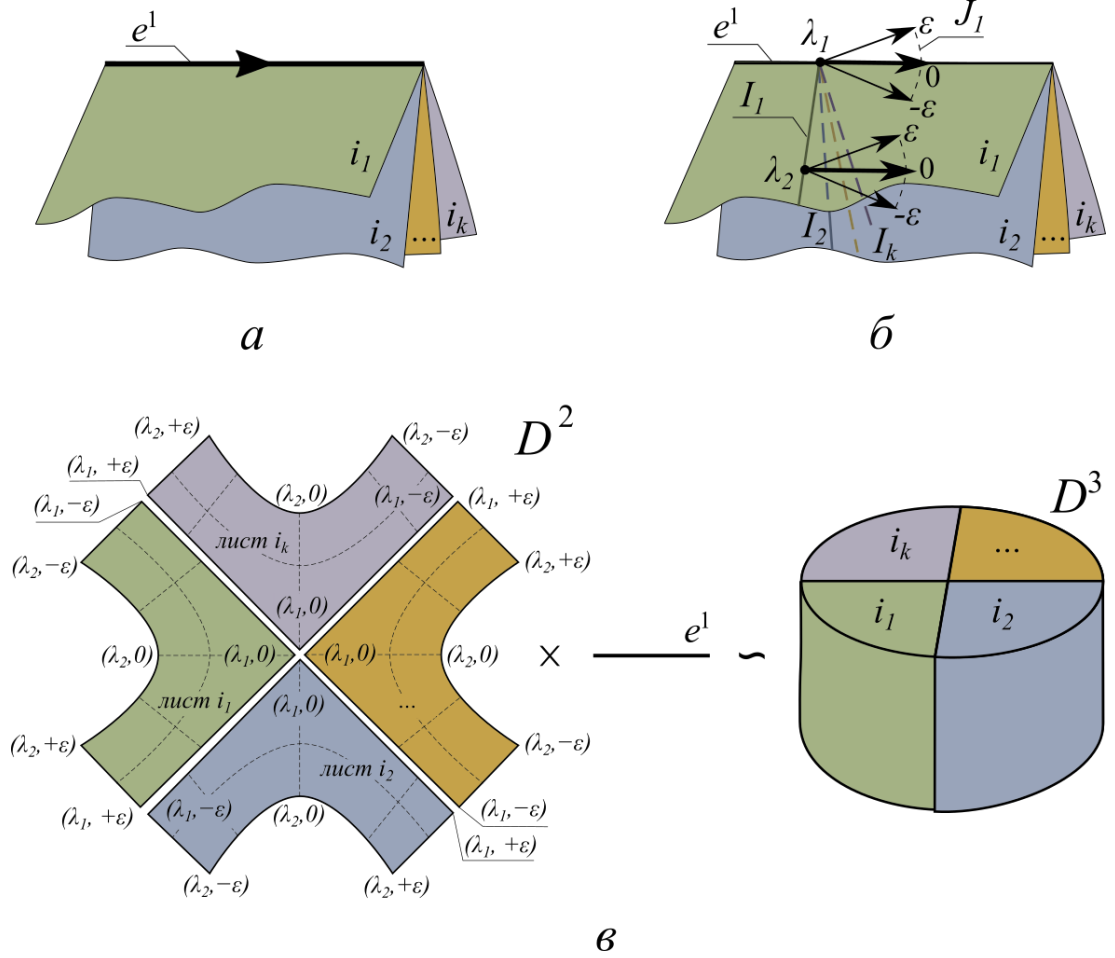


Рис. 3.3: На рисунке представлена окрестность точки склейки в случае касания кривой из границы. Рис. а — движение материальной точки по бильярдной книжке. Рис. б — представление точки q и ее окрестности в виде точка-вектор на бильярдной книжке. Рис. в — явный вид окрестности точки q в Q^3 .

Итак, точка q — это класс эквивалентности, состоящий из точек $(x_1, v_1), (x_2, v_2), \dots, (x_k, v_k)$, удовлетворяющих следующим условиям (см. рис. 3.3):

- $\pi(x_1, v_1) = \pi(x_2, v_2) = \dots = \pi(x_k, v_k) \in e^1$ (см. опр. 3.1);
- $\tilde{N}(x_1, v_1) = i_1, \tilde{N}(x_2, v_2) = i_2, \dots, \tilde{N}(x_k, v_k) = i_k$;
- $\Sigma[e^1] = (i_1 i_2 \dots i_k)$;
- v_1, v_2, \dots, v_k равны между собой и направлены по касательной к корешку e^1 .

Рассмотрим, как устроены окрестности этих k точек в Q^3 и как они склеены между собой. Для этого рассмотрим сечение I , трансверсальное к квадрике $\rho(e^1)$, чтобы уменьшить размерность до двух. Опишем прообраз $\pi^{-1} \circ \rho^{-1}(I) \cap Q^3$ в окрестности точки q . Напомним, что π отображает фазовое пространство M^4 на бильярдный комплекс X , а ρ отображает этот бильярдный комплекс на плоскость. Если мы покажем, что прообраз $\pi^{-1} \circ \rho^{-1}(I) \cap Q^3$ в окрестности точки q гомеоморфен двумерному диску D^2 , то окрестность точки q будет гомеоморфна декартову произведению $D^2 \times e^1$, которое в свою очередь гомеоморфно трехмерному диску. Это верно, поскольку малый сдвиг вдоль дуги e^1 сечения I не меняет топологию прообраза $\pi^{-1} \circ \rho^{-1}(I) \cap Q^3$.

Итак, приступим к доказательству того, что топологическое пространство $\pi^{-1} \circ \rho^{-1}(I) \cap Q^3$ в окрестности точки q гомеоморфно двумерному диску. Окрестность точки (x_1, v_1) в Q^3 в прообразе сечения I представляет собой часть I_1 этого сечения, декартово умноженную на дугу J_1 окружности $|v_1|^2 = 2h$. Для упрощения представления на рис. 3.3, введем координаты: $I_1 = [\lambda_1, \lambda_2)$, $J_1 = (-\varepsilon, +\varepsilon)$ так, чтобы координата 0 на J_1 соответствовала вектору, направленному по касательной к дуге e^1 . Покажем, как окрестность $I_1 \times J_1$ точки (x_1, v_1) склеивается с окрестностями $I_2 \times J_2, \dots, I_k \times J_k$ точек $(x_2, v_2), \dots, (x_k, v_k)$ соответственно. Рассмотрим на каждой из таких окрестностей точки с координатами $(\lambda_1, 0)$, соответствующие моменту движения, когда материальная точка лежит на корешке и ее вектор скорости направлен по касательной к корешку. Тогда эта точка принадлежит сразу всем листам и все $I_i \times J_i$ склеены в этой точке между собой. Точки с координатами $(\lambda_1, -\varepsilon)$ и $(\lambda_1, +\varepsilon)$ склеены по циклу в соответствии с предыдущим случаем отражения от дуги. При отдалении координаты отрезка I_i от λ_1 склейки вообще не происходит. Таким образом, $I_1 \times J_1, I_2 \times J_2, \dots, I_k \times J_k$ склеены между собой по циклу и после склейки образуют топологическое пространство, представленное на рис. 3.3 и гомеоморфное двумерному диску. Значит вся окрестность точки q в этом случае гомеоморфна трехмерному диску.

3. *Случай угловой точки.* Рассмотрим случай, когда материальная точка попала в “угол” (на нульмерную клетку $e^0 \in X^0$). Этот случай можно свести к первым двум следующим образом. В точке $\rho(e^0)$ ортогонально пересекаются две квадрики с параметрами λ_1 и λ_2 . Вектор скорости v не является касательным хотя бы к одной из них. Пусть без ограничения общности эта квадратика имеет параметр λ_1 . Рассмотрим перестановку σ_1 из опр. 1.10. Тогда окрестность точки q делится на две части: точки на листах с номерами i_1, i_2, \dots, i_m для некоторого $m \in \mathbb{N}$ с векторами направленными наружу этих листов и точки на листах с номерами $\sigma_1(i_1), \sigma_1(i_2), \dots, \sigma_1(i_m)$ с векторами направленными внутрь этих листов. Локально в окрестности точки q эти окрестности гомеоморфны четвертям диска, декартово умноженным на дугу I окружности $|v_1|^2 = 2h$ из пространства векторов. Эти четверти диска склеиваются в полудиски: i_1 с $\sigma_1(i_1)$, i_2 с $\sigma_1(i_2)$, ..., i_m с $\sigma_1(i_m)$. Эта склейка соответствует движению с листа i_1 на лист $\sigma_1(i_1)$, с листа i_2 на лист $\sigma_1(i_2)$, ..., с листа i_m на лист

$\sigma_1(i_m)$. После этой склейки мы получаем один из двух разобранных выше случаев.

Получили, что любая точка $q \in Q^3$ имеет окрестность, гомеоморфную трехмерному диску. Причем точки, находящиеся внутри листов (двумерных клеток), составляют множество полной меры и являются точками гладкости. Значит, Q^3 является трехмерным топологическим кусочно-гладким многообразием. Теорема доказана. \square

Следствие 3.2. *Для любой бильярдной книжки фазовое пространство M^4 является четырехмерным топологическим кусочно-гладким многообразием, гомеоморфным декартову произведению изоэнергетического многообразия Q^3 и интервала.*

Доказательство. Поскольку динамика бильярдной книжки не меняется в зависимости от уровня интеграла энергии H , то фазовое пространство M^4 — это локально тривиальное расслоение со слоем Q^3 над базой $(0, +\infty)$. По предыдущей теореме Q^3 является кусочно-гладким трехмерным топологическим многообразием. А значит, $M^4 = Q^3 \times (0, +\infty)$ является кусочно-гладким четырехмерным топологическим многообразием. \square

3.4 Обобщение теории инвариантов Фоменко-Цишанга на кусочно-гладкий случай бильярдных книжек

Итак, как было описано ранее, фазовое пространство M^4 бильярдной книжки является кусочно-гладким многообразием. На нем определены непрерывные функции H и Λ , являющиеся гладкими функциями в точках гладкости многообразия M^4 . Явным вычислением можно показать, что в точках гладкости многообразия M^4 , дополненного симплектической структурой вида

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

динамическая система бильярдной книжки является гамильтоновой с гамильтонианом H , который функционально независим от дополнительного первого интеграла Λ (см. формулы в разделе 3.2) и находятся с ним в инволюции.

Но поскольку на фазовом пространстве M^4 существуют точки, в которых гладкость нарушается, мы не можем напрямую пользоваться изложенными выше (см. главу 2) результатами классической теории интегрируемых систем с двумя степенями свободы. Поэтому сформулируем, что понимается под 3-атомами и грубыми молекулами в кусочно-гладких бильярдных системах.

Замечание 3.2. Граф Рибба можно определить так же, как и в определении 2.5, для кусочно-гладкого топологического многообразия $Q^3 := \{m \in M^4 : H(m) = h\}$ бильярдной книжки.

Определение 3.3. Рассмотрим прообраз точки ξ на графе Роба, построенного для первого интеграла $\Lambda : Q^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть этот прообраз не является регулярным, то есть не гомеоморфен кусочно-гладкому двумерному тору Лиувилля. Тогда прообраз ε - окрестности этой точки ξ , рассматриваемый с точностью до послыного гомеоморфизма, называется *3-атомом*.

Здесь и далее под 3-атомом всегда будем понимать невырожденный (боттовский) 3-атом интегрируемой гамильтоновой системы или послыно гомеоморфное такому атому слоение интегрируемого бильярда вблизи своего особого слоя.

Определение 3.4. Граф Роба с указанными 3-атомами в соответствующих вершинах и поднятием слоения в прообразе малой окрестности каждой точки этого графа называется *грубой молекулой* для функции Λ на изоэнергетическом кусочно-гладком многообразии Q^3 .

Замечание 3.3. Сформулированные определения действительно являются обобщениями. Иными словами, если динамическая система является гладкой и вполне интегрируемой по Лиувиллю, то эти определения 3-атомов и грубых молекул совпадут с классическими.

Кроме того, в нашем негладком случае нельзя пользоваться классической теоремой Лиувилля, доказательство которой требует, в частности, наличие гладкой и симплектической структур на фазовом пространстве. Поэтому в случае бильярдных книжек (и любых других бильярдных) нет гарантии, что регулярные слои будут являться объединением двумерных торов. Например, в случае бильярдных, границы которых содержат углы излома $\frac{3\pi}{2}$, на регулярных слоях вместо торов возникают сферы с несколькими ручками и выколотыми точками (см. работы В. И. Драговича, М. Раднович [26], В. А. Москвина [27]). Поэтому топологию каждого слоя интеграла Λ мы будем определять методом В. В. Фокичевой (Ведюшкиной), описанным в работе [28, 29]. А именно, для каждого уровня мы будем явно находить, чему он гомеоморфен. Оказывается, построенные для бильярдных книжек грубые молекулы, в основном, имеют классический вид: в прообразе точек ребер графа грубой молекулы лежат двумерные торы, а в прообразе окрестностей его вершин — 3-атомы, принадлежащие классификации из книги [8] А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко (см. раздел 2.5 “конструкция 3-атомов”).

Глава 4

Описание слоения Лиувилля бильярдных книжек в терминах перестановок

4.1 Классы бильярдных книжек

Поскольку для реализации грубых молекул нам понадобятся не все бильярдные книжки, выделим в их классе подклассы и далее будем работать только с ними. Для этого воспользуемся обозначением из классификации [29] В.В. Фокичевой (В.В. Ведюшкиной).

Определение 4.1. Зафиксируем гиперболу с некоторым параметром $\tilde{\lambda}$. Будем говорить, что элементарная бильярдная область имеет тип A'_0 (см. рис. 4.1), если она ограничена слева вертикальной прямой (квадрикой с параметром a), справа гиперболой с параметром $\tilde{\lambda}$, сверху эллипсом с параметром 0 , а снизу горизонтальной прямой (квадрикой с параметром b). Элементарная область типа B_0 выглядит так же, за исключением того, что снизу она ограничена эллипсом с произвольным параметром (см. рис. 4.2). Дуга этого эллипса должна быть невыпуклой.

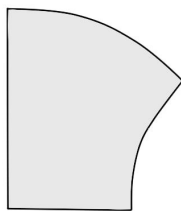


Рис. 4.1: Область A'_0 .

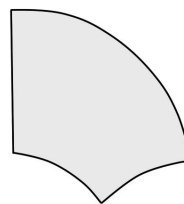


Рис. 4.2: Область B_0 .

Определение 4.2. Бильярдная книжка принадлежит *классу а* (*классу б*), если все ее листы имеют тип A'_0 (A'_0 или B_0), и правым границам всех листов соответствуют тождественные перестановки, а нижним границам всех листов — нетождественные.

Замечание 4.1. Класс \mathbf{b} бильярдных книжек расширяет класс \mathbf{a} . Поскольку для реализации грубых молекул необходимы бильярдные книжки класса \mathbf{b} , то далее будем рассматривать только этот класс.

4.2 Семейство перестановок на квадриках и переформулировка леммы о коммутирующих перестановках

Зафиксируем бильярдный комплекс $X = X^0 \cup X^1 \cup X^2$ и перестановки Σ на нем такие, что они удовлетворяют определению класса \mathbf{b} бильярдных книжек, то есть все листы комплекса X имеют тип A'_0 или B_0 , правым границам всех листов соответствуют тождественные перестановки, а нижним границам — нетождественные.

Определение 4.3. Для каждого параметра квадрики $\lambda \in [0, a]$ определим перестановку $\sigma[\lambda]$, называемую *перестановкой на квадрике*, как композицию всех перестановок, соответствующих таким одномерным клеткам, которые являются дугами квадрики с параметром λ . То есть,

$$\sigma[\lambda] = \prod_{e^1 \in X_\lambda^1} \Sigma[e^1],$$

где X_λ^1 — это множество одномерных клеток, являющихся дугой квадрики с параметром λ .

Замечание 4.2. Покажем, что определение 4.3 перестановки на квадрике корректно, то есть не зависит от порядка перемножения перестановок. Напомним, что для любого корешка e^1 перестановка $\Sigma[e^1]$ является циклической перестановкой листов, границами которых является этот корешок (см. опр. 1.9). Так как все листы комплекса X имеют тип A'_0 или B_0 , то циклы в перестановках $\Sigma[e^1]$, таких что $e^1 \in X_\lambda^1$, не пересекаются. Значит, эти перестановки можно перемножать в произвольном порядке.

Для удобства будем записывать перестановки на квадриках в виде разложения в произведение независимых циклов, явно выписывая циклы длины один, поскольку каждый из циклов в разложении соответствует некоторому корешку.

Замечание 4.3. Согласно определению 4.3 перестановки на квадриках определены для каждого параметра $\lambda \in [0, a]$. Таким образом, получается параметрическое семейство перестановок $\sigma[\lambda]$. Но заметим, что только конечное число таких перестановок окажется нетождественными, поскольку корешков конечное число.

Если ограничить класс бильярдных книжек до класса \mathbf{b} , то лемму 1.2 о коммутирующих перестановках можно сформулировать по-другому. Этой версией леммы о коммутирующих перестановках пользоваться для проверки корректности бильярдной книжки существенно проще.

Лемма 4.1 (о коммутирующих перестановках для бильярдной книжки класса \mathbf{b}). *Перестановки Σ задают бильярдную книжку $\mathcal{B}(X, \Sigma)$ класса \mathbf{b} (движение) на бильярдном комплексе X тогда и только тогда, когда для любого параметра $\lambda \in [0, b]$ перестановки на квадриках $\sigma[\lambda]$ и $\sigma[a]$ из опр. 4.3 коммутируют.*

Доказательство. Покажем, что в случае бильярдных книжек класса \mathbf{b} (или, если точнее, бильярдного комплекса X и перестановок Σ , удовлетворяющим условиям из определения класса \mathbf{b}) коммутирование перестановок на квадриках $\sigma[\lambda]$ и $\sigma[a]$ для любого параметра $\lambda \in [0, b]$ эквивалентно коммутированию перестановок $\sigma_1(e^0)$ и $\sigma_2(e^0)$ из определения 1.10 для любой нульмерной клетки $e^0 \in X^0$. Тогда леммы 1.2 и 4.1 в заданном классе книжек будут эквивалентны.

Рассмотрим произвольную нульмерную клетку $e^0 \in X^0$. Поскольку все листы имеют тип A'_0 или B_0 , то при проекции на плоскость эта нульмерная клетка проецируется либо на гиперболу с параметром $\tilde{\lambda}$ (правую границу листов), либо на вертикальную прямую (левую границу листов).

В первом случае, поскольку правой границе всех листов соответствует тождественная перестановка, то по определению 1.10 одна из перестановок $\sigma_1(e^0)$ и $\sigma_2(e^0)$ является тождественной. Значит, в случае бильярдных книжек класса \mathbf{b} для таких нульмерных клеток условие коммутруемости заведомо выполняется.

Рассмотрим второй случай. Проекция на плоскость $\rho(e_1^0)$ нульмерной клетки e_1^0 лежит на пересечении вертикальной прямой (квадрики с параметром a) и некоторого эллипса. Пусть эллипс имеет параметр λ' в семействе квадрик. Тогда корешки, содержащиеся в своей границе клетку e_1^0 , при проекции на плоскость ρ переходят либо в дугу эллипса с параметром λ' , либо в дугу, лежащую на вертикальной прямой. Обозначим все одномерные клетки, которые переходят в эллипс с параметром λ' , через e_1^1, \dots, e_k^1 , $k \in \mathbb{N}$, все одномерные клетки, которые переходят в вертикальную прямую, через e_{k+1}^1, \dots, e_l^1 , $l \in \mathbb{N}$. Тогда по определению 1.10

$$\sigma_1(e_1^0) = \prod_{i=1}^k \Sigma[e_i^1] \quad \text{и} \quad \sigma_2(e_1^0) = \prod_{i=k+1}^l \Sigma[e_i^1]. \quad (4.2.1)$$

В то же время по определению 4.3 перестановок на квадриках

$$\sigma[\lambda'] = \prod_{i=1}^k \Sigma[e_i^1] \circ \dots = \sigma_1(e_1^0) \circ \dots \quad \text{и} \quad \sigma[a] = \prod_{i=k+1}^l \Sigma[e_i^1] \circ \dots = \sigma_2(e_1^0) \circ \dots \quad (4.2.2)$$

То есть перестановки на квадриках $\sigma[\lambda']$ и $\sigma[a]$ кратны $\sigma_1(e_1^0)$ и $\sigma_2(e_1^0)$ соответственно. Обозначим через S_1 и S_1 частные. Получаем, что $\sigma[\lambda'] = \sigma_1(e_1^0) \circ S_1$ и $\sigma[a] = \sigma_2(e_1^0) \circ S_2$. В силу определения бильярдной книжки класса \mathbf{b} перестановки $\sigma_1(e_1^0)$ и S_1 не зависят друг от друга, так как они переставляют разные листы. Точно также независимыми являются перестановки $\sigma_2(e_1^0)$ и S_2 .

Таким образом, получаем, что перестановки $\sigma[\lambda']$ и $\sigma[a]$ коммутируют тогда и только тогда, когда коммутируют $\sigma_1(e_1^0)$ с $\sigma_2(e_1^0)$ и S_1 с S_2 . Коммутирование остальных пар не учитывается из-за независимости перестановок. Если перестановка S_1 — тождественная, то все доказано.

Если нет, то возьмем произвольный элемент r из S_1 , который переставляется нетождественно и найдем нульмерную клетку e_2^0 , которая является границей листа r и в то же время ее проекция $\rho(e_1^0)$ лежит на пересечении эллипса с параметром λ' и вертикальной прямой (квадрики с параметром a). Такая клетка существует, поскольку мы выбирали такой лист, который перестановка $\sigma[\lambda']$ переставляет нетождественно. Значит либо верхней, либо нижней границей этого листа является эллипс с параметром λ' . А левой границей любого листа является вертикальная прямая.

Продолжая дальше рассматривать таким образом нульмерные клетки, в какой-то момент получим $\sigma[\lambda'] = \sigma_1(e_1^0) \circ \dots \circ \sigma_1(e_i^0)$ и $\sigma[a] = \sigma_2(e_1^0) \circ \dots \circ \sigma_2(e_i^0) \circ S_{t+1}$. Причем, это разложение будет разложением в независимые перестановки. А значит, коммутуруемость $\sigma[\lambda']$ и $\sigma[a]$ эквивалентна коммутуемости $\sigma_1(e_i^0)$ и $\sigma_2(e_i^0)$. Остальные пары коммутуют в силу независимости перестановок в разложении.

Аналогично рассматриваются остальные нульмерные клетки и параметры квадрик. Таким образом, получаем эквивалентность двух условий. \square

4.3 Лемма о конструировании бильярдной книжки по семейству перестановок на квадриках

Одно из преимуществ класса \mathbf{b} бильярдных книжек состоит в том, что его гораздо проще задавать и описывать. Он задается конечным набором перестановок с понятным ограничением, описанным в предыдущей лемме о коммутующих перестановках 4.1.

Лемма 4.2 (о конструировании бильярдной книжки класса \mathbf{b} по семейству перестановок на квадриках). *Пусть задано параметрическое семейство перестановок $\sigma[\lambda]$ с параметром $\lambda \in [0, a]$ со следующими свойствами.*

1. *Есть только конечное число нетождественных перестановок из семейства $\sigma[\lambda]$. Они отвечают параметрам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k$, а также, возможно, 0 и a , таким что $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{k-1} < \lambda_k \leq b < a$, $k \in \mathbb{N}$.*
2. *Обозначим через $N_0, N_1, N_2, \dots, N_k$ множества чисел, на которые действуют нетождественно перестановки $\sigma[0], \sigma[\lambda_1], \sigma[\lambda_2], \dots, \sigma[\lambda_k]$ соответственно. Тогда эти множества не пересекаются, а также верно $N_0 \subset \bigcup_{i=1}^k N_i$.*
3. *Перестановка $\sigma[a]$ коммутует с любой другой перестановкой из семейства $\sigma[\lambda]$.*

Тогда существует единственная бильярдная книжка класса \mathbf{b} такая, что ее семейство перестановок на квадриках совпадает с семейством $\sigma[\lambda]$.

Доказательство. Существование и явная конструкция. Итак, дано семейство перестановок $\sigma[\lambda]$ с параметром $\lambda \in [0, a]$ с указанными выше свойствами. Построим по ним бильярдную книжку $\mathcal{B}(X, \Sigma, N)$ класса \mathbf{b} .

Для каждого $i = 1, 2, \dots, k$ рассмотрим множество чисел $N_i \subset \mathbb{N}$, на которые действует нетождественно перестановка $\sigma[\lambda_i]$. Количество листов бильярдной книжки класса \mathbf{b} определено однозначно множеством $\bigcup_{i=1}^k N_i$, поскольку согласно определению 4.1 все листы такой книжки должны иметь нетождественную перестановку на нижнем корешке. Значит, эта перестановка возникнет в какой-нибудь из перестановок $\sigma[\lambda_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$ при разложении их в независимые циклы.

Каждому числу $j \in N_i$ сопоставим лист e^2 бильярдной книжки \mathcal{B} . Этот лист ограничен сверху эллипсом с параметром 0, справа — гиперболой с параметром $\tilde{\lambda}$ (параметр $\tilde{\lambda}$ зафиксирован в опр. 4.1), слева — вертикальной прямой, то есть квадрикой с параметром a , снизу — квадрикой с параметром λ_i (эллипсом, если $\lambda_i < b$, или горизонтальной прямой, если $\lambda_i = b$). Снизу и справа границы невыпуклые, сверху и слева — выпуклые. Таким образом, этот лист имеет тип B_0 , если $\lambda_i < b$, или тип A'_0 , если $\lambda_i = b$. Из условия 2 на семейство перестановок $\sigma[\lambda]$ следует, что существует единственное множество N_i , которое содержит число j . Значит, можно занумеровать этот лист номером j , то есть положим $N[e^2] = j$.

Поскольку бильярдная книжка \mathcal{B} принадлежит классу \mathbf{b} , то справа лист j ни с чем не склеивается, а перестановка, соответствующая правому корешку — тождественная. Из этого в том числе вытекает, что перестановка $\sigma[\tilde{\lambda}]$ обязана быть тождественной.

Слева этот лист склеивается по перестановке $\sigma[a]$ следующим образом. Рассмотрим разложение перестановки $\sigma[a]$ в произведение независимых циклов. Найдем тот независимый цикл γ , в котором встречается номер j . Он может быть единичной длины. Тогда листы с номерами из этого цикла склеены между собой по левой границе, и к их общему корешку e^1 соответствует этот цикл, то есть $\Sigma[e^1] = \gamma$.

Листы, с которыми этот лист склеен сверху, и перестановка, соответствующая верхнему корешку, определяется по перестановке $\sigma[0]$ аналогично перестановке $\sigma[a]$. Склейка снизу определяется по перестановке $\sigma[\lambda_i]$ также аналогично.

Покажем, что получившаяся книжка корректно задана, и на ней можно определить движение материальной точки. Пункт 2 определения 1.9 бильярдной книжки выполняется по построению. Движение материальной точки на такой бильярдной книжке \mathcal{B} задается оставшимися пунктами определения 1.9. Это движение можно корректно определить в силу условия 3 на семейство перестановок $\sigma[\lambda]$ и леммы 4.1 о коммутирующих перестановках.

Из описанного выше построения и определения 4.3 семейства перестановок на квадриках следует, что для получившейся бильярдной книжки \mathcal{B} это семейство совпадает с семейством $\sigma[\lambda]$.

Единственность. Пусть есть две различных бильярдных книжки $\mathcal{B}(X_1, \Sigma_1, N_1)$ и $\mathcal{B}(X_2, \Sigma_2, N_2)$ класса \mathbf{b} , для которых семейство перестановок на квадриках $\sigma[\lambda]$ совпадает. Тогда у этих двух

бильярдных книжек существует лист i , в котором есть одно из следующих отличий. Есть хотя бы одна несовпадающая граница или есть хотя бы один не совпадающий переход на другой лист.

В первом случае, поскольку мы рассматриваем бильярдные книжки класса \mathbf{b} , несовпадающей границей может быть только нижняя. Пусть у книжки $\mathcal{B}(X_1, \Sigma_1, N_1)$ она имеет параметр λ' . А поскольку ей соответствует нетождественная перестановка (снова в силу определения класса \mathbf{b}), то в перестановке на квадрике $\sigma[\lambda']$ должен быть нетривиальный цикл, содержащий лист i . В то же время для книжки $\mathcal{B}(X_2, \Sigma_2, N_2)$ этого цикла быть не должно. Значит, перестановки на квадрике $\sigma[\lambda']$ для этих двух книжек не совпадают. Получили противоречие.

Во втором случае предполагаем, что есть такой корешок e^1 на листе i такой, что $\Sigma_1[e^1](i) \neq \Sigma_2[e^1](i)$, то есть после удара об него, материальная точка переходит на разные листы. Но тогда получаем, что для бильярдных книжек $\mathcal{B}(X_1, \Sigma_1, N_1)$ и $\mathcal{B}(X_2, \Sigma_2, N_2)$ перестановка на квадрике $\sigma[\lambda']$, где λ' — это параметр квадрики, соответствующей корешку e^1 , должна содержать разные независимые циклы, переставляющие лист i . Снова получили противоречие.

Лемма доказана. □

Следствие 4.3 (о конструировании бильярдной книжки класса \mathbf{a} по трем перестановкам). Пусть все перестановки параметрического семейства $\sigma[\lambda]$ с параметром $\lambda \in [0, a]$ тождественны, кроме перестановки $\sigma[b]$ и, возможно, перестановок $\sigma[0]$, $\sigma[a]$. А также, перестановка $\sigma[a]$ коммутирует с двумя остальными, и множество чисел, на которые действует нетождественно перестановка $\sigma[0]$, содержит в себе множество чисел, на которые действует нетождественно перестановка $\sigma[b]$. Тогда по этому семейству однозначно строится бильярдная книжка класса \mathbf{a} , такая что ее семейство перестановок на квадриках совпадает с семейством $\sigma[\lambda]$.

Доказательство. Этот факт является частным случаем предыдущей леммы 4.2. В этом случае $k = 1$, $\lambda_1 = b$, а все листы имеют тип A'_0 и снизу ограничены горизонтальной прямой (квадрикой с параметром b). □

4.4 Операция несвязного объединения двух книжек

Определение 4.4. Введем операцию несвязного объединения двух книжек $\mathcal{B}_1(X_1, \Sigma_1, N_1)$ и $\mathcal{B}_2(X_2, \Sigma_2, N_2)$. Перенумеруем листы на одной из книжек так, чтобы нумерации этих двух книжек не пересекались, и изменим перестановки согласно этой нумерации. Результатом операции несвязного объединения является книжка $\mathcal{B}(X, \Sigma, N) = \mathcal{B}_1(X_1, \Sigma_1, N_1) \sqcup \mathcal{B}_2(X_2, \Sigma_2, N_2)$, которая задается следующим образом. Бильярдный комплекс X является несвязным объединением $X = X_1 \sqcup X_2$. Нумерация N на листах книжки \mathcal{B}_1 совпадает с нумерацией N_1 , на листах книжки \mathcal{B}_2 — с нумерацией N_2 . Аналогично определим функцию перестановок Σ на одномерных клетках комплекса X_1 как функцию Σ_1 , на одномерных клетках комплекса X_2 как функцию Σ_2 .

Задав комплекс X и функции Σ, N , мы определили бильярдную книжку \mathcal{B} , являющуюся результатом операции.

Замечание 4.4. Пусть $\sigma_1[\lambda], \sigma_2[\lambda], \sigma[\lambda]$ при $\lambda \in [a, b]$ — семейства перестановок на квадраках для бильярдных книжек $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}$ из определения 4.4 соответственно. Из определения 4.3 перестановки на квадраке и определения 4.4 несвязного объединения двух книжек сразу вытекает, что $\sigma[\lambda] = \sigma_1[\lambda] \circ \sigma_2[\lambda] \quad \forall \lambda \in [a, b]$.

Предложение 4.4. Пусть бильярдным книжкам \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 соответствуют грубые молекулы W_1 и W_2 . Тогда несвязному объединению этих книжек $\mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2$ соответствует грубая молекула $W_1 \sqcup W_2$.

Доказательство. Несвязное объединение $\mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2$ имеет фазовое пространство, являющееся несвязным объединением фазовых пространств книжек \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 , на которых определены те же первые интегралы H и Λ , что и ранее. Значит, и грубая молекула является также несвязным объединением $W_1 \sqcup W_2$. \square

4.5 Метод изучения слоения Лиувилля бильярдных книжек

Опишем метод, с помощью которого мы будем изучать слоение Лиувилля бильярдных книжек класса \mathbf{b} , введенный В. В. Ведюшкиной (см., например, статьи [28, 29, 11]), и на котором будут основываться представленные в работе результаты. К этому методу мы будем многократно возвращаться.

Напомним, что на фазовых пространствах M^4 бильярдных книжек класса \mathbf{b} определены проекции расслоения $\pi : M^4 \rightarrow X$ (см. замечание 3.1). Можно посмотреть, в какие точки на бильярдном комплексе X перейдут слои на изоэнергетическом многообразии Q^3 . Образ слоя при такой проекции называется *областью возможного движения* и показывает, по какой части бильярдной книжки может идти траектория, принадлежащая этому слою.

Заметим, что каждой точке на бильярдном комплексе X соответствует не более 4-х точек на выделенном уровне интеграла Λ на изоэнергетическом многообразии Q^3 . Это верно, поскольку точки на изоэнергетическом многообразии описывают состояние системы, которое идентифицируется положением на листе бильярдной книжки и вектором, указывающим направление движения материальной точки (см. главу 3). Условие, что точка должна принадлежать уровню интеграла Λ , отвечает направлениям векторов, которые либо касаются определенной квадраки, либо идут от или к одному из фокусов. Единственные точки, которые могут иметь более 4-х возможных направлений к или от фокусов — это сами фокусы. Но бильярдные книжки класса \mathbf{b} содержат только листы типа A'_0 или B_0 , которые не содержат в себе фокальные точки. В

итоге, если зафиксировать положение материальной точки на бильярдной книжке класса \mathbf{b} , получается не более 4-х возможных векторов.

Будем изучать уровни интеграла Λ , рассматривая положение материальной точки на бильярдной книжке и различные направления вектора скорости для этого положения. Эти векторы будут некоторым образом склеиваться на границе листов и образовывать двумерные слои. Таким образом мы можем описывать топологию любого слоя бильярдной книжки. Одним из базовых примеров применения этого метода можно назвать лемму 5.3.

4.6 Перестановка уровня и ее связь с торами Лиувилля бильярдной книжки

Фиксируем бильярдную книжку $\mathcal{B}(X, \Sigma, N)$ класса \mathbf{b} . Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$ — параметры m эллипсов, являющихся нижними дугами листов этой бильярдной книжки. Пусть также дано некоторое число λ такое, что $0 < \lambda < a$, $\lambda \neq \lambda_i \quad \forall i = 1, \dots, m$.

Определение 4.5. *Перестановкой уровня λ называется композиция всех нетождественных перестановок $\sigma[\lambda_i]$ на квадриках таких, что $\lambda_i < \lambda$ (композицию можно брать в произвольном порядке), то есть $\Pi[\lambda] := \prod_{\lambda_i < \lambda} \sigma[\lambda_i]$.*

Замечание 4.5. Покажем, что определение 4.5 перестановки уровня корректно, то есть не зависит от порядка перемножения перестановок. Поскольку все листы бильярдной книжки класса \mathbf{b} имеют тип A'_0 или B_0 , то все циклические перестановки, соответствующие нижним дугам листов, независимы между собой. Значит, перестановки $\sigma[\lambda_1], \sigma[\lambda_2], \dots, \sigma[\lambda_m]$ также независимы между собой, и их можно перемножать в произвольном порядке.

Сформулируем кусочно-гладкий аналог теоремы Лиувилля для бильярдных книжек класса \mathbf{b} .

Лемма 4.5. *В бильярдной книжке \mathcal{B} класса \mathbf{b} уровень интеграла $\Lambda = \lambda$ является регулярным.*

Если перестановка $\sigma[a]$, соответствующая левой границе листов, тождественна, то существует взаимно-однозначное соответствие между двумерными торами Лиувилля на уровне интеграла $\Lambda = \lambda$ и независимыми циклами в разложении композиции $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$ в произведение независимых циклов.

Рассмотрим тор, который соответствует произвольному независимому циклу γ композиции $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$. Этому тору соответствуют некоторые траектории на бильярдной книжке \mathcal{B} . Рассмотрим листы, на которых эти траектории идут вниз (к невыпуклой дуге эллипса). Тогда номера этих листов составляют орбиту независимого цикла γ .

Доказательство. Нижние дуги листов имеют параметры $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$. Параметр λ не совпадает ни с одним параметром λ_i . Тогда для некоторого $k \in \mathbb{N}$ верно $\lambda_1 < \dots < \lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1} < \dots < \lambda_m$. То есть k квадратик с параметрами $\lambda_1 < \dots < \lambda_k$ отвечают эллипсам, большим эллипса с параметром λ . Это означает, что дуги этих эллипсов, являющиеся нижней границей некоторых листов, находятся выше эллипса с параметром λ , которого касается траектория.

Уровень $\Lambda = \lambda$ соответствует траекториям на листах, которые касаются эллипса с параметром λ . Значит, на листах, у которых нижние дуги с параметрами $\lambda_1 < \dots < \lambda_k$ происходит отражение относительно нижней границы, на листах, у которых нижние дуги с параметрами $\lambda_{k+1} < \dots < \lambda_m$ траектории не доходят до нижней границы и касаются эллипса с параметром λ . Поэтому на нижней границе мы переходим только по перестановкам, которые соответствуют дугам квадратик с параметрами $\lambda_1 < \dots < \lambda_k$, то есть по перестановкам $\sigma[\lambda_1], \sigma[\lambda_2], \dots, \sigma[\lambda_k]$. Заметим, что для каждого $i = 1, \dots, m$ перестановка $\sigma[\lambda_i]$ переводит только листы с параметром квадратики нижней границы листа, равным λ_i . Поэтому перестановки $\sigma[\lambda_i]$ не пересекаются. Таким образом, материальная точка при движении вниз, отражается от нижней границы листа или касается эллипса с параметром λ , переходя с листа на лист по композиции $\sigma[\lambda_1] \circ \sigma[\lambda_2] \circ \dots \circ \sigma[\lambda_k]$ (композицию можно брать в произвольном порядке), которая равна перестановке $\Pi[\lambda]$ уровня λ .

Сверху все листы имеют границу с параметром квадратики, равным 0, поскольку мы рассматриваем бильярдную книжку класса \mathbf{b} . Значит, и на уровне $\Lambda = \lambda$ материальная точка отражается от верхней границы, переходя на следующий лист по перестановке $\sigma[0]$. Поскольку это бильярдная книжка класса \mathbf{b} , то справа находится тождественная перестановка $\sigma[\tilde{\lambda}] = id$. Сначала предположим, что слева перестановка $\sigma[a]$ тоже тождественна. В этом случае, траектории, отражаясь от левой и правой границы, остаются на том же листе. Поэтому можно не обращать внимание на отражение слева и справа и классифицировать все траектории следующим образом.

Рассмотрим траекторию, которая идет вниз по i -му листу. Внизу эта траектория после отражения или касания перейдет по перестановке $\Pi[\lambda]$ и пойдет по листу с номером $\Pi[\lambda](i)$ вверх. Когда она дойдет до верхней границы, она отразится и перейдет на следующий лист по перестановке $\sigma[0]$, затем продолжит движение вниз на листе с номером $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda](i)$. Если подействовать еще раз композицией $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$ на номер листа, получим следующий лист, на котором эта траектория идет вниз. Если продолжать применять эту перестановку, в какой-то момент мы снова вернемся на лист с номером i , то есть получим цикл, который соответствует движению этой траектории.

Получается, если разложить композицию $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$ в произведение независимых циклов, то каждый из циклов соответствует некоторому классу траекторий. Числа в циклах соответствуют номерам листов, по которым эти траектории идут вниз. Легко видеть, что мы рассмотрели все траектории, лежащие на уровне $\Lambda = \lambda$, поскольку все траектории идут либо вверх, либо вниз на каждом из листов, так как они касаются эллипса с параметром λ . Покажем, используя метод,

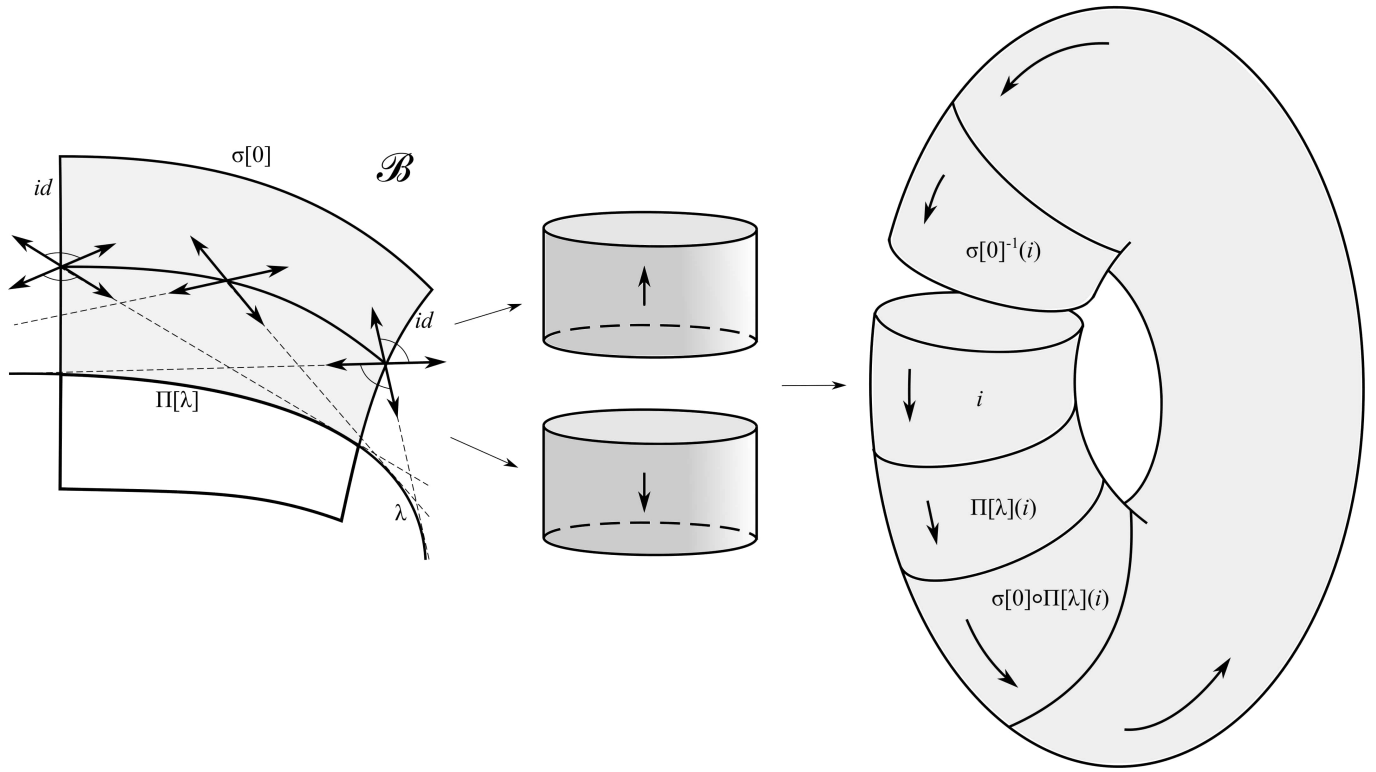


Рис. 4.3: Склейка точек на уровне интеграла $\Lambda = \lambda$, соответствующих векторам на бильярдной книжке, в тор.

описанный в разделе 4.5, что каждая из таких траекторий соответствует некоторому тору на уровне $\Lambda = \lambda$.

Рассмотрим произвольный лист на бильярдной книжке. Поскольку уровень $\Lambda = \lambda$ отвечает траекториям, которые касаются эллипса с параметром λ для каждой точки внутри листа есть 4 типа векторов: векторы, направленные влево вверх, вправо вверх, вправо вниз и влево вниз (см. рис. 4.3). Справа и слева из-за отражения и тождественных перестановок, векторы, направленные влево склеиваются с векторами направленными вправо. Из-за этого несвязное объединение 4-х областей возможного движения склеивается в два кольца. Итак, каждый лист соответствует двум кольцам с траекториями, направленными вверх и вниз (см. рис. 4.3). Эти кольца склеиваются между собой согласно перестановкам на нижних и верхних границах листов следующим образом. Рассмотрим лист с номером i . Пусть материальная точка находится внизу области возможного движения на i -ом листе. Рассмотрим векторы, направленные вниз для этих точек. Они склеиваются согласно закону отражения с векторами, направленными вверх на листе с номером $\Pi[\lambda](i)$. Точно также сверху векторы склеиваются по перестановке $\sigma[0]$. В итоге кольцо, отвечающее i -му листу с траекториями, направленными вниз, склеивается с кольцом $\Pi[\lambda](i)$ -го листа с траекториями, направленными вверх, которое в свою очередь склеивается с кольцом $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda](i)$ -го листа с траекториями, направленными вниз, и т.д. В какой-то момент склейка зациклится и мы получим тор (см. рис. 4.3). Из этих рассуждений прослежи-

вается соответствие между этими торами, траекториями и независимыми циклами разложения перестановки $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$.

Также заметим, что если рассмотреть достаточно малую окрестность уровня $\Lambda = \lambda$, то перестановка $\Pi[\lambda]$ не изменится, а векторы и область, по которой проходит материальная точка, немного деформируются, но склеятся таким же образом в торы. Поэтому близкие уровни к уровню $\Lambda = \lambda$ гомеоморфны ему. Значит, уровень интеграла $\Lambda = \lambda$ — регулярный.

Теперь рассмотрим случай, когда в билиардной книжке \mathcal{B} левая перестановка $\sigma[a]$ не является тождественной. В этом случае необходимо доказать только то, что уровень интеграла $\Lambda = \lambda$ — регулярный. Для этого рассмотрим другую билиардную книжку \mathcal{B}' , которая отличается от книжки \mathcal{B} тем, что у нее левая перестановка на квадрике тождественная. Для нее верно, что уровень интеграла $\Lambda = \lambda$ является регулярным. Чтобы получить слой $\Lambda = \lambda$ в билиардной книжке \mathcal{B} из слоя $\Lambda = \lambda$ в книжке \mathcal{B}' , нужно отменить склейку на левом корешке и полученные цилиндры склеить по перестановке $\sigma[a]$ (см. детали в статье В. В. Ведюшкиной [30]). Получатся двумерные торы. Обратим внимание, что эти торы отличаются от торов в билиардной книжке \mathcal{B}' . То же самое произойдет и в достаточно малой окрестности интеграла $\Lambda = \lambda$. Таким образом, получаем, что уровень интеграла $\Lambda = \lambda$ является регулярным и в случае, когда левая перестановка $\sigma[a]$ не является тождественной. Лемма доказана. \square

Замечание 4.6. Если в формулировке леммы 4.5 рассмотреть композицию в обратном порядке $\Pi[\lambda] \circ \sigma[0]$, то получится аналогичный результат, за исключением того, что траектории будут идти вверх. А именно, рассмотрим тор, который соответствует произвольному независимому циклу ζ обратной композиции $\Pi[\lambda] \circ \sigma[0]$. Рассмотрим траектории на билиардной книжке \mathcal{B} , которые соответствуют этому тору. Тогда номера листов, на которых эти траектории идут вверх (к выпуклой дуге эллипса), составляют орбиту независимого цикла ζ .

Глава 5

Реализация трехмерных бифуркаций бильiardными книжками

В этой главе изложен один из ключевых результатов работы.

Теорема 5.1 (Ведюшкина-Харчева). *Гипотеза Фоменко **A** верна, а именно, для любого невырожденного (боттовского) 3-атома (со звездочками или без) алгоритмически строится бильiardная книжка класса **a**, такая что в ее изоэнергетическом многообразии Q^3 слоение Лиувилля в прообразе окрестности особого значения интеграла Λ , отвечающего траекториям, направленным к или от одного из фокусов, послойно гомеоморфно данному атому.*

5.1 Алгоритм реализации произвольного седлового 3-атома

Алгоритм реализации атомов без звездочек и со звездочками отличаются. Изложим оба алгоритма.

Алгоритм 1 (реализации 3-атомов без звездочек). Пусть дан произвольный ориентируемый седловой 3-атом U без звездочек. Тогда существует ориентируемый седловой 2-атом P , такой что $U = P \times S^1$ (см. раздел 2.5 “конструкция 3-атомов”). Чтобы построить бильiardную книжку $\mathcal{B}(X, \Sigma, N)$ класса **a**, у которой на уровне $\Lambda = b$ возникает 3-атом U , нужно выполнить следующие действия.

1. Погрузим 2-атом P в плоскость с сохранением ориентации (это можно сделать согласно теореме 2.9. в [8]). Зададим направление на критическом уровне атома так, чтобы уровни интеграла, которые меньше критического, оставались слева. Распространим по непрерывности это направление на близкие регулярные уровни интеграла.

Заметим, что здесь в выборе направления в алгоритме есть вариативность. Если его поменять и проделать действия из следующих пунктов, то для некоторых 3-атомов получим

другую бильярдную книжку, реализующую их.

- Согласно теореме 2.3 атом P представляется в виде склейки из k крестов, где $k \in \mathbb{N}$ — сложность атома. Напомним, что крестом называется прообраз ε -окрестности точки 0 функции $x^2 - y^2$, заданной в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ вместе со структурой слоения (см. рис. 2.3). Разделим каждый крест пополам по положительному уровню, как показано на рис. 5.1. Кресты разбились на верхнюю и нижнюю половины. Занумеруем полукресты от 1 до $2k$.

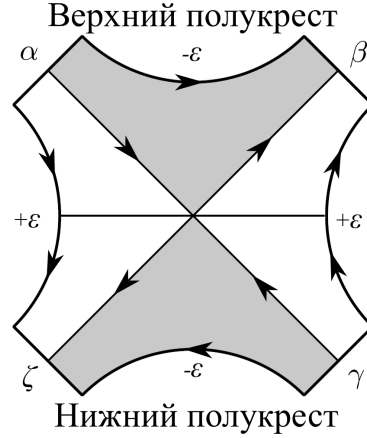


Рис. 5.1: Разделение креста на полукресты по положительному уровню. $\alpha, \beta, \gamma, \zeta$ — ребра креста.

- Бильярдная книжка \mathcal{B} класса \mathbf{a} будет состоять из $2k$ листов типа A'_0 (см. рис. 4.1). Сопоставим каждой половине креста лист бильярдной книжки. Введем нумерацию на листах в соответствии с нумерацией полукрестов. Направление на полукрестах, заданное на шаге 1 указывает направление траектории материальной точки в окрестности особого слоя на соответствующих листах. На основе этого рассуждения будем писать перестановки.
- Согласно следствию 4.3 леммы 4.2 для построения бильярдной книжки класса \mathbf{a} достаточно указать три перестановки $\sigma[0], \sigma[b]$ и $\sigma[a]$ на квадраках, отвечающих верхней эллиптической границе, нижней границе (фокальной прямой) и левой границе (вертикальной прямой) бильярдных областей соответственно. В случае атомов без звездочек $\sigma[a] = id$. Осталось указать две перестановки. Перестановка $\sigma[b]$ нижней границы области отвечает склейке полукрестов в кресты, перестановка $\sigma[0]$ верхней границы области отвечает склейке крестов в атом. Более детально опишем эти перестановки ниже.
- Построим перестановку $\sigma[b]$. Если полукресты с номерами i и j склеены в крест, то указываем $\sigma[b](i) = j$ и $\sigma[b](j) = i$. В итоге получим, что перестановка $\sigma[b]$ раскладывается в произведение независимых циклов длины 2, где каждый цикл содержит номера двух полукрестов, склеивающихся в крест.

6. Построим перестановку $\sigma[0]$. Рассмотрим полукрест с номером i . На шаге 1 этого алгоритма мы задали направление на уровнях интеграла. Смотрим на исходящее направление i -ого полукреста. Ему соответствует некоторое ребро. Это ребро склеено с другим ребром, которому соответствует входящее направление некоторого j -ого полукреста. В том числе i -ый полукрест может склеиться сам с собой. Положим $\sigma[0](i) = j$. Прделав такую операцию для всех половин крестов, получим перестановку $\sigma[0]$ из $2k$ элементов.

Эта перестановка однозначно определяется атомом с фиксированной нумерацией полукрестов и заданным на нем направлением (см. шаг 1 этого алгоритма). Если это направление поменять, то перестановка $\sigma[0]$ заменится на обратную, и бильярдная книжка в общем случае также поменяется.

7. В конце применим следствие 4.3 о конструировании бильярдной книжки класса \mathbf{a} по трем перестановкам $\sigma[0], \sigma[b], \sigma[a]$ на квадраках. Поскольку $\sigma[a]$ — тождественная перестановка, то она коммутирует с перестановками $\sigma[0]$ и $\sigma[b]$. Значит, условие леммы выполняется, и по этим перестановкам можно задать корректную бильярдную книжку, состоящую из элементарных областей типа A'_0 . Получившаяся бильярдная книжка является результатом алгоритма 1.

Алгоритм 2 (реализации 3-атомов со звездочками). Пусть дан 3-атом U сложности $k + l$, где k — число крестов, из которых он склеен, а l — число звездочек. 3-атому U соответствует ориентируемый 2-атом P сложности k (сложность 0 в данном случае означает, что атом — это кольцо, расслоенное на окружности), на котором на критическом уровне стоит l звездочек (см. раздел 2.5 “конструкция 3-атомов”).

1. Сконструируем для 2-атома P сложности $k + l$ дубль \hat{P} сложности $2k + l$ с инволюцией $\tau : \hat{P} \rightarrow \hat{P}$ так, как описано в разделе 2.6 “конструировании дублей для атомов”.
2. Воспользуемся предыдущим алгоритмом 1 и построим бильярдную книжку \mathcal{B} класса \mathbf{a} из $4k + 2l$ листов для седлового 2-атома \hat{P} , умноженного на окружность.
3. В полученной бильярдной книжке изменим только перестановку $\sigma[b]$, отвечающую левой границе листов. Раньше она была тождественной, теперь она описывает инволюцию τ . А именно, если инволюция τ переводит i -ую половину креста в j -ую, то зададим $\sigma[b](i) = j$. Полученная перестановка $\sigma[b]$ также является инволюцией.

Согласно следствию 4.3 о конструировании бильярдной книжки класса \mathbf{a} по трем перестановкам $\sigma[0], \sigma[b], \sigma[a]$ на квадраках для корректного задания бильярдной книжки необходимо, чтобы перестановка $\sigma[a]$ коммутировала с перестановками $\sigma[0]$ и $\sigma[b]$. Это будет доказано позднее в лемме 5.6. Бильярдная книжка, построенная по этому следствию реализует 3-атом U со звездочками. Особенностью бильярдных книжек, отвечающих 3-атомам со звездочками, является наличие склейки на левой границе, являющейся инволюцией.

Замечание 5.1. Обратим внимание, что в алгоритмах 1 и 2 перестановки строились, основываясь не на нумерации полукрестов, а на склейке полукрестов в атом и инволюции τ . Перестановка $\sigma[b]$ на нижней границе листов отвечает склейке полукрестов в кресты, $\sigma[0]$ на верхней границе — крестов в атом, $\sigma[a]$ на левой границе — инволюции τ на дубле атомов со звездочками. Нумерация полукрестов вводилась, чтобы упростить обозначения. Таким образом, получившаяся бильярдная книжка не зависит от нумерации полукрестов. В случае 3-атомов без звездочек бильярдная книжка строится однозначно для заданной ориентации в пункте 1 алгоритма 1. В случае 3-атомов со звездочками она строится однозначно, только если зафиксировать дубль.

5.2 Грубая молекула бильярдной книжки, построенной по алгоритму реализации

Лемма 5.2 (о грубой молекуле бильярдной книжки, построенной по алгоритмам 1, 2). Пусть бильярдная книжка \mathcal{B} получена в результате алгоритма теоремы 5.1 и реализует некоторый 3-атом P . Тогда молекула для этой бильярдной книжки выглядит так, как показано на рис. 5.2. А именно, 3-атом P находится на уровне $\Lambda = b$. Допустим, он перестраивает k торцов в l . Тогда снизу, на уровне $\Lambda = 0$, находится k 3-атомов A минимума, соединенных ребрами с 3-атомом P , сверху, на уровне $\Lambda = a$, — l 3-атомов A максимума, соединенных ребрами с 3-атомом P .

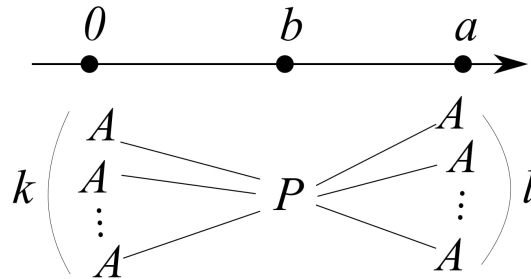


Рис. 5.2: Грубая молекула для бильярдной книжки, реализующей некоторый 3-атом P по алгоритму теоремы 5.1.

Доказательство. Согласно теореме 5.1 на критическом уровне $\Lambda = b$ находится 3-атом P . Поскольку бильярдная книжка \mathcal{B} принадлежит классу \mathbf{a} , то из леммы 4.5 следует, что на уровнях $\lambda \in (0, b) \cup (b, a)$ нет перестроек. Кроме того, уровень $\Lambda = 0$ является минимальным, при котором возможно движение в книжке \mathcal{B} , а уровень $\Lambda = a$ — максимальным. Таким образом, грубая молекула для книжки \mathcal{B} может иметь только вид, изображенный на рис. 5.2. \square

5.3 Примеры реализации 3-атомов

Проиллюстрируем алгоритм 1 на примере 3-атомов B и D_2 и построим реализующие их бильярдные книжки \mathcal{B}_B и \mathcal{B}_{D_2} класса \mathbf{a} . Эти 3-атомы — без звездочек, поэтому являются тривиальным расслоением над соответствующими 2-атомами со слоем окружность. Эти 2-атомы B и D_2 представлены на рис. 2.5, 5.3, а 3-атом B — на рис. 2.6.

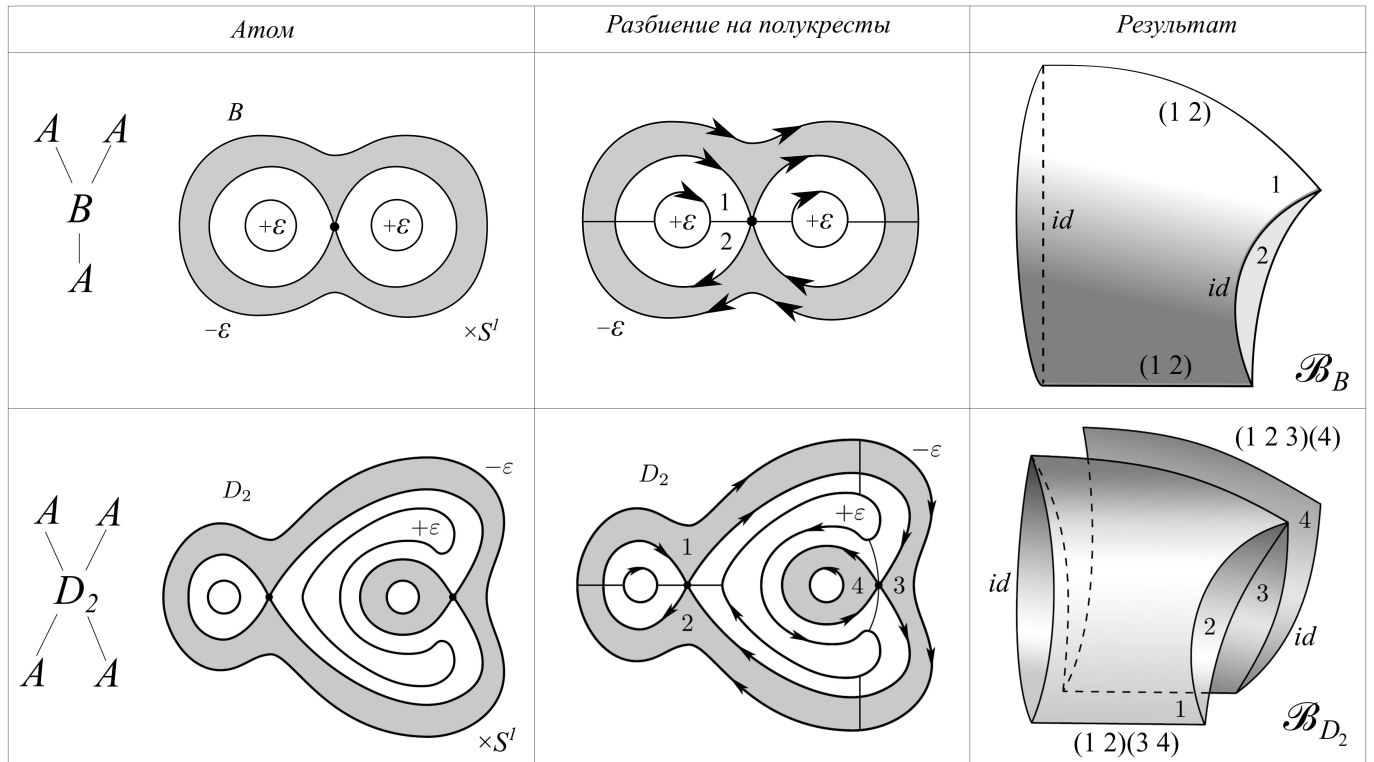


Рис. 5.3: Пример использования алгоритма 1 для построения книжек для атомов B и D_2 .

Пример 5.1 (реализации 3-атомов B и D_2 при помощи алгоритма 1). На критическом уровне 2-атомов B и D_2 зададим ориентацию так, чтобы уровни интеграла, которые меньше критического, (закрашенные кольца на рис. 5.3) оставались слева. Распространим эту ориентацию по непрерывности на близкие регулярные уровни интеграла. Представим 2-атомы B и D_2 в виде склейки из крестов. Разобьем каждый крест на два полукреста по положительному уровню. Занумеруем полукресты как показано на рис. 5.3.

Каждому полукресту будет соответствовать лист на бильярдной книжке. Книжка \mathcal{B}_B класса \mathbf{a} , реализующая 3-атом B , будет состоять из двух листов типа A'_0 (лист этого типа изображен на рис. 4.1). Книжка \mathcal{B}_{D_2} , реализующая 3-атом D_2 , — из четырех. Занумеруем листы на этих книжках в соответствии с нумерацией полукрестов.

Положим перестановки справа и слева у этих книжек тождественными: $\sigma_B(\tilde{\lambda}) = id$, $\sigma_B(a) = id$, $\sigma_{D_2}(\tilde{\lambda}) = id$ и $\sigma_{D_2}(a) = id$.

Перестановка снизу определяется на основе склейки полукрестов в кресты. В 2-атоме B первый полукрест склеен со вторым. Значит, $\sigma_B(b) = (12)$, где $\sigma_B(b)$ — нижняя перестановка книжки \mathcal{B}_B . В 2-атоме D_2 первый полукрест склеен со вторым полукрестом, третий — с четвертым. Значит, $\sigma_{D_2}(b) = (12)(34)$, где $\sigma_{D_2}(b)$ — нижняя перестановка книжки \mathcal{B}_{D_2} .

Верхняя перестановка определяется на основе склейки крестов в атомы. В 2-атоме B исходящая стрелка первого полукреста ведет во второй полукрест, второго — в первый. Значит, $\sigma_B(0)(1) = 2$, $\sigma_B(0)(2) = 1$, где $\sigma_B(0)$ — верхняя перестановка книжки \mathcal{B}_B . То есть $\sigma_B(0) = (12)$. В 2-атоме D_2 исходящая стрелка первого полукреста ведет в третий полукрест, поэтому $\sigma_{D_2}(0)(1) = 3$, где $\sigma_{D_2}(0)$ — верхняя перестановка книжки \mathcal{B}_{D_2} . Аналогично получаем, $\sigma_{D_2}(0)(3) = 2$, $\sigma_{D_2}(0)(2) = 1$, $\sigma_{D_2}(0)(4) = 4$. То есть $\sigma_{D_2}(0) = (123)(4)$.

Согласно следствию 4.3 леммы 4.2 для построения биллиардной книжки класса \mathbf{a} этих перестановок достаточно, чтобы полностью задать биллиардные книжки \mathcal{B}_B и \mathcal{B}_{D_2} . Эти биллиардные книжки представлены на рис. 5.3.

Рассмотрим алгоритм 2 на примере 3-атома A^* (см. рис. 2.6) и построим реализующую его биллиардную книжку \mathcal{B}_{A^*} класса \mathbf{a} . Как было показано в разделе 2.5, 3-атом A^* можно представить в виде 2-атома со звездочкой (см. рис. 5.4).

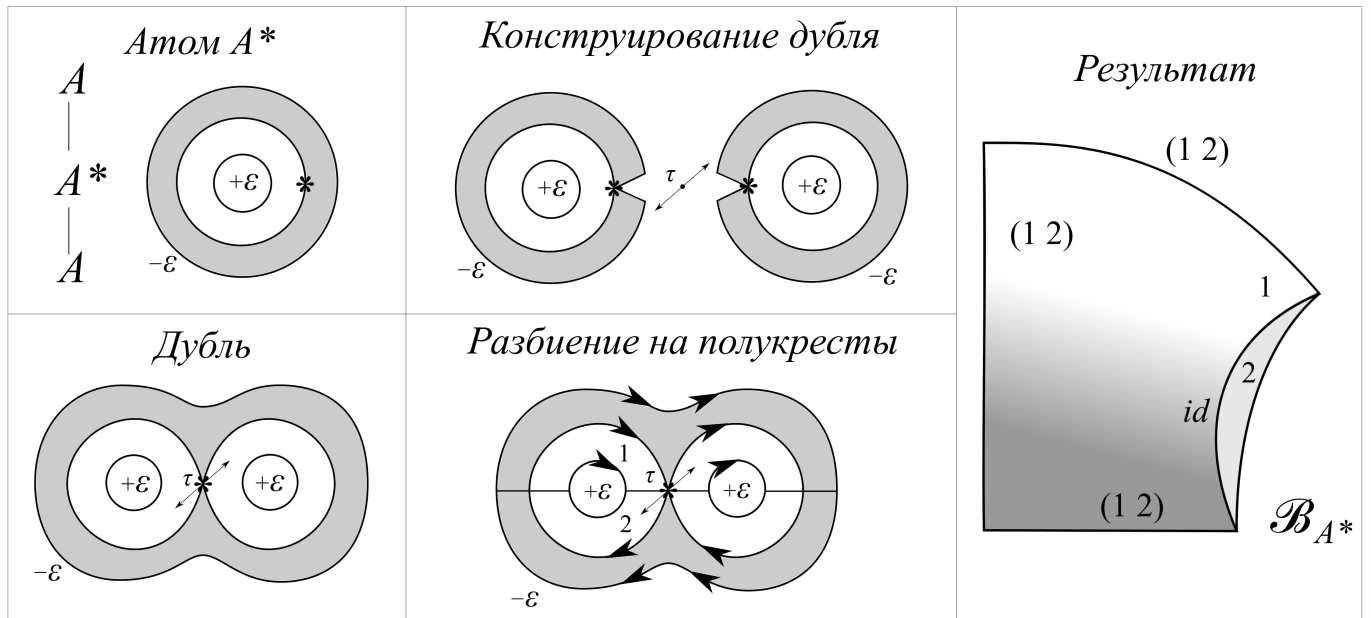


Рис. 5.4: Пример использования алгоритма 2 для построения книжки для атома A^* . Инволюция τ на дубле представлена как центральная симметрия.

