

## ОТЗЫВ НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ

на диссертационную работу Куценко Владимира Александровича  
«ЭФФЕКТЫ СЛУЧАЙНЫХ СРЕД В ПРОЦЕССАХ С ГЕНЕРАЦИЕЙ  
И БЛУЖДАНИЕМ ЧАСТИЦ ПО РЕШЕТКАМ»,

представленную на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по специальности

1.1.4 теория вероятностей и математическая статистика.

Диссертационная работа В. А. Куценко посвящена изучению ветвящихся случайных блужданий по многомерным решеткам в случайной среде — современному направлению теории вероятностей и случайных процессов. Как показано в многочисленных публикациях С. А. Молчанова, Е. Б. Яровой, их учеников и соавторов, асимптотическое поведение ветвящегося случайного блуждания зависит от структуры среды, в которой происходит блуждание частиц. Именно, предположение о случайности среды, т.е. о случайности интенсивностей размножения и гибели частиц, объединяет и при этом значительно усложняет задачи, решенные в диссертации.

Особую актуальность модели ветвящихся процессов с диффузией частиц стали приобретать в связи с развитием теории случайных сред, благодаря которой была осознана важная роль среды в формировании свойств и закономерностей эволюционных процессов (см., например, статью А. Гревена и Ф. Холландера, 1992). Основная особенность случайных сред состоит в том, что в них велико влияние редких флуктуаций, поэтому осредненное описание, типичное при классическом подходе, далеко не всегда адекватно. Для процессов в случайных средах характерно возникновение нерегулярных структур с ярко выраженной неоднородностью пространственного распределения, связанной с наличием «сильных центров», в окрестности которых происходит основной рост процесса (см., например, лекции С. А. Молчанова по случайным средам, 1994). В физической литературе для подобных явлений принят термин «перемежаемость». Новизна работы В. А. Куценко заключается в том, что, в отличие от большинства публикаций по теории ветвящихся случайных блужданий, интенсивности размножения и гибели частиц случайны, а уравнение для первого момента численностей частиц представляет собой задачу Коши со случайным потенциалом.

Такого типа параболическая задача, которая может быть описана в терминах ветвящихся случайных блужданий в случайной среде, по-видимому, впервые рассмотрена в серии работ Я. Б. Зельдовича и соавторов (1985-1987). Сама ее постановка иницирована исследованиями в статистической физике. В этих работах эволюционный оператор со случайным потенциалом появляется в правой части дифференциального уравнения, описывающего поведение первых (случайных) моментов численностей частиц в точках решетки. В 1990 г. С. А. Молчанов и Ю. Гертнер ввели основные понятия для описания ветвящегося случайного блуждания в однородной случайной ветвящейся среде, а также разработали подходы к анализу таких процессов. Результаты для асимптотик старших усредненных по среде моментов получены С. Альбевериио с соавторами (2000) в предположении об «асимптотически вейбулловском» распределении

потенциала. Задача об изучении асимптотик старших моментов для «асимптотически гумбелевского» потенциала в однородной случайной ветвящейся среде оставалась открытой. Решение этой задачи представлено В. А. Куценко в **первой главе диссертации**.

Отказ от предположения однородности при анализе структуры среды приводит к исследованию ветвящихся случайных блужданий в неоднородных ветвящихся случайных средах. Е. Б. Яровой (2012) получены первые результаты для неоднородной случайной ветвящейся среды, когда размножение и гибель частиц могут происходить в конечном числе точек решетки. Такие процессы в случайной неоднородной среде до настоящего времени остаются менее изученными.

Помимо основных асимптотик усредненных по среде моментов численностей частиц в точках решетки, в ветвящихся случайных блужданиях в случайной среде рассматривались и другие характеристики. Например, С. А. Молчановым и П. Жангом (2012) получены оценки для асимптотик (с вероятностью единица) моментов численностей частиц без усреднения по среде. Е. О. Черноусова с соавторами (2023) исследовала вероятность выживания ветвящегося случайного блуждания в случайной среде и изучила условия отсутствия устойчивого состояния процесса.

Ряд идей, предложенных этими авторами, использован В. А. Куценко при написании **второй главы диссертации**, в которой исследована вероятность экспоненциального роста ветвящегося случайного блуждания в неоднородной случайной убивающей среде с единственным центром размножения частиц. Хотелось бы отметить продвижения В. А. Куценко в этом достаточно сложном направлении.

**Третья глава диссертации** посвящена численному моделированию ветвящихся случайных блужданий в случайной среде. Несмотря на важность применения таких моделей в прикладных задачах, результатов об их численном моделировании найти не удалось. Для ветвящегося случайного блуждания по одномерной решетке в убивающей среде методом Монте–Карло исследована точность полученных оценок и предложен способ моделирования распределение случайного собственного значения эволюционного оператора.

