**Отзыв официального оппонента**
**на диссертационную работу Березнюка Вадима Юрьевича**
**«Коммутаторная длина степеней и асферичность групп, заданных графами», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 — «математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»**

Диссертационная работа В.Ю.Березнюка посвящена изучению двух актуальных тем современной теории групп: минимальной коммутаторной длины степеней в свободных произведениях и асферичности групп, обладающих обобщённым условием малого сокращения. Первый вопрос изучался в последние 40 лет известными математиками из разных стран, в частности Каллером, Комерфордом, Эдмундсом и Розенбергером, Ивановым и Клячко, а также Ченом, и для него в диссертации по сути даётся окончательное решение. Второе направление является сравнительно новым, и для него результаты получены Олливье и Грубером; в диссертации эти результаты существенно усиливаются.

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы. Её полный объём составляет 85 страниц.

Во введении дан достаточно хороший обзор по двум направлениям, которые изучает автор и сформулированы основные результаты диссертации. Более подробное изложение результатов автора происходит в главах 1–3, где все они снабжаются детальными доказательствами.

Глава 1 посвящена нижним оценкам минимальной коммутаторной длины для элементов вида $u_1^{n_1}\dots u_m^{n_m}d_1\dots d_l$ в свободных произведениях произвольных групп, где элементы $u_i$ сопряжены между собой и не сопряжены элементам свободных сомножителей; а элементы $d_i$ сопряжены элементам свободных сомножителей. Основным результатом данного раздела является неравенство, связывающее параметры $k$ и $l$ данного элемента с числами $n_i$ и минимальным порядком неединичного элемента группы. Из этого как прямое следствие при $l=0$ и $m=1$ получается следующая (основная) оценка для минимальной коммутаторной длины степени элемента, не сопряжённого элементам свободных сомножителей:

$$k(G,n) \geq \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n}{N(G)}\right\rfloor + 1. \qquad (1)$$

Также в главе 1 доказывается, что основная оценка является почти точной, т.е. может отличаться от точной не более, чем на 1. Техника, с помощью которые получены данные результаты совмещает результаты о диаграммах Хауи с методом движений Клячко, который в данном случае обобщается для оценки числа независимых кластеров столкновений.

В главе 2 центральным результатом является теорема 3, в которой доказывается неулучшаемость основной оценки (1) для минимальной коммутаторной длины степени элемента, не сопряжённого элементам свободных сомножителей. В действительности, опять доказывается более общий результат — теорема 4 для элементов общего вида, разложенных в виде циклически несократимой нормальной формы, и тогда равенство в оценке (1) получается как частный случай. Результаты этой главы также получаются на основе работы с диаграммами Хауи, но теперь существование диаграмм довольно сложного вида, которые конструирует автор, влечёт верхние оценки. Также эти диаграммы позволяют явным образом получать разложения степеней коммутаторов $[a, t]$ в свободных произведениях групп с кручением.

Результаты главы 3 относятся к вопросу об асферичности заданий группы, заданной с помощью графа. Здесь развиваются и усиливаются результаты Олливье и Грубера, которые доказали асферичность для групп, заданных графами с условиями $C'(1/6)$ и $C(6)$. Автор обобщает условие $T(n)$ из классической теории малых сокращений на группы, заданные графами, и доказывает, что тогда асферичность задания следует как из условия $C(6)$, так и из условий $C(4)\&T(4)$, а также из $C(3)\&T(6)$, которые являются классическими парами из теории малых сокращений.

Диссертация написана весьма аккуратно и понятно. Опечаток почти нет, но у меня есть небольшие замечания по стилю изложения. Так, например, в определении $k(G, n)$ на стр.9 и $k(G, n, N)$ на стр.11 не сказано явно, что имеется в виду „некоторый" элемент $g^n$, а не всякий. На стр.25 и далее используется обозначение $\chi(S)$, но перед этим не сказано, что так обозначена эйлерова характеристика. На стр.41 используется термин $4k$-гон, хотя, конечно, уместнее было бы сказать $4k$-угольник. Также стоило бы давать более точные ссылки при цитировании результатов других авторов (например для леммы Грубера на стр.78), указывая страницы или названия утверждений; это сделало бы поиск в литературе удобнее. Все эти замечания не являются существенными; они не снижают уровень работы, а только могли бы немного упростить её чтение.

Автореферат верно отражает содержание диссертации. Результаты, приведенные в диссертации, являются новыми; результаты глав 2 и 3 принадлежат автору, а результаты главы 1 получены им в неразделимом соавторстве с научным руководителем, Антоном Алекандровичем Клячко. Все результаты снабжены подробными доказательствами, опубликованы в рецензируемых ведущих научных журналах, прошли апробацию на семинарах и международных конференциях в Москве и Санкт-Петербурге.

Считаю, что диссертация «Коммутаторная длина степеней и асферичность групп, заданных графами» удовлетворяет всем критериям пп.2.1 — 2.5 «Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова», оформлена согласно приложениям №8,9 «Положения о диссертационном совете Московского государственного университета им.М.В.Ломоносова», а её автор, Березнюк Вадим Юрьевич, заслуживает присвоения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.


к.ф.м.н.,
научный сотрудник МИАН им.В.А.Стеклова А.Л.Таламбуца
119991, г.Москва, ул.Губкина 8,
отдел математической логики,
[redacted]


30 октября 2023

Подпись А.Л. Таламбуцы



Ученый секретарь МИАН А. Пашкарев

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А. СТЕКЛОВА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК (МИАН) * ОГРН 1027739665456