Пример 5.2 (реализации 3-атома A^* при помощи алгоритма 2). Сконструируем для атома A^* дубль \hat{A}^* с инволюцией $\tau : \hat{A}^* \rightarrow \hat{A}^*$ по алгоритму, описанному в разделе 2.6 следующим образом. Разрежем кольцо на соответствующем 2-атоме A^* так, как показано на рис. 5.4. Берем

копию получившегося разрезанного 2-атома. Склеиваем эти копии по разрезанной части. Получаем атом B — дубль для атома A^* . Инволюция τ на дубле представлена в виде центральной симметрии.

Режем дубль на полукресты. Нумеруем их (см. рис. 5.4). Из дубля B получается 2 полукреста. Значит, у бильярдной книжки, соответствующей атому A^* будет два листа типа A'_0 .

Для вычисления всех перестановок, кроме левой, используем алгоритм 1. Правая перестановка $\sigma_{A^*}[\tilde{\lambda}] = id$ — тождественная. Полукресты 1 и 2 образуют крест. Поэтому для нижней перестановки верно: $\sigma_{A^*}[b] = (1\ 2)$. Исходящая стрелка первого полукреста соединяется со входящей стрелкой второго полукреста, второго — с первой. Поэтому для верхней перестановки верно: $\sigma_{A^*}[0] = (1\ 2)$.

Левая перестановка определяется на основе инволюции τ . Эта инволюция отображает первый полукрест на второй и второй на первый. Значит, $\sigma_{A^*}[a](1) = 2$ и $\sigma_{A^*}[a](2) = 1$, т. е. $\sigma_{A^*}[a] = (1\ 2)$.

Снова используем следствие 4.3 леммы 4.2 для построения бильярдной книжки класса \mathbf{a} . По этому следствию описанные выше четыре перестановки полностью задают бильярдную книжку \mathcal{B}_{A^*} . Эта бильярдная книжка представлена на рис. 5.4.

5.4 Доказательство теоремы реализации 3-атомов

Для доказательства теоремы 5.1 реализации невырожденных трехмерных бифуркаций тором Лиувилля бильярдными книжками докажем, что алгоритмы 1 и 2 корректны. То есть бильярдные книжки построенные по ним действительно реализуют заданные седловые атомы со звездочками и без.

Неседловым атомом является только минимаксный атом A , который встречается, на самом деле, в любой бильярдной книжке. В частности, его реализация вытекает из леммы 5.2.

Разобьем доказательство на несколько лемм.

Лемма 5.3. *Слоение Лиувилля в окрестности уровня интеграла $\Lambda = b$ бильярдной книжки $\mathcal{B}(X, \Sigma)$, изображенной на рис. 5.5, в ее изоэнергетическом многообразии Q^3 послойно гомеоморфно 3-атому B .*

Обозначим клетки бильярдного комплекса $X = X^0 \cup X^1 \cup X^2$ так, как показано на рис. 5.5.

Доказательство. Рассмотрим топологию слоения окрестности уровня интеграла $\Lambda = b$ бильярдной книжки $\mathcal{B}(X, \Sigma)$ в ее изоэнергетическом многообразии Q^3 . Чтобы упростить изложение, уменьшим размерность этого слоения на единицу. Для этого зафиксируем произвольную гиперболу l с параметром квадратики, большим $\tilde{\lambda}$. Напомним, что $\tilde{\lambda}$ — это параметр гиперболы, отвечающей правым границам всех листов книжек класса \mathbf{a} и \mathbf{b} (см. опр. 4.1). Ограничим бильярдный комплекс X сечением гиперболы l . То есть рассмотрим все такие точки $x \in X$,

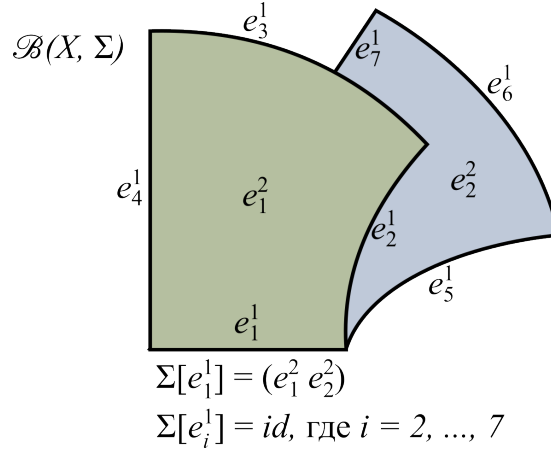


Рис. 5.5: Биллиардная книжка $\mathcal{B}(X, \Sigma)$ класса \mathbf{a} , состоящая из двух листов типа A'_0 , склеенных по нижней границе, и реализующая 3-атом B .

которые при канонической проекции $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ (см. опр. 1.8) биллиардного комплекса в плоскость переходят в эту гиперболу. Такое ограничение будем обозначать через $X|_l$. Также ограничим слоение окрестности уровня интеграла $\Lambda = b$ на эту гиперболу (см. рис. 5.6). То есть рассмотрим только такие его точки, которые при проекции расслоения $\pi : M^4 \rightarrow X$ (см. опр. 3.1 и замечание 3.1) переходят в $X|_l$. Далее, для произвольного достаточно малого $\varepsilon > 0$ будем описывать топологию уровней $\Lambda = b - \varepsilon$, $\Lambda = b$ и $\Lambda = b + \varepsilon$, ограниченных на гиперболу l .

Начнем с критического уровня $\Lambda = b$. Покажем, что его ограничение на гиперболу l гомеоморфно двум восьмеркам. По лемме 1.1 этот уровень соответствует траекториям, которые лежат на прямых, проходящих через хотя бы один из фокусов. Прообраз каждой точки $x \in (e_1^2 \cup e_2^2)|_l$ на листах при проекции расслоения $\pi : M^4 \rightarrow X$ в изоэнергетическом многообразии Q^3 состоит из четырех векторов (см. рис. 5.6). Эти четыре вектора на каждом из двух листов порождают восемь отрезков, соответствующих движению вправо-вниз, вправо-вверх, влево-вверх и влево-вниз на листах e_1^2 и e_2^2 . Опишем, как эти векторы склеиваются между собой на корешках e_1^1 , e_3^1 и e_6^1 , и как их склейка порождает склейку отрезков. Приближаясь к фокальной оси (к корешку e_1^1), векторы, направленные вниз, и соответствующие им векторы, направленные вверх, становятся ближе, и на фокальной оси уже совпадают (см. рис. 5.6). Причем, векторы на фокальной оси соответствуют движению по корешку e_1^1 и принадлежат сразу двум листам, так как $\Sigma[e_1^1] = (e_1^2, e_2^2)$. То есть, на корешке e_1^1 склеиваются две четверки векторов. Приближаясь к верхнему эллиптическому корешку e_3^1 на листе e_2^2 векторы, направленные вверх и вниз склеиваются по закону отражения. Поскольку $\Sigma[e_3^1]$ тождественная, то склеиваются векторы с листа e_1^1 друг с другом. Аналогично для корешка e_6^1 . Склеек на гиперболе l между векторами, направленными влево, и векторами, направленными вправо, не происходит. Таким образом, восемь векторов склеиваются в две восьмерки. Одна соответствует векторам, направленным вправо, другая — направленным влево. Заметим, что на восьмерках можно задать направление в соответствии с направлением движения материальной точки.

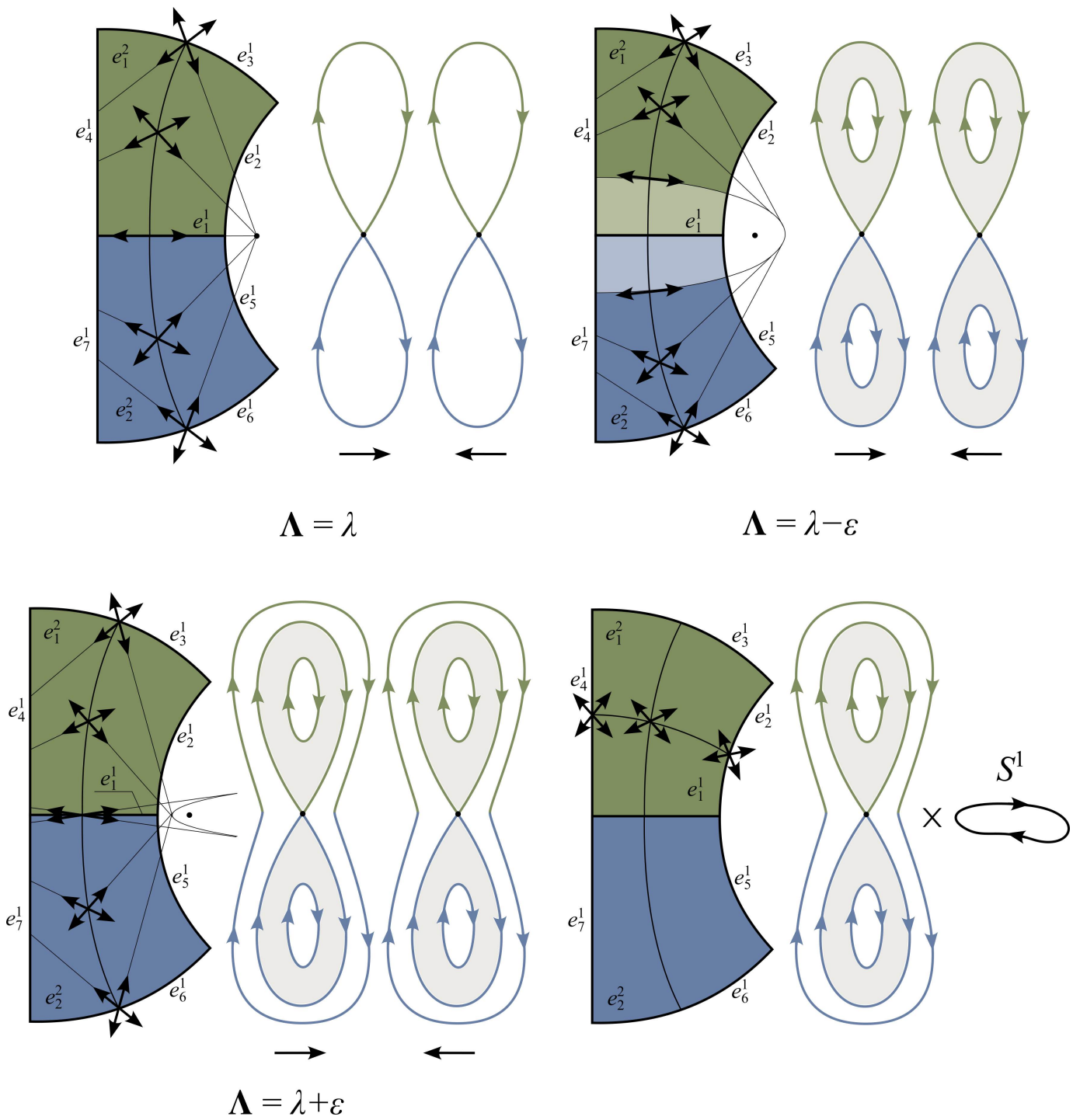


Рис. 5.6: Иллюстрация к вычислению каждого из слоев $\Lambda = b$, $\Lambda = b - \varepsilon$ и $\Lambda = b + \varepsilon$ в изоэнергетическом многообразии Q^3 бильярдной книжки $\mathcal{B}(X, \Sigma)$ класса \mathbf{a} , состоящей из двух листов типа A'_0 , склеенных по нижней границе. Для удобства представления лист e_2^2 на рисунке развернули: отразили от фокальной оси.

Рассмотрим слой $\Lambda = b - \varepsilon$ и дополним критические восьмерки близкими отрицательными уровнями. Уровню $\Lambda = b - \varepsilon$ отвечают траектории, которые касаются тонкого эллипса, близко-

го к фокальному отрезку. Из-за того, что траектории должны касаться эллипса, то они могут находиться только вне его. Каждой точке $x \in X|_l$ выше эллипса с параметром $b - \varepsilon$ снова соответствует четыре вектора на каждом из листов. Приближаясь к эллипсу, также как и к фокальной прямой в предыдущем случае, векторы, направленные вверх и вниз, становятся ближе и на эллипсе с параметром $b - \varepsilon$ совпадают. Но в отличие от критического уровня $\Lambda = b$, векторы с разных листов не склеиваются. До корешка e_1^1 траектории не доходят. На корешках e_3^1 и e_6^1 происходит то же самое, что и в предыдущем случае: векторы направленные вверх и вниз склеиваются по закону отражения. Таким образом, получаем восемь отрезков, склеенных в четыре окружности так, как показано на рис. 5.6, и образующих регулярные кольца на отрицательном уровне.

Слою $\Lambda = b + \varepsilon$ отвечают траектории, которые касаются гиперболы, близкой к лучам на фокальной прямой, выходящим из фокусов в бесконечность. Поскольку $\varepsilon < \tilde{\lambda}$, то в любой точке на комплексе X есть четыре вектора, которые направлены по касательной к гиперболе $b + \varepsilon$. На корешках e_3^1 и e_6^1 происходит то же самое, что и в предыдущих двух случаях: векторы направленные вверх и вниз склеиваются по закону отражения. На корешке e_1^1 тоже действует закон отражения, но поскольку $\Sigma[e_1^1] = (e_1^2, e_2^2)$ — нетождественная перестановка, то отражение происходит с переходом на соответствующие листы. То есть, векторы, направленные вниз, на листе e_1^2 склеиваются с векторами, направленными вверх, на листе e_2^2 и наоборот. Получаем, что восемь отрезков склеиваются в две окружности так, как показано на рис. 5.6, и образуют регулярные кольца на положительном уровне.

Итак, получаем, что слоение окрестности уровня интеграла $\Lambda = b$ в изоэнергетическом многообразии Q^3 , ограниченное на гиперболу l представляет собой два 2-атома B . Один соответствует движению влево (векторам, направленным влево), другой — движению вправо (векторам, направленным вправо). Половина каждого из 2-атомов B соответствует листу e_1^2 , а другая половина листу e_2^2 . Вычисленное слоение не зависит от выбора гиперболы l , которая может иметь параметр от $\tilde{\lambda}$ до a . Такие гиперболы параметризуются отрезком $[\tilde{\lambda}, a]$. Значит, чтобы описать полностью слоение (без ограничения на гиперболу), нужно декартово умножить два атома B на отрезок. На концах отрезков происходит следующая склейка. Поскольку на корешках e_2^1, e_5^1, e_4^1 и e_7^1 перестановки тождественные, то векторы, направленные влево и вправо склеиваются между собой по закону отражения без переходов с листа на лист. Таким образом, получаем, что два 2-атома B , умноженных на отрезок, склеиваются в один 3-атом B , так же как и два отрезка склеиваются в окружность (см. рис. 5.6). Лемма доказана. □

Следствие 5.4 (леммы 5.3). *Снова возьмем слоение Лиувилля в окрестности уровня интеграла $\Lambda = b$ бильярдной книжки $\mathcal{B}(X, \Sigma)$, изображенной на рис. 5.5, в ее изоэнергетическом многообразии Q^3 . И рассмотрим на этом слоении только такие точки, которые при проекции расслоения $\pi : M^4 \rightarrow X$ (см. опр. 3.1 и замечание 3.1) попадают в область $X \setminus [e_3^1 \cup e_6^1]$*

(биллиардный комплекс X из рис. 5.5 без замыкания верхних границ листов). Тогда это слоение послойно гомеоморфно кресту (см. опр. 2.16), умноженному на окружность. При этом крест можно разделить на две половины: одна половина при проекции расслоения π попадает на лист e_1^2 , а другая половина на лист e_2^2 .

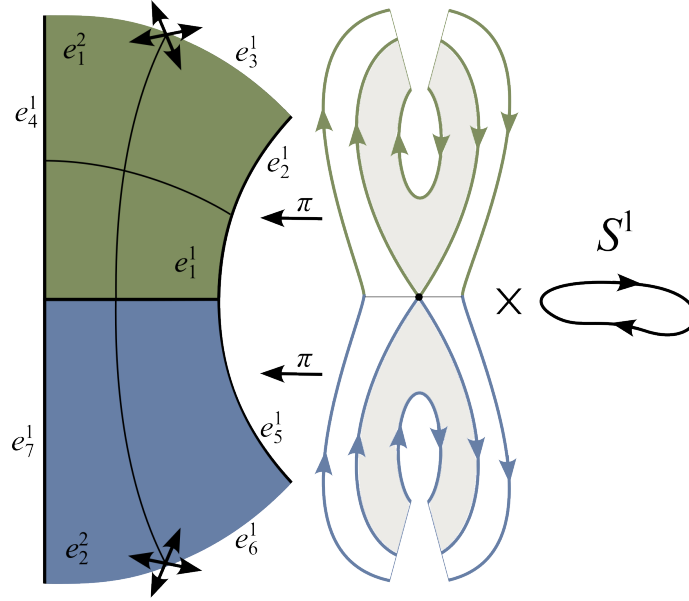


Рис. 5.7: Биллиардная книжка $\mathcal{B}(X, \Sigma)$ без верхних корешков e_3^1, e_6^1 , и реализующая крест (из которого состоит произвольный седловой 2-атом), умноженный на окружность. Для удобства представления лист e_2^2 на рисунке развернули: отразили от фокальной оси.

Доказательство. Доказательство этого следствия аналогично доказательству леммы 5.3 за исключением небольшого отличия. В этом случае склейки на верхних корешках e_3^1, e_6^1 не происходит. И если отменить такую склейку в доказательстве леммы 5.3, то 3-атом B распадается в крест, умноженный на окружность (см. рис. 5.7). \square

Лемма 5.5 (о корректности алгоритма 1). *Слоение Лиувилля в окрестности уровня интеграла $\Lambda = b$ биллиардной книжки, построенной по алгоритму 1 для наперед заданного 3-атома без звездочек, в ее изоэнергетическом многообразии Q^3 послойно гомеоморфно этому 3-атому.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный седловой 3-атом U без звездочек. Построим по алгоритму 1 биллиардную книжку $\mathcal{B}(X, \Sigma, N)$, реализующую этот 3-атом. Покажем, что слоение Лиувилля в окрестности уровня интеграла $\Lambda = b$ для этой биллиардной книжки в ее изоэнергетическом многообразии Q^3 послойно гомеоморфно 3-атому U .

Пусть атом U имеет сложность k , то есть состоит из k крестов. Значит, у биллиардной книжки \mathcal{B} будет $2k$ листов типа A'_0 . Согласно построению все листы книжки \mathcal{B} разбиты на группы по два листа, которые склеены друг с другом снизу. То есть, без ограничения общности можем считать, что $\sigma[b] = (12)(34)\dots(2k-1\ 2k)$. Если это не так, то листы можно перенумеровать.

Рассмотрим бильярдный комплекс X без замыкания корешков, являющихся верхними границами листов, и обозначим его через X' . Поскольку, на всех корешках книжки \mathcal{B} слева и справа стоят тождественные перестановки, то получаем что X' гомеоморфен несвязному объединению k комплексов $X \setminus [e_3^1 \cup e_6^1]$ из следствия 5.4 выше. Ограничим рассматриваемое слоение Лиувилля в окрестности уровня $\Lambda = b$ на такие точки, которые при проекции расслоения $\pi : M^4 \rightarrow X$ (см. опр. 3.1 и замечание 3.1) попадают в область X' . Тогда по следствию 5.4 оно гомеоморфно k крестам, умноженным на окружность, причем, каждая половина креста соответствует некоторому листу. Занумеруем половины крестов в соответствии с нумерацией листов.

Осталось показать, что по перестановке $\sigma[0]$ эти k крестов склеиваются в 3-атом U без звездочек. Действительно, если перестановка $\sigma[0]$ переводит лист с номером i в лист с номером j , то векторы, направленные вверх на листе i , склеиваются с векторами, направленными вниз на листе j . Эти векторы соответствуют некоторым ребрам на крестах (см. рис. 5.7). Векторы, направленные вверх на листе i , соответствуют ребру с исходящим направлением на половине креста с номером i . Векторы, направленные вниз на листе j , соответствуют ребру со входящим направлением на половине креста с номером j . Если таким образом на основе перестановки $\sigma[0]$ склеить все ребра, то по построению этой перестановки получаем 3-атом U . Лемма доказана. \square

Лемма 5.6. *Перестановка $\sigma[a]$ из алгоритма 2 реализации 3-атомов со звездочками коммутрует с перестановками $\sigma[0]$ и $\sigma[b]$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный седловой 3-атом U со звездочками сложности $k+l$, где k — число крестов, из которых он склеен, а l — число звездочек. По алгоритму 2 строится бильярдная книжка \mathcal{B} , реализующая этот 3-атом. Причем, если положить перестановку $\sigma[a]$ тождественной, то по построению получится бильярдная книжка $\hat{\mathcal{B}}$, реализующая некоторый дубль 3-атома U . Обозначим этот дубль (2-атом сложности $2k+l$) также, как и в алгоритме 2, через \hat{P} , а инволюцию на нем через $\tau : \hat{P} \rightarrow \hat{P}$. Тогда слоение Лиувилля в окрестности уровня интеграла $\Lambda = b$ бильярдной книжки $\hat{\mathcal{B}}$ послойно гомеоморфно 3-атому, являющемуся прямым произведением 2-атома \hat{P} с окружностью (этот факт уже доказан в лемме 5.5), а бильярдной книжки \mathcal{B} — послойно гомеоморфно 3-атому U (этот факт еще предстоит доказать в лемме 5.7). Также по доказательству леммы 5.5 известно, что каждому листу книжки $\hat{\mathcal{B}}$ соответствует некоторый полукрест на дубле \hat{P} . Занумеруем эти полукресты в соответствии с листами бильярдной книжки $\hat{\mathcal{B}}$. Кроме того, на слоях 2-атома \hat{P} задано направление, указывающее направление движения материальной точки, которое можно ограничить на произвольный полукрест.

Предположим, что перестановки $\sigma[a]$ и $\sigma[b]$ не коммутуют. Тогда существует такой лист с номером i , что $\sigma[a] \circ \sigma[b](i) \neq \sigma[b] \circ \sigma[a](i)$. По лемме 5.5 полукресты с номерами i и $\sigma[b](i)$, $\sigma[a](i)$ и $\sigma[b] \circ \sigma[a](i)$ образуют два креста на дубле \hat{P} (см. рис. 5.8). По построению перестановки $\sigma[a]$ получаем, что полукрест с номером i под действием инволюции τ переходит в полукрест с

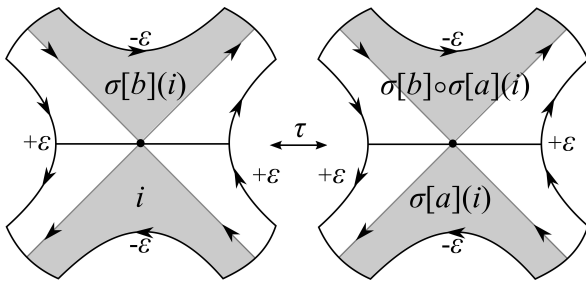


Рис. 5.8: Полукресты дубля \hat{P} , соединение их в кресты и инволюция τ на них.

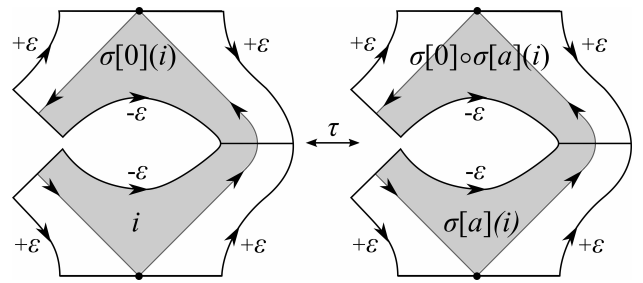


Рис. 5.9: Полукресты дубля \hat{P} , соединение их по ребру и инволюция τ на них.

номером $\sigma[a](i)$, а полукрест с номером $\sigma[b](i)$ переходит в полукрест с номером $\sigma[a] \circ \sigma[b](i)$. А поскольку инволюция τ является также гомеоморфизмом, то соединение полукрестов в кресты она переводит в такое же соединение. Таким образом, получаем, что полукресты с номерами $\sigma[a] \circ \sigma[b](i)$ и $\sigma[b] \circ \sigma[a](i)$ совпадают. Значит, $\sigma[a] \circ \sigma[b](i) = \sigma[b] \circ \sigma[a](i)$, и мы получили противоречие.

Аналогично для перестановок $\sigma[a]$ и $\sigma[0]$. Только теперь будет идти речь не о соединении полукрестов в кресты, а о соединении ребер с фиксированным направлением (см. рис. 5.9). \square

Лемма 5.7 (о корректности алгоритма 2). *Слоение Лиувилля в окрестности уровня интеграла $\Lambda = b$ бильярдной книжки, построенной по алгоритму 2 для наперед заданного 3-атома со звездочками, в ее изоэнергетическом многообразии Q^3 послойно гомеоморфно этому 3-атому.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный седловой 3-атом U со звездочками сложности $k+l$, где k — число крестов, из которых он склеен, а l — число звездочек, и бильярдную книжку $\mathcal{B}(X, \Sigma, N)$, реализующую этот 3-атом, построенную по алгоритму 2. Бильярдная книжка \mathcal{B} задана корректно в силу леммы 5.6. Докажем, что слоение Лиувилля в окрестности уровня интеграла $\Lambda = b$ для бильярдной книжки \mathcal{B} в ее изоэнергетическом многообразии Q^3 послойно гомеоморфно 3-атому U . При этом, по построению и по лемме 5.5 мы знаем, что если положить перестановку $\sigma[a]$ тождественной, то получится бильярдная книжка $\hat{\mathcal{B}}(\hat{X}, \hat{\Sigma}, \hat{N})$, которая реализует некоторый дубль 3-атома U . Снова обозначим этот дубль (2-атом сложности $2k+l$) через \hat{P} , а инволюцию на нем через $\tau : \hat{P} \rightarrow \hat{P}$. По доказательству леммы 5.5 можем считать, что дубль \hat{P} разрезан на полукресты, каждый из которых сопоставлен некоторому листу книжки $\hat{\mathcal{B}}$ и занумерован в соответствии с ним. Покажем, что склейка слева по перестановке $\sigma[a]$, построенной в алгоритме 2, преобразует слой так, что прямое произведение 2-атома \hat{P} на окружность переходит в перекрутку по инволюции τ (см. раздел 2.5 “конструкция 3-атомов”).

Отменим склейку слева на бильярдной книжке $\hat{\mathcal{B}}$. Для этого из бильярдного комплекса \hat{X} уберем все корешки, являющиеся левыми границами листов, и нульмерные клетки, принадлежащие их замыканиям. Обозначим получившийся комплекс через \hat{X}' . Рассмотрим на слоении Лиувилля только такие точки, которые при проекции расслоения π (см. опр. 3.1 и замечание 3.1) попадают на комплекс \hat{X}' . В этом случае не происходит склейки векторов на левых корешках

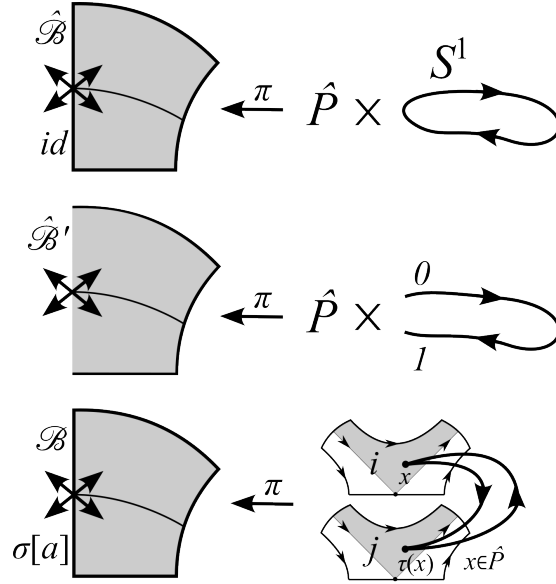


Рис. 5.10: Преобразование слоения Лиувилля в окрестности уровня интеграла $\Lambda = b$ в изоэнергетическом многообразии Q^3 . На верхнем рисунке слоение для бильярдной книжки $\hat{\mathcal{B}}$. На среднем — оно же после отмены склейки на левых корешках. На нижнем — после склейки левых корешков по перестановке $\sigma[a]$. Нижний рисунок также соответствует слоению книжки \mathcal{B} .

(см. рис. 5.10). Напомним, что эта склейка в доказательстве леммы 5.3 давала умножение на окружность 2-атома \hat{P} на каждом слое. Отменив эту склейку, получаем, что окружность распадается в интервал. Обозначим его через $(0, 1)$. Получаем, что слоение Лиувилля в таком случае гомеоморфно 2-атому \hat{P} , умноженному на интервал $(0, 1)$. Один конец интервала (пусть без ограничения общности в точке 0) соответствует векторам направленным влево, другой (в точке 1) — векторам, направленным вправо.

В бильярдной книжке \mathcal{B} эти векторы склеиваются по перестановке $\sigma[a]$. Перестановка $\sigma[a]$ строилась по инволюции τ . Значит, если τ переводит крест с номером i в крест с номером j , то $\sigma[a](i) = j$. При этом, поскольку τ — инволюция, то $\sigma[a](j) = i$. Получаем, что на левом корешке векторы, направленные влево на i -м листе, склеиваются с векторами, направленными вправо на j -м листе, и, наоборот, векторы, направленные влево на j -м листе, склеиваются с векторами, направленными вправо на i -м листе. Получаем, что i -ый полукрест в точке 0 интервала $(0, 1)$ приклеивается к j -му полукресту в точке 1, а j -ый полукрест в точке 0 приклеивается к i -му полукресту в точке 1 (см. рис. 5.10). Получаем перекрутку, описанную в разделе 2.5 “конструкция 3-атомов”, которая дает 3-атом U из дубля \hat{P} . Лемма доказана. \square

Доказательство теоремы 5.1. Доказательство теоремы 5.1 следует из лемм 5.5 и 5.7 о корректности алгоритмов 5.5 и 5.7 реализации седловых атомов со звездочками и без. Реализация атома A вытекает из леммы 5.2. \square

5.5 Переформулировка алгоритма реализации на язык f -графов

Переформулируем алгоритмы 1, 2 реализации 3-атомов (со звездочками или без) на язык f -графов. Поскольку неориентированные ребра f -графа являются сепаратрисами градиентного потока функции Морса на атоме, то по-сути f -графы отражают движение гамильтонового потока в окрестности бифуркации. И на основе этого движения, представленного в виде ориентированного графа, существенно проще строить перестановки для билиардной книжки. Эти перестановки также, как и f -графы, отражают движение гамильтонового потока.

Сначала, для наглядности, проиллюстрируем алгоритм реализации на примере f -графа, соответствующего 3-атому B^* .

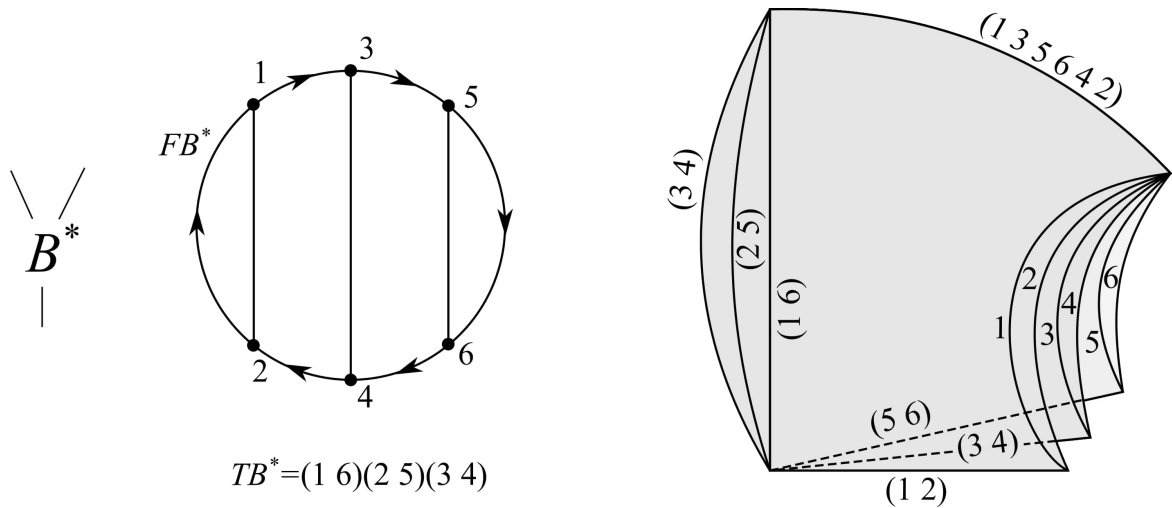


Рис. 5.11: Пример билиардной книжки \mathcal{B} , реализующей f -граф, соответствующий 3-атому B^* .

Пример 5.3 (реализации f -графа, соответствующего 3-атому B^* , при помощи билиардных книжек). Воспользуемся примером 2.3 раздела 2.7 и представим 3-атом B^* в виде f -графа FB^* (см. рис. 5.11). Каждой вершине графа FB^* сопоставим лист билиардной книжки типа A'_0 (см. рис. 4.1). В билиардной книжке \mathcal{B} , реализующей f -граф FB^* , будет шесть листов. Для упрощения изложения занумеруем произвольным образом вершины и тем самым зададим нумерацию на листах билиардной книжки.

Выпишем четыре перестановки, на основе которых мы склеим листы билиардной книжки \mathcal{B} друг с другом по правой, левой, нижней и верхней границам.

Правая перестановка $\sigma[\hat{\lambda}]$ на гиперболе всегда тождественная.

Левая перестановка $\sigma[a]$ на вертикальной прямой равна инволюции-автоморфизму на f -графе (см. опр. 2.19), то есть в случае 3-атома B^* она равна $(16)(25)(34)$. В случае любого 3-атома без звездочек, она была бы равна тождественной перестановке.

Нижняя перестановка $\sigma[b]$ на фокальной прямой является произведением транспозиций, которые задаются на основе неориентированных ребер. В f -графе FB^* содержится три неориентированных ребра $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$ (запись неориентированного ребра $\{\alpha, \beta\}$ означает, что это ребро соединяет вершины α и β). Согласно алгоритму, в этом примере нижняя перестановка будет композицией трех транспозиций: $(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$.

Верхняя перестановка $\sigma[0]$ на эллипсе пишется на основе простых циклов, образуемых ориентированными ребрами f -графа. Напомним, что в теории графов простой цикл — это замкнутый обход без повторного прохода по ребру и посещения вершины дважды, за исключением начальной и конечной вершин. Проходим по указанным выше циклам на графе и последовательно выписываем номера вершин, встречающихся вдоль этих циклов, в циклическую перестановку до тех пор, пока не сделаем полный оборот. Один такой цикл дает одну циклическую перестановку. Затем берем композицию всех таких циклических перестановок в произвольном порядке. В графе FB^* есть один такой цикл. Он образуется ориентированными ребрами $(1, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 6)$, $(6, 4)$, $(4, 2)$ и $(2, 1)$ (запись ориентированного ребра (α, β) означает, что ребро начинается в вершине α и ведет в вершину β). В этом случае верхняя перестановка равна $(1\ 3\ 5\ 6\ 4\ 2)$.

Применим следствие 4.3 о конструировании бильярдной книжки класса \mathbf{a} по трем перестановкам $\sigma[0]$, $\sigma[b]$, $\sigma[a]$ и получим следующую бильярдную книжку, реализующую f -граф FB^* . Она состоит из шести листов, которые склеены снизу, сверху и слева друг с другом следующим образом. Снизу склеен первый лист со вторым, третий с четвертым, пятый с шестым. Три корешка книжки, возникшие при этой склейке, снабжены транспозициями $(1\ 2)$, $(3\ 4)$ и $(5\ 6)$. Корешки с перестановками $(1\ 2)$, $(3\ 4)$, $(5\ 6)$ соответствуют неориентированным ребрам $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$ f -графа FB^* . Сверху все шесть листов склеены между собой. Образовавшийся корешок снабжен циклической перестановкой $(1\ 3\ 5\ 6\ 4\ 2)$. Слева листы склеены на основе транспозиции $(1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)$. То есть первый лист склеен с шестым, второй с пятым, третий с четвертым. Образовавшиеся три корешка снабжены перестановками $(1\ 6)$, $(2\ 5)$ и $(3\ 4)$. Получившаяся бильярдная книжка \mathcal{B} изображена на рис. 5.11.

В общем случае алгоритм выглядит следующим образом.

Алгоритм 3 (реализации f -графов бильярдными книжками). Пусть задан произвольный f -граф F . Этот f -граф соответствует некоторому 3-атому. В результате алгоритма мы собираемся построить такую бильярдную книжку \mathcal{B} , чтобы в ней встречался этот 3-атом.

1. Каждой вершине графа F сопоставим лист бильярдной книжки типа A'_0 (см. рис. 4.1). В бильярдной книжке \mathcal{B} будет столько листов, сколько вершин в графе F . Занумеруем произвольным образом вершины, и тем самым зададим нумерацию на листах бильярдной книжки.
2. Согласно следствию 4.3 леммы 4.2 для построения бильярдной книжки класса \mathbf{a} достаточно указать три перестановки $\sigma[0]$, $\sigma[b]$ и $\sigma[a]$ на квадриках, отвечающих верхней эллип-

тической границе, нижней границе (фокальной прямой) и левой границе (вертикальной прямой) бильярдных областей соответственно.

3. Положим левую перестановку $\sigma[a]$ равной инволюции-автоморфизму на f -графе. Заметим, что эта перестановка тождественная тогда и только тогда, когда f -граф соответствует 3-атому без звездочек.
4. Нижнюю перестановку $\sigma[b]$ зададим на основе неориентированных ребер графа F следующим образом. Если дано неориентированное ребро $\{\alpha, \beta\}$, соединяющее вершины α и β , то рассмотрим транспозицию $(\alpha \beta)$. Перемножим все такие транспозиции в произвольном порядке и получим нижнюю перестановку.
5. Верхнюю перестановку $\sigma[0]$ запишем на основе простых циклов, образуемых ориентированными ребрами f -графа. Проходим по каждому из таких циклов на графе и последовательно выписываем номера вершин, встречающихся вдоль этих циклов, в циклическую перестановку до тех пор, пока не сделаем полный оборот. Один такой цикл дает одну циклическую перестановку. Затем берем композицию всех таких циклических перестановок в произвольном порядке.
6. Применим следствие 4.3 о конструировании бильярдной книжки класса \mathbf{a} по трем перестановкам $\sigma[0]$, $\sigma[b]$, $\sigma[a]$ и получим бильярдную книжку, реализующую f -граф F .

Замечание 5.2. Поясним, почему при задании нижней и верхней перестановок в алгоритме 3 композицию можно брать в произвольном порядке.

Действительно, нижняя перестановка $\sigma[b]$ на фокальной прямой задается на основе неориентированных ребер f -графа. Согласно определению f -графа, из каждой вершины выходит ровно одно неориентированное ребро. Следовательно, каждая из вершин встречается только в одной транспозиции. Значит, числа в транспозициях не пересекаются, транспозиции независимы, и их можно перемножать в произвольном порядке.

Верхняя перестановка $\sigma[0]$ пишется на основе простых циклов, образуемых ориентированными ребрами f -графа. Из определения f -графа следует, что в каждую вершину графа входит и из каждой вершины выходит ровно одно ориентированное ребро. Значит, каждую из вершин может содержать только один из таких циклов. Поскольку при построении верхней перестановки рассматриваются простые циклы, то перестановка, записанная по циклу задает циклическую перестановку. Таким образом, получаем столько независимых циклических перестановок, сколько простых циклов. Эти перестановки можно перемножать в произвольном порядке.

Глава 6

Реализация баз слоений Лиувилля бильярдными книжками

Теорема 6.1 (Ведюшкина-Харчева). *Гипотеза Фоменко В верна, то есть любая грубая молекула интегрируемой гамильтоновой системы с невырожденными (боттовскими) бифуркациями торов Лиувилля реализуется бильярдными книжками. Более точно: по любой такой грубой молекуле алгоритмически строится бильярдная книжка класса \mathbf{b} с каноническим квадратичным интегралом Λ , отвечающим параметру каустики, такая что грубая молекула, соответствующая этой системе, изоморфна заданной изначально грубой молекуле.*

6.1 Алгоритм реализации произвольной грубой молекулы

Опишем сначала алгоритм для грубой молекулы, состоящей из двух седловых атомов без звездочек и минимаксных атомов A (см. рис. 6.1).

Алгоритм 4 (склейки двух 3-атомов без звездочек по ребру). Пусть даны два седловых атома P и Q . Хотим склеить эти два атома по выбранному ребру так, чтобы значение интеграла, которому соответствует атом Q , было меньше значения интеграла, которому соответствует атом P , то есть $\Lambda(Q) < \Lambda(P)$. Пусть атомы A минимума интеграла Λ лежат на уровне $\Lambda = 0$, максимума — на уровне $\Lambda = a$, и, кроме того, положим $\Lambda(Q) := \lambda_1$, $\Lambda(P) := \lambda_2$ и $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < b < a$.

1. По алгоритму 1 из теоремы 5.1 строим две бильярдные книжки \mathcal{B}_P и \mathcal{B}_Q для атомов P и Q соответственно. Все листы таких бильярдных книжек согласно алгоритму теоремы 5.1 имеют тип A'_0 (ограничены прямыми $\lambda = a$ и $\lambda = b$ и софокусными эллипсом и гиперболой (см. рис. 4.1)).
2. Все листы бильярдной книжки $\mathcal{B}_Q(X_Q, \Sigma_Q, N_Q)$ заменим на листы типа B_0 (см. рис. 4.2), ограниченные прямой $\lambda = a$, гиперболой с параметром $\tilde{\lambda}$ и двумя софокусными эллипсами (выпуклым и невыпуклым) с параметрами 0 и λ_1 . Все листы бильярдной книж-

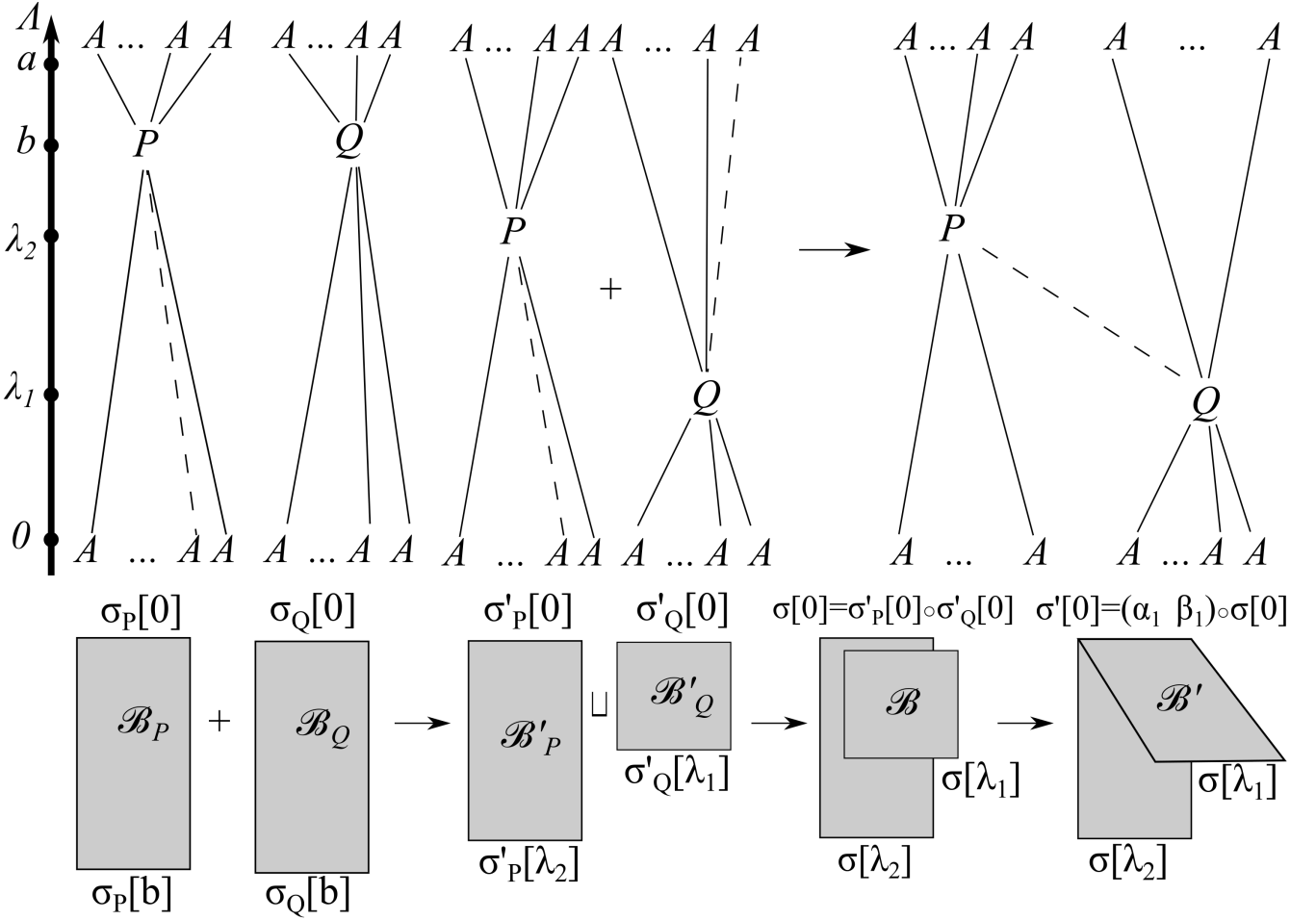


Рис. 6.1: Схема алгоритма 4 склейки двух 3-атомов без звездочек по ребру.

ки $\mathcal{B}_P(X_P, \Sigma_P, N_P)$ также заменим на листы типа B_0 , но теперь с параметрами эллипсов 0 и λ_2 . Замена всех листов — это изменение метрики на листах бильярдного комплекса. Итак, мы получили две бильярдные книжки \mathcal{B}'_P и \mathcal{B}'_Q , изменив \mathcal{B}_P и \mathcal{B}_Q . Позже докажем, что от такого изменения грубые молекулы, отвечающие этим книжкам, не изменятся, и они также, как и раньше, будут отвечать атомам P и Q (см. лемму 6.3).

3. Рассмотрим несвязное объединение $\mathcal{B} = \mathcal{B}'_P \sqcup \mathcal{B}'_Q$ (см. опр. 4.4). Будем менять перестановку $\sigma[0]$ книжки \mathcal{B} так, чтобы в грубой молекуле склеились нужные нам ребра. Тем самым мы склеим книжки $\mathcal{B}'_P, \mathcal{B}'_Q$ по верхней границе.
4. Выберем на атоме Q ребро (тор), которое хотим склеить. Пусть λ - любое значение интеграла Λ , находящееся между атомом P и Q , то есть $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Рассмотрим разложение композиции $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$ в произведение независимых циклов ($\Pi[\lambda]$ — перестановка уровня из опр. 4.5) и найдем тот цикл, который соответствует фиксированному тору в атоме Q (см. лемму 4.5). Обозначим этот цикл через $\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r)$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Получаем,

что:

$$\sigma[0] \circ \Pi[\lambda] = \alpha \circ X,$$

где X — произведение оставшихся независимых циклов.

5. Фиксируем произвольный номер из цикла α , например, α_1 . Согласно лемме 4.5 это номер листа, по которому траектория идет вниз при проекции фиксированного тора атома Q на бильярдную книжку.
6. Прделаем предыдущие 2 шага также для атома P . Результатом этих шагов является некоторый номер β_1 .
7. Заменяем перестановку $\sigma[0]$ на новую $\sigma'[0] = (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$. Как говорилось в предыдущих пунктах, номерам листов α_1, β_1 сопоставлены два тора. При такой замене перестановки с $\sigma[0]$ на $\sigma'[0]$ эти два тора склеятся. При этом траектория, которая после удара от верхней границы переходила на лист с номером α_1 , стала переходить на лист с номером β_1 . Иными словами, траектория раньше шла вверх по листу с номером $\sigma[0]^{-1}(\alpha_1)$, ударялась от верхней границы, переходила на лист с номером α_1 и шла по нему вниз. При замене перестановки эта траектория после удара от верхней границы будет идти вниз по листу с номером β_1 вместо листа с номером α_1 . То же самое верно и для траектории, которая до этой замены перестановки шла вниз по листу с номером β_1 .
8. Новая перестановка $\sigma'[0]$ полностью описывает то, как в результате выглядит новый комплекс X' в окрестности верхней границы листов, и какие перестановки соответствуют верхним корешкам листов. Поэтому на основе новой перестановки $\sigma'[0]$ перестроим комплекс X в новый комплекс X' следующим образом.

Отменим (разрежем) все склейки на верхних дугах листов (дугах эллипса с параметром, равным 0) комплекса X . Разложим перестановку $\sigma'[0]$ в независимые циклы: $\sigma'[0] = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \dots \circ \gamma_t$, $t \in \mathbb{N}$. Каждому независимому циклу $\gamma_i = (\gamma_{i,1} \gamma_{i,2} \dots \gamma_{i,s})$, $s \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, t$ перестановки $\sigma'[0]$ соответствует некоторый корешок e_i^1 . Этот корешок склеивает в точности те листы, номера которых цикл γ_i переставляет. То есть в границе листов с номерами $\gamma_{i,1}, \gamma_{i,2}, \dots, \gamma_{i,s}$ лежит корешок e_i^1 , а перестановку, соответствующую этому корешку положим равной этому циклу: $\Sigma'[e_i^1] = \gamma_i$. Иными словами, листы, отвечающие одному независимому циклу перестановки $\sigma'[0]$, склеиваются по верхней границе. Похожее построение было описано в лемме 4.2.

Бильярдная книжка $\mathcal{B}'(X', \Sigma', N)$ с перестроенными по перестановке $\sigma'[0]$ комплексом X' и перестановками Σ' имеет грубую молекулу, изображенную на рис. 6.1, и является результатом алгоритма 4.

Для склейки произвольных атомов по ребру нам понадобится обобщить два алгоритма реализации 3-атомов (со звездочками и без) так, чтобы в седловых атомах без звездочек тоже была склейка слева. Для этого нужно будет научиться строить “дубли” для атомов без звездочек.

Алгоритм 5 (общий алгоритм реализации 3-атомов). Этот алгоритм совпадает для 3-атомов со звездочками с алгоритмом 2.

В случае, если дан 3-атом U без звездочек, построим для него простейший дубль следующим образом. Рассмотрим 2-атом P такой, что $U = P \times S^1$. Возьмем две копии атома P . Получим несвязный атом $\hat{P} = P \sqcup P$. И определим на нем инволюцию τ , которая одну копию отражает на другую. Очевидно, что факторизация по этой инволюции даст один 2-атом P . А если выполнить операцию построения 3-атома для атома \hat{P} и инволюции τ , описанную в разделе 2.5 в пункте 2 построения атомов, то получится тот же 3-атом U . Поэтому к 3-атомам без звездочек также можно применить алгоритм 2 реализации 3-атомов со звездочками, в результате которого получится бильярдная книжка \mathcal{B}' с нетождественной склейкой слева, являющейся инволюцией.

Пусть результатом алгоритма 1 реализации 3-атомов без звездочек является бильярдная книжка \mathcal{B} . Заметим, что книжка \mathcal{B}' является “удвоенной копией” книжки \mathcal{B} . Более точно: книжка \mathcal{B}' может быть получена с точностью до перенумерации листов в результате следующих операций. Берем несвязное объединение $\mathcal{B} \sqcup \mathcal{B}$ двух копий книжек \mathcal{B} и склеиваем их друг с другом по левой границе. Иными словами, меняем перестановку $\sigma[a]$ на квадрике, отвечающую левой границе листов, на инволюцию $\sigma'[a]$, отображающую одну копию листа на другую. Бильярдная книжка \mathcal{B}' получается заменой левой границы листов $\mathcal{B} \sqcup \mathcal{B}$ в соответствии с перестановкой $\sigma'[a]$.

Алгоритм 6 (склейки по ребру двух произвольных атомов, со звездочками или без). Даны два произвольных 3-атома P и Q , которые могут быть как со звездочками, так и без. Аналогично алгоритму 4 склеим эти два атома по выбранному ребру так, чтобы значение интеграла, которому соответствует атом Q , было меньше значения интеграла, которому соответствует атом P . Обозначения и схема также аналогичны алгоритму 4.

1. Выполняем первые 3 шага алгоритма 4, за исключением того, что для построения бильярдных книжек \mathcal{B}_P и \mathcal{B}_Q будем использовать общий алгоритм 5 реализации 3-атомов. В результате получается бильярдная книжка \mathcal{B} , у которой перестановка $\sigma[a]$ на квадрике, отвечающая левой границе листов, является нетождественной. Эта перестановка задает инволюцию на листах бильярдной книжки \mathcal{B} .
2. Рассмотрим также книжку $\hat{\mathcal{B}}$, которую получим из книжки \mathcal{B} , положив перестановку $\sigma[a]$ тождественной и убрав все склейки слева в комплексе X . Напомним, что по построению в общем алгоритме 5 реализации 3-атомов инволюция $\sigma[a]$ описывает инволюции τ на дублях атомов. Значит, если положить перестановку $\sigma[a]$ тождественной, то мы снова

получим дубли вместо атомов. То есть в книжке $\hat{\mathcal{B}}$ на критических уровнях интеграла Λ возникают дубли атомов, появляющихся на тех же критических уровнях в книжке \mathcal{B} .

3. Выберем на атоме Q ребро (тор), которое хотим склеить. В книжке $\hat{\mathcal{B}}$ в окрестности уровня λ_2 вместо атома Q получается некоторый дубль \hat{Q} этого атома. Как уже было отмечено в замечании 2.6 в этом дубле выбранному ребру (тору) соответствует одно или два ребра (тора). Фиксируем любое из них. Снова согласно лемме 4.5 можно выбрать независимый цикл, соответствующий данному ребру на дубле \hat{Q} , и выбрать в нем номер α_1 .
4. Выполним действия предыдущего шага для атома P . Результатом этих действий является некоторый номер β_1 .
5. Главным отличием этого алгоритма от алгоритма склейки атомов без звездочек по ребру будет заключаться в том, что наши перестройки должны быть инвариантны относительно инволюции $\sigma[a]$ (перестановки, отвечающей левой границе, которая является инволюцией по построению в алгоритме 5). Поэтому изменения перестановки $\sigma[0]$ требуют такие же изменения на листах, симметричных относительно инволюции $\sigma[a]$. Это требование обеспечивает коммутруемость перестановок, описанную в лемме 4.1.

Итак, пусть $\hat{\alpha}_1 = \sigma[a](\alpha_1)$, $\hat{\beta}_1 = \sigma[a](\beta_1)$, — образы листов α_1, β_1 при инволюции $\sigma[a]$.

Ранее, на шаге 7 алгоритма 4 новая перестановка $\sigma'[0]$ определялась, как композиция $(\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$. Теперь положим $\sigma'[0] = (\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1) \circ (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$. Такая новая перестановка $\sigma'[0]$ инвариантна относительно инволюции $\sigma[a]$, то есть верхняя перестановка $\sigma'[0]$ и левая перестановка $\sigma[a]$ коммутируют (этот простой факт будет доказан в предложении ниже).

6. Как и ранее, новая перестановка $\sigma'[0]$ полностью описывает вид комплекса X' вверху и перестановки Σ' , соответствующие верхним корешкам этого комплекса (см. последний шаг алгоритма 4).

Биллиардная книжка $\mathcal{B}'(X', \Sigma', N)$ с перестроенными по перестановке $\sigma'[0]$ комплексом X' и перестановками Σ' имеет грубую молекулу, изображенную на рис. 6.1 и является результатом алгоритма 6.

Предложение 6.2. *Перестановки $\sigma'[0]$ и $\sigma[a]$ из алгоритма 6 выше коммутируют.*

Доказательство. В алгоритме 6 выше перестановка $\sigma'[0]$ определена как $\sigma'[0] = (\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1) \circ (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$, где $\hat{\alpha}_1 = \sigma[a](\alpha_1)$, $\hat{\beta}_1 = \sigma[a](\beta_1)$. Также известно, что перестановка $\sigma[a]$ является инволюцией, и коммутируют перестановки $\sigma[0]$ и $\sigma[a]$. Докажем, что $\sigma'[0] \circ \sigma[a] = \sigma[a] \circ \sigma'[0]$.

$$\sigma'[0] \circ \sigma[a] = (\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1) \circ (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0] \circ \sigma[a] = (\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1) \circ (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[a] \circ \sigma[0].$$

Поскольку перестановка $\sigma[a]$ — инволюция, и $\hat{\alpha}_1 = \sigma[a](\alpha_1)$, $\hat{\beta}_1 = \sigma[a](\beta_1)$, то ее можно представить как $\sigma[a] = (\alpha_1 \hat{\alpha}_1) \circ (\beta_1 \hat{\beta}_1) \circ T$, где T — произведение оставшихся независимых циклов, в которых не встречаются числа $\alpha_1, \beta_1, \hat{\alpha}_1$ и $\hat{\beta}_1$. Итак,

$$\begin{aligned} \sigma'[0] \circ \sigma[a] &= (\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1) \circ (\alpha_1 \beta_1) \circ (\alpha_1 \hat{\alpha}_1) \circ (\beta_1 \hat{\beta}_1) \circ T \circ \sigma[0] = (\alpha_1 \hat{\beta}_1) \circ (\hat{\alpha}_1 \beta_1) \circ T \circ \sigma[0] = \\ &= T \circ (\alpha_1 \hat{\beta}_1) \circ (\hat{\alpha}_1 \beta_1) \circ \sigma[0] = T \circ (\alpha_1 \hat{\alpha}_1) \circ (\beta_1 \hat{\beta}_1) \circ (\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1) \circ (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0] = \sigma[a] \circ \sigma'[0]. \end{aligned}$$

□

Алгоритм 7 (реализации любой грубой молекулы). Пусть дана произвольная грубая молекула \tilde{W} . Выполним следующие действия, схематически изображенные на рис. 6.2.

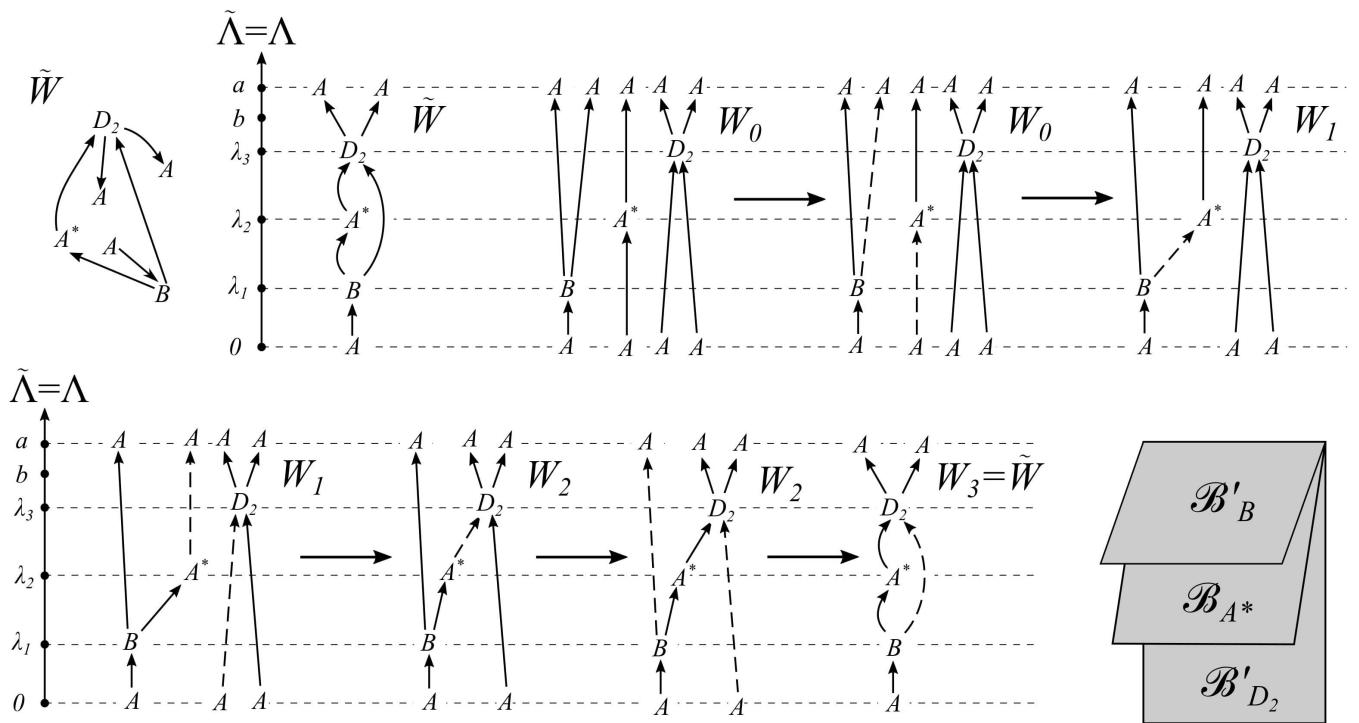


Рис. 6.2: Схема алгоритма 7. На рисунках последовательно изображен пример грубой молекулы, задание функции $\tilde{\Lambda}$ на ней, грубая молекула для бильярдной книжки \mathcal{B} на шаге 4, изменение грубой молекулы при последовательном присоединении ребер (шаг 5) и схематическое изображение бильярдной книжки, которая получится в результате.

1. Грубая молекула строится по некоторой функции, а после ее построения функция забывается, но остается направление на ребрах графа (см. замечание 2.3 об ориентации ребер на грубой молекуле), заданное по возрастанию этой функции. Оно нам необходимо для реализации грубой молекулы. Даже если это направление не указано на молекуле, то его можно восстановить следующим образом. Возьмем произвольный седловой атом P грубой молекулы \tilde{W} . Каждый атом (за исключением атомов A минимума и максимума) содержит

два типа колец, находящиеся по разные стороны от критического уровня. Определимся с направлением функции на атоме P , то есть считаем, что один тип колец находится ниже критического уровня, второй тип — выше. Распространим это направление на всю молекулу \tilde{W} следующим образом. Возьмем каждое из ребер, которое выходит из атома P . Если оно соответствует кольцу на атоме P , которое ниже критического уровня, то ориентируем это ребро так, чтобы оно входило в атом P , выше критического — выходило. Основываясь на ориентации этих ребер определим направление функции на соседних атомах. И далее тем же способом определяем ориентацию на всех ребрах графа. Заметим, что согласно замечанию 2.3 об ориентации ребер на грубой молекуле в полученном ориентированном графе молекулы \tilde{W} нет циклов.

2. Основываясь на ориентации ребер на грубой молекуле \tilde{W} , восстановим непрерывную функцию $\tilde{\Lambda} : \tilde{W} \rightarrow [0, a]$ следующим образом. Всем атомам A минимума (из которых ребро выходит) сопоставим значение 0, максимума (в которые ребро входит) — a . Все остальные $n \in \mathbb{N}$ атомов расположим на произвольных различных уровнях $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ таких, что $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < b$, и если атомы P и Q соединены ребром в направлении от атома P к атому Q , то $\tilde{\Lambda}(P) < \tilde{\Lambda}(Q)$. Это сделать возможно, поскольку в графе молекулы \tilde{W} нет циклов, а значит на вершинах этого графа можно ввести топологический порядок. Распространим непрерывно и монотонно функцию $\tilde{\Lambda}$ на ребра грубой молекулы \tilde{W} . Получим, что все ребра на грубой молекуле \tilde{W} направлены по возрастанию функции $\tilde{\Lambda}$ (см. рис. 6.2).

Будем строить бильярдную книжку $\mathcal{B}(X, \Sigma, N)$ так, чтобы грубая молекула W бильярдной книжки с квадратичным интегралом Λ совпала с заданной грубой молекулой \tilde{W} , а интеграл Λ на грубой молекуле W совпал с только что построенной функцией $\tilde{\Lambda}$ на грубой молекуле \tilde{W} .

3. Для каждого атома P_i , $i = 1, \dots, n$ построим по общему алгоритму 5 реализации 3-атомов бильярдную книжку \mathcal{B}_{P_i} . Заменим в ней листы на листы типа B_0 , ограниченные слева вертикальной прямой (кривой из семейства с параметром a), справа гиперболой с параметром $\tilde{\lambda}$, а сверху и снизу двумя эллипсами с параметрами 0 и $\tilde{\Lambda}(P_i)$ соответственно.
4. Рассмотрим объединение книжек $\mathcal{B} = \bigsqcup_{i=1}^n \mathcal{B}_{P_i}$ (см. опр. 4.4). Молекула W для книжки \mathcal{B} изображена на рис. 6.2. У нее все атомы A минимума находятся на уровне $\Lambda = 0$, максимума — на уровне $\Lambda = a$, а атомы P_i на уровнях $\tilde{\Lambda}(P_i)$, где $i = 1, \dots, n$. Осталось правильно соединить ребра и убрать лишние атомы A .
5. Для каждого ребра, соединяющего два седловых атома P и Q в грубой молекуле \tilde{W} , применяем шаги 3-6 алгоритма 6. Перебирать ребра можно в любом порядке. После каждой итерации два ребра, которые были присоединены к атомам A минимума или максимума,

склеятся в одно ребро. Таким образом, после каждой итерации мы реализуем одно ребро из грубой молекулы \tilde{W} в молекуле W (см. рис. 6.2). Алгоритм завершается, когда мы реализуем все ребра в грубой молекуле \tilde{W} , соединяющие седловые атомы.

Построенная бильярдная книжка является результатом алгоритма 7.

6.2 Примеры реализации грубых молекул

Реализуем грубую молекулу \tilde{W} , изображенную на рис. 6.2. Сначала построим бильярдные книжки \mathcal{B}_B и \mathcal{B}_{D_2} класса \mathbf{a} для 3-атомов B и D_2 , встречающихся в выбранной грубой молекуле \tilde{W} . Это было сделано в примере 5.1 по алгоритму 1. Проиллюстрируем работу алгоритма 4 на примере склейки двух 3-атомов без звездочек по ребру.

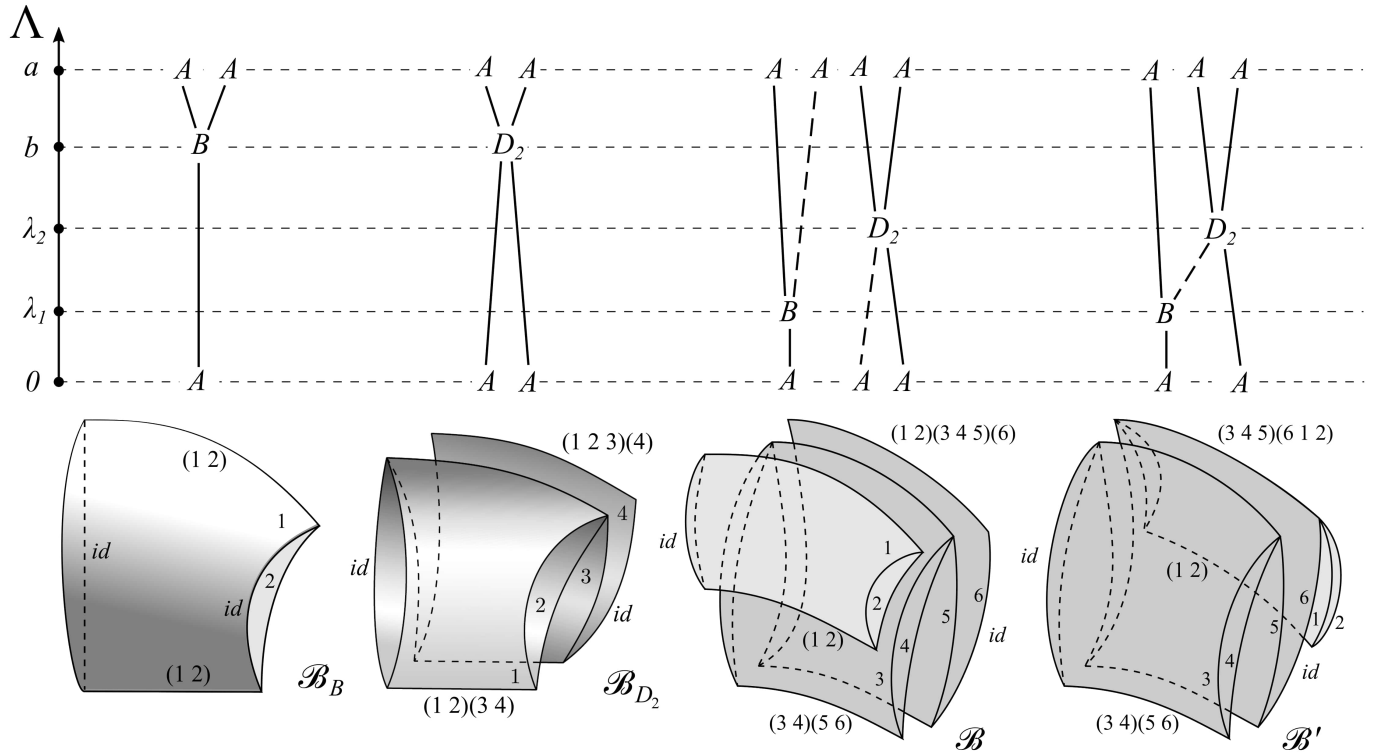


Рис. 6.3: Пример использования алгоритма 4 для склейки 3-атомов B и D_2 по ребру.

Пример 6.1 (склейки 3-атомов B и D_2 по ребру). В этом примере мы собираемся выполнить преобразования над книжками \mathcal{B}_B и \mathcal{B}_{D_2} , полученными в примере 5.1, так, чтобы в соответствующих им грубых молекулах атом B склеился с атомом D_2 по ребру (см. рис. 6.3). При этом после этой склейки атом B будет находиться ниже атома D_2 , верхнее пунктирное ребро атома B склеится с нижним пунктирным ребром атома D_2 , а атомы A на других концах этих ребер пропадут.

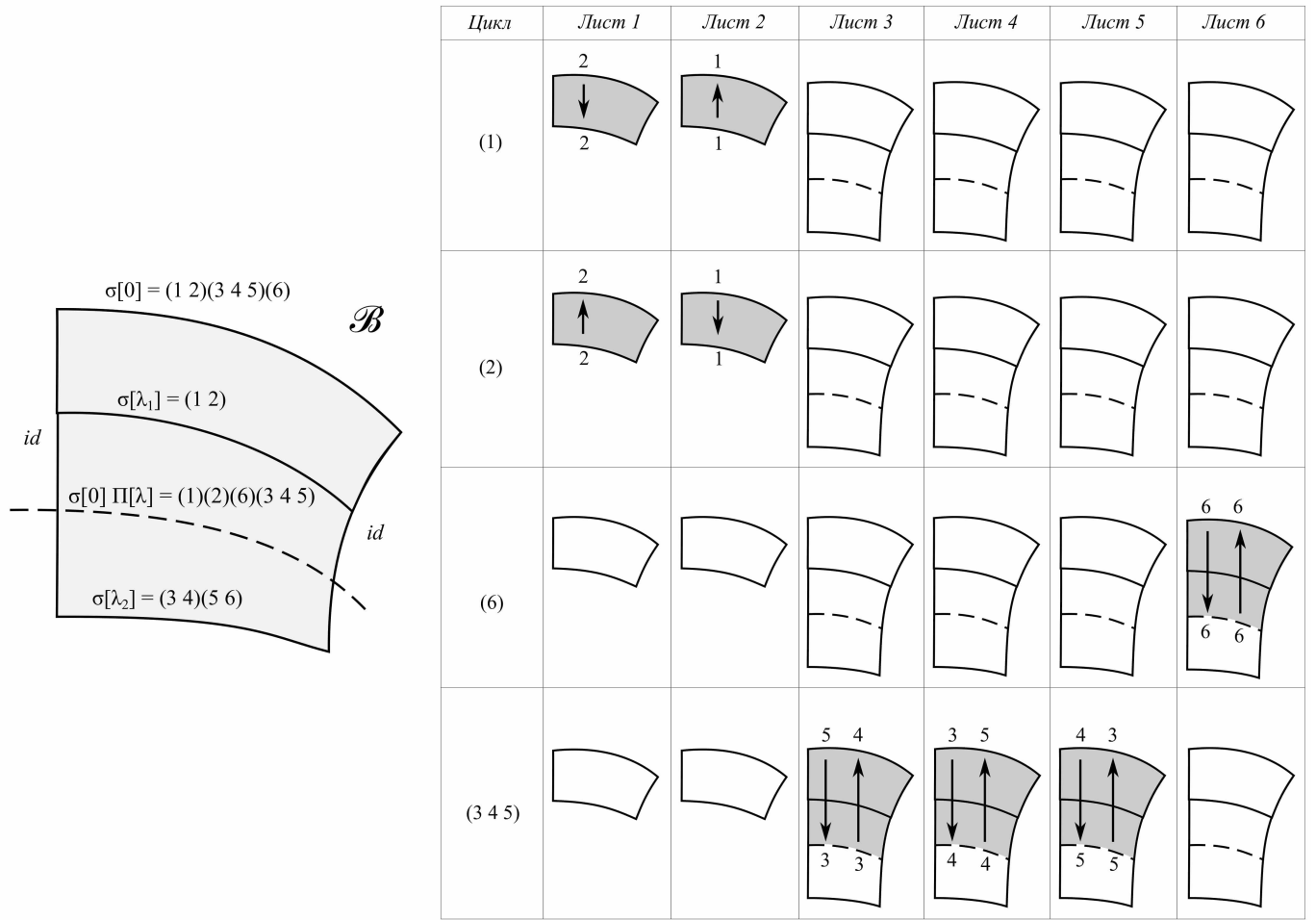


Рис. 6.4: Проекция торов Лиувилля на листы книжки \mathcal{B} . Каждый из торов соответствует некоторому независимому циклу в разложении композиции $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$.

Сначала расположим атомы B и D_2 на разных уровнях: λ_1 и λ_2 , таких что $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < b$. Чтобы атом B оказался на уровне λ_1 , а атом D_2 — на уровне λ_2 , поменяем нижние границы листов у книжек \mathcal{B}_B и \mathcal{B}_{D_2} , а именно, сделаем их дугами эллипсов с соответствующими параметрами: λ_1 для B и λ_2 для D_2 . Возьмем несвязное объединение этих книжек (операция несвязного объединения введена в опр. 4.4). В итоге получится бильярдная книжка \mathcal{B} , представленная на рис. 6.3. Заметим, что у нее сдвинулась нумерация на листах, отвечающих книжке \mathcal{B}_{D_2} : лист 1 перешел в лист 3, 2 в 4, 3 в 5, 4 в 6. Перестановки переписались в соответствии с этой перенумерацией: $\sigma[0] = (1\ 2)(3\ 4\ 5)(6)$, $\sigma[\lambda_1] = (1\ 2)$, $\sigma[\lambda_2] = (3\ 4)(5\ 6)$. Изменим верхнюю перестановку $\sigma[0]$ в книжке \mathcal{B} так, чтобы в грубой молекуле склеились нужные ребра. Для этого выполним действия, описанные ниже.

Рассмотрим произвольный уровень λ , такой что $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Поскольку нижние дуги листов книжки \mathcal{B} имеют параметры λ_1 или λ_2 , то перестановка уровня $\Pi[\lambda]$ из опр. 4.5 выглядит так

$$\Pi[\lambda] = \prod_{\lambda_i < \lambda} \sigma[\lambda_i] = \sigma[\lambda_1] = (1\ 2).$$

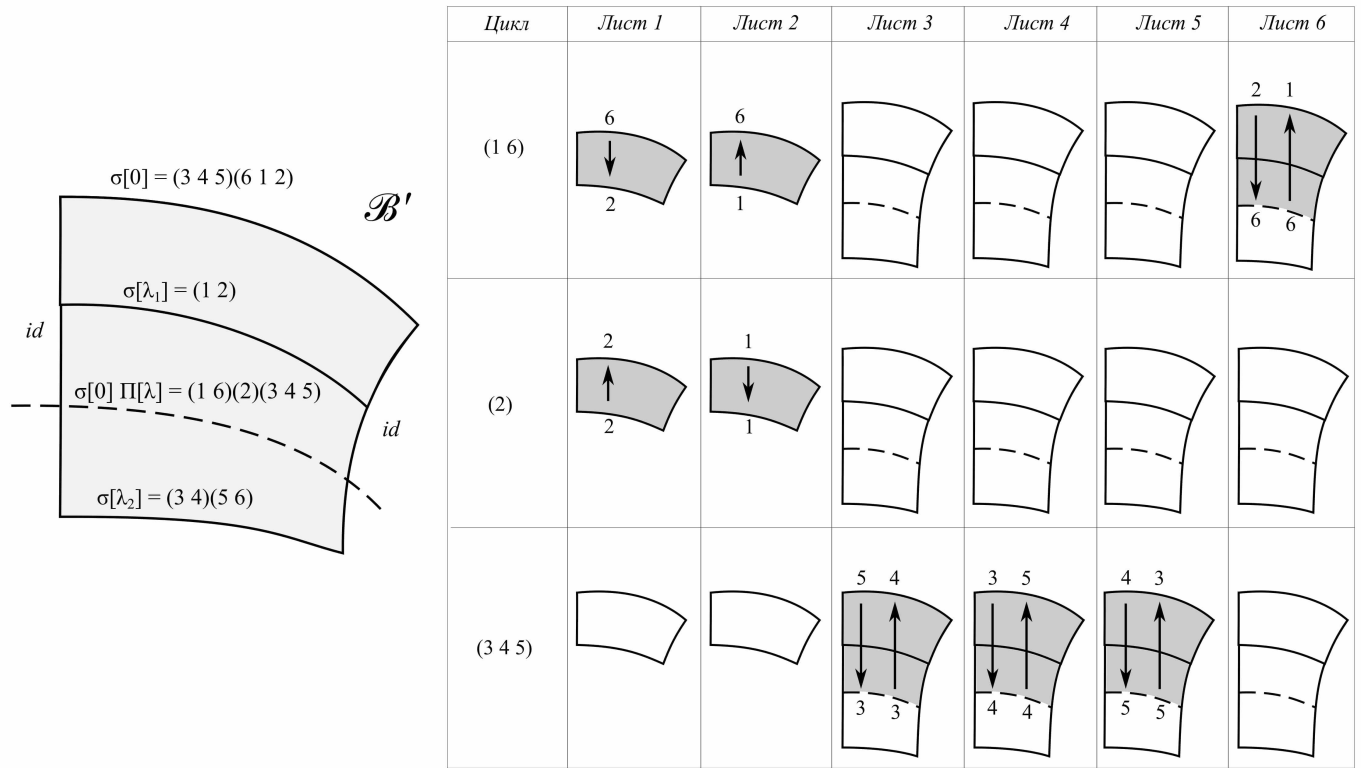


Рис. 6.5: Проекция торов Лиувилля на листы книжки \mathcal{B}' , реализующей склейку атомов B и D_2 по ребру. Каждый из торов соответствует некоторому независимому циклу в разложении композиции $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$.

Рассмотрим разложение в независимые циклы композиции $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda] = (1 2)(3 4 5)(6) \circ (1 2) = (1)(2)(3 4 5)(6)$. Согласно лемме 4.5 есть взаимно-однозначное соответствие между двумерными торами Лиувилля на уровне $\Lambda = \lambda$ и этими независимыми циклами. Для наглядности изобразим проекцию этих торов на листы книжки \mathcal{B} . Каждому из таких торов соответствуют некоторые траектории на книжке \mathcal{B} . На рис. 6.4 представлено, по какой части листов книжки \mathcal{B} могут идти эти траектории и в каком направлении: вверх или вниз.

Пунктирным ребрам (торам) атомов B и D_2 соответствуют некоторые циклы. Пусть это будут циклы (1) и (6). Нужно выбрать из каждого цикла произвольный номер. Здесь это можно сделать единственным образом. Получим номера 1 и 6. Заменяем верхнюю перестановку $\sigma[0]$ на $\sigma'[0] = (1 6) \circ \sigma[0] = (1 6) \circ (1 2)(3 4 5)(6) = (1 2 6)(3 4 5)$. Поменяем верхнюю границу всех листов в соответствии с новой перестановкой: каждый независимый цикл в разложении перестановки $\sigma'[0]$ соответствует одному корешку (одномерной клетке), который склеивает в точности те листы, которые этот цикл переставляет (см. рис. 6.3). Получившаяся в результате новая книжка \mathcal{B}' будет иметь нужную грубую молекулу.

Заметим, что на уровне $\Lambda = \lambda$ два тора, отвечающие циклам (1) и (6), склеились. Действительно, если рассмотреть композицию $\sigma'[0] \circ \Pi[\lambda] = \sigma'[0] \circ \Pi[\lambda] = (1 2 6)(3 4 5) \circ (1 2) = (1 6)(2)(3 4 5)$, то можно увидеть, что циклы (1) и (6) склеились в один цикл (1 6). На рис. 6.5

представлена проекция торов для новой книжки \mathcal{B}' . Видно, что новому циклу (1 6) соответствует движение материальной точки, являющееся объединением двух движений, соответствующих старым циклам (1) и (6). Для других циклов движение материальной точки не меняется.

Покажем, что алгоритм 4 можно также использовать для последующей приклейки двух ребер, то есть действия, описанные в нем, меняют грубую молекулу локально.

Пример 6.2 (склейки 3-атомов B и D_2 по двум ребрам). В этом примере выполним преобразования над книжкой \mathcal{B}' , полученной в примере 6.1, так, чтобы в соответствующей ей грубой молекуле склеилась еще одна пара ребер (см. рис. 6.6).

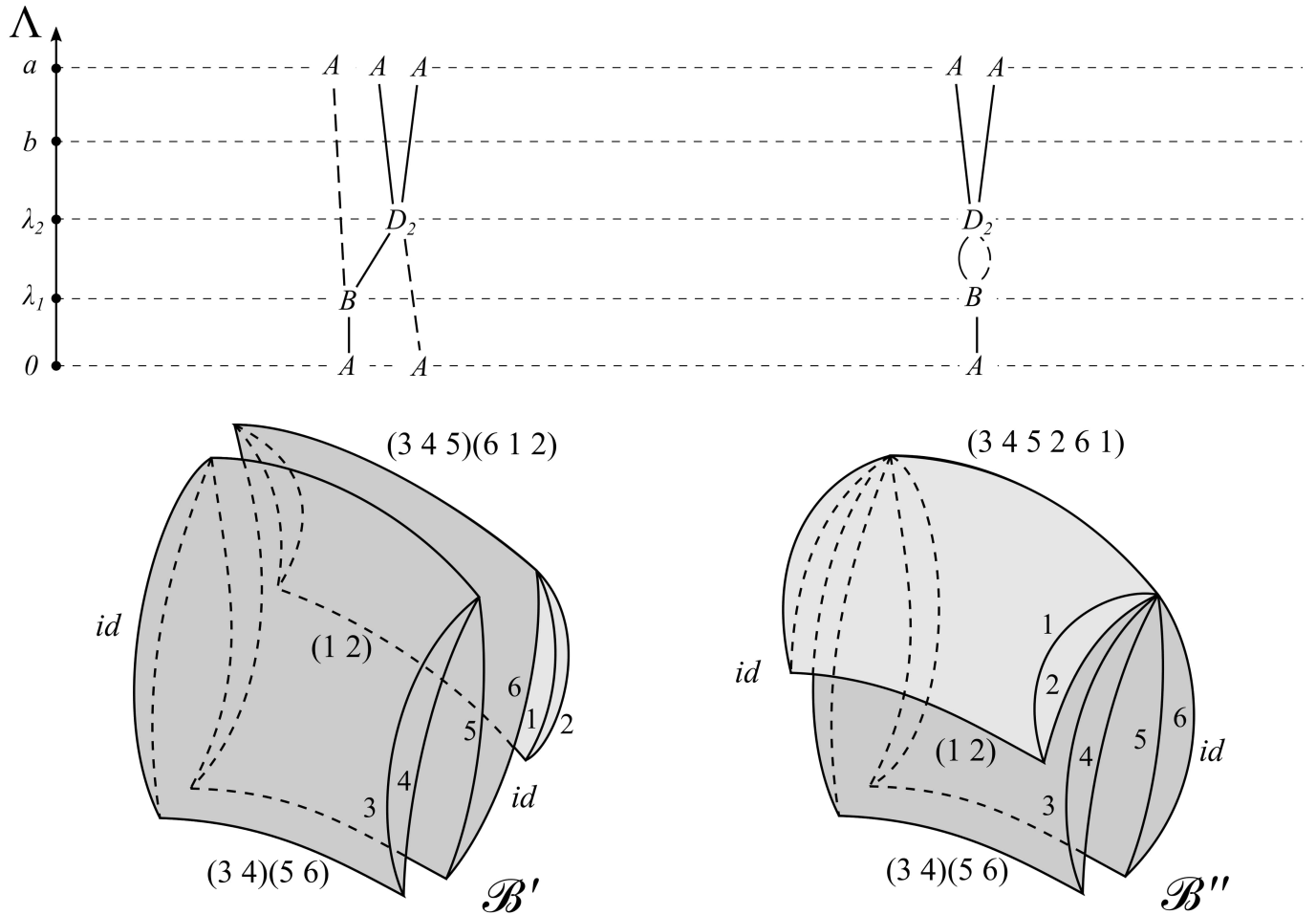


Рис. 6.6: Пример использования алгоритма 4 для склейки 3-атомов B и D_2 по двум ребрам.

В предыдущем примере мы получили, что $\sigma'[0] \circ \Pi'[\lambda] = (1\ 6)(2)(3\ 4\ 5)$. Пусть пунктирные ребра соответствуют циклам (2) и (3 4 5). Выберем из каждого цикла произвольный номер. Получим 2 и 3. Заменяем верхнюю перестановку $\sigma'[0]$ на новую $\sigma''[0] = (2\ 3) \circ \sigma'[0] = (2\ 3) \circ (1\ 2\ 6)(3\ 4\ 5) = (2\ 6\ 1\ 3\ 4\ 5)$. Поменяем верхнюю границу всех листов в соответствии с новой перестановкой (см. рис. 6.3). Получившаяся в результате новая книжка \mathcal{B}'' имеет нужную грубую молекулу.

При этом на уровне $\Lambda = \lambda$ два тора, отвечающие циклам (2) и (345), склеились. Действительно, если рассмотреть композицию $\sigma''[0] \circ \Pi''[\lambda] = (261345) \circ (12) = (16)(2345)$, то можно увидеть, что циклы (2) и (345) склеились в один цикл (2345). На рис. 6.7 представлена проекция торов для новой книжки \mathcal{B}'' . Видно, что новому циклу (2345) соответствует движение материальной точки, являющееся объединением двух движений, соответствующих старым циклам (2) и (345). Для оставшегося цикла (16) движение материальной точки не меняется.

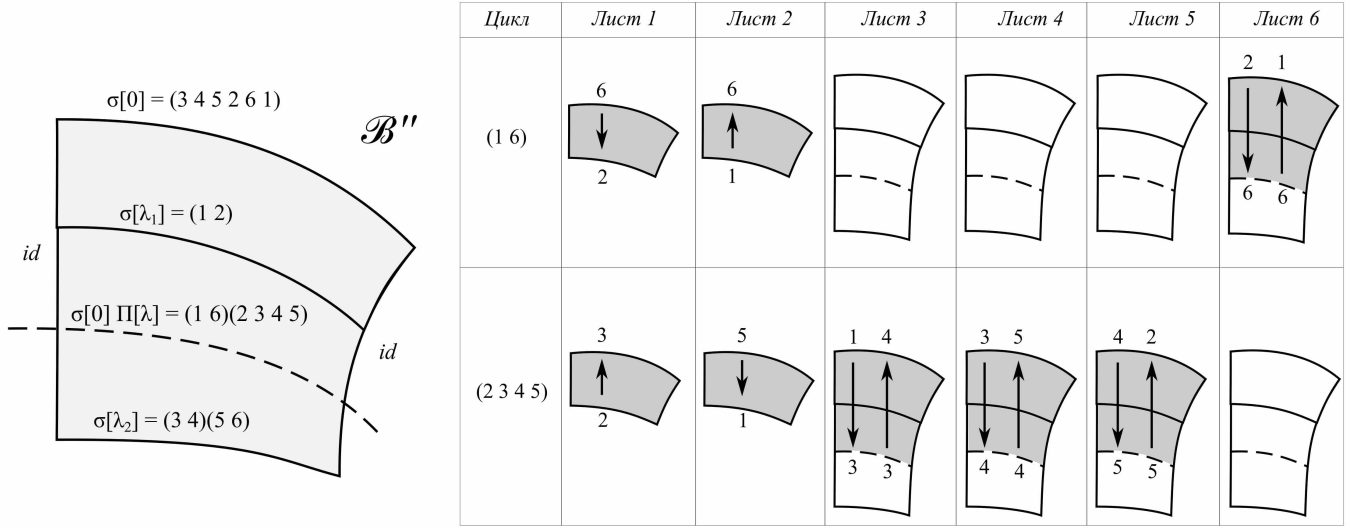


Рис. 6.7: Проекция торов Лиувилля на листы книжки \mathcal{B}'' , реализующей склейку атомов B и D_2 по двум ребрам. Каждый из торов соответствует некоторому независимому циклу в разложении композиции $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$.

Преыдушие два примера иллюстрировали алгоритм 4, который может работать только с атомами без звездочек. Следующим шагом будет переход к произвольным атомам. В отличие от атомов без звездочек, у атомов со звездочками есть инволюция и склейка слева на соответствующей им книжке. Поскольку мы не можем просто склеить атом с инволюцией с атомом без инволюции, то нужно научиться строить инволюцию для атомов без звездочек. При этом на бильярдной книжке, соответствующей таким атомам появится склейка слева. Для этого был сформулирован алгоритм 5. Он совпадает с алгоритмом 2 для атомов со звездочками и модифицирует алгоритм 1 для атомов без звездочек. Используя его, построим новые книжки для атомов B и D_2 .

Пример 6.3. Сконструируем для атомов B и D_2 дубли \hat{B} и \hat{D}_2 с инволюциями $\tau_B : \hat{B} \rightarrow \hat{B}$ и $\tau_{D_2} : \hat{D}_2 \rightarrow \hat{D}_2$ по алгоритму 5 следующим образом. Дублем для атомов B и D_2 являются пары копий соответствующих 2-атомов B и D_2 (см. рис. 6.8). Инволюции τ_B и τ_{D_2} отражают одну копию на другую. Теперь можно применить алгоритм 2 реализации атомов со звездочками к атомам B и D_2 без звездочек.

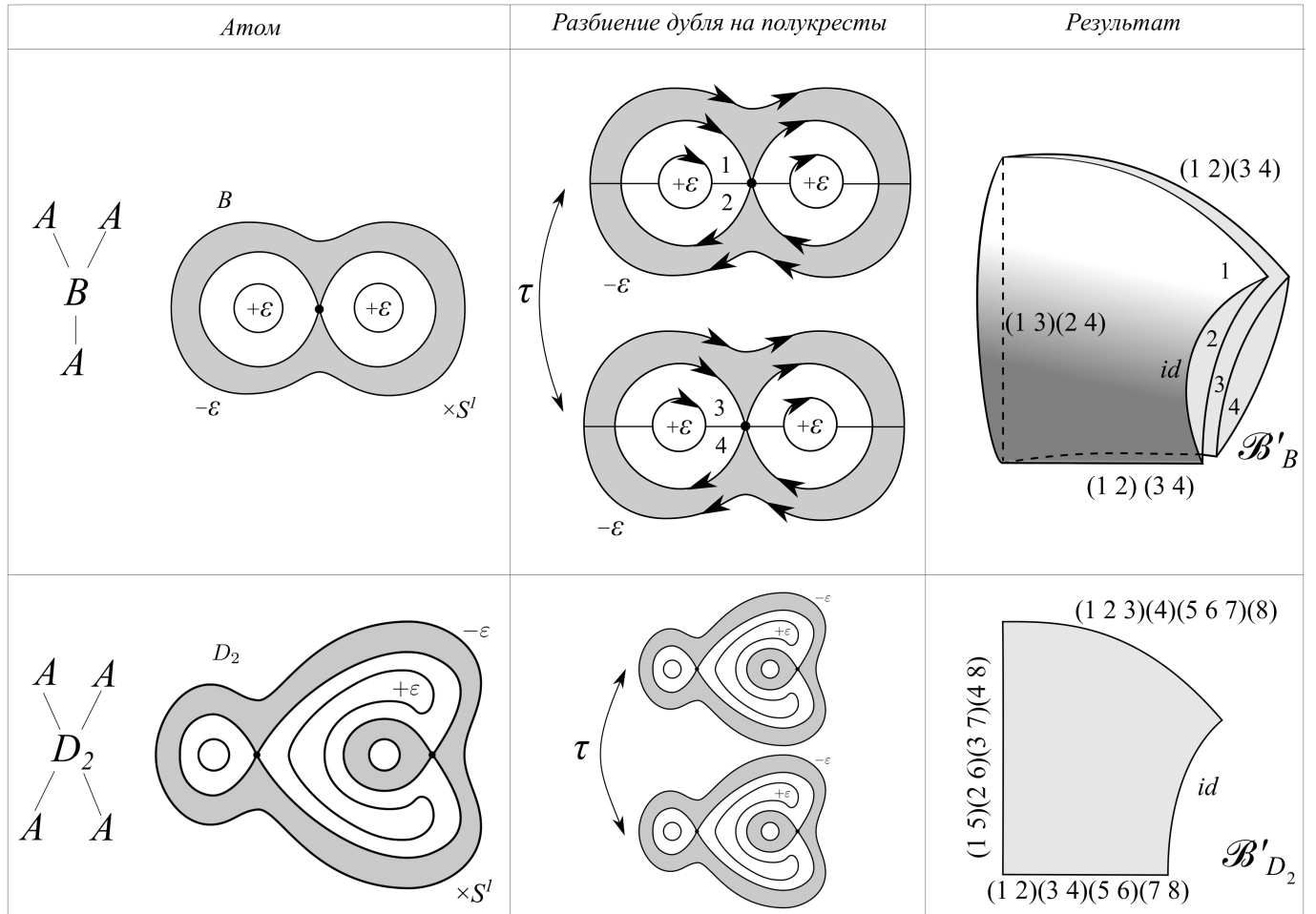


Рис. 6.8: Пример использования алгоритма 5 для реализации атомов B и D_2 . Инволюция τ на рисунке отображает одну копию атома на другую.

Режем дубль \hat{B} на полукресты. Нумеруем их (см. рис. 6.8). Из дубля \hat{B} получается 4 полукреста. Значит, у билиардной книжки, соответствующей атому B будет 4 листа типа A'_0 . Правая перестановка $\sigma'_B[\tilde{\lambda}] = id$ — тождественная. Нижняя перестановка $\sigma'_B[b]$ определяется на основе склейки полукрестов в кресты. Полукресты 1 и 2, 3 и 4 образуют два креста. Поэтому для нижней перестановки верно: $\sigma'_B[b] = (1\ 2)(3\ 4)$. Верхняя перестановка $\sigma'_B[a]$ определяется на основе склейки крестов в атом. Исходящая стрелка первого полукреста соединяется со входящей стрелкой второго полукреста, 2 — с 1, 3 — с 4, 4 — с 3. Поэтому для верхней перестановки верно: $\sigma'_B[0] = (1\ 2)(3\ 4)$. Левая перестановка определяется на основе инволюции τ . Эта инволюция отображает первый полукрест на третий, второй на четвертый, третий на первый и четвертый на второй. Значит, $\sigma'_B[a] = (1\ 3)(2\ 4)$.

Аналогично получаем перестановки для атома D_2 : $\sigma'_{D_2}[\tilde{\lambda}] = id$, $\sigma'_{D_2}[b] = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)$, $\sigma'_{D_2}[0] = (1\ 2\ 3)(4)(5\ 6\ 7)(8)$, $\sigma'_{D_2}[a] = (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8)$.

Используем следствие 4.3 леммы 4.2 для построения билиардных книжек класса \mathbf{a} . По этой лемме описанные выше перестановки полностью задают билиардные книжки \mathcal{B}'_B и \mathcal{B}'_{D_2} ,

реализующую атомы B и D_2 соответственно.

Эти же книжки можно также получить другим путем. Возьмем книжки \mathcal{B}_B и \mathcal{B}_{D_2} , полученные в примере 5.1. Удвоим их — рассмотрим книжки $\mathcal{B}_B \sqcup \mathcal{B}_B$ и $\mathcal{B}_{D_2} \sqcup \mathcal{B}_{D_2}$. Сейчас левые перестановки на удвоенных книжках являются тождественными. Поменяем их на инволюцию, отображающую одну копию листа на другую, то есть положим $\sigma'_B[a] = (13)(24)$ и $\sigma'_{D_2}[a] = (15)(26)(37)(48)$. Поменяем левую границу листов в соответствии с этой заменой перестановок. Получившиеся бильярдные книжки совпадают с книжками \mathcal{B}'_B и \mathcal{B}'_{D_2} .

Теперь покажем, как можно склеить два произвольных атома по ребру на примере склейки атома B без звездочек и атома A^* со звездочкой.

Пример 6.4 (склейки 3-атомов B и A^* по ребру). Этот пример иллюстрирует алгоритм 6 склейки двух произвольных атомов, со звездочками или без. Этот алгоритм основан на алгоритме 4 склейки двух произвольных атомов без звездочек, но устроен сложнее.

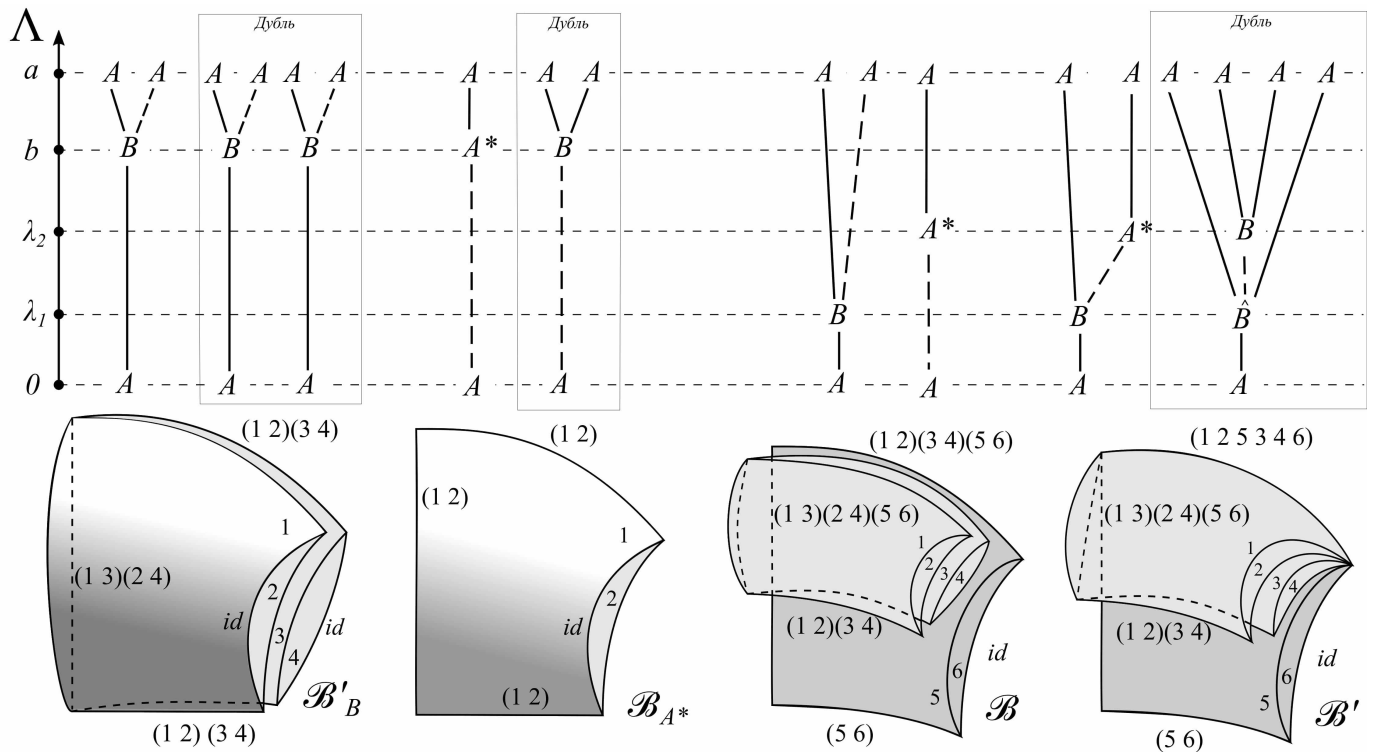


Рис. 6.9: Пример использования алгоритма 6 для склейки 3-атомов B и A^* по ребру.

Итак, выполним преобразования над книжкой \mathcal{B}'_B из примера 6.3 и книжкой \mathcal{B}_{A^*} из примера 5.2 так, чтобы в соответствующих им грубых молекулах атом B склеился с атомом A^* по ребру (см. рис. 6.9). При этом после этой склейки атом B будет находиться ниже атома A^* , верхнее пунктирное ребро атома B склеится с нижним пунктирным ребром атома A^* , а атомы A на других концах этих ребер пропадут.

Аналогично примеру 6.1 расположим атомы B и A^* на разных уровнях: λ_1 и λ_2 , таких что $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < b$. Чтобы атом B оказался на уровне λ_1 , а атом A^* — на уровне λ_2 , поменяем

нижние границы листов у книжек \mathcal{B}'_B и \mathcal{B}'_{A^*} , а именно, сделаем их дугами эллипсов с соответствующими параметрами: λ_1 для B и λ_2 для A^* . Возьмем несвязное объединение этих книжек (операция несвязного объединения введена в опр. 4.4). В итоге получится бильярдная книжка \mathcal{B} , представленная на рис. 6.9. Заметим, что у нее сдвинулась нумерация на листах, отвечающих книжке \mathcal{B}'_{A^*} : лист 1 перешел в лист 5, 2 в 6. Перестановки переписались в соответствии с этой перенумерацией: $\sigma[0] = (12)(34)(56)$, $\sigma[\lambda_1] = (12)(34)$, $\sigma[\lambda_2] = (56)$, $\sigma[a] = (13)(24)(56)$. Изменим верхнюю перестановку $\sigma[0]$ в книжке \mathcal{B} так, чтобы в грубой молекуле склеились нужные ребра. Для этого выполним действия, описанные ниже.

Рассмотрим также другую книжку $\hat{\mathcal{B}}$, которая получается из книжки \mathcal{B} , если положить левую перестановку $\sigma[a]$ тождественной. У нее на месте атомов возникают их дубли: на месте атома B — две копии атома B , на месте атома A^* — атом B .

Рассмотрим произвольный уровень λ , такой что $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Перестановка уровня $\Pi[\lambda]$ из опр. 4.5 выглядит так $\Pi[\lambda] = \sigma[\lambda_1] = (12)(34)$. Рассмотрим разложение в независимые циклы композиции $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda] = (12)(34)(56) \circ (12)(34) = (1)(2)(3)(4)(56)$. Лемма 4.5 в этом случае не применима к книжке \mathcal{B} , поскольку у нее слева нетождественная перестановка, но применима к дубль-книжке $\hat{\mathcal{B}}$. Поэтому согласно этой лемме есть взаимно-однозначное соответствие между двумерными торами Лиувилля на уровне $\Lambda = \lambda$ на дубль-книжке $\hat{\mathcal{B}}$ и независимыми циклами (1), (2), (3), (4) и (56). Каждому из торов Лиувилля на книжке \mathcal{B} соответствуют один или два тора на дубль-книжке $\hat{\mathcal{B}}$. Как именно выглядит соответствие можно понять исходя из левой перестановки $\sigma[a]$ книжки \mathcal{B} . В нашем случае торы, соответствующие циклам (1) и (3), в дубль-книжке $\hat{\mathcal{B}}$ — это один тор в книжке \mathcal{B} , поскольку $\sigma[a](1) = 3$ и $\sigma[a](3) = 1$, то есть эти циклы (торы) переходят друг в друга по инволюции. Аналогично, циклы (2) и (3) соответствуют одному тору в книжке \mathcal{B} . А цикл (56) переходит в себя же под действием перестановки $\sigma[a]$. Значит, цикл (56) (тор в дубль-книжке $\hat{\mathcal{B}}$) соответствует одному тору в книжке \mathcal{B} . Для наглядности на рис. 6.4 изображена проекция этих торов на листы книжки \mathcal{B} .

Итак, пунктирному ребру (тору) атома B на книжке \mathcal{B} соответствует одно или два ребра (тора) на дубль-книжке $\hat{\mathcal{B}}$, а им, в свою очередь, некоторые циклы. Пусть ими будет пара циклов (1) и (3). Выберем из них произвольный цикл и фиксируем в нем любое число. Получим 1. Выполним аналогичные действия для атома A^* . Пусть пунктирному ребру атома A^* в книжке \mathcal{B} соответствует один цикл (56). Фиксируем в нем произвольное число — 5. Итак, мы получили два числа 1 и 5. Рассмотрим также образы листов 1 и 5 относительно инволюции $\sigma[a]$ — листы $\sigma[a](1) = 3$ и $\sigma[a](5) = 6$. Заменяем верхнюю перестановку $\sigma[0]$ на $\sigma'[0] = (15) \circ (36) \circ \sigma[0] = (15) \circ (36) \circ (12)(34)(56) = (125346)$. Поменяем верхнюю границу всех листов в соответствии с новой перестановкой (см. рис. 6.9). Получившаяся в результате новая книжка \mathcal{B}' имеет нужную грубую молекулу.

Заметим, что на уровне $\Lambda = \lambda$ два тора, отвечающие циклам (1), (3) и (56), склеились. Действительно, если рассмотреть композицию $\sigma'[0] \circ \Pi[\lambda] = \sigma'[0] \circ \Pi[\lambda] = (125346) \circ (12)(34) =$

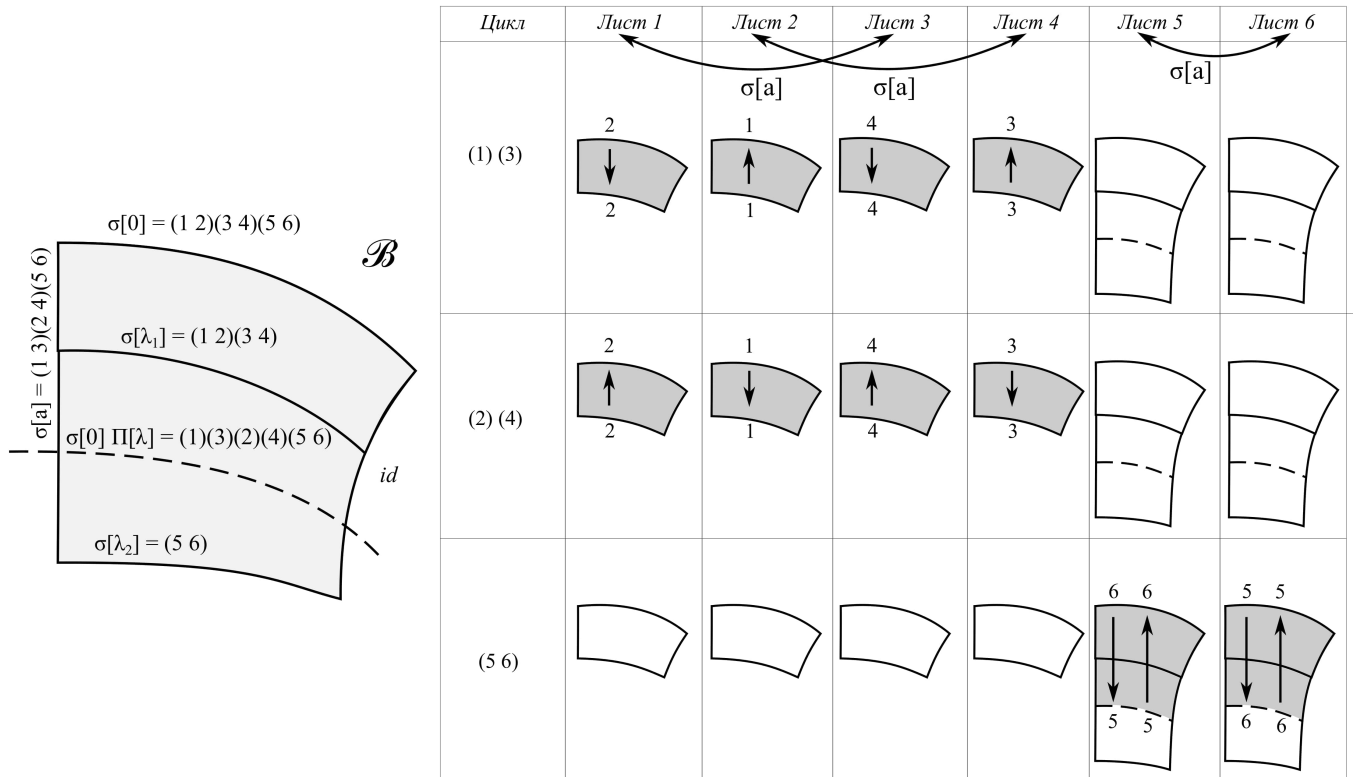


Рис. 6.10: Проекция торов Лиувилля на листы книжки \mathcal{B} . Каждый из торов соответствует некоторому независимому циклу или паре циклов в разложении композиции $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$.

$(1536)(2)(4)$, то можно увидеть, что циклы (1) , (3) и (56) склеились в один цикл (1536) . На рис. 6.11 представлена проекция торов для новой книжки \mathcal{B}' . Видно, что новому циклу (1536) соответствует движение материальной точки, являющееся объединением двух движений, соответствующих старым циклам (1) , (3) и (56) . Для других циклов движение материальной точки не меняется.

Продолжим реализовывать грубую молекулу \tilde{W} , изображенную на рис. 6.2. Следующим шагом приклеим атом D_2 к грубой молекуле, сконструированной в предыдущем примере, а именно, приклеим его к атому A^* по ребру.

Пример 6.5 (приклейки атома D_2 к атому A^* по ребру). Рассмотрим книжку \mathcal{B}' из предыдущего примера и книжку \mathcal{B}'_{D_2} из примера 6.3, реализующую атом D_2 . Собираемся изменить эти две книжки, действуя по алгоритму 6 склейки двух произвольных атомов, со звездочками или без, так, чтобы атом D_2 приклеился к атому A^* по ребру (см. рис. 6.2).

Расположим атом D_2 на некотором уровне λ_3 , таком что $\lambda_2 < \lambda_3 < b$, то есть этот атом находится выше атомов B и A^* из грубой молекулы книжки \mathcal{B}' . Чтобы атом D_2 оказался на уровне λ_3 , поменяем нижние границы листов у книжки \mathcal{B}'_{D_2} , а именно, сделаем их дугой эллипса с параметром λ_3 . Возьмем несвязное объединение получившейся книжки и книжки \mathcal{B}' (операция несвязного объединения введена в опр. 4.4). В итоге получится бильярдная книжка \mathcal{B} из 14

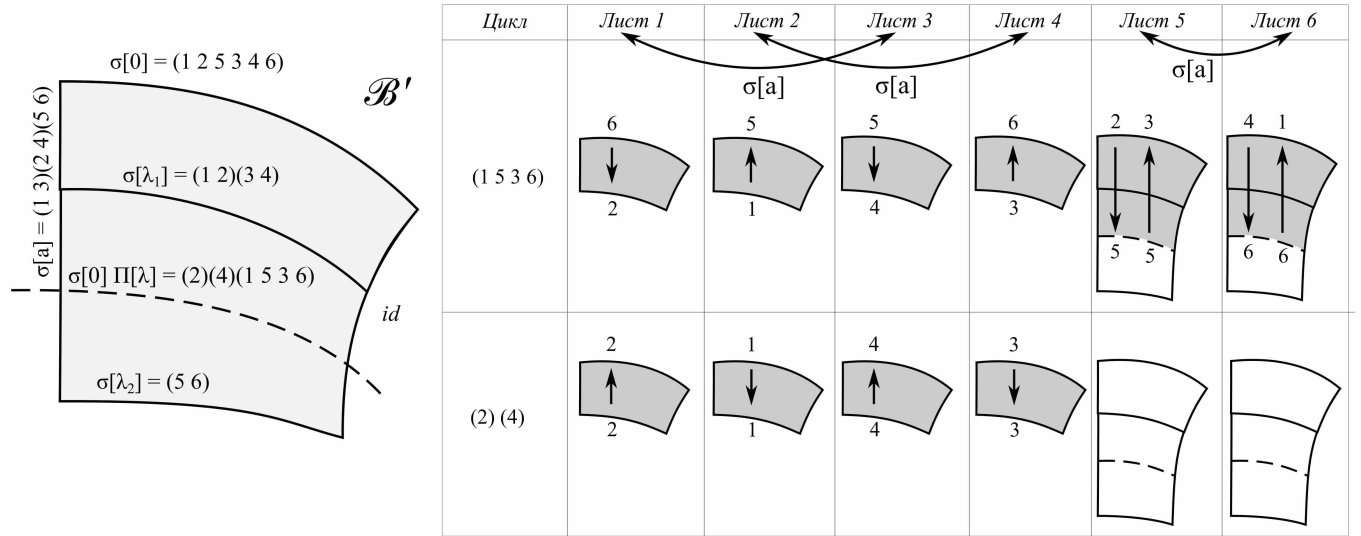


Рис. 6.11: Проекция торов Лиувилля на листы книжки \mathcal{B}' , реализующей склейку атомов B и A^* по ребру. Каждый из торов соответствует некоторому независимому циклу или паре циклов в разложении композиции $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$.

листов с перестановками:

$$\begin{aligned}\sigma[0] &= (1\ 2\ 5\ 3\ 4\ 6)(7\ 8\ 9)(10)(11\ 12\ 13)(14), \\ \sigma[\lambda_1] &= (1\ 2)(3\ 4), \sigma[\lambda_2] = (5\ 6), \sigma[\lambda_3] = (7\ 8)(9\ 10)(11\ 12)(13\ 14), \\ \sigma[a] &= (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)(7\ 11)(8\ 12)(9\ 13)(10\ 14).\end{aligned}$$

Эта книжка имеет грубую молекулу W_1 на рис. 6.2. Изменим верхнюю перестановку $\sigma[0]$ в книжке \mathcal{B} так, чтобы получилась грубая молекула W_2 . Для этого выполним действия, описанные ниже.

Рассмотрим произвольное значение λ интеграла Λ , находящееся между атомом A^* и D_2 , то есть $\lambda_2 < \lambda < \lambda_3$. Тогда $\Pi[\lambda] = \sigma[\lambda_1] \circ \sigma[\lambda_2] = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$. Значит,

$$\begin{aligned}\sigma[0] \circ \Pi[\lambda] &= (1\ 2\ 5\ 3\ 4\ 6)(7\ 8\ 9)(10)(11\ 12\ 13)(14) \circ (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6); \\ \sigma[0] \circ \Pi[\lambda] &= (1\ 5)(2)(3\ 6)(4)(7\ 8\ 9)(10)(11\ 12\ 13)(14).\end{aligned}$$

Следующие пары циклов соответствуют некоторым торам на уровне λ интеграла Λ : $(1\ 5)(3\ 6)$, $(2)(4)$, $(7\ 8\ 9)(11\ 12\ 13)$ и $(10)(14)$. Пусть выделенным (пунктирным на молекуле W_1 на рис. 6.2) ребрам соответствуют пары циклов $(1\ 5)(3\ 6)$ и $(7\ 8\ 9)(11\ 12\ 13)$. Выберем произвольные числа в каждой из пар циклов — 1 и 7. Рассмотрим также образы листов 1 и 7 относительно инволюции $\sigma[a]$ — листы $\sigma[a](1) = 3$ и $\sigma[a](7) = 11$. Тогда верхняя перестановка записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sigma''[0] &= (1\ 7)(3\ 11) \circ \sigma[0] = (1\ 7)(3\ 11) \circ (1\ 2\ 5\ 3\ 4\ 6)(7\ 8\ 9)(10)(11\ 12\ 13)(14); \\ \sigma''[0] &= (1\ 2\ 5\ 11\ 12\ 13\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9)(10)(14).\end{aligned}$$

Поменяем верхнюю границу всех листов в соответствии с новой перестановкой. Получившаяся в результате новая книжка \mathcal{B}'' имеет грубую молекулу W_2 из рис. 6.2.

Рассмотрим последний пример. В нем будет рассмотрен переход от грубой молекулы W_2 , полученной в предыдущем примере, к грубой молекуле W_3 , совпадающей с требуемой молекулой \tilde{W} (см. рис. 6.2). Здесь также воспользуемся алгоритмом 6 и склеим атом B с атомом D_2 по ребру.

Пример 6.6 (склейки атома B с атомом D_2 по ребру). Рассмотрим книжку \mathcal{B}'' из предыдущего примера с перестановками:

$$\begin{aligned}\sigma''[0] &= (1\ 2\ 5\ 11\ 12\ 13\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9)(10)(14), \\ \sigma[\lambda_1] &= (1\ 2)(3\ 4), \sigma[\lambda_2] = (5\ 6), \sigma[\lambda_3] = (7\ 8)(9\ 10)(11\ 12)(13\ 14), \\ \sigma[a] &= (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)(7\ 11)(8\ 12)(9\ 13)(10\ 14).\end{aligned}$$

Эта книжка имеет грубую молекулу W_2 на рис. 6.2. Изменим верхнюю перестановку $\sigma''[0]$ так, чтобы получилась грубая молекула W_3 . Для этого выполним действия, описанные ниже.

Рассмотрим произвольное регулярное значение λ интеграла Λ , находящееся между атомом B и D_2 , то есть $\lambda_1 < \lambda < \lambda_3$, $\lambda \neq \lambda_2$. Тогда, если $\lambda < \lambda_2$, то $\Pi[\lambda] = \sigma[\lambda_1] = (1\ 2)(3\ 4)$. Если $\lambda > \lambda_2$, то $\Pi[\lambda] = \sigma[\lambda_1] \circ \sigma[\lambda_2] = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$. Без ограничения общности будем считать, что $\lambda > \lambda_2$. Ответ от этого выбора не будет зависеть, поскольку торы, которые соответствуют пунктирным ребрам, есть в том, и в другом случае. Эти торы соответствуют тем же циклам. Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned}\sigma''[0] \circ \Pi[\lambda] &= (1\ 2\ 5\ 11\ 12\ 13\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9)(10)(14) \circ (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6); \\ \sigma''[0] \circ \Pi[\lambda] &= (1\ 5\ 7\ 8\ 9)(3\ 6\ 11\ 12\ 13)(2)(4)(10)(14).\end{aligned}$$

Следующие пары циклов соответствуют некоторым торам на уровне λ интеграла Λ : $(1\ 5\ 7\ 8\ 9)(3\ 6\ 11\ 12\ 13)$ и $(10)(14)$. Выделенным (пунктирным на молекуле W_2 на рис. 6.2) ребрам соответствуют пары циклов $(2)(4)$ и $(10)(14)$. Выберем произвольные числа в каждой из пар циклов — 2 и 14. Рассмотрим также образы листов 2 и 14 относительно инволюции $\sigma[a]$ — листы $\sigma[a](2) = 4$ и $\sigma[a](14) = 10$. Тогда верхняя перестановка записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sigma'''[0] &= (2\ 14)(4\ 10) \circ \sigma''[0] = (2\ 14)(4\ 10) \circ (1\ 2\ 5\ 11\ 12\ 13\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9)(10)(14); \\ \sigma'''[0] &= (1\ 14\ 2\ 5\ 11\ 12\ 13\ 3\ 10\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9).\end{aligned}$$

Поменяем верхнюю границу всех листов в соответствии с новой перестановкой. Получившаяся в результате новая книжка \mathcal{B}''' имеет грубую молекулу $W_3 = \tilde{W}$ из рис. 6.2.

Итак, мы получили грубую молекулу \tilde{W} последовательным применением алгоритма 6, в чем и состоит алгоритм 7 реализации любой грубой молекулы. Заметим также, что данная книжка,

вообще говоря, строится неоднозначно, поскольку номера в циклах можно выбирать произвольным образом. Однако сами циклы выбираются однозначно, поскольку они соответствуют ребрам на молекуле, которые фиксированы для заданной грубой молекулы.

Замечание 6.1. Проверим, что полученная книжка \mathcal{B}''' имеет такое же количество торов на каждом регулярном уровне, что и грубая молекула \tilde{W} . Совпадение торов является необходимым (но не достаточным) условием того, что молекула для книжки \mathcal{B}''' совпадает с \tilde{W} . Книжка \mathcal{B}''' имеет следующие перестановки:

$$\begin{aligned}\sigma''[0] &= (1\ 14\ 25\ 11\ 12\ 13\ 3\ 10\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9), \\ \sigma[\lambda_1] &= (1\ 2)(3\ 4), \sigma[\lambda_2] = (5\ 6), \sigma[\lambda_3] = (7\ 8)(9\ 10)(11\ 12)(13\ 14), \\ \sigma[a] &= (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)(7\ 11)(8\ 12)(9\ 13)(10\ 14).\end{aligned}$$

- Рассмотрим произвольный уровень λ , такой что $0 < \lambda < \lambda_1$. На этом уровне в грубой молекуле \tilde{W} есть только один тор, который находится на ребре, соединяющем атомы A и B . Вычислим разложение в независимые циклы композиции $\sigma'''[0] \circ \Pi[\lambda]$.

$$\sigma'''[0] \circ \Pi[\lambda] = \sigma'''[0] \circ id = (1\ 14\ 25\ 11\ 12\ 13\ 3\ 10\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9).$$

Получаем, что на дубле книжки \mathcal{B}''' на этом уровне есть только один тор, который соответствует циклу $(1\ 14\ 25\ 11\ 12\ 13\ 3\ 10\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9)$. Он под действием инволюции $\sigma[a]$ переходит в себя же. Это и означает, что на книжке \mathcal{B}''' на этом уровне — один тор, то есть количество торов совпадает.

- Рассмотрим произвольный уровень λ , такой что $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. На этом уровне на грубой молекуле \tilde{W} — два тора. Один находится на ребре, соединяющем атомы B и A^* , другой — на ребре, соединяющем атомы B и D_2 . Второй тор должен будет сохраниться и на уровне, находящемся между значениями λ_2 и λ_3 . Снова вычислим разложение в независимые циклы композиции $\sigma'''[0] \circ \Pi[\lambda]$.

$$\begin{aligned}\sigma'''[0] \circ \Pi[\lambda] &= \sigma'''[0] \circ \sigma[\lambda_1] = (1\ 14\ 25\ 11\ 12\ 13\ 3\ 10\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9) \circ (1\ 2)(3\ 4); \\ \sigma'''[0] \circ \Pi[\lambda] &= (1\ 5\ 11\ 12\ 13\ 3\ 6\ 7\ 8\ 9)(2\ 14)(4\ 10).\end{aligned}$$

Получаем, что на дубле книжки \mathcal{B}''' на этом уровне есть три тора, которые соответствуют циклам $(1\ 5\ 11\ 12\ 13\ 3\ 6\ 7\ 8\ 9)$, $(2\ 14)$ и $(4\ 10)$. Под действием инволюции $\sigma[a]$ цикл $(1\ 5\ 11\ 12\ 13\ 3\ 6\ 7\ 8\ 9)$ переходит в себя же, поэтому ему на книжке \mathcal{B}''' соответствует тоже один тор, а цикл $(2\ 14)$ переходит в цикл $(4\ 10)$. Значит, этой паре циклов соответствует тоже один тор. В итоге получаем в книжке \mathcal{B}''' два тора на этом уровне, что и требовалось.

- Рассмотрим произвольный уровень λ , такой что $\lambda_2 < \lambda < \lambda_3$. На этом уровне на грубой молекуле \tilde{W} — два тора. Один находится на ребре, соединяющем атомы A^* и D_2 , другой

— на ребре, соединяющем атомы B и D_2 . Второй тор должен быть таким же, как и в предыдущем случае. Разложение в независимые циклы композиции $\sigma'''[0] \circ \Pi[\lambda]$ в этом случае выглядит так.

$$\begin{aligned}\sigma'''[0] \circ \Pi[\lambda] &= \sigma'''[0] \circ \sigma[\lambda_1] \circ \sigma[\lambda_2] = (1\ 14\ 25\ 11\ 12\ 13\ 3\ 10\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9) \circ (1\ 2)(3\ 4) \circ (5\ 6); \\ \sigma'''[0] \circ \Pi[\lambda] &= (1\ 5\ 7\ 8\ 9)(3\ 6\ 11\ 12\ 13)(2\ 14)(4\ 10).\end{aligned}$$

Под действием инволюции $\sigma[a]$ цикл $(1\ 5\ 7\ 8\ 9)$ переходит в цикл $(3\ 6\ 11\ 12\ 13)$, а цикл $(2\ 14)$ переходит в цикл $(4\ 10)$. Значит в книжке \mathcal{B}''' на этом уровне есть два тора, соответствующие парам циклов $(1\ 5\ 7\ 8\ 9)(3\ 6\ 11\ 12\ 13)$ и $(2\ 14)(4\ 10)$. Пара циклов $(2\ 14)(4\ 10)$ такая же, как и в предыдущем случае. Значит, и тор, соответствующий ей, сохранился. Получили то, что требуется.

- Рассмотрим произвольный уровень λ , такой что $\lambda_3 < \lambda < a$. На этом уровне на грубой молекуле \tilde{W} — два тора, находящиеся на ребрах соединяющих атомы D_2 и A .

$$\begin{aligned}\sigma'''[0] \circ \Pi[\lambda] &= \sigma'''[0] \circ \sigma[\lambda_1] \circ \sigma[\lambda_2] \circ \sigma[\lambda_3]; \\ \sigma'''[0] \circ \Pi[\lambda] &= (1\ 14\ 25\ 11\ 12\ 13\ 3\ 10\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9) \circ (1\ 2)(3\ 4) \circ (5\ 6) \circ (7\ 8)(9\ 10)(11\ 12)(13\ 14); \\ \sigma'''[0] \circ \Pi[\lambda] &= (1\ 5\ 7\ 9\ 4\ 10)(3\ 6\ 11\ 13\ 2\ 14)(8)(12).\end{aligned}$$

Под действием инволюции $\sigma[a]$ цикл $(1\ 5\ 7\ 9\ 4\ 10)$ переходит в цикл $(3\ 6\ 11\ 13\ 2\ 14)$, а цикл (8) переходит в цикл (12) . Значит в книжке \mathcal{B}''' на этом уровне есть два тора, соответствующие парам циклов $(1\ 5\ 7\ 9\ 4\ 10)(3\ 6\ 11\ 13\ 2\ 14)$ и $(8)(12)$. Получили нужное число торов.

6.3 Доказательство теоремы реализации грубых молекул

Для доказательства теоремы 6.1 докажем, что алгоритм 7 реализации любых грубых молекул бильiardными книжками класса \mathbf{b} корректен. Разобьем доказательство на несколько лемм.

Лемма 6.3. Пусть дана бильiardная книжка \mathcal{B} класса \mathbf{a} . Построим бильiardную книжку \mathcal{B}' из \mathcal{B} заменой всех листов на листы типа B_0 с некоторым фиксированным параметром λ_1 эллипса, являющегося нижней границей. Тогда грубые молекулы, отвечающие книжкам \mathcal{B} и \mathcal{B}' , совпадают.

Доказательство. Обозначим через Q^3 и Q'^3 изоэнергетические многообразия бильiardных книжек \mathcal{B} и \mathcal{B}' соответственно. Предъявим явный гомеоморфизм $\varphi : [0, a] \rightarrow [0, a]$, такой, что уровень интеграла $\Lambda = \lambda$ будет гомеоморфен уровню $\Lambda' = \varphi(\lambda) \quad \forall \lambda \in [0, a]$, где Λ — интеграл, отвечающий параметру квадратики, определенный на Q^3 , Λ' — на Q'^3 . Этот гомеоморфизм даст грубую эквивалентность систем (Q^3, Λ) и (Q'^3, Λ') , что эквивалентно совпадению грубых молекул по теореме 2.2.

Функцию φ зададим так, чтобы отрезок $[0, b]$ переходил в отрезок $[0, \lambda_1]$, отрезок $[b, a]$ переходил в отрезок $[\lambda_1, a]$ (см. рис. 6.12). Например, такое отображение можно задать следующей кусочно-линейной функцией:

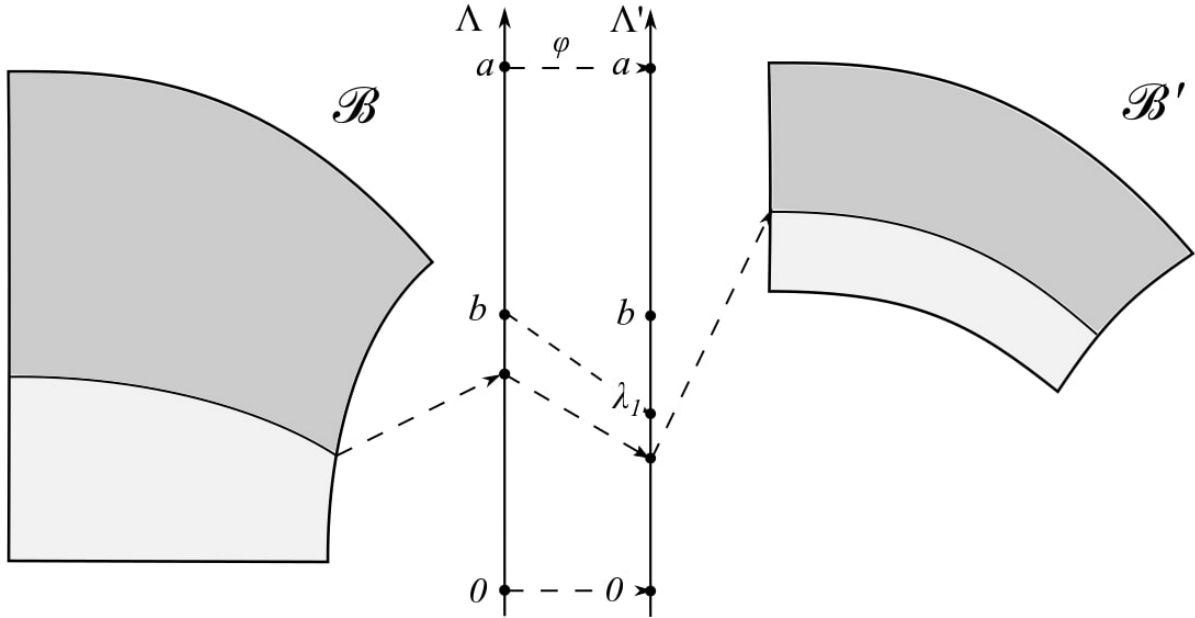


Рис. 6.12: Гомеоморфизм φ , отображающий слои изоэнергетического многообразия Q^3 в слои Q^3 .

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda_1}{b} \lambda, & \text{если } \lambda \in [0, b]; \\ \lambda_1 + \frac{a - \lambda_1}{a - b} (\lambda - b), & \text{если } \lambda \in (b, a]. \end{cases}$$

В старой бильярдной книжке \mathcal{B} уровни интеграла являются критическими при $\Lambda = 0$, $\Lambda = b$, $\Lambda = a$ (см. рис. 6.12). Они переходят в уровни $\Lambda' = 0$, $\Lambda' = \lambda_1$, $\Lambda' = a$, которые также являются критическими в новой бильярдной книжке \mathcal{B}' . Во всех случаях, отличных от критических, область возможного движения материальной точки (см. раздел 4.5) очевидно переходит в такую же область с теми же условиями склейки векторов. Критические уровни $\Lambda = 0$, $\Lambda = a$, $\Lambda' = 0$ и $\Lambda' = a$ соответствуют постепенному сжатию области возможного движения (до дуги), которое соответствует сжатию торов на окружности (атомам A). Эти слои также очевидно гомеоморфны.

Единственный нетривиальный уровень интеграла Λ — это $\Lambda = b$, отвечающий траекториям, сегменты которых лежат на прямых, содержащих хотя бы один из фокусов. Он переходит в уровень $\Lambda' = \lambda_1$, отвечающий траекториям, которые касаются эллипса с параметром λ_1 , являющегося нижней дугой границы. Рассмотрим окрестность этих уровней на каждом из листов. Изучим эти уровни интеграла с помощью метода, описанного в разделе 4.5: рассмотрим точку на бильярдной книжке и каждый из не более 4-х векторов, соответствующих возможным направ-

лениям на выбранном уровне, и изучим, как эти векторы между собой склеиваются, образуя двумерный слой.

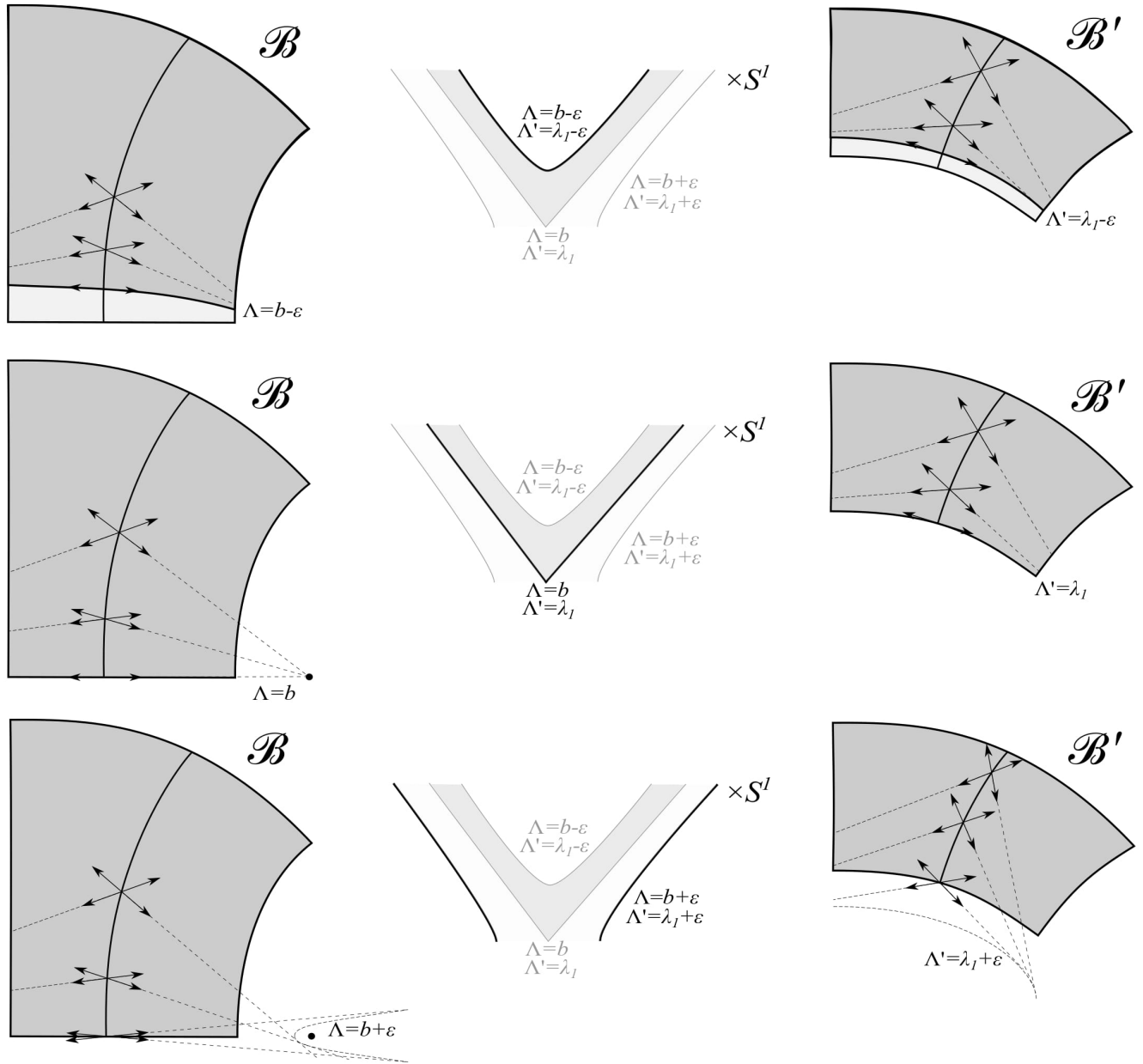


Рис. 6.13: Явный вид окрестности уровня $\Lambda = b$ в изоэнергетическом многообразии Q^3 и уровня $\Lambda' = \lambda_1$ в Q^3 .

В окрестности уровней $\Lambda = b$ и $\Lambda' = \lambda_1$ удобно рассматривать не отдельно каждую точку на листе бильярдной книжки, а семейство точек, лежащих на фиксированной гиперболе. Сравним эти семейства для произвольной гиперболы на уровнях $\Lambda = b - \varepsilon$ и $\Lambda' = \lambda_1 - \varepsilon$, $\Lambda = b$ и $\Lambda' = \lambda_1$, $\Lambda = b + \varepsilon$ и $\Lambda' = \lambda_1 + \varepsilon$. Результат представлен на рис. 6.13. На этом рисунке видно, как векторы, направленные вверх и вниз, сближаются при движении вниз по гиперболе в каждом из случаев. В случаях $\Lambda = b - \varepsilon$ и $\Lambda' = \lambda_1 - \varepsilon$, $\Lambda = b$ и $\Lambda' = \lambda_1$ векторы, достигнув интегральной

кривой (эллипса или фокальной прямой), склеиваются в один. В случаях $\Lambda = b + \varepsilon$ и $\Lambda' = \lambda_1 + \varepsilon$ эти векторы не успевают склеиться и переходят по закону отражения на другой лист. Видно, что получившиеся уровни в старой и новой книжках (на левом и правом рисунках) гомеоморфны для каждого из листов. Эти уровни изображены в центре рис. 6.13. А поскольку в новой бильярдной книжке \mathcal{B}' перестановки остались такими же, как и в старой книжке \mathcal{B} , то векторы склеиваются одинаково, и слои гомеоморфны. Лемма доказана. Более подробное доказательство можно прочесть в статье [11].

Заметим также, что в старой бильярдной книжке \mathcal{B} класса **a** нет невыпуклых склеек, а в новой книжке \mathcal{B}' класса **b** они появляются. Как уже говорилось в описании фазового пространства бильярдной книжки (см. случай 2 касания кривой границы), в окрестности невыпуклых склеек есть траектории, продолжение которых не определено в некоторых точках. В нашем случае это — траектории, которые касаются эллипса с параметром λ_1 . Но при этом эти точки определены на фазовом пространстве, а следовательно, на изоэнергетическом многообразии и слоях. Более того, все такие точки лежат на одном уровне — уровне интеграла $\Lambda' = \lambda_1$, поскольку продолжение траектории невозможно определить в момент касания эллипса с параметром λ_1 . \square

Сформулируем лемму в обозначениях алгоритма 4.

Лемма 6.4. (главная) Построенная в алгоритме 4 новая перестановка $\sigma'[0] = (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$ задает следующую топологическую перестройку грубой молекулы, содержащей два седловых атома P и Q без звездочек, построенных по алгоритму 1. А именно, исчезает ребро, соединяющее атом P с некоторым максимальным атомом A , и ребро, соединяющее атом Q с некоторым минимальным атомом A . Вместо них появляется новое ребро, соединяющее атомы P и Q (см. рис. 6.14, 6.15).

Доказательство. Напомним, что атом P находится на уровне λ_1 , атом Q на уровне λ_2 , и $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < b < a$. Рассмотрим отдельно, как преобразуется грубая молекула на *регулярных* уровнях интеграла в каждом из 3-х возможных случаев:

1. регулярный уровень интеграла $\Lambda = \lambda$, где $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, то есть уровень, находящийся между уровнями, на которых лежат атомы P и Q ;
2. регулярный уровень интеграла $\Lambda = \lambda$, где $\lambda < \lambda_1$, то есть уровень, находящийся ниже уровня, на котором лежит атом Q ;
3. регулярный уровень интеграла $\Lambda = \lambda$, где $\lambda > \lambda_2$, то есть уровень, находящийся выше уровня, на котором лежит атом P .

Регулярные уровни можно изучать в терминах перестановок, поскольку к ним применима лемма 4.5. Схематически изменение слоев представлено на рис. 6.14, 6.15.

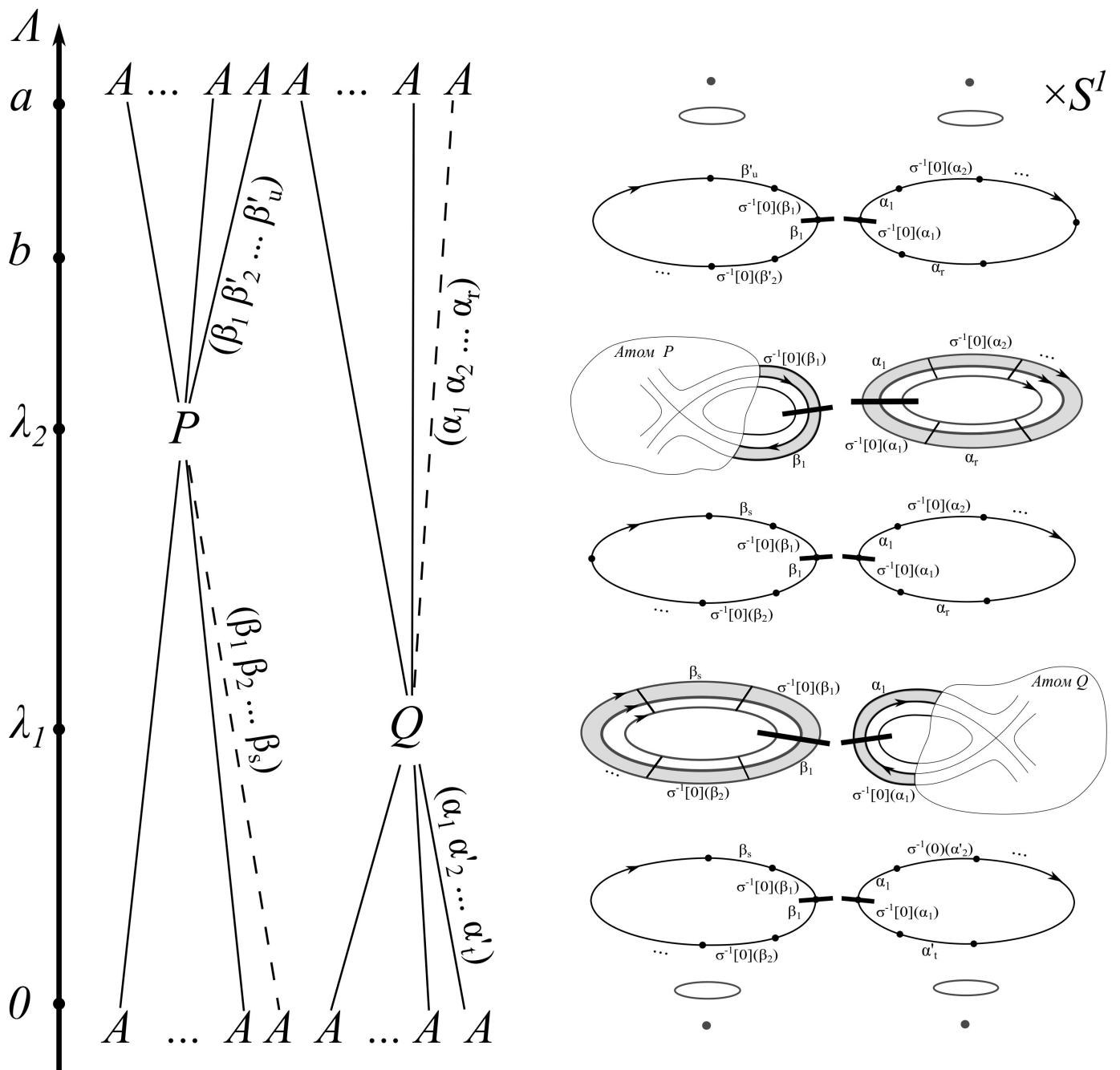


Рис. 6.14: Описание слоев старой бильярдной книжки \mathcal{B} с верхней перестановкой $\sigma[0]$.

Рассмотрим первый случай, соответствующий регулярному уровню интеграла $\Lambda = \lambda$, где $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Согласно лемме 4.5 в новой бильярдной книжке \mathcal{B}' на этом уровне есть взаимно-однозначное соответствие между двумерными торами Лиувилля и независимыми циклами в разложении композиции $\sigma'[0] \circ \Pi'[\lambda]$, где $\Pi'[\lambda]$ — перестановка уровня из опр. 4.5 в новой бильярдной книжке \mathcal{B}' . Заметим, что в новой книжке \mathcal{B}' поменялась только перестановка $\sigma[0]$. Значит, перестановка уровня $\Pi'[\lambda]$ в новой бильярдной книжке \mathcal{B}' совпадает с перестановкой уровня $\Pi[\lambda]$ в старой бильярдной книжке \mathcal{B} . Из этого следует, что $\sigma'[0] \circ \Pi'[\lambda] = (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$.

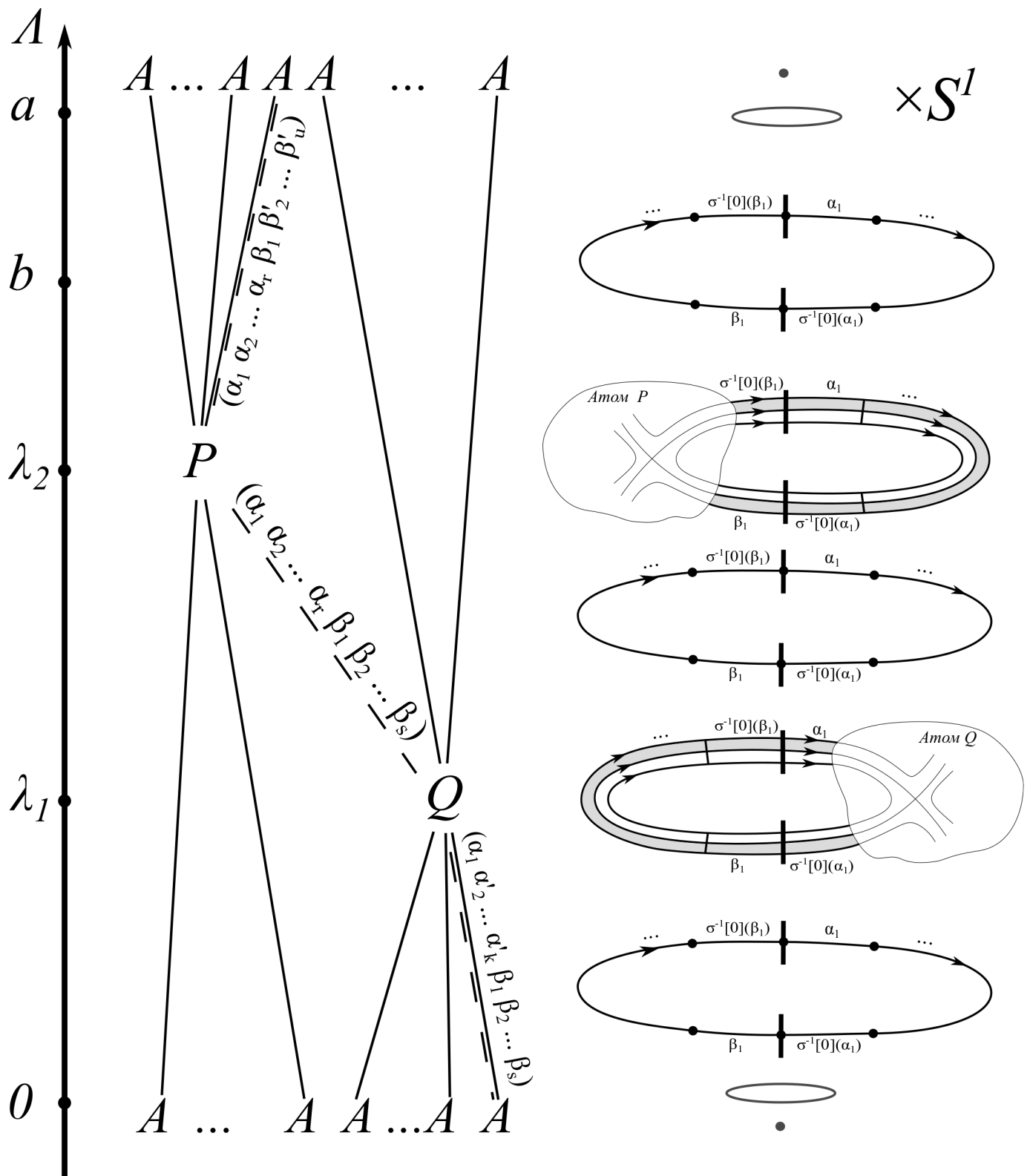


Рис. 6.15: Описание слоев новой бильярдной книжки \mathcal{B}' с верхней перестановкой $\sigma'[0] = (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$.

Заметим, что в старой бильярдной книжке \mathcal{B} тоже есть взаимно-однозначное соответствие между торами Лиувилля на уровне интеграла $\Lambda = \lambda$ и независимыми циклами в разложении перестановки $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$. Изучим изменение уровня при переходе от старой книжки к новой, изучая, как меняются циклы в разложении композиции при замене перестановки $\sigma[0]$ на $\sigma'[0]$.

Рассмотрим циклы $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r)$ и $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s)$ в разложении композиции $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$ в произведение независимых циклов. Этим циклам соответствуют ребра (торы) в старой грубой молекуле, обозначенные пунктиром на рис. 6.14. Они соединяют атом Q с некоторым максимальным атомом A и атом P с некоторым минимальным атомом A соответственно. Эти ребра мы собирались клеить на шаге 4 алгоритма 4. Итак, перестановку $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$ можно представить в виде композиции

$$\sigma[0] \circ \Pi[\lambda] = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r) \circ (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s) \circ S_1,$$

где S_1 — произведение оставшихся независимых циклов, и $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Тогда

$$\sigma'[0] \circ \Pi'[\lambda] = (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0] \circ \Pi[\lambda] = (\alpha_1 \beta_1) \circ (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r) \circ (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s) \circ S_1;$$

$$\sigma'[0] \circ \Pi'[\lambda] = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r \beta_1 \beta_2 \dots \beta_s) \circ S_1.$$

Как мы видим, на этом уровне интеграла два тора, соответствующие циклам $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r)$ и $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s)$, склеились в один, соответствующий циклу $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r \beta_1 \beta_2 \dots \beta_s)$. Тор стал более “длинным”, поскольку два тора разрезались по циклу, и полученные цилиндры склеились. Значит, в грубой молекуле на этом уровне исчезнут два пунктирных ребра, соединяющие атом P с атомом A минимума и атом Q с атомом A максимума, и появится новое пунктирное ребро (см. рис. 6.15). Чтобы изучить, какие атомы оно соединяет, нужно изучить окрестность критических уровней. Это мы сделаем позже. Все остальные ребра на этом уровне изменение перестановки $\sigma[0]$ не затронет.

Рассмотрим второй случай, который соответствует уровню, находящемуся ниже уровня, на котором лежит атом Q . Здесь, как и в предыдущем случае, поскольку уровень не критический, изменение уровня можно описать в терминах перестановок. В грубой молекуле старой бильярдной книжки \mathcal{B} рассматриваемое пунктирное ребро, которое соединено с атомом P , соединяется с другой стороны с атомом A минимума. Значит, тор, соответствующий этому ребру, не перестраивается ни через какой критический уровень, находящийся ниже уровня атома P . Поэтому в разложении перестановки $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$ в произведение независимых циклов, где $\lambda < \lambda_1$, есть цикл $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s)$, такой же, как и на уровне между λ_1 и λ_2 . Кроме того, в этом разложении есть некоторый цикл, который содержит число α_1 . Пусть этим циклом является цикл $(\alpha_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_t)$, где $\alpha'_2, \dots, \alpha'_t$ — оставшиеся элементы этого цикла. Итак, перестановку $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$ можно представить в виде композиции

$$\sigma[0] \circ \Pi[\lambda] = (\alpha_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_t) \circ (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s) \circ S_2,$$

где S_2 — произведение оставшихся независимых циклов, и $\lambda < \lambda_1$. Тогда

$$\begin{aligned}\sigma'[0] \circ \Pi'[\lambda] &= (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0] \circ \Pi[\lambda] = (\alpha_1 \beta_1) \circ (\alpha_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_t) \circ (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s) \circ S_2; \\ \sigma'[0] \circ \Pi'[\lambda] &= (\alpha_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_t \beta_1 \beta_2 \dots \beta_s) \circ S_2.\end{aligned}$$

То есть тор, который отвечал ребру соединяющему атом P с атомом A минимума, на этом уровне приклеился к уже существующему тору. Значит, в грубой молекуле на этом уровне исчезнет пунктирное ребро, соединяющее атом P с атомом A минимума (то же самое ребро, что и то, которое мы рассматривали для уровня λ , т.ч. $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$). Все остальные ребра на этом уровне изменение перестановки $\sigma[0]$ не затронет (см. рис. 6.14, 6.15).

Третий случай аналогичен второму. Здесь останется неизменным цикл $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r)$, но найдется какой-то другой цикл, содержащий номер β_1 . Пусть этим циклом является цикл $(\beta_1 \beta'_2 \dots \beta'_u)$, где $\beta'_2, \dots, \beta'_u$ — оставшиеся элементы этого цикла. Снова перестановку $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$ представим в виде композиции

$$\sigma[0] \circ \Pi[\lambda] = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r) \circ (\beta_1 \beta'_2 \dots \beta'_u) \circ S_3,$$

где S_3 — произведение оставшихся независимых циклов, и $\lambda > \lambda_2$. Тогда исчезновение ребра происходит в результате объединения двух циклов $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r)$ и $(\beta_1 \beta'_2 \dots \beta'_u)$. В результате получается следующая перестановка

$$\begin{aligned}\sigma'[0] \circ \Pi'[\lambda] &= (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0] \circ \Pi[\lambda] = (\alpha_1 \beta_1) \circ (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r) \circ (\beta_1 \beta'_2 \dots \beta'_u) \circ S_3; \\ \sigma'[0] \circ \Pi'[\lambda] &= (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r \beta_1 \beta'_2 \dots \beta'_u) \circ S_3.\end{aligned}$$

Из получившегося разложения следует, что в грубой молекуле на этом уровне исчезнет пунктирное ребро, соединяющее атом Q с атомом A максимума. Все остальные ребра на этом уровне не изменятся (см. рис. 6.14, 6.15).

Теперь рассмотрим, как преобразуется грубая молекула на *критических* уровнях интеграла в каждом из 3-х возможных случаев:

1. критический уровень интеграла $\Lambda = \lambda_1$, такой, на котором лежит атом Q ;
2. критический уровень интеграла $\Lambda = \lambda_2$, такой, на котором лежит атом P ;
3. критические уровни $\Lambda = 0$ и $\Lambda = a$, на которых лежат атомы A минимума и максимума.

Исследуем первый случай, соответствующий критическому уровню интеграла $\Lambda = \lambda_1$. В старой бильярдной книжке \mathcal{B} близкие к нему регулярные уровни $\Lambda = \lambda_1 - \varepsilon$ и $\Lambda = \lambda_1 + \varepsilon$ содержали тор, соответствующий циклу $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s)$, лежащий на “регулярном” пунктирном ребре, не содержащем перестроек на уровне $\Lambda = \lambda_1$. То есть по непрерывности на этом ребре тоже расположен регулярный тор. Покажем, как этот регулярный тор приклеится к критическому уровню атома Q . В результате атом Q не изменится, а выбранный регулярный тор исчезнет.

Рассмотрим любую билиардную траекторию на этом торе. Согласно лемме 4.5, числа в цикле $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s)$ соответствуют номерам листов, по которым эта траектория идет вниз на билиардной книжке \mathcal{B} . А именно, траектория идет вниз по листу β_1 , потом вверх по листу $\Pi[\lambda](\beta_1)$, вниз по листу β_2 , вверх по $\Pi[\lambda](\beta_2)$ и т.д. С листа $\Pi[\lambda](\beta_s)$ траектория перейдет снова на лист β_1 и будет идти по нему вниз на билиардной книжке \mathcal{B} .

Если переопределить перестановку $\sigma'[0] = (\alpha_1, \beta_1) \circ \sigma[0]$ на верхней границе, то траектория после удара от верхней границы перейдет с листа $\sigma^{-1}(0)(\beta_1)$ на лист α_1 вместо β_1 , а с листа $\sigma^{-1}(0)(\alpha_1)$ — на лист β_1 вместо α_1 . То есть, если рассмотреть окрестность уровня $\Lambda = \lambda_1$, то он преобразуется, как показано на рис. 6.14, 6.15. Видим, что на критическом уровне $\Lambda = \lambda_1$ при изменении перестановки $\sigma[0]$ на $\sigma'[0] = (\alpha_1, \beta_1) \circ \sigma[0]$ связная компонента тора, отвечающая циклу $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s)$, приклеивается к другой связной компоненте, содержащей движение вниз по листу α_1 . Эта связная компонента отвечает атому Q , поскольку тор, соответствующий циклу $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r)$ и содержащий движение вниз по листу α_1 , перестраивается на этом уровне через атом Q . Приклейка тора удлиняет “ленту” на атоме Q , поэтому атом Q не изменится.

Опишем эту операцию на языке двумерных атомов. Атом Q является двумерной поверхностью, состоящей из “координатных крестов” и, соединяющих их концы, двумерных “лент”. Взятый нами регулярный тор на уровне $\Lambda = \lambda_1$ изображается двумерным кольцом. Мы разрезаем это кольцо и получаем “прямоугольник”. Далее, мы разрезаем одну из лент 2-атома Q и вклеиваем в атом Q “прямоугольник”, соединяя его концы с границами разреза, сделанными на атоме Q . В результате, атом Q , очевидно, не изменился (заменился на гомеоморфный), а выбранный выше регулярный тор исчез.

Обратим внимание, что мы пока не доказали, что новый тор на регулярном уровне $\lambda_1 < \Lambda < \lambda_2$ пунктирного ребра инцидентен атому Q на критическом уровне $\Lambda = \lambda_1$. Докажем этот факт. Выше мы доказали, что регулярный тор, отвечающий циклу $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s)$ и находившийся на критическом уровне $\Lambda = \lambda_1$, приклеился к атому Q . Кроме того старое пунктирное ребро, которое соответствовало циклу $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r)$, инцидентно атому Q . Отсюда вытекает, что новое пунктирное ребро, склеенное из двух пунктирных ребер, которые отвечали циклам $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r)$ и $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s)$, также инцидентно атому Q (см. рис. 6.14, 6.15).

Второй случай аналогичен первому. Только теперь тор, соответствующий циклу $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s)$, приклеивается к атому P . Это также дает, что новое пунктирное ребро, отвечающее тору на регулярном уровне $\lambda_1 < \Lambda < \lambda_2$, инцидентно атому P на критическом уровне $\Lambda = \lambda_2$.

Рассмотрим третий случай. Атомы A описывают стягивание торов на окружность с повышением или понижением уровня интеграла. Поэтому по непрерывности получаем, что склеивание двух торов в один при приближении к критическому уровню соответствует склейке двух критических окружностей в одну (см. рис. 6.14, 6.15).

Итак, как мы видим, в каждом из указанных случаев изменение слоев интеграла Λ при замене перестановки $\sigma[0]$ на $\sigma'[0] = (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$ отражает необходимую нам склейку двух атомов

по ребру, описанную в формулировке леммы 6.4. Главная лемма 6.4 доказана. \square

Сформулируем лемму в обозначениях алгоритма 6.

Лемма 6.5. *Построенная в алгоритме 6 новая перестановка $\sigma'[0] = (\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1) \circ (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$ задает следующую топологическую перестройку грубой молекулы, содержащей любые два седловых атома P и Q (со звездочками или без), реализованных с помощью книжек класса \mathbf{a} по общему алгоритму 5. А именно, исчезает ребро, соединяющее атом P с некоторым максимальным атомом A , и ребро, соединяющее атом Q с некоторым минимальным атомом A . В новой грубой молекуле вместо них появляется новое ребро, соединяющее атомы P и Q (рисунок аналогичен рис. 6.14, 6.15).*

Доказательство. Бильярдная книжка \mathcal{B} , рассматриваемая в этой лемме, отличается от книжки в предыдущей лемме 6.4 тем, что ранее перестановка $\sigma[a]$ слева была тождественной, а теперь она является инволюцией, которая не содержит элементов переходящих в себя же. Эта инволюция задает симметрию на листах книжки и на слоях интеграла Λ на изоэнергетическом многообразии Q^3 . Если положить левую перестановку $\sigma[a]$ тождественной, то получится “дубль-книжка” $\hat{\mathcal{B}}$, в которой все слои будут дублями для слоев, соответствующих книжке \mathcal{B} . Это вытекает из построения бильярдной книжки \mathcal{B} . Для “дубль-книжки” $\hat{\mathcal{B}}$ можно применить лемму 6.4. Это означает, что слои в дубль-книжке изменяются по правилу, описанному в этой лемме 6.4. Поэтому, чтобы изучить, как меняются слои в бильярдной книжке \mathcal{B} , мы перейдем к слоям в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$, посмотрим, как меняются слои в ней, и перейдем обратно к слоям в книжке \mathcal{B} .

Опишем подробнее, как преобразуются слои при переходе от книжки \mathcal{B} к “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$ и обратно. Этот процесс уже описан в п. 2 в разделе 2.5 “конструкция 3-атомов”. Опишем его аналог для книжек \mathcal{B} и $\hat{\mathcal{B}}$. Итак, при переходе от бильярдной книжки \mathcal{B} к “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$ слой становится тривиальным расслоением $X \times S^1$ со слоем окружность S^1 . На базе X этого расслоения можно ввести инволюцию τ , соответствующую инволюции $\sigma[a]$ на листах книжки. Этот слой вместе с инволюцией τ является дублем для слоя книжки \mathcal{B} . Это означает, что, если проделать следующие операции, то получится слой в исходной книжке \mathcal{B} . Рассмотрим цилиндр $X \times [0, 2\pi]$ и склеим его основания по инволюции τ , отождествляя точки $(x, 2\pi)$ и $(\tau(x), 0)$ для каждого $x \in X$. Получаем некоторый двумерный слой, который является слоем в исходной книжке \mathcal{B} . Для торов дублем может быть один или два тора с инволюцией τ , переводящей тор в себя же или один тор в другой соответственно (см. замечание 2.6 о возможных дублях двумерных торов). Для критических уровней интеграла Λ рассматривается их окрестность — атомы. Дублем для атома является некоторый атом без звездочек с инволюцией τ на нем (см. примеры дублей в разделе 2.6 “конструирование дублей для атомов”).

Рассмотрим слои в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$ по аналогии с предыдущей леммой 6.4. Во всех случаях числа α_1, β_1 выбирались так же, как и в алгоритме 4 склейки двух 3-атомов без звездочек по

ребру. Поэтому они так же, как и в предыдущей лемме 6.4, соответствуют номерам листов, по которым траектории, принадлежащие выбранным тора, идут вниз на бильярдной книжке. Значит, эти траектории отразились от верхней границы и перешли по перестановке $\sigma[0]$ на листы α_1, β_1 с листов $\sigma^{-1}(0)(\alpha_1), \sigma^{-1}(0)(\beta_1)$ соответственно. В окрестности листов с номерами $\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1$ происходит то же самое.

Изучим детальнее переклейки регулярных слоев при замене перестановки $\sigma[0]$ на $\sigma'[0] = (\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1) \circ (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$. Ранее в лемме 6.4 на регулярных уровнях два тора склеивались в один. Теперь тору на регулярном уровне интеграла Λ бильярдной книжки \mathcal{B} может соответствовать как один, так и два тора на этом же уровне в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$. Поэтому при склейке двух торов в бильярдной книжке \mathcal{B} возникает три случая, изображенных на рис. 6.16:

1. каждому из торов, которые должны быть склеены, соответствует два тора на этом же уровне интеграла Λ в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$;
2. одному из тех торов, что должны быть склеены, соответствует два тора на этом же уровне интеграла Λ в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$, другому — один;
3. каждому из торов, которые должны быть склеены, соответствует один тор на этом же уровне интеграла Λ в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$.

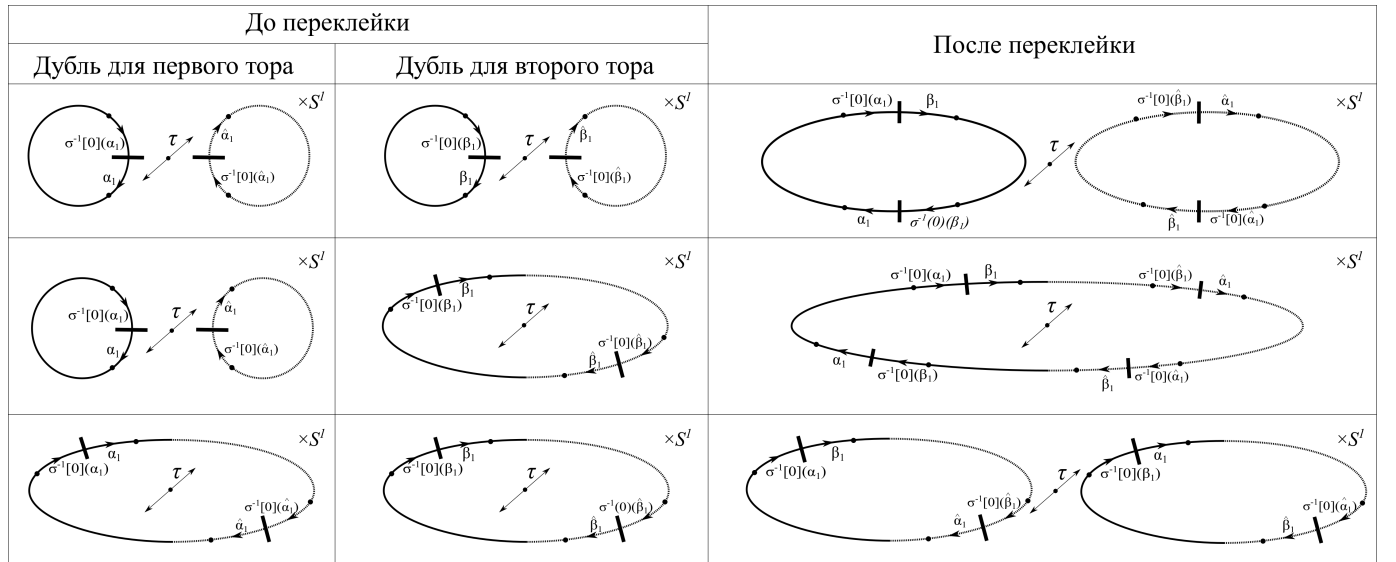


Рис. 6.16: Описание переклейки регулярных слоев бильярдной книжки $\hat{\mathcal{B}}$ при замене верхней перестановки $\sigma[0]$ на перестановку $\sigma'[0] = (\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1) \circ (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$. Инволюция τ на дублях условно в целях наглядности представлена как центральная симметрия.

Инволюция τ на рис. 6.16 условно в целях наглядности представлена как центральная симметрия. При этом надо иметь ввиду, что на самих слоях она не обязана быть центральной симметрией. Поскольку новая перестановка $\sigma'[0]$ является произведением старой $\sigma[0]$ на две

транспозиции $(\alpha_1 \beta_1)$ и $(\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1)$, а не одну, как ранее, то теперь в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$ будет две переклейки, а не одна. Как видно из рис. 6.16, после этих переклеек получается слой, который инволюция τ снова уважает. Кроме того, во всех случаях получившийся слой и инволюция τ являются дублем для нового тора в новой бильярдной книжке \mathcal{B}' . То есть, если надстроить над получившимся дублем цилиндр и склеить его основания по инволюции τ , получится ровно один новый тор вместо двух старых.

Аналогично можно рассмотреть переклейку критического уровня $\Lambda = \lambda_1$, на котором находится атом Q . Напомним, что 2-атомы состоят из крестов и “лент”, соединяющих их концы (см. теорему 2.3). Трехмерные атомы без звездочек являются тривиальным расслоением над двумерными атомами со слоем окружность. Поэтому они тоже могут быть представлены в виде крестов и “лент”, умноженных на окружность. Для краткости в трехмерных атомах без звездочек мы также будем говорить в терминах крестов и “лент” без упоминания того, что они умножены на окружность.

Ранее в лемме 6.4 регулярный тор приклеивался к атому Q , удлиняя “ленту” на атоме. Благодаря этому тор на критическом уровне исчезал, а атом Q не менялся. Теперь регулярному тору в бильярдной книжке \mathcal{B} может соответствовать один или два тора в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$, а на месте атома Q возникает его дубль \hat{Q} . При этом неизвестно, какой из многих вариантов дублей для фиксированного атома Q возникнет в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$. После двух переклеек слоя в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$, соответствующих замене перестановки $\sigma[0]$ на $\sigma'[0]$, дубль \hat{Q} атома Q может даже замениться на другой дубль. Важно, что при этом получится дубль, отвечающий тому же самому атому Q (напомним, что одному атому могут отвечать разные дубли). Итак, есть два варианта переклейки, изображенных на рис. 6.17:

1. регулярному тору, который должен быть приклеен к атому Q , соответствуют два тора на этом же уровне интеграла Λ в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$;
2. регулярному тору, который должен быть приклеен к атому Q , соответствует один тор на этом же уровне интеграла Λ в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$.

Заметим, что на рис. 6.17 дубль \hat{Q} атома Q представлен схематически и только в окрестности листов с номерами $\alpha_1, \hat{\alpha}_1$. Эта окрестность на дубле \hat{Q} выделена толстыми линиями. Остальная часть дубля \hat{Q} может быть склеена между собой как угодно. В частности, компоненты, отвечающие окрестности листа α_1 и окрестности листа $\hat{\alpha}_1$, могут быть соединены “лентами”. При переклейке дубли меняются только в окрестности этих листов. То есть операция локальна, и остальная часть дубля останется неизменной. Поэтому достаточно проследить только за изменением этой окрестности.

Из рис. 6.17 видно, что в первом случае так же, как и в лемме 6.4, на уровне интеграла Λ “дубль-книжки” $\hat{\mathcal{B}}$ регулярные торы клеиваются в дубль \hat{Q} . При этом оба регулярных тора исчезают, а “ленты” на дубле \hat{Q} удлиняются, заменяя дубль на ему гомеоморфный. Из этого

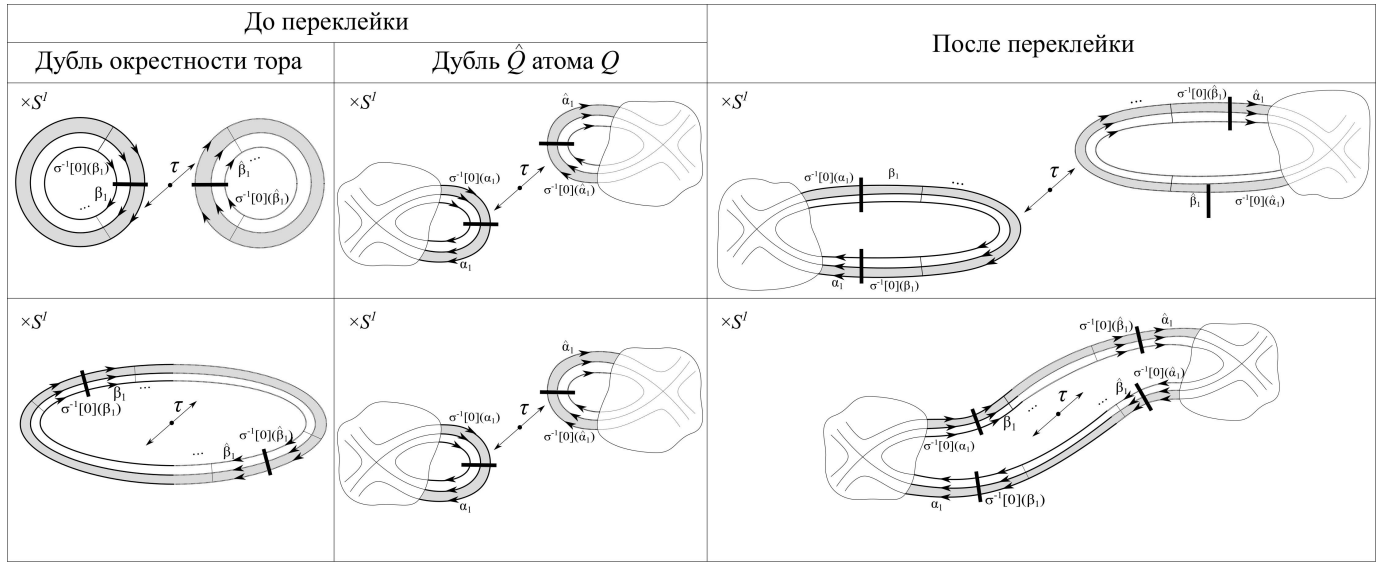


Рис. 6.17: Описание переклейки критического уровня $\Lambda = \lambda_1$ билиардной книжки $\hat{\mathcal{B}}$ при замене верхней перестановки $\sigma[0]$ на перестановку $\sigma'[0] = (\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1) \circ (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$. Инволюция τ на дублях условно в целях наглядности представлена как центральная симметрия.

получается, что в новой билиардной книжке \mathcal{B}' атом Q останется тем же, а регулярный тор исчезнет.

Во втором случае дубль меняется. Изменение представлено на рис. 6.17. В этом случае “ленты” на дубле \hat{Q} не только удлиняются, но и переклеиваются. При этом две несвязные компоненты могут объединиться, или наоборот, связная компонента может распасться. Но заметим, что если надстроить над получившимся дублем цилиндр и склеить его основания по инволюции τ , то получится тот же атом Q , что и раньше. В окрестности листов $\alpha_1, \hat{\alpha}_1$ этот факт виден из рис. 6.17, а в оставшейся части дубля ничего не менялось.

Итак, как мы видим, в обоих случаях регулярный тор на критическом уровне $\Lambda = \lambda_1$ исчез, а атом Q заменился на гомеоморфный. Критический уровень $\Lambda = \lambda_2$, на котором лежит атом P , преобразуется аналогично.

Осталось рассмотреть критические уровни $\Lambda = 0$ и $\Lambda = a$, на которых лежат атомы A минимума и максимума соответственно. Атомы A описывают стягивание торов на окружность с повышением или понижением уровня интеграла. Поэтому по непрерывности получаем, что склеивание двух торов в один при приближении к критическому уровню соответствует склейке двух 3-атомов A в один.

Таким образом, получаем, что в билиардной книжке \mathcal{B} при замене перестановки $\sigma[0]$ на перестановку $\sigma'[0] = (\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1) \circ (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$ на слоях произойдут следующие изменения: на регулярных уровнях интеграла Λ два тора склеятся в один, на критических $\Lambda = \lambda_1$ и $\Lambda = \lambda_2$ регулярный тор приклеится к соответствующему атому. Конкретный выбор торов, которые будут склеены, такой же, как и в предыдущей лемме 6.4. Значит, грубая молекула билиардной

книжки \mathcal{B} изменится так же, как и в предыдущей лемме (см. рис. 6.14, 6.15). Лемма 6.5 доказана. \square

Лемма 6.6. Пусть дана бильiardная книжка \mathcal{B} на любом этапе алгоритма 7 реализации грубой молекулы. Выберем на грубой молекуле этой бильiardной книжки пару ребер: одно ребро соединяет произвольный седловой атом Q с некоторым максимальным атомом A , другое — произвольный седловой атом P с некоторым минимальным атомом A , причем $\tilde{\Lambda}(Q) < \tilde{\Lambda}(P)$. Тогда после выполнения шагов 3-6 алгоритма 6 склейки двух произвольных седловых атомов по выбранным ребрам получится новая бильiardная книжка \mathcal{B}' . При переходе к новой грубой молекуле эта пара ребер исходной грубой молекулы склеится. В результате исчезнут эти выбранные ребра и появится новое, соединяющее атомы P и Q на новой грубой молекуле. Описанная операция локальна, то есть оставшаяся часть исходной грубой молекулы изменения не затронут.

Доказательство. Рассмотрим, как меняются уровни интеграла $\Lambda = \lambda$, где $0 < \lambda < \tilde{\Lambda}(P)$. Эти уровни находятся ниже атома P . Поскольку грубая молекула бильiardной книжки \mathcal{B} может содержать более, чем два седловых атома, то среди этих уровней может встретиться любое число критических. Поэтому на этих слоях сфокусируемся на регулярном торе, который соответствует выбранному ребру, соединяющему атом P с минимальным атомом A . Изучим, как этот регулярный тор приклеивается к другим компонентам уровня интеграла $\Lambda = \lambda$.

Здесь, как и в предыдущей лемме 6.5, перейдем к слоям в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$, посмотрим, как меняются слои в ней, и перейдем обратно к слоям в книжке \mathcal{B} . Напомним, что “дубль-книжка” $\hat{\mathcal{B}}$ получается из книжки \mathcal{B} заменой перестановки слева на тождественную. При этом все слои на уровне интеграла Λ упрощаются до тривиального расслоения $X \times S^1$ со слоем окружность S^1 над базой X , которая является дублем для соответствующих слоев книжки \mathcal{B} .

Итак, этому выделенному регулярному тору на слоях книжки \mathcal{B} соответствует один или два тора на слоях “дубль-книжки” $\hat{\mathcal{B}}$. Эти один или два тора приклеются к некоторой компоненте \hat{C} уровня интеграла $\Lambda = \lambda$ независимо от того, является ли этот уровень критическим или нет. Эта компонента может быть дублем для некоторого атома или тора. Изображение этой переклейки аналогично показанному выше на рис. 6.17. Отличие состоит в том, что ранее регулярный тор приклеивался к дублю \hat{Q} атома Q , а теперь здесь на месте дубля \hat{Q} — некоторая компонента \hat{C} уровня интеграла Λ . Но из аналога этого рисунка также следует, что в окрестности уровня интеграла $\Lambda = \lambda$ выбранные один или два тора исчезнут, а компонента уровня \hat{C} заменится на компоненту \hat{C}' . Получившаяся компонента уровня \hat{C}' может отличаться от старой компоненты \hat{C} . Однако, если над компонентами \hat{C} и \hat{C}' надстроить цилиндр и склеить его основания по инволюции τ , то для компонент \hat{C} и \hat{C}' получится одно и то же. Таким образом, на уровне интеграла $\Lambda = \lambda$ в книжке \mathcal{B} выделенный регулярный тор исчезнет, а оставшиеся слои не изменятся (заменяются на гомеоморфные). Иными словами, в старой грубой молекуле выделенное ребро, соединяющее атом P с минимальным атомом A , исчезнет, а оставшаяся часть грубой молекулы

не изменится.

Точно также на уровнях интеграла $\Lambda = \lambda$, где $\tilde{\Lambda}(Q) < \lambda < a$ в старой грубой молекуле выделенное ребро, соединяющее атом Q с максимальным атомом A , исчезнет, а оставшаяся часть грубой молекулы не изменится.

Посередине, на уровнях интеграла $\Lambda = \lambda$, где $\tilde{\Lambda}(Q) < \lambda < \tilde{\Lambda}(P)$ два регулярных тора, соответствующие выбранным ребрам, склеятся друг с другом и образуют новый регулярный тор, который соответствует новому ребру, соединяющему атомы P и Q .

Еще раз обратим внимание на то, что эта операция локальна. Это вытекает из того, что на каждом уровне склеиваются только две конкретные связные компоненты уровня между собой. Какие именно компоненты склеиваются зависит от выбора чисел α_1 и β_1 при замене верхней перестановки $\sigma[0]$ на $\sigma'[0] = (\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1) \circ (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$. Склеиваются именно те связные компоненты уровня, на которых эти числа соответствуют номерам листов, по которым траектория бильярда идет вниз. Это происходит из-за того, что ранее, при ударе от верхней границы, траектории переходили с листа $\sigma^{-1}(0)(\alpha_1)$ на лист α_1 , с листа $\sigma^{-1}(0)(\beta_1)$ на лист β_1 . А теперь, если переопределить верхнюю перестановку $\sigma[0]$ на $\sigma'[0] = (\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1) \circ (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$, траектории бильярда при ударе от верхней границы станут переходить с листа $\sigma^{-1}(0)(\alpha_1)$ на лист β_1 , а с листа $\sigma^{-1}(0)(\beta_1)$ на лист α_1 . Для листов $\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1$ верно тоже самое. Это и означает склейку соответствующих двух связных компонент уровня. На фиксированном уровне интеграла нет других таких связных компонент, на которых эти числа соответствуют номерам листов, по которым траектория бильярда идет вниз. Тем самым мы доказали, что склейка описанных выше двух компонент на каждом из уровней означает требуемое локальное изменение грубой молекулы. \square

Доказательство теоремы 6.1. Заметим, что описанные выше алгоритмы 4, 6, 7 и леммы 6.3-6.6 доказывают теорему 6.1. А именно, алгоритм 4 позволяет склеивать два седловых атома без звездочек по ребру. Его корректность доказана в леммах 6.3 и 6.4. Алгоритм 6 позволяет склеивать уже два произвольных седловых атома (со звездочками или без) по ребру. Он является обобщением алгоритма 4. Его корректность доказана в лемме 6.5. Последний алгоритм 7 позволяет реализовывать любую грубую молекулу с помощью бильярдов. Алгоритм моделирует все встречающиеся в грубой молекуле седловые атомы. А затем мы последовательно применяем алгоритм 6. Каждое применение алгоритма 6 соединяет ребром два произвольных ранее выбранных атома по ребру. Лемма 6.6 показывает, что эта склейка локальна, и доказывает корректность алгоритма 7. В результате алгоритма 7 мы получаем бильярдную книжку, реализующую наперед заданную произвольную грубую молекулу. Это и доказывает теорему 6.1. \square

Заключение

Диссертация посвящена реализации атомов и грубых молекул с помощью бильярдных книжек и подтверждает справедливость первых двух пунктов гипотезы Фоменко о бильярдах, а также содержит следующие вспомогательные результаты.

Сформулировано ограничение на перестановки в бильярдном комплексе, являющееся критерием для корректного задания бильярдной книжки, то есть движения на бильярдном комплексе.

Доказано, что фазовое пространство и изоэнергетическое многообразие (на положительном уровне энергии) бильярдных книжек являются кусочно-гладкими топологическими четырехмерными и трехмерными многообразиями соответственно.

Сформулировано обобщение инвариантов Фоменко-Цишанга на случай кусочно-гладких динамических систем, которыми являются бильярдные книжки.

Выделены классы **a** и **b** бильярдных книжек. Для этих классов доказана серия лемм: лемма о конструировании бильярдной книжки класса **a** по трем перестановкам, лемма о конструировании бильярдной книжки класса **b** по набору перестановок, кусочно-гладкий аналог теоремы Лиувилля для бильярдных книжек классов **a** и **b**.

Сформулированы алгоритмы реализации произвольного атома без звездочек и реализации произвольного атома со звездочками. Алгоритмы дополнены примерами и доказана их корректность. Также вычислена грубая молекула для бильярдных книжек, построенных по этим алгоритмам и дана их упрощенная переформулировка в терминах f -графов.

В рамках реализации грубых молекул бильярдными книжками сформулированы следующие алгоритмы.

- Алгоритм склейки двух произвольных атомов без звездочек по ребру.
- Общий алгоритм моделирования 3-атомов, который обобщает алгоритмы реализации атомов со звездочками и без и приводит книжки, моделирующие 3-атомы, к единому виду.
- Алгоритм склейки по ребру двух произвольных атомов, со звездочками или без.
- Алгоритм реализации любой грубой молекулы.

Перечисленные алгоритмы снабжены примерами и доказана их корректность.

Полученные в диссертации результаты можно развивать в следующих направлениях.

Было замечено, что в бильярдных книжках класса **a** встречаются неботтовские бифуркации, в которых при одной вершине склеены не по два полукреста, а три и более. Такие бифуркации получаются склейкой по нижней границе соответствующего количества листов. Принципы конструирования неботтовских бифуркаций остаются теми же, что и в случае боттовских атомов, но здесь появляется более сложное слоение Зейферта, которое влечет трудности в нахождении требуемых перестановок. Кроме того, получившиеся перестановки должны удовлетворять критерию, описанному в лемме о коммутирующих перестановках. Таким образом, остается открытым вопрос о реализации неботтовских бифуркаций, который сейчас исследуется А. А. Кузнецовой.

Интересным является вопрос о топологических свойствах бильярдных книжек, реализующих те или иные упорядоченные бильярдные игры В. Драговича и М. Раднович [21]. Эти вопросы в настоящее время изучаются К. Е. Тюриной и Д. А. Туниянц.

Кроме того, остаются открытыми два пункта гипотезы Фоменко о реализации меченых молекул и — их частном случае — изоэнергетических многообразий. В рамках продвижения по этой гипотезе В. В. Ведюшкиной и В. А. Кибкало было показано, что произвольные значения числовых меток реализуются в некоторых слоениях Лиувилля. Иными словами, произвольные “элементы” меченой молекулы — \mathbb{Z} -атомы и числовые метки — реализуются некоторыми подходящими бильярдами, но пока что лишь “по отдельности” или в некоторых комбинациях друг с другом [31, 32]. Интересно, какими в итоге окажутся “препятствия”, отделяющие реализуемые бильярдами слоения Лиувилля от не реализуемых.

Литература

Список литературы

- [1] В. В. Козлов, Д. В. Трещев, *Генетическое введение в динамику систем с ударами*, М.: Изд-во МГУ, 1991 168 с.; англ. пер.: V. V. Kozlov, D. V. Treshchev, *Billiards. A genetic introduction to the dynamics of systems with impacts*, Transl. Math. Monogr., 89, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, viii+171 pp.
- [2] С. Табачников, *Геометрия и бильярды*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ин-т компьютерных исследований, М.-Ижевск, 2011, 180 с.; пер. с англ.: S. Tabachnikov, *Geometry and billiards*, Stud. Math. Libr., 30, Amer. Math. Soc., Providence, RI; Mathematics Advanced Study Semesters, University Park, PA, 2005, xii+176 pp.
- [3] В. Драгович, М. Раднович, *Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, М.-Ижевск, 2010, 338 с.; пер. с англ.: V. Dragovic, M. Radnovic, *Poncelet porisms and beyond. Integrable billiards, hyperelliptic Jacobians and pencils of quadrics*, Front. Math., Birkhauser/Springer Basel AG, Basel, 2011, viii+293 pp.
- [4] E. Gutkin, *Billiard dynamics: a survey with the emphasis on open problems*, Regul. Chaotic Dyn., 8:1 (2003), 1-13.
- [5] A. A. Glutsyuk, *On polynomially integrable Birkhoff billiards on surfaces of constant curvature*, Journal of the European Mathematical Society, 2021. 23, No 3. 995–1049.
- [6] M. Bialy, A. E. Mironov, *Algebraic non-integrability of magnetic billiards*, J. Phys. A: Math. Theor. 49, No45. 455101.
- [7] V. Kaloshin, A. Sorrentino, *On the local Birkhoff conjecture for convex billiards*, Ann. of Math. 2018. 188, No1. 315–380.
- [8] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация*, т. 1, 2, Издательский дом “Удмуртский университет”, Ижевск,

- 1999, 1: 444 с.; 2: 447 с.; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, vols. 1, 2, Publ. "Udmurt Univ.", Izhevsk 1999, 444 p., 447 pp.; English transl., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL 2004, xvi+730 pp.
- [9] А. В. Болсинов, С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, *Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности*, УМН, 45:2(272) (1990), 49–77.
- [10] V. Dragovic, M. Radnovic, *Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards*, Regul. Chaotic Dyn., 14:4-5 (2009), 479-494.
- [11] В. В. Фокичева, *Топологическая классификация бильярдов в локально-плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик*, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176; англ. пер.: V. V. Fokicheva, *A topological classification of billiards in locally planar domains bounded by arcs of confocal quadrics*, Sb. Math., 206:10 (2015), 1463-1507.
- [12] А. Т. Фоменко, V. A. Kibkalo, *Topology of liouville foliations of integrable billiards on table-complexes*, European Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 8, no. 4. – P. 1392-1423.
- [13] С. Е. Пустовойтов, *Топологический анализ бильярда, ограниченного софокусными квадриками, в потенциальном поле*, Математический сборник. – 2021. – Т. 212, № 2. – С. 81-105; англ. пер.: S. E. Pustovoytov, *Topological analysis of a billiard bounded by confocal quadrics in a potential field*, Sb. Math., 212:2 (2021), 211-233
- [14] Г. В. Белозеров, *Топологическая классификация интегрируемых геодезических бильярдов в трехмерном евклидовом пространстве*, Математический сборник. – 2020. – Т. 211, № 11. – С. 3–40; англ. пер.: G. V. Belozerov, *Topological classification of billiards bounded by confocal quadrics in three-dimensional Euclidean space*, Sb. Math., 211:11 (2020), 1503–1538
- [15] Е. Е. Каргинова, *Слоение Лиувилля топологических бильярдов на плоскости Минковского*, Фундаментальная и прикладная математика. – 2019. – Т. 22, № 6. – С. 123-150; англ. пер.: E. E. Karginova, *Liouville foliation of topological billiards in the Minkowski plane*, Fundam. Prikl. Mat., 22:6 (2019), 123-150
- [16] В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы*, Изв. РАН. Сер. матем., 81:4 (2017), 20-67; англ. пер.: V. V. Vedyushkina, A. T. Fomenko, *Integrable topological billiards and equivalent dynamical systems*, Izv. Math., 81:4 (2017), 688-733.
- [17] В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические бильярды*, Изв. РАН. Сер. матем., 83:6 (2019), 63-103.

- [18] В. В. Ведюшкина *Слоение Лиувилля бильярдной книжки, моделирующей случай Горячева–Чаплыгина*, Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2020. – № 1. – С. 64-68.; англ. пер.: V. V. Vedyushkina *The Liouville foliation of the billiard book modelling the goryachev-chaplygin case*, Moscow University Mathematics Bulletin. – 2020. – Vol. 75. – P. 42-46.
- [19] A. T. Fomenko, V. V. Vedyushkina, *Topological billiards, conservation laws and classification of trajectories*, Functional Analysis and Geometry: Selim Grigorievich Krein Centennial. Edited by Peter Kuchment and Evgeny Semenov. American Mathematical Society. Series: Contemporary Mathematics. Volume 733; 2019; pp.129-148
- [20] А. А. Ошемков, *Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей*, Новые результаты в теории топологической классификации интегрируемых систем, Сборник статей, Тр. МИАН, **205**, Наука, М., 1994, 131–140; англ. пер.: A. A. Oshemkov, *Morse functions on two-dimensional surfaces. Encoding of singularities*. Proc. Steklov Inst. Math. **205**, 119-127 (1995); translation from Tr. Mat. Inst. Steklova **205** (1994), 131–140.
- [21] V. Dragović, S. Gasiorek, M. Radnović, *M. Billiard Ordered Games and Books*, Regul. Chaot. Дун., 27, 132-150 (2022).
- [22] V. Dragović, M. Radnović, *Cayley-Type Conditions for Billiards within k Quadrics in Rd* , J. Phys. A, 2004, vol. 37, no. 4, pp. 1269-1276.
- [23] А. Т. Фоменко, *Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем*, УМН, 44:1(265) (1989), 145–173; англ. пер.: A. T. Fomenko, *The symplectic topology of completely integrable Hamiltonian systems*, Russian Math. Surveys, 44:1 (1989), 181–219.
- [24] А. Т. Фоменко, *Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем*, Докл. АН СССР, 287:5 (1986), 1071–1075; англ. пер.: A. T. Fomenko, *Morse theory of integrable Hamiltonian systems*, Soviet Math. Dokl., 33:2 (1986), 502–506.
- [25] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, *Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 54:3 (1990), 546–575; англ. пер.: A. T. Fomenko, H. Zieschang, *A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom*, Math. USSR-Izv., 36:3 (1991), 567–596.
- [26] V. I. Dragović, M. Radnović, *Pseudo-integrable billiards and double reflection nets*, Russian Mathematical Surveys, 70(1) (2015), 1–31.
- [27] В. А. Москвин, *Топология слоений Лиувилля интегрируемого бильярда в невыпуклых областях*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2018, 3, 21–29; англ. пер.: V. A. Moskvin,

Topology of Liouville bundles of integrable billiard in non-convex domains, Moscow University Mathematics Bulletin, 73:3 (2018), 103–110.

- [28] В. В. Фокичева, *Описание особенностей системы “бильярд в эллипсе”*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2012, №5, 31-34; англ. пер.: V. V. Fokicheva, *Description of singularities for system “billiard in an ellipse”*, Moscow Univ. Math. Bull., 67:5-6 (2012), 217-220.
- [29] В. В. Фокичева, *Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех., 2014, №4, 18-27; англ. пер.: V. V. Fokicheva, *Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas*, Moscow Univ. Math. Bull, 69:4 (2014), 148-158.
- [30] В. В. Ведюшкина, *Интегрируемые бильярды реализуют торические слоения на линзовых пространствах и 3-торе*, Матем. сб., 211:2 (2020), 46-73 mathnet; англ. пер.: V. V. Vedyushkina, *Integrable billiard systems realize toric foliations on lens spaces and the 3-torus*, Sb. Math., 211:2 (2020), 201-225.
- [31] В. В. Ведюшкина, *Локальное моделирование бильярдами слоений Лиувилля: реализация реберных инвариантов*, Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 2021, Т. 2021, № 2., С. 28-32; англ. пер.: V. V. Vedyushkina, *Local modeling of liouville foliations by billiards: Implementation of edge invariants*, Moscow University Mathematics Bulletin, 2021., Vol. 76, no. 2., P. 60-64.
- [32] В. В. Ведюшкина, В. А. Кибкало, *Бильярдные книжки малой сложности и реализация слоений Лиувилля интегрируемых систем*, Чебышевский сборник., 2022., Т. 23, № 1., С. 53-82.

Список публикаций автора по теме диссертации

- [33] В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева, *Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем*, Матем. сб., 209:12 (2018), 17-56; англ. пер.: V. V. Vedyushkina, I. S. Kharcheva, *Billiard books model all three-dimensional bifurcations of integrable Hamiltonian systems*, Sb. Math., 209:12 (2018), 1690-1727.
- [34] В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, И. С. Харчева, *Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими бильярдами*, Докл. РАН, 479:6 (2018), 607-610; англ. пер.: V. V. Vedyushkina, A. T. Fomenko, I. S. Kharcheva, *Modeling nondegenerate bifurcations of*

closures of solutions for integrable systems with two degrees of freedom by integrable topological billiards, Dokl. Math., 97:2 (2018), 174–176.

- [35] И. С. Харчева, *Изоэнергетические многообразия интегрируемых бильярдных книжек*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 4 (2020), 12–22; англ. пер.: I. S. Kharcheva, *Isoenergy Manifolds of Integrable Billiard Books*, Moscow University Mathematics Bulletin, 75:4 (2020), 149–160.
- [36] В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева, *Бильярдные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем*, Матем. сб., 212:8 (2021), 89–150; англ. пер.: V. V. Vedyushkina, I. S. Kharcheva, *Billiard books realize all bases of Liouville foliations of integrable Hamiltonian systems*, Sb. Math., 212:8 (2021), 1122–1179.
- [37] В. А. Кибкало, А. Т. Фоменко, И. С. Харчева, *Реализация интегрируемых гамильтоновых систем бильярдными книжками*, Тр. ММО, 82:1 (2021), 45–78; англ. пер.: V. A. Kibkalo, A. T. Fomenko, I. S. Kharcheva, *Realizing integrable Hamiltonian systems by means of billiard books*, Trans. Moscow Math. Soc., 82 (2021), 37–64.

Тезисы докладов автора по теме диссертации

- [38] И. С. Харчева, *Описание особенностей системы “Бильярд в книжке”*, Материалы молодежной международной научной конференции “Методы современного математического анализа и геометрии и их приложения”, серия 5, место издания Издательско-полиграфический центр “Научная книга”, Россия, Воронеж, том 1 (2016), с. 310–311.
- [39] И. С. Харчева, *Моделирование трехмерных бифуркаций гамильтоновых систем интегрируемыми бильярдными книжками*, Сборник “Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования”, серия 7, Издательско-полиграфический центр “Научная книга”, Россия, Воронеж, том 1 (2017), с. 201–202.
- [40] И. С. Харчева, *Интегрируемые бильярды в книжке*, Материалы Международного молодежного научного форума “Ломоносов-2017”, издательство ООО “МАКС Пресс”, Россия, Москва, секция “Математика и механика”, подсекция “Геометрия и топология” (2017).
- [41] И. С. Харчева, *Интегрируемые бильярдные книжки моделируют 3-атомы и грубые молекулы*, Материалы молодежной международной научной конференции “Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна — 2018”, место издания Издательско-полиграфический центр “Научная книга”, Россия, Воронеж (2018), с. 310–311.

- [42] И. С. Харчева, *Моделирование 3-атомов и грубых молекул интегрируемыми бильярдами*, Материалы Международного молодежного научного форума “Ломоносов-2018”, издательство ООО “МАКС Пресс”, Россия, Москва, секция “Математика и механика”, подсекция “Геометрия и топология” (2018).
- [43] I. S. Kharcheva, *Integrable Billiard's Book*, Mathematical Conference: XX Geometrical Semina, Vrnjacka Banja, Serbia (2018), p. 46-47.
- [44] I. S. Kharcheva, *Any three-dimensional bifurcation of an integrable Hamiltonian system is a neighborhood of the critical level of the certain billiard's book*, The Seventh International Conference “Geometry, Dynamics, Integrable Systems - GDIS 2018”: Book of Abstracts, Publishing Center “Institute of Computer Science”, Russia, Dolgoprudny (2018), pp. 38-39.
- [45] I. S. Kharcheva, *Integrable Billiard's Books*, 2018 International Conference on Topology and its Applications, Department of Mathematics, University of Patras, Greece, Patras (2018), pp. 122-122.
- [46] I. S. Kharcheva, *Realization of 3-atoms by integrable billiard's books*, Integrable Systems and Nonlinear Dynamics, Russia, Yaroslavl (2018), pp. 39-40.
- [47] И. С. Харчева, *Реализация атомов и грубых молекул, состоящих из атомов без звездочек, интегрируемыми бильiardными книжками*, Материалы второй международной молодежной научной школы “Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы”, серия 8, место издания Издательско-полиграфический центр “Научная книга”, Россия, Воронеж (2018), с. 334-335.
- [48] I. S. Kharcheva, *Generalized integrable billiards and Fomenko conjecture*, Workshop on Applied Topology 2019, Japan, Kyoto, p. 38.
- [49] I. S. Kharcheva, *Integrable billiard books model the base of Liouville foliations*, Workshop on Mathematical Billiards: 2019, Australia, Sydney, p. 9.
- [50] И. С. Харчева, *Реализация грубых молекул, состоящих из атомов без звездочек, интегрируемыми бильiardными книжками*, Материалы Международного молодежного научного форума “Ломоносов-2019”, издательство ООО “МАКС Пресс”, Москва, секция “Математика и механика”, подсекция “Геометрия и топология” (2019).
- [51] И. С. Харчева, *Модерирование грубых молекул, состоящих из атомов без звёздочек интегрируемыми бильiardдами*, Материалы молодежной международной научной конференции “Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна — 2020”, место издания Издательско-полиграфический центр “Научная книга”, Россия, Воронеж (2020), с. 304-307.

- [52] И. С. Харчева, *Реализация грубых молекул интегрируемыми бильярдами*, Материалы Международного молодежного научного форума “Ломоносов-2020”, издательство ООО “МАКС Пресс”, Россия, Москва, секция “Математика и механика”, подсекция “Геометрия и топология” (2020).
- [53] И. С. Харчева, *Наглядная реализация интегрируемых гамильтоновых систем бильярдами книжками*, Материалы IV-й международной молодежной научной школы “Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы”, посвященной 90-летию со дня рождения профессора Ю.Г. Борисовича, издательство “Воронежский государственный педагогический университет”, Россия, Воронеж, том 10 (2018), с. 188-189.