Остановимся на наиболее важных результатах работы. Основным результатом первой главы является **теорема 1** об асимптотическом поведении усредненных по среде моментов численностей частиц ветвящегося случайного блуждания в однородной ветвящейся случайной среде с асимптотически гумбелевским потенциалом. Во второй главе доказана **теорема 2** об условиях, при которых ветвящееся случайное блуждание по одномерной решетке с единственным центром размножения частиц в нуле («сильном центре») и ограниченной случайной убивающей средой, т.е. такой средой, в которой исчезновение частиц возможно в любой точке решетки кроме нуля, почти наверное имеет экспоненциальный рост моментов численностей частиц. Хотелось бы подчеркнуть неочевидность полученного результата. Дополняют данное исследование теоремы об оценках сверху (**теорема 3**) и снизу (**теорема 4**) вероятности экспоненциального роста моментов численностей частиц в случайной среде с единственным

центром размножения и ограниченной случайной убывающей средой. На основе **теоремы 5** предлагается конкретный алгоритм оценки изучаемой вероятности, который позволяет реализовать численные алгоритмы в **третьей главе диссертации**. Достаточно высокая скорость работы алгоритмов объясняется экспоненциально быстрой сходимостью рядов в **теореме 5**.

Достоинством диссертации является изучение новых моделей ветвящихся случайных блужданий в случайной среде и выявление фазовых переходов в зависимости от параметров, задающих блуждание, интенсивности источника ветвления и свойств случайной «убывающей среды». В ходе работы над диссертацией В. А. Куценко применяет не только методы теории вероятностей и случайных процессов, но и теории дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, комбинаторики, а также численные методы. При доказательстве основных теорем были использованы метод Лапласа, представления типа Фейнмана–Каца, а также методы исследования спектра случайных операторов. Численное моделирование проводилось при помощи языка R с использованием метода Монте-Карло и методов параллельного программирования.

Отмечу отличное владение В. А. Куценко методами численного моделирования, которое позволило проиллюстрировать наличие перемежаемости средних численностей частиц на конечных временах и получить ее численную оценку.

Разнообразие применяемых методов и подходов подтверждает высокую квалификацию автора работы. Хочу подчеркнуть, что результаты диссертации, выносимые на защиту, получены лично автором, являются новыми и обоснованы в виде строгих математических доказательств.

Результаты диссертации докладывались на многочисленных российских конгрессах и конференциях, список которых приведен в автореферате и диссертации, среди которых приглашенный доклад на 63-м Мировом конгрессе по статистике (2021). Апробация диссертации проходила на Большом кафедральном семинаре кафедры теории вероятностей (руководитель академик А. Н. Ширяев).

Основные идеи и положения работы изложены в 15 научных работах, в том числе в 6 публикациях (одна без соавторов) в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.4 — теории вероятностей и математическая статистика. Все перечисленные публикации соответствуют теме диссертации и полностью отражают ее содержание. В автореферате и диссертации для каждой работы с соавторами оценен личный вклад в публикацию В. А. Куценко.

Автореферат соответствует требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» и полностью отражает содержание диссертации.

В диссертации рассмотрены новые модели ветвящихся случайных блужданий и решены важные задачи для дальнейшего развития теории случайных сред. По видимому, впервые предложены численные алгоритмы моделирования, позволяющие выявлять эффект перемежаемости на конечных временах.

Таким образом, в диссертационной работе В.А. Куценко «Эффекты случайных сред в процессах с генерацией и блужданием частиц по решеткам», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.4 — теории вероятностей и математическая статистика, решен ряд актуальных и сложных задач теории вероятностей и стохастических процессов. Работа удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» и рекомендуется к защите в диссертационном совете МГУ.011.3.

Рекомендую принять диссертацию к защите в диссертационном совете МГУ.011.3 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по специальности 1.1.4 — теории вероятностей и математическая статистика.

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук, доцент,  
профессор кафедры теории вероятностей  
механико-математического факультета МГУ  
имени М. В. Ломоносова

13.02.2024г

Е. Б. Яровая

Подпись профессора кафедры теории вероятностей,  
доктора физико-математических наук, доцента Е. Б. Яровой  
удостоверяю.

Декан механико-математического факультета МГУ  
имени М. В. Ломоносова, член-корреспондент РАН  
доктор физико-математических наук, профессор



А. И. Шафаревич

Контактные данные:  
probability@yandex.ru +7(495)9391403  
<http://new.math.msu.su/department/probab>

Адрес места работы: 119991, Москва, Ленинские горы, 1, МГУ, Главное здание,  
механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей.