

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА  
ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*На правах рукописи*

**Чепиго Лев Станиславович**

**МЕТОДЫ АНАЛИЗА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ С УЧЕТОМ СФЕРИЧНОСТИ**

1.6.9 – Геофизика (технические науки)

**ДИССЕРТАЦИЯ**  
на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:

Кандидат геолого-минералогических наук  
Льгин Иван Владимирович

Москва – 2023

Введение.....	4
Глава 1. Обзор методов решения прямой и обратной задачи гравиметрии на сфере .....	10
1.1. Методы решения прямой задачи гравиразведки на плоскости.....	10
1.2. Методы решения прямой задачи гравиразведки с учетом сферичности .....	17
1.3. Методы решения обратной задачи гравиразведки без учета сферичности .....	20
1.4. Методы решения обратной задачи гравиразведки с учетом сферичности.....	24
Глава 2. Решение прямой и обратной задачи гравиразведки для простых моделей с учетом сферичности.....	28
2.1. Решение прямой задачи гравиразведки для тонкого радиального стержня.....	28
2.2. Решение прямой задачи гравиразведки для сферической призмы.....	31
2.3. Решение обратной задачи гравиразведки для точечного источника методом характерных точек	38
2.4. Решение обратной задачи гравиразведки для тонкого радиального стержня методом характерных точек.....	40
2.5. Заключение по Главе 2.....	41
Глава 3. Решение обратной задачи гравиразведки с глубинной нормализацией функционала невязки.....	42
3.1. Математические основы и проблемы решения обратной задачи гравиразведки для сеточных моделей .....	42
3.1.1. Асимптотика решения обратной задачи и временные затраты.....	45
3.2. Применение переменной скорости градиентного спуска при автоматическом подборе сеточных плотностных моделей .....	48
3.2.1. Зависимость градиента функционала невязки от глубины для двумерного и трехмерного случаев .....	49
3.3. Пример решения плоской обратной задачи гравиразведки с нормализацией функционала невязки для двумерных моделей .....	51
3.4. Пример решения плоской обратной задачи гравиразведки с нормализацией функционала невязки для трехмерных моделей.....	55
3.5. Решение сферической обратной задачи гравиразведки с нормализацией функционала невязки для сферических моделей.....	60

Глава 4. Построение плотностных моделей для областей лунных масконов .....	67
4.1. Обзор модели гравитационного поля Луны.....	67
4.2. Подбор параметров источников Лунных масконов, аппроксимируемых телами простой формы .....	70
4.3. Автоматизированный подбор сеточной плотностной модели Луны .....	76
Заключение .....	79
Список литературы .....	81

## Введение

### Актуальность исследований

В теории современной гравиразведки можно выделить два актуальных направления развития: решение прямых и обратных задач гравиразведки для градиентных сред и учет сферичности при плотностном моделировании в региональных и планетарных масштабах.

Рассмотрим актуальность развития первого направления – решение прямых и обратных задач гравиразведки для сред с переменной плотностью. Данная задача вызвана практической потребностью решения прямых задач для разрезов осадочных отложений значительной мощности (более 10 – 15 км) в условиях латеральной неоднородности толщ. Градиентные модели в большей степени соответствуют реальной геолого-геофизической ситуации, чем используемые в настоящее время блоковые модели, предполагающие постоянную плотность внутри блоков и скачок на границе.

Одним из возможных подходов к решению данной задачи является разбиение плотностной модели на блоки, в которых задана некоторая функция изменения плотности. В частности, в пределах каждого блока может применяться линейный закон изменения плотности. Однако в отечественной и зарубежной литературе крайне редко встречаются публикации, в которых изучается подход к решению прямых задач гравиразведки для более сложных законов изменения плотности, чем линейный.

Альтернативным подходом к решению прямых и обратных задач гравиразведки для моделей со сложным распределением плотности, является использование сеточных моделей, то есть моделей, разбитых на множество ячеек с одинаковой геометрией (точечные источники, прямоугольные параллелепипеды и т.п.). Если не используются априорные данные, стандартные подходы позволяют подбирать лишь плотностные модели с контрастным приповерхностным слоем. Такие модели практически не годятся для геологической интерпретации, поскольку отражают лишь латеральное распределение источников аномалий гравитационного поля. Традиционно априорные данные учитывают с помощью регуляризации по Тихонову (L2 регуляризации). Однако даже такой подход далеко не всегда приводит к качественному подбору плотностной модели, в должной мере соответствующей реальной физико-геологической ситуации.

Таким образом, возникает задача развития подходов к решению прямых и обратных задач для сред с переменной плотностью и адаптации данных подходов к случаю дефицита априорной информации.

Теперь рассмотрим актуальность развития второго направления – учет сферичности при плотностном моделировании. В последние годы по результатам спутниковых миссий (GRACE,

GOCE, GRAIL, KAGYA) получены новые модели гравитационного поля Земли [Tapley et al., 2004] и Луны [Kato et al., 2010; Zuber et al., 2013], которые характеризуются высокой степенью точности (до  $\pm 0,01$  мкГал) и детальности от  $1^\circ$  до  $1'$  [Save et al., 2016; Wiese et al., 2016].

Присутствие в спектре цифровых моделей высокочастотных аномалий гравитационного поля, содержащих информацию о геологическом строении, позволяет использовать их не только для решения планетарных задач гравиметрии, но и для изучения плотностных неоднородностей земной коры и верхней мантии. Кроме того, высокоточные спутниковые модели гравитационного поля Земли и его вариаций (в частности, данные миссии GRACE) применяются при решении множества задач геологии и географии [Ткаченко, 2017], океанографии [Armitage et al., 2016], гляциологии [Memin et al., 2015; Moholdt et al., 2012; Seo et al., 2015], гидрологии [Булычев и др., 2011; Penatti et al., 2015] и сейсмологии [Михайлов и др., 2014, 2016; Mikhailov et al., 2013] и др.

Для решения таких задач на современном уровне необходима адаптация математических методов решения обратной задачи гравиразведки, широко развитых для расчетов на плоскости, к применению их на сферической поверхности. В частности, одно из важнейших направлений – разработка методов локализации особых точек по гравитационному полю, заданному на сфере, с помощью которых можно определять координаты и массу источников гравитационного поля, расположенных внутри сферы.

В гравиразведке для определения глубины залегания и массы точечного источника по полю, заданному на плоскости, широко используются методы характерных точек (МХТ). В настоящее время основное внимание исследователей при решении задач гравиразведки с учетом сферичности Земли сосредоточено на решении прямых задач [Старостенко и др., 1986; Булычев и др., 1998; Кузнецов и др., 2017]. При этом экспресс-методы оценки параметров источников аномалий, т.е. методы решения обратных задач на сфере практически не рассматриваются. В связи с этим поставлена задача адаптации математических методов решения обратной задачи гравиразведки, разработанных для расчетов на плоскости, к полям, заданным на сферической поверхности.

Более того, как и в случае плоских моделей, при учете сферичности также необходимо строить и плотностные модели с произвольным распределением плотности и сложной геометрией источников аномалий. Как уже было сказано, алгоритмы автоматизированного решения обратной задачи гравиразведки даже на плоскости зачастую не дают желаемого результата и в случае сферического моделирования ситуация является аналогичной.

Таким образом, помимо решения прямой и обратной задачи для простых моделей с учетом сферичности, возникает задача адаптации современных методов решения обратной задач

гравirazведки для сеточных моделей к случаю, когда поле задано на сферической поверхности и априорные данные практически отсутствуют.

### **Степень разработанности**

Учет сферичности при анализе гравитационного поля имеет ключевое значение в случаях работы с данными регионального и глобального масштаба (например, спутниковыми данными). Анализ таких данных без учета сферичности может приводить как к ошибкам в оценках геометрических параметров источников аномалий гравитационного поля, так и к ошибкам в оценках плотностных характеристик источников.

При анализе глобальных моделей гравитационного поля широкое применение имеет разложение гравитационного поля на сферические гармоники. Наиболее распространенным подходом к решению прямой задачи гравirazведки с учетом сферичности является аппроксимация многогранником.

Крупный вклад в исследование вопросов решения прямых и обратных задач гравirazведки с учетом сферичности в разное время внесли Булычев А.А., Бычков С.Г., Долгаль А.С., Жаров В.Е., Кузнецов К.М., Лыгин И.В., Манукян А.Г., Мартышко П.С., Мелихов В.Р., Пятаков Ю.В., Старостенко В.И., Страхов В.Н., Хохлова В.В. и др.

### **Объект исследования**

Объектом исследования является математический аппарат прямых и обратных задач гравirazведки. Предметом исследования являются подходы к решению прямой и обратной задач гравirazведки на сферической поверхности, а также автоматизация решения обратной задачи гравirazведки.

### **Цели и задачи**

Целью настоящего исследования является разработка новых подходов к решению прямых и обратных задач гравirazведки на сфере. Реализация поставленной цели основана на решении следующих задач:

1. изучение существующих подходов к решению прямых и обратных задач гравirazведки на плоскости и сфере;
2. разработка методики решения обратной задачи гравirazведки по полю, заданному на сферической поверхности, для тел простой формы;
3. разработка методики автоматизации решения обратной задачи гравirazведки на плоскости и сфере;
4. апробация разработанных подходов на модельных и реальных геофизических данных.

### **Новизна исследования**

В диссертационной работе впервые:

- создан алгоритм автоматизированного решения обратной задачи гравirazведки для сеточных плотностных моделей, учитывающий снижение чувствительности функционала невязки с глубиной;
- разработан подход к решению обратной задачи гравirazведки на сфере для простых моделей, являющийся аналогом метода характерных точек на плоскости.

Разработанные подходы использованы для построения сеточных плотностных моделей Луны, отражающих положение и избыточную плотность источников аномалий гравитационного поля Луны.

### **Теоретическая и практическая значимость**

Разработанная модификация метода характерных точек может применяться для быстрой оценки параметров источников изометричных аномалий гравитационного поля без привлечения априорной информации при исследованиях в региональном и глобальном масштабе.

Разработанный подход к автоматизированному решению обратной задачи гравirazведки для сеточных моделей может применяться при подборе плотностных моделей с произвольным распределением плотности, как с учетом, так и без учета априорных данных. Такой подход, реализованный с учетом сферичности, позволяет в автоматическом режиме осуществлять подбор плотностных моделей космических тел или их фрагментов.

Использование предложенного подхода значительно повышает эффективность плотностного моделирования при решении геолого-геофизических задач.

Разработанные алгоритмы решения обратной задачи гравirazведки реализованы в новом программном комплексе GravMagInv [Чепиго, 2022].

С помощью разработанных алгоритмов и подходов построена одна из первых подробных сеточных моделей распределения избыточных плотностей внутри Луны.

### **Методология и методы исследования**

Помимо общенаучных методов исследования при написании диссертационной работы использованы методы математического моделирования, реализованные в программах TG2D1g [Чепиго Л.С., Булычев А.А., 2018], GravInv2D [Чепиго Л.С., 2019], GravInv3D [Чепиго Л.С., 2020] и GravInv Global [Чепиго Л.С., Кузнецов К.М., 2021].

Для построения плотностных моделей Луны использована модель гравитационного поля GGGRX 0900C, являющаяся одним из результатов спутниковой миссии GRAIL. Переход от коэффициентов сферических гармоник к нормальной компоненте силы тяжести производился с использованием возможностей среды программирования Matlab.

### **Защищаемые положения**

1. Алгоритм решения прямой задачи гравirazведки для сферической призмы на основе ее аппроксимации набором тонких радиальных стержней.

2. Методика решения обратной задачи гравиразведки для тел простой формы по полю, заданному на сферической поверхности.

3. Методика подбора сеточной плотностной модели, в основе которой лежит использование скорости градиентного спуска, зависящей от глубины как степенная функция.

### **Достоверность и апробация полученных результатов**

Основные выводы диссертационной работы получены в ходе анализа фундаментальных положений теории потенциальных полей, широко представленных в ряде литературных источников и являющихся общепринятыми. Защищаемые положения не противоречат материалам ранее опубликованных работ по данной тематике, а также полностью согласуются с результатами математического моделирования.

Результаты диссертационной работы были представлены на Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (2018, 2022, Москва, Россия), Международном научном семинаре имени Д.Г. Успенского «Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей» (21 – 25 января 2019, Пермь, Россия), Международном семинаре «Вопросы теории и практики геологической интерпретации геофизических полей»: 47-я, 48-я и 49-я сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского – В.Н. Страхова (2020, Воронеж, Россия; 2022, Санкт-Петербург, Россия; 2023, Екатеринбург, Россия), на международной конференции European Geosciences Union General Assembly (2020, 2021, Вена, Австрия), Международной геолого-геофизической конференции «ГеоЕвразия» (2021, 2022, 2023), Гравиметрическом и магнитометрическом семинаре имени профессора В.Р. Мелихова (2018, 2020, 2022 Москва, Россия), Международной научно-практической конференции «ГеоСочи» (2023, Сочи, Россия).

По тематике диссертации автор имеет 4 статьи, опубликованные в российских журналах, входящих в список Russian Science Citation Index (RSCI) Web of Science. Также автор имеет 6 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ. Во всех опубликованных работах вклад автора является определяющим. Автор принимал активное участие в постановке научных задач, проведении численных исследований, разработке теоретических моделей, анализе полученных результатов и предоставлении их в печати.

### **Личный вклад**

Все результаты теоретической части диссертации и математического моделирования получены лично автором. Фактический материал по гравитационному полю Луны получен из открытого источника PDS Geosciences Node ([https://pds-geosciences.wustl.edu/dataserv/gravity\\_models.htm](https://pds-geosciences.wustl.edu/dataserv/gravity_models.htm)).

### **Благодарности**



Автор выражает благодарность своему научному руководителю к.г.-м.н., доценту Лыгину И. В. за руководство и помощь при написании диссертационной работы, а также за предоставленную возможность участвовать в учебно-научной деятельности.

Автор выражает глубокую признательность д.ф.-м.н., профессору Булычеву А.А. за активное содействие, консультации и рекомендации, без которых написание данной работы было бы невозможно. Также автор выражает особую благодарность всем сотрудникам лаборатории гравиразведки и магниторазведки отделения геофизики геологического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова и персонально к.т.н. Кузнецову К.М. и к.г.-м.н. Соколовой Т.Б.

Кроме того, автор благодарен всем сотрудникам отделения геофизики геологического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, а также родным и близким за их поддержку на протяжении написания диссертационной работы.

# Глава 1. Обзор методов решения прямой и обратной задачи гравиметрии на сфере

## 1.1. Методы решения прямой задачи гравиразведки на плоскости<sup>1</sup>

Прямая задача гравиразведки – определение элементов гравитационного поля по заданному распределению плотности. Прямая задача имеет применение на всех этапах исследования гравитационного поля – от проектирования гравиметрической съемки до решения обратной задачи, плотностного моделирования и геологической интерпретации результатов. Плотностные модели можно разделить на двумерные и трехмерные, а также на блочные и сеточные.

Фундаментальное значение для решения прямых задач гравиразведки имеют аналитические выражения гравитационного потенциала и его производных для точечной массы в декартовой системе координат [Гравиразведка. Справочник геофизика, 1990; Булычев и др., 2010, 2017; Миронов, 1980; Серкерев, 1999]:

$$\begin{aligned}
 V(x, y, z) &= G \frac{M}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}} \\
 V_x(x, y, z) &= \frac{\partial V}{\partial x} = G \frac{M(\xi - x)}{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 V_y(x, y, z) &= \frac{\partial V}{\partial y} = G \frac{M(\eta - y)}{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 V_z(x, y, z) &= \frac{\partial V}{\partial z} = G \frac{M(\zeta - z)}{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2)^{\frac{3}{2}}},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $V$  – потенциал силы притяжения,  $V_i$  – проекция силы притяжения на направление  $i$ ,  $G$  – гравитационная постоянная,  $M$  – масса точки,  $(\xi, \eta, \zeta)$  – декартовы координаты источника поля,  $(x, y, z)$  – декартовы координаты расчетной точки.

Гравитационный потенциал объемной массы, заключенной в области  $D$ , выражается путем интегрирования выражения для потенциала точечного источника:

<sup>1</sup>При подготовке данного раздела диссертации использована публикация, выполненная автором в соавторстве, в которой, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования:

1. **Чепиго Л.С.,** Лыгин И.В., Булычев А.А. Прямая двумерная задача гравиразведки от многоугольника с параболической плотностью // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 4. Геология. 2019. № 4. С. 89–93. (0,31 п.л., авторский вклад 40%) Импакт-фактор РИНЦ: 0,38.

$$dM = \sigma d\xi d\eta d\zeta$$

$$V(x, y, z) = G \int_D \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}} \quad (2)$$

Выражения для компонент силы притяжения для произвольного распределения плотности можно получить как путем дифференцирования гравитационного потенциала, так и путем интегрирования выражений для компонент силы притяжения точечной массы.

Для двумерной прямой задачи аналогом точечного источника является бесконечный горизонтальный тонкий стержень, расположенный вдоль оси  $y$ , с линейной плотностью  $\sigma_L$ . Компоненты силы притяжения горизонтального тонкого стержня записывается следующим образом:

$$V_x(x, y, z) = 2G\sigma_L \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2}$$

$$V_z(x, y, z) = 2G\sigma_L \frac{\zeta - z}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} \quad (1)$$

Один из наиболее эффективных подходов к решению прямых задач гравиразведки, применяемых при двумерном плотностном моделировании, основан на применении теории функции комплексного переменного [Страхов и др., 1980; Страхов, 1984; Страхов и др., 1985; Цирульский, 1989; Жданов, 1984; Блох, 2009].

В комплексном анализе принято использовать прямоугольную систему координат с осью абсцисс  $Ox$ , направленной вправо, и осью ординат  $Oy$ , направленной вверх. Поскольку в гравиразведке принято обозначать вертикальную ось  $Oz$  (как в двумерном, так и в трехмерном случае), для удобства переобозначим ось ординат в ось  $Oz$ , сохранив при этом ее направление вверх.

В этой системе координат точку, в которой будем определять значение поля силы тяжести, обозначим комплексной координатой  $s = x + iz$ , где  $i$  – мнимая единица. Точку, в которой будет находиться источник поля, обозначим как  $\sigma = \xi + i\zeta$ .

Основопологающей величиной в данном подходе является комплексная напряженность гравитационного поля [Страхов и др., 1980]:

$$G(s) = g_z(x, z) + ig_x(x, z), \quad (2)$$

где  $g_z$  – проекция силы притяжения на вертикальную ось,  $g_x$  – проекция силы притяжения на горизонтальную ось, совпадающую с направлением профиля.

Решение прямой задачи от некоторой области  $D$  с заданной плотностью  $\delta(\xi, \zeta)$  сводится к вычислению следующего площадного интеграла:

$$G(s) = 2iG \int_D \frac{\delta(\xi, \zeta)}{\sigma - s} dS, \quad (3)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная.

Универсальной моделью для двумерного плотностного моделирования является многоугольник с постоянной плотностью (Рисунок 1).

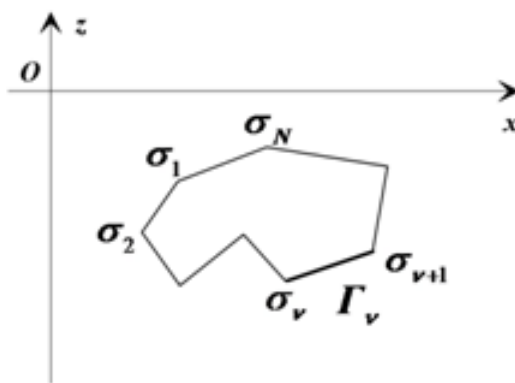


Рисунок 1 – Двумерный многоугольник с  $N$  сторонами и вершинами

Выражение комплексной напряженности двумерного многоугольника записывается следующим образом:

$$s = x + iz, \quad \sigma = \xi + i\zeta$$

$$\alpha_v = \frac{\bar{\sigma}_{v+1} - \bar{\sigma}_v}{\sigma_{v+1} - \sigma_v}, \quad \beta_v = \bar{\sigma}_v - \alpha_v \sigma_v \quad (4)$$

$$G(s) = G\delta \sum_{v=1}^N (\alpha_v s + \beta_v + \bar{s}) \ln \frac{\sigma_{v+1} - s}{\sigma_v - s},$$

где  $s$  – комплексная координата расчетной точки,  $\sigma_v$  – комплексная координата  $v$ -й вершины многоугольника. Приведенное выражение справедливо как для внешней, так и для внутренней расчетной точки.

Крайне актуальным является вопрос решения прямых задач для сред с кусочно-непрерывным изменением плотности. В частности, в пределах блоков модели может задаваться

линейный или параболический закон распределения плотности [Zhou, 2010; D'Urso, 2015, 2017]. В рамках настоящей работы было получено выражение для комплексной напряженности гравитационного поля для многоугольника с параболическим законом изменения плотности, которое может применяться при моделировании гравитационного поля слоев и блоков с переменной плотностью [Чепиго, Булычев, 2018; Чепиго и др., 2019]:

$$\begin{aligned}
\delta(\xi, \zeta) &= a_{2\xi}\xi^2 + a_{2\zeta}\zeta^2 + a_{2\xi\zeta}\xi\zeta + a_{1\xi}\xi + a_{1\zeta}\zeta + a_0 \\
\hat{\delta}(\sigma, \bar{\sigma}) &= A\sigma^2 + \bar{A}\bar{\sigma}^2 + B\sigma\bar{\sigma} + C\sigma + \bar{C}\bar{\sigma} + a_0 \\
A &= \frac{a_{2\xi} - a_{2\zeta} - ia_{2\xi\zeta}}{4}, \quad B = \frac{a_{2\xi} + a_{2\zeta}}{2}, \quad C = \frac{a_{1\xi} - ia_{1\zeta}}{2} \\
\Phi(\sigma, \bar{\sigma}) &= \int \delta(\sigma, \bar{\sigma}) d\bar{\sigma} = A\sigma^2\bar{\sigma} + \frac{\bar{A}}{3}\bar{\sigma}^3 + \frac{B}{2}\sigma\bar{\sigma}^2 + C\sigma\bar{\sigma} + \frac{\bar{C}}{2}\sigma\bar{\sigma}^2 + a_0\bar{\sigma} \\
G(s) &= G \sum_{\nu=1}^N \int_{\sigma_\nu}^{\sigma_{\nu+1}} \frac{\Phi(\sigma, \alpha_\nu\sigma + \beta) - \Phi(s, \bar{s})}{\sigma - s} d\sigma \\
\int_{\sigma_\nu}^{\sigma_{\nu+1}} \frac{\Phi(\sigma, \alpha_\nu\sigma + \beta) - \Phi(s, \bar{s})}{\sigma - s} d\sigma &= \frac{K_{3\nu}}{3}(\sigma_{\nu+1}^3 - \sigma_\nu^3) + \frac{K_{2\nu} + K_{3\nu}s}{2}(\sigma_{\nu+1}^2 - \sigma_\nu^2) + \\
&+ (K_{1\nu} + K_{2\nu}s + K_{3\nu}s^2)(\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu) + (K_{0\nu} + K_{1\nu}s + K_{2\nu}s^2 + K_{3\nu}s^3) \ln\left(\frac{\sigma_{\nu+1}s - s}{\sigma_\nu - s}\right) \\
K_{3\nu} &= \frac{\bar{A}\alpha_\nu^3}{3} + \frac{B\alpha_\nu^2}{2} + A\alpha_\nu \\
K_{2\nu} &= \bar{A}\alpha_\nu^2\beta + B\alpha_\nu\beta_\nu + \frac{\bar{C}\alpha_\nu^2}{2} + A\beta_\nu + C\alpha_\nu \\
K_{1\nu} &= \bar{A}\alpha_\nu\beta_\nu^2 + \frac{B\beta_\nu^2}{2} + \bar{C}\alpha_\nu\beta_\nu + C\beta_\nu + a_0\alpha_\nu \\
K_{0\nu} &= \frac{\bar{A}\beta_\nu^3}{3} + \frac{\bar{C}\beta_\nu^2}{2} + a_0\beta_\nu + \Phi(s, \bar{s})
\end{aligned} \tag{5}$$

Данное выражение справедливо как для внешней, так и для внутренней области и может применяться для моделирования гравитационного поля в скважинах (Рисунок 2) или при сложном распределении плотности в среде.

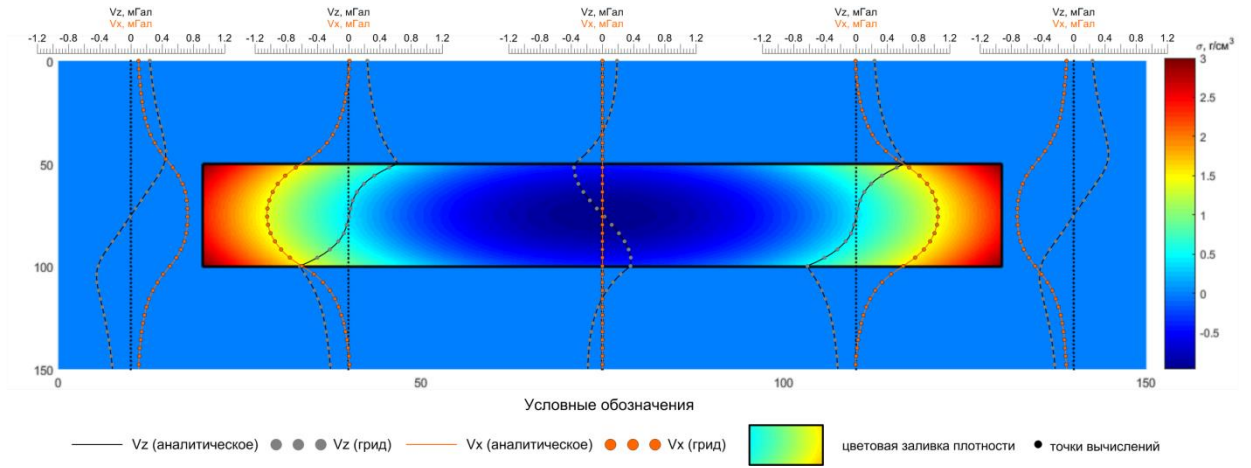


Рисунок 2 – Пример решения прямой задачи гравиразведки для многоугольника с параболическим законом изменения плотности во внешней и внутренней области

При решении двумерной и трехмерной прямой задач гравиразведки для сеточных моделей важнейшее значение имеют выражения для вертикальной составляющей силы притяжения прямоугольных ячеек: бесконечная прямоугольная призма (двумерная прямая задача) и прямоугольный параллелепипед (трехмерная прямая задача):

$$V_z = G\sigma \left( (\xi - x) \ln((\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2) + 2(\zeta - z) \arctg \frac{\xi - x}{\zeta - z} \right) \Big|_{\xi_1, \zeta_1}^{\xi_2, \zeta_2}$$

$$V_z = -G\sigma \left( (\xi - x) \ln(\eta - y + R) + (\eta - y) \ln(\xi - x + R) + (\zeta - z) \left( \arctg \frac{\eta - y}{\zeta - z} - \arctg \frac{(\xi - x)(\eta - y)}{(\zeta - z)R} \right) \right) \Big|_{\xi_1, \eta_1, \zeta_1}^{\xi_2, \eta_2, \zeta_2} \quad (6)$$

$$R = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$$

Особое место в решении прямых задач для сеточных моделей занимают подходы к решению прямой задачи в частотной области, использующие быстрое преобразование Фурье и позволяющие значительно ускорять процедуру расчета гравитационного поля. Рассмотрим данный подход на примере двумерной прямой задачи. В основе частотных подходов лежит замена решения прямой задачи от слоя ячеек сверткой, которая вычисляется в частотной области:

$$V_z(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(x) V_{z1}(x_0 - x) dx$$

$$\hat{V}_z = \hat{\sigma} \hat{V}_{z1}, \quad (7)$$

где  $V_{z1}$  – сила притяжения ячейки с единичной плотностью,  $\hat{V}_z$  – спектр гравитационного поля слоя ячеек,  $\hat{\sigma}$  – спектр плотности ряда ячеек,  $\hat{V}_{z1}$  – спектр гравитационного поля ячейки с единичной плотностью.

Применение такого подхода возможно только для случая, когда расчетные точки расположены с шагом, равным шагу между центрами ячеек. В таком случае, алгоритм решения прямой задачи для слоя, состоящего из  $N$  ячеек, в действительной области с помощью свертки состоит из двух шагов:

1. Решение прямой задачи для одной ячейки с единичной плотностью. Данный шаг имеет временную сложность  $O(N)$ ;
2. Свертка функции плотности с функцией, описывающей притяжение единичной ячейки. Данный шаг имеет сложность  $O(N^2)$ .

Поскольку эти шаги являются последовательными их сложности суммируются, и используя правила сложения временных сложностей алгоритмов [Cormen et al., 2009; Sipser 1997], получим итоговую сложность алгоритма решения прямой задачи в действительной области составляет  $O(N^2)$ .

Ускорение решения прямой задачи достигается путем использования быстрого преобразования Фурье для перехода в частотную область, и в случае, когда количество ячеек по горизонтали является одной из степеней числа 2, достигается максимальная эффективность при решении прямой задачи. В таком случае, решение прямой задачи в частотной области состоит из следующих шагов:

1. Решение прямой задачи для одной ячейки с единичной плотностью (временная сложность алгоритма  $O(N)$ ).
2. Расчет дискретного преобразования Фурье (ДПФ) для функции притяжения единичной ячейки ( $O(N \log N)$ ).
3. Расчет ДПФ для функции плотности слоя ( $O(N \log N)$ ). Стоит отметить, что данный шаг можно объединить с предыдущим, поскольку дискретный спектр двух действительных функций можно рассчитать с помощью одного преобразования Фурье.
4. Почленное перемножение ДПФ, полученных на 2-3 шагах (алгоритма  $O(N)$ ).
5. Расчет обратного преобразования Фурье для результата, полученного на 4 шаге ( $O(N \log N)$ ).

Несмотря на большее количество последовательных шагов, алгоритм решения прямой задачи для слоя в частотной области имеет сложность  $O(N \log N)$ , что при больших значениях  $N$  позволяет значительно ускорить процедуру решения прямой задачи.

Таким образом, подходы к решению прямой задачи гравirazведки на плоскости широко развиты как для простых, так и для произвольных распределений плотности. При решении прямой задачи гравirazведки для моделей с произвольным распределением плотности предпочтительным является решение прямой задачи для сеточных моделей в частотной области, поскольку сеточные модели не ограничивают геометрию и тип распределения плотности, а переход в частотную область позволяет значительно ускорить решение прямой задачи при разбиении модели на большое количество ячеек [Мелихов, 1980].



## 1.2. Методы решения прямой задачи гравиразведки с учетом сферичности

Необходимость учета сферичности при решении прямой задачи гравиразведки возникает при обработке (например, при расчете топографической поправки) [Булычев и др., 1998; Ладовский и др., 2017; Мареев, 2018; Мартышко и др., 2018; Хохлова, 2019] и интерпретации гравиметрических данных в региональных и глобальных масштабах [Булычев и др., 2002, 2006, 2011; Оганесян, 2004; Долгаль и др., 2018, 2019; Хохлова, 2019].

Как и в плоском случае, для гравитационного поля, заданного на сферической поверхности, важное прикладное значение имеют выражения для гравитационного потенциала и его производных тел простой геометрической формы: точечная масса, радиальный стержень, сферическая призма. Наиболее часто используемыми элементами гравитационного поля в сферической гравиметрии являются гравитационный потенциал и нормальная (радиальная) компонента силы притяжения. В частности, выражения для гравитационного поля в сферической системе координат могут позволить производить быстрые оценки параметров источников поля с помощью метода характерных точек.

Введем сферу радиуса  $R$ , геометрический центр которой совпадает с началом координат сферической системы координат. Пусть центр масс источника гравитационного поля (сферическая масса) находится внутри сферы в некоторой точке с координатами  $P(R_0, \theta_0, \lambda_0)$  и пусть на поверхности сферы заданы точки с координатами  $(R, \theta, \lambda)$ . Определим выражения гравитационного потенциала и вертикальной (радиальной) составляющей силы притяжения.

В сферической системе координат гравитационный потенциал сферической массы  $M$ , расположенной в точке  $P_0(R_0, \theta_0, \lambda_0)$ , в произвольной точке  $P(R, \theta, \lambda)$  выражается формулой:

$$V(P) = G \frac{M}{R_{PP_0}} = G \frac{M}{\sqrt{R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \psi}} \quad (8)$$

$$\cos \psi = \sin \theta_0 \sin \theta \cos(\lambda_0 - \lambda) + \cos \theta_0 \cos \theta$$

Дифференцируя выражение для потенциала по направлению к центру сферы, получим выражение для вертикальной (радиальной) составляющей силы сферической массы в точке  $P$  (Рисунок 3):

$$V_R(P) = -V'(P) = GM \frac{R - R_0 \cos \psi}{(R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \psi)^{\frac{3}{2}}} \quad (9)$$

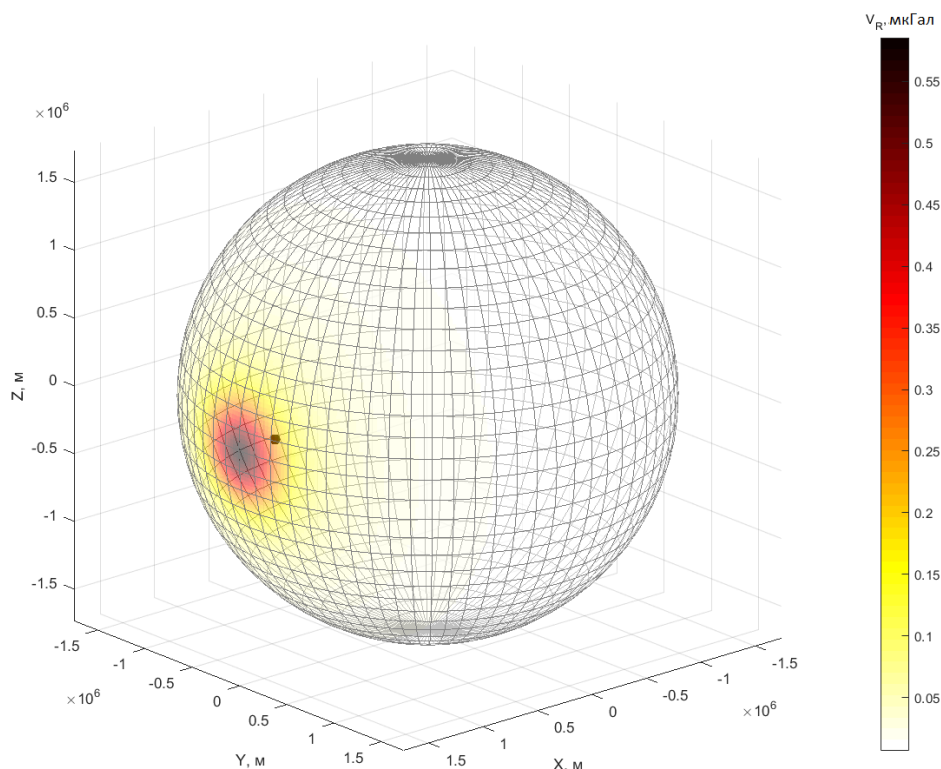


Рисунок 3 – Радиальная составляющая силы притяжения на поверхности сферы точечного источника, расположенного внутри сферы

Для решения прямой задачи гравиразведки для произвольного распределения плотности, ограниченного объемом  $Q$ , необходимо вычислить интеграл по заданному объему:

$$V = G \int_Q \frac{\sigma dV}{\sqrt{R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \psi}}$$

$$V_R = G \int_Q \frac{\sigma(R - R_0 \cos \psi) dV}{(R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \psi)^{\frac{3}{2}}} \quad (10)$$

Большинство алгоритмов решения сферической прямой задачи гравиразведки для сложных распределений плотности основаны на решении прямой задачи в декартовой системе координат с последующим переходом в сферическую систему координат [Булычев и др., 1996, 1998, 2002; Кузнецов и др., 2017; Старостенко, Пятаков, 2013; Heck, Seitz, 2007]. В частности, расчет радиальной компоненты силы притяжения для одного тела простой формы можно разделить на следующие последовательные этапы:

1. Перевод всех расчетных точек в декартову систему координат;
2. Расчет трех компонент вектора силы притяжения;

3. Расчет проекции вектора силы притяжения в каждой точке на направление к центру сферы.

В случае решения прямой задачи для модели, разбитой на ячейки, такой подход может потребовать значительных вычислительных затрат, поскольку для расчета одной радиальной компоненты силы притяжения необходимо рассчитывать три компоненты в прямоугольной системе координат.

Множество исследований посвящено решению прямой задачи гравirazведки для сферической трапециевидной ячейки (тессероида) [Heck, Seitz, 2007; Булычев и др., 1996, 1998, 2002; Кузнецов и др., 2017; Ладовский и др., 2017; Старостенко, Пятаков, 2013; Хохлова, 2019]. Данная задача не имеет аналитического решения и решается численно. Численное решение прямой задачи для тессероида может осуществляться путем численного интегрирования [Ладовский и др., 2017; Старостенко, Пятаков, 2013; Хохлова, 2019], либо путем разбиения модели тессероида на множество моделей более простой формы, для которых имеется аналитическое решение: точечные источники, прямоугольная призма [Heck, Seitz, 2007], многогранник [Булычев и др., 1996, 1998, 2002; Кузнецов и др., 2017; Бычков и др., 2015; Старостенко и др., 1986].

Как и в случае решения прямой задачи гравirazведки на плоскости, актуальным вопросом является решение прямой задачи гравirazведки для сферы, разбитой на равномерную сеть ячеек. В частности, разбиение может производиться с равномерным шагом по широте и долготе на сферические призмы. При таком подходе к разбиению, при изменении широты меняется длина широтного ребра сферической призмы.

Сферическая прямая задача для сферического слоя, разбитого на ячейки, также может решаться в частотной области, однако за счет изменения геометрии ячеек в зависимости от широты, в данном случае возможно применение только одномерной свертки для каждого слоя ячеек, расположенных на фиксированной широте [Кузнецов и др., 2017]:

$$V_R = \sum_{i=1}^{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_\theta} (\sigma_i * V_{Rlij}) \quad (11)$$

$$\hat{V}_z = \sum_{i=1}^{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_\theta} \hat{\sigma}_i \hat{V}_{zlij},$$

где  $\sigma_i$  – распределение плотности на  $i$ -й широте,  $V_{Rlij}$  – сила притяжения ячейки с единичной плотностью, расположенной на  $i$ -й широте, в точках, расположенных на  $j$ -й широте.

Сравним временную сложность решения прямой задачи для сферического слоя, разбитого на сеть ячеек с равномерным шагом по широте и долготе. Пусть сферический слой разбит на  $N_\lambda$

ячеек по долготе и  $N_\theta$  ячеек по широте. Поскольку при решении данной задачи свертка рассчитывается для каждого набора ячеек, расположенных на фиксированной широте, будем считать, что  $N_\lambda$  является одной из степеней двойки. Тогда решение прямой задачи в действительной области состоит из следующих шагов с соответствующей асимптотикой:

1. Решение прямой задачи для одной ячейки с единичной плотностью на каждой широте во всех расчетных точках. Асимптотика данного шага составляет  $O(N_\lambda N_\theta^2)$ ;
2. Свертка эффектов, полученных на 1-м шаге, с распределением плотности в слое. Асимптотика данного шага составляет  $O(N_\lambda^2 N_\theta^2)$ .

Решение прямой задачи для сферического слоя в частотной области включает дополнительные шаги, связанные с прямым и обратным дискретным преобразованием Фурье:

1. Решение прямой задачи для одной ячейки с единичной плотностью на каждой широте во всех расчетных точках -  $O(N_\lambda N_\theta^2)$ ;
2. Дискретное преобразование Фурье для плотности каждого ряда ячеек, расположенных на фиксированной долготе -  $O(N_\theta N_\lambda \log N_\lambda)$ ;
3. Дискретное преобразование Фурье для эффектов каждого ряда ячеек, полученных на 1-м шаге -  $O(N_\theta^2 N_\lambda \log N_\lambda)$ ;
4. Вычисление свертки в частотной области для каждого ряда ячеек -  $O(N_\theta^2 N_\lambda)$ ;
5. Обратное преобразование Фурье для результата, полученного на 4-м шаге -  $O(N_\theta N_\lambda \log N_\lambda)$ .

Поскольку все шаги являются последовательными, общая асимптотика алгоритма решения прямой задачи для сферического слоя в действительной области составляет  $O(N_\lambda^2 N_\theta^2)$ , в частотной области -  $O(N_\theta^2 N_\lambda \log N_\lambda)$ . Таким образом, при больших значениях  $N_\lambda$  решение прямой задачи в частотной области имеет лучшую асимптотику и позволяет решать прямую задачу быстрее.

### 1.3. Методы решения обратной задачи гравиразведки без учета сферичности

Обратные задачи гравиразведки можно разделить на следующие специфические типы:

- определение особых точек в плотностном разрезе (центры масс, угловые точки, верхние кромки).
- определение распределения плотности в слое с заданной геометрией (линейная обратная задача);
- восстановление формы контактной границы двух сред с различной плотностью (нелинейная обратная задача);
- восстановление формы изолированного объекта с заданной избыточной плотностью (нелинейная обратная задача);

– построение непрерывной или кусочно-непрерывной модели распределения плотности в среде (может рассматриваться как линейная и как нелинейная обратная задача).

Среди методов, предназначенных для решения задач первой группы, выделим два наиболее широко применяемых метода – метод характерных точек (МХТ) [Булычев и др., 2017; Хмелевской и др., 2004] и метод деконволюции Эйлера [Reid et al., 1990; Thompson, 1982; Блох, 2009].

При первичной оценке параметров источников аномалий гравитационного поля в гравirazведке важнейшую роль играет метод характерных точек (МХТ), позволяющий определять положение центра масс источника аномалии по отношению значений аномалии гравитационного поля в произвольной точке к амплитуде аномалии и расстоянию между точками (Таблица 1). Кроме того, в зависимости от типа источника с помощью МХТ можно определять массу или плотность (линейную, поверхностную или объемную) неоднородности. Для МХТ характерна простота и высокая скорость решения обратной задачи, именно благодаря этому, метод находит широкое применение при решении обратных задач гравirazведки и по сей день. Определение параметров аномалообразующих тел с помощью МХТ легко выполняется как в ручном, так и в автоматическом режиме.

Таблица 1 Соотношение между параметрами источника и аномалии гравитационного поля [Булычев и др., 2017]

Тип источника	Характерная точка	Параметр источника	Формула
Точечный или сферический источник	$x_{\frac{1}{2}}$	Глубина центра масс	$h = \pm 1.305 x_{\frac{1}{2}}$
		Масса	$M = \frac{V_{zmax} h^2}{G}$
Вертикальный полубесконечный тонкий стержень	$x_{\frac{1}{2}}$	Глубина верхней кромки	$h = \pm \frac{x_{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}}$
		Линейная плотность	$\sigma_L = \frac{V_{zmax} h}{G}$
Бесконечный горизонтальный тонкий стержень	$x_{\frac{1}{2}}$	Глубина центра масс	$h = \pm x_{\frac{1}{2}}$
		Линейная плотность	$\sigma_L = \frac{V_{zmax} h}{2G}$
Вертикальный тонкий пласт	$x_{\frac{1}{2}}, x_{\frac{1}{4}}$	Глубина верхней кромки	$m = \frac{x_{\frac{1}{2}}^2 - x_{\frac{1}{4}}^2}{2x_{\frac{1}{2}}^2}$ $h_1 = m - \sqrt{m^2 - x_{\frac{1}{2}}^2}$
		Глубина нижней кромки	$h_2 = m + \sqrt{m^2 - x_{\frac{1}{2}}^2}$
		Поверхностная плотность	$\sigma_s = \frac{V_{zmax}}{2G \ln \frac{h_2}{h_1}}$
Горизонтальный тонкий пласт	$x_{\frac{1}{2}}, x_{\frac{1}{4}}$	Глубина центра масс	$h = \frac{x_{\frac{1}{2}}^2 - x_{\frac{1}{4}}^2}{2x_{\frac{1}{2}}^2}$
		Ширина пласта	$d = 2 \sqrt{x_{\frac{1}{2}}^2 - h^2}$
		Поверхностная плотность	$\sigma_s = \frac{V_{zmax}}{4G \operatorname{arctg} \frac{d}{h}}$
Уступ	$x_{\frac{1}{2}}$	Глубина центра масс	$h = \pm x_{\frac{1}{2}}$

Одним из востребованных методов локализации особых точек является метод деконволюции Эйлера, позволяющий локализовывать особые точки функций, описывающих аномалии потенциальных полей. Данный метод основывается на уравнении Эйлера для однородных функций [Reid et al., 1990; Thompson, 1982; Блох, 2009]:

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$$

$$x \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} + y \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} + z \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = n f(x, y, z), \quad (12)$$

где  $n$  – степень однородности функции  $f$  (структурный индекс).

При решении обратной задачи методом деконволюции Эйлера, важную роль играет структурный индекс  $n$ , который равен степени однородности функции по модулю и имеет противоположный знак. В зависимости от типа источника, для которого определяется положение особой точки, при интерпретации применяется соответствующее значение структурного индекса. Например, при анализе локальных аномалий гравитационного поля  $n = 1$  соответствует линейным массам, а  $n = 2$  – точечным массам.

Остальные типы обратных задач гравиразведки также можно разделить на ручной подбор и автоматизированные.

Одним из широко применяемых методов решения обратных задач является ручной метод подбора, при котором исходя, из априорных данных, строится начальная модель, которая далее итеративно редактируется интерпретатором, пока не будет достигнуто требуемое, соответствующее точности работ, расхождение между наблюдаемым и рассчитанным полем. Данный подход является относительно простым лишь в случае двумерного моделирования. И даже в случае двумерного моделирования метод подбора зачастую требует значительных временных затрат, особенно, в случае попыток подбора плотностных моделей с учетом градиента плотности в пределах слоев и блоков [Чепиго и др., 2019].

Автоматизация решения задач по подбору закона распределения плотности при фиксированной геометрии границ [Fullagar et al., 2007], геометрии при фиксированном законе распределения плотности в слоях [Mundim et al., 1998; Silva et al., 2006] или непрерывного распределения плотности реализуется с помощью введения функционала невязки и его минимизации [Bear et al., 1995; Li, Oldenburg, 1998]. Минимизация функционала невязки может осуществляться аналитически либо с использованием методов оптимизации [Гребенникова, 2017; Gill et al., 1982; Strutz, 2011].

Наиболее общей является задача построения непрерывной или кусочно-непрерывной модели распределения плотности в среде, основанная на разбиении модели на множество

одинаковых ячеек простой формы. Стоит отметить, что стандартные подходы к решению данной задачи имеют существенный недостаток – снижение чувствительности к изменению плотности ячеек с глубиной [Li, Oldenbutg 1996; 1998]. В ряде случаев при решении обратной задачи используется увеличение мощности ячеек с глубиной, что позволяет уменьшать количество операций и снижать длительность вычислений, однако такой подход не позволяет полностью решить проблему со снижением чувствительности с глубиной. Также существуют некоторые подходы к решению данной проблемы, основанные на регуляризации. Более подробно подобные методы будут рассмотрены в Главе 3.

#### 1.4. Методы решения обратной задачи гравиразведки с учетом сферичности<sup>2</sup>

Множество исследований показывают, что при подборе параметров источников аномалий гравитационного поля на поверхности Земли (или любого другого космического объекта) в региональных и глобальных масштабах, необходимо учитывать сферичность [Булычев и др., 2002, 2006, 2011; Ладовский и др., 2017; Старостенко и др., 1983, 1986]. Для оценки погрешности, которая может возникать при определении параметров точечного источника без учета сферичности, рассмотрим тестовый пример.

Для тестовых расчетов выбраны три сферические поверхности, соответствующие малому небесному телу (например, Луне) с радиусом 2000 км (длина экваториальной дуги  $1^\circ \approx 35$  км), среднему (например, Земле) с радиусом 6371 км (длина дуги  $1^\circ \approx 111$  км) и крупному (например, Нептуну) с радиусом 25 000 км (длина дуги  $1^\circ \approx 436$  км). На каждой сфере по всей поверхности с дискретностью  $0.5^\circ \times 0.5^\circ$  заданы точные (теоретические) значения гравитационного поля точечного источника, расположенного на глубинах 30, 100, 250 и 500 км от поверхности сфер. Масса источника выбрана  $5 \cdot 10^{14}$  кг (при плотности  $0,12$  г/см<sup>3</sup> радиус равен 9,98 км), широта и долгота источника составляют  $30^\circ$  и  $40^\circ$ , соответственно.

Для решения обратной задачи методом характерных точек на плоскости сферические координаты пересчитаны в цилиндрическую проекцию Миллера (Рисунок 4). Особенности метода характерных точек, учитывающего сферичность, будут рассмотрены в разделе 2.3. В качестве критерия оценки качества результата выбрана относительная погрешность определения глубины центра масс источника (Таблица 2).

---

<sup>2</sup>При подготовке данного раздела диссертации использована публикация, выполненная автором в соавторстве, в которой, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования:

1. **Чепиго Л.С.**, Ткаченко Н.С., Лыгин И.В. Определение параметров точечного источника по гравитационному полю, заданному на сфере // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 4. Геология. 2019. № 2. С. 83–87. (0,31 п.л., авторский вклад 40%) Импакт-фактор РИНЦ: 0,38.



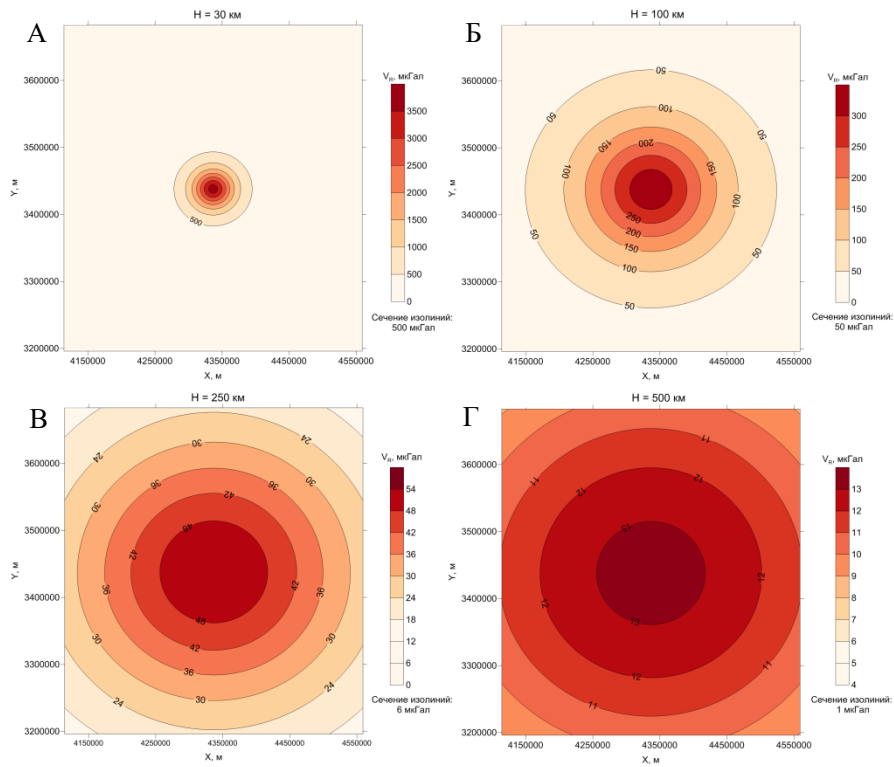


Рисунок 4 – Сила притяжения на поверхности сферы радиусом 6371 км точечной массы, расположенной на глубине: А - 30 км, Б - 100 км, В - 250 км, Г - 500 км

Таблица 2 Сравнение результатов определения глубины точечного источника с учетом и без учета сферичности методом характерных точек

Радиус сферы, км	Истинная глубина, км	Глубина по результатам решения обратной задачи		Относительное расхождение, %
		с учетом сферичности, км	на плоскости, км	
2000	30	30	35	17
	100	100	119	19
	250	250	328	31
	500	500	713	43
6371	30	30	34	13
	100	100	117	17
	250	250	297	19
	500	500	637	27
25000	30	30	33	10
	100	100	115	15
	250	250	292	17
	500	500	595	18

Очевидно, что при определении положения центра масс источника без учета сферичности глубина оказывается завышенной. Погрешность возрастает с увеличением глубины залегания центра масс и с уменьшением радиуса сферы, на которой задана аномалия. При учете сферичности результаты соответствуют теоретическим значениям при условии, что исключены ошибки при измерении поля силы тяжести.

Перейдем к рассмотрению подходов, используемых при анализе гравитационного поля с учетом сферичности. Наиболее широкое применение при оценке характеристик источников аномалий гравитационного поля, заданного на сфере, находит анализ коэффициентов разложения гравитационного потенциала на сферические гармоники [Besser et al., 2014; Gong et al., 2016; Wicczorek et al., 2013]. Разложение потенциала на сферические гармоники записывается следующим образом [Тихонов, Самарский, 1999; Кошляков и др., 1970; Жаров, 2022]:

$$V(\lambda, \theta, R) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{R}\right)^n (\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)) \bar{P}_n^m(\cos(\theta))$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left( \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \right) \quad (13)$$

$$\bar{P}_n^m(x) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x),$$

где  $a$  – средний радиус небесного тела,  $P_n(x)$  – полином Лежандра  $n$ -го порядка,  $\bar{P}_n^m(x)$  – нормированный присоединенный полином Лежандра  $n$ -го порядка,  $m$ -й степени,  $\bar{C}_{nm}$ ,  $\bar{S}_{nm}$  – нормированные коэффициенты Стокса.

Подходы, основанные на анализе сферических гармоник, позволяют делать оценки изменений плотности в слое постоянной мощности, однако такие методы недостаточны для определения параметров изолированных источников аномалий.

При анализе данных спутниковых миссий распространен подход к решению обратной задачи, основанный на подборе слоя переменной мощности с постоянной избыточной плотностью, также использующий соотношения между коэффициентами разложения гравитационного поля и топографии на сферические гармоники. В частности, такой подход применяется при оценке изменений водных ресурсов по данным миссии GRACE [Wang et al., 2013; Chen et al., 2005], а также оценке мощности лунных базальтов [Gong et al., 2016].

Значительно реже при плотностном моделировании с учетом сферичности применяются традиционные подходы к решению обратных задач. Такие подходы зачастую сводятся к ручному подбору параметров тел, аппроксимируемых шаром или сферической призмой. При этом, прямая

задача, как уже было сказано ранее, решается в декартовой системе координат и процесс подбора может требовать больших временных затрат.

Подходы к автоматизации решения обратной гравиразведки для сеточных моделей по полю, заданному на сфере, также применяются крайне редко ввиду слабой чувствительности к глубоким ячейкам, а также значительной длительности вычислений при большом количестве ячеек.

Значительно упростить и ускорить процесс подбора параметров неоднородности в таком случае могли бы аналоги МХТ, позволяющие выполнить быструю оценку глубины залегания источника аномалии. В настоящей работе разработаны аналоги таких методов.

Таким образом, возникает необходимость адаптации подходов к решению обратной задачи гравиразведки, применяемых на плоскости, к анализу гравитационного поля на сферической поверхности. В частности, необходимо разработать подходы к оценке параметров источников простой геометрической формы, а также подходы к автоматизации решения обратной задачи для сеточных моделей, позволяющие ускорять процесс подбора модели и включать в процедуру подбора не только приповерхностные, но и глубокие ячейки.

## Глава 2. Решение прямой и обратной задачи гравиразведки для простых моделей с учетом сферичности

При решении обратных задач гравиразведки для первичной оценки параметров источников аномалий по полю, заданному на плоскости, широкое применение находят методы оценки параметров источников простой геометрической формы, в частности метод характерных точек (МХТ). Для использования МХТ необходимо знать аналитические выражения для тел, которыми аппроксимируется источник аномалий.

При решении обратной задачи гравиразведки на сфере в основном используется анализ коэффициентов разложения гравитационного поля на сферические гармоники, а также ручной метод подбора. Реже используется автоматизированный подбор параметров неоднородностей. Для ускорения процесса ручного и автоматического подбора плотностных моделей возникает необходимость построения начальных плотностных моделей с учетом сферичности, что возможно сделать с помощью методов оценки параметров тел простой геометрической формы, например, МХТ, но требует их адаптации к условиям сферических систем координат.

Адаптация МХТ для определения параметров источников с учетом сферичности подразумевает вывод аналитических выражений для гравитационного поля тел простой геометрической формы, а также связи значений глубины и массы (плотности), с координатой характерных точек аномалии и отношением значения гравитационного потенциала или силы притяжения к максимальному значению. В случаях, когда вывод аналитического выражения невозможен, необходимо определение оптимального подхода к численному решению прямой и обратной задач гравиразведки на сфере.

### 2.1. Решение прямой задачи гравиразведки для тонкого радиального стержня

Получим выражение для гравитационного потенциала в точке М радиального тонкого стержня (т.е. стержня, расположенного вдоль радиуса сферы) с линейной плотностью  $\sigma_L$ , постоянной малой площадью поперечного сечения  $dS$  и расположенного внутри сферы и ограниченного радиусами  $R_1$  (меньший радиус, т.е. точка находится ближе к центру сферы) и  $R_2$  (большой радиус, т.е. точка находится дальше от центра сферы), путем интегрирования выражения (8) для потенциала точечного источника:

$$\sigma dv = \sigma dS dR = \sigma_L dR \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
V(M) &= \int_{R_1}^{R_2} G \frac{\sigma_L dR_0}{\sqrt{R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos\psi}} = \int_{R_1}^{R_2} G \frac{\sigma_L d(R_0 - R \cos\psi)}{\sqrt{(R_0 - R \cos\psi)^2 + R^2 - R^2 \cos^2\psi}} = \\
&= G\sigma_L \ln \left| \frac{R_2 - R \cos\psi + \sqrt{R_2^2 + R^2 - 2R_2 R \cos\psi}}{R_1 - R \cos\psi + \sqrt{R_1^2 + R^2 - 2R_1 R \cos\psi}} \right|
\end{aligned}$$

Для вывода выражения радиальной составляющей силы притяжения тонкого радиального стержня (Рисунок 5) проинтегрируем выражение (9) для радиальной компоненты силы притяжения точечной массы:

$$\begin{aligned}
V_R &= \int_{R_1}^{R_2} G \frac{\sigma_L (R - R_0 \cos\psi) dR_0}{(R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos\psi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{G\sigma_L}{R} \frac{R_0}{\sqrt{R_0^2 + R^2 - 2R_0 R \cos\psi}} \Big|_{R_1}^{R_2} = \\
&= \frac{G\sigma_L}{R} \left( \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + R^2 - 2R_2 R \cos\psi}} - \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + R^2 - 2R_1 R \cos\psi}} \right)
\end{aligned} \tag{15}$$

При интерпретации данных гравиразведки без учета сферичности широкое применение имеет модель вертикального тонкого стержня, нижняя граница которого находится на глубине, стремящейся к бесконечности. Такая модель имеет бесконечный гравитационный потенциал, однако конечное значение силы притяжения. Аналогом данной модели на сфере может быть радиальный стержень, нижняя граница которого расположена у центра сферы. Отличие данной модели от полубесконечного вертикального стержня заключается в ее конечности и существовании гравитационного потенциала. Выражения для гравитационного потенциала и радиальной составляющей силы притяжения тонкого радиального стержня с нижней кромкой в центре сферы (т.е.  $R_1 = 0$ ) будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
V &= G\sigma_L \ln \left| \frac{R_2 - R \cos\psi + \sqrt{R_2^2 + R^2 - 2R_2 R \cos\psi}}{R - R \cos\psi} \right| \\
V_R &= \frac{G\sigma_L R_2}{R \sqrt{R_2^2 + R^2 - 2R_2 R \cos\psi}}
\end{aligned} \tag{16}$$

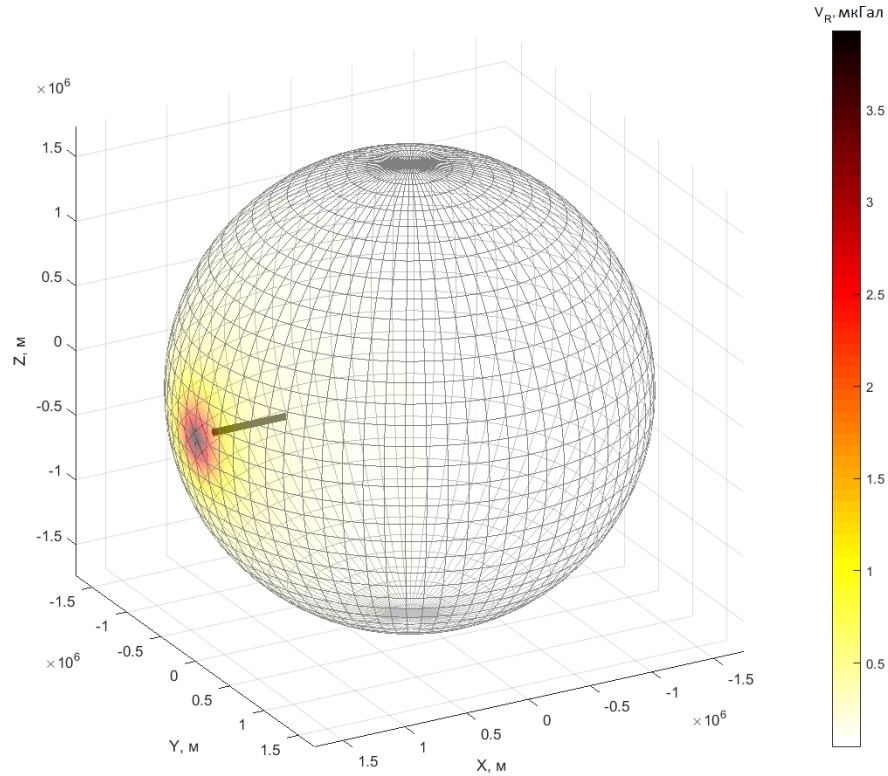


Рисунок 5 – Радиальная составляющая силы притяжения на сфере радиального тонкого стержня, расположенного внутри сферы

В случаях изучения неоднородностей внутри малых космических тел, в частности астероидов, может возникнуть необходимость моделирования гравитационного поля стержня, расположенного по обе стороны от центра (Рисунок 6) (то есть стержень проходит через центр тела). В таком случае, выражения для потенциала и радиальной проекции силы притяжения можно получить, путем сложения выражения для двух стержней, нижняя кромка которых расположена в центре сферы. При этом углы между радиус-вектором произвольной точки и двумя стержнями будут смежными, и их сумма будет составлять  $180^\circ$ :

$$\begin{aligned} \cos \psi_1 &= \sin \theta_1 \sin \theta \cos (\lambda_1 - \lambda) + \cos \theta_1 \cos \theta \\ \cos \psi_2 &= \sin \theta_2 \sin \theta \cos (\lambda_2 - \lambda) + \cos \theta_2 \cos \theta = \sin (\pi - \theta_1) \sin \theta \cos (\pi + \lambda_1 - \lambda) + \\ &+ \cos (\pi - \theta_2) \cos \theta = -\sin \theta_1 \sin \theta \cos (\lambda_1 - \lambda) - \cos \theta_1 \cos \theta = -\cos \psi_1 \end{aligned}$$

$$V = G\sigma_L \ln \left| \frac{(R_2 - R \cos \psi + \sqrt{R_2^2 + R^2 - 2R_2 R \cos \psi})(R_1 + R \cos \psi + \sqrt{R_1^2 + R^2 + 2R_1 R \cos \psi})}{(R - R \cos \psi)^2} \right| \quad (17)$$

$$V_R = G\sigma_L \left( \frac{R_2}{R \sqrt{R_2^2 + R^2 - 2R_2 R \cos \psi}} + \frac{R_1}{R \sqrt{R_1^2 + R^2 + 2R_1 R \cos \psi}} \right)$$

Примечательно, что гравитационное поле такой модели имеет два максимума, расположенных диаметрально противоположно (Рисунок 6):

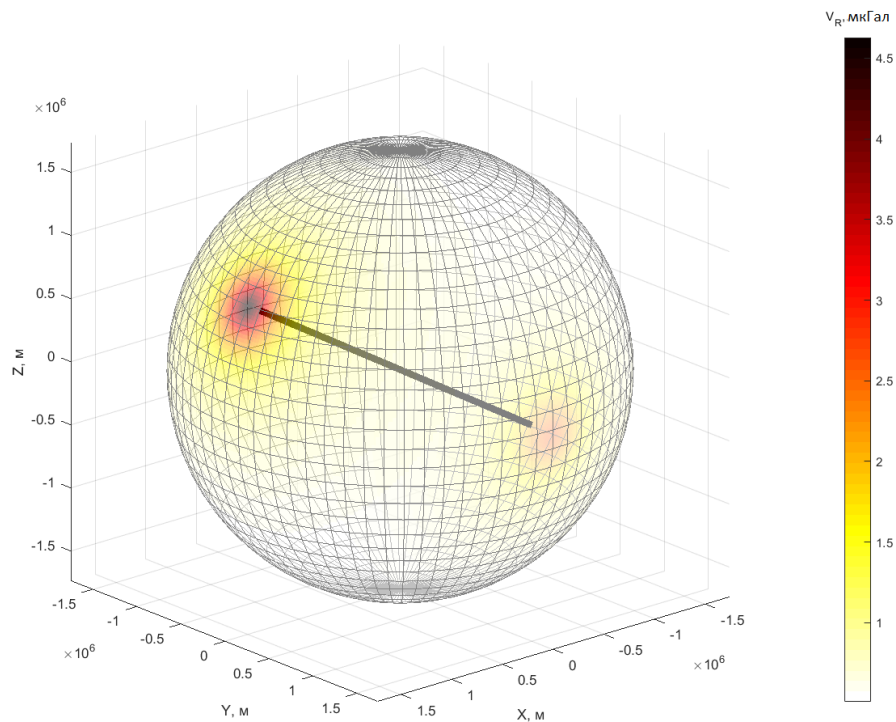


Рисунок 6 – Радиальная составляющая силы притяжения на поверхности сферы радиального тонкого стержня, пересекающего центр сферы

Полученные выражения для потенциала и радиальной составляющей силы притяжения могут использоваться при решении как прямой, так и обратной задач гравиразведки для моделей, аппроксимируемых множеством вертикальных радиальных стержней.

## 2.2. Решение прямой задачи гравиразведки для сферической призмы

Рассмотрим модель сферической призмы (тессероида), представляющей собой сектор сферы, ограниченный по долготе, зенитному углу и радиусу парами значений  $(\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $(\theta_1, \theta_2)$  и  $(R_1, R_2)$  соответственно. Данная модель имеет важнейшее прикладное значение, поскольку является аналогом прямоугольных ячеек на прямоугольной системе координат и может применяться в качестве элемента разбиения модели при решении прямых и обратных задач гравиразведки с учетом сферичности.

Потенциал и радиальная составляющая силы притяжения сферической призмы (Рисунок 7) с плотностью  $\sigma$  выражаются путем интегрирования поля точечного источника [Старостенко и др., 1983, 1986]:

$$V = G \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma dR_0 dL_{\theta_0} dL_{\lambda_0}}{\sqrt{R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \psi}} = G \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma R_0^2 \cos \theta_0 dR_0 d\theta_0 d\lambda_0}{\sqrt{R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \psi}}$$

$$V_R = G \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma (R - R_0 \cos \psi) dR_0 dL_{\theta_0} dL_{\lambda_0}}{(R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \psi)^{\frac{3}{2}}} = G \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma (R - R_0 \cos \psi) R_0^2 \cos \theta_0 dR_0 d\theta_0 d\lambda_0}{(R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \psi)^{\frac{3}{2}}}$$
(18)

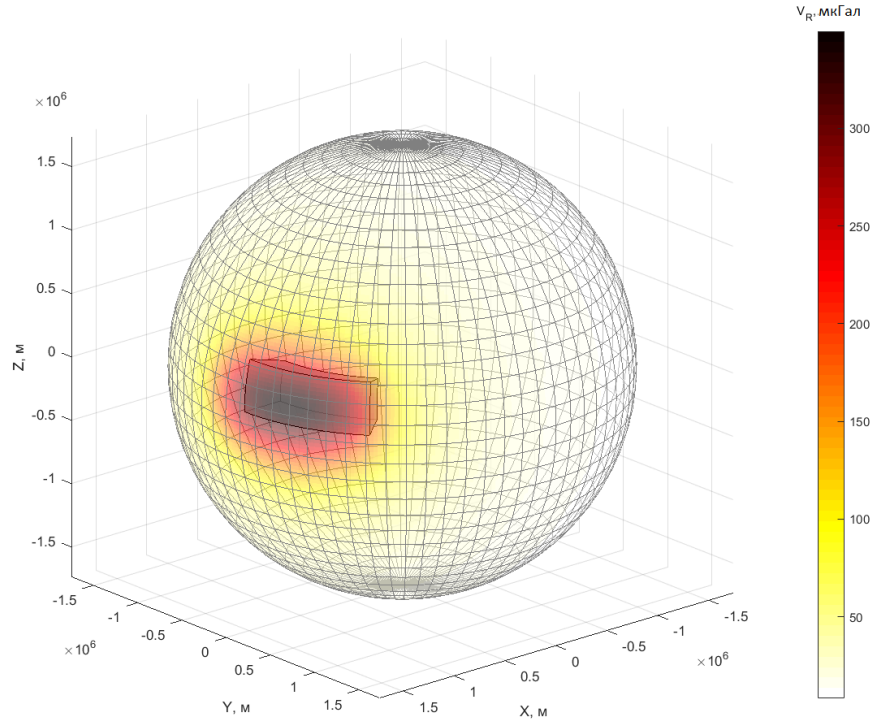


Рисунок 7 – Радиальная составляющая силы притяжения на поверхности сферы сферической призмы

В тройных интегралах (18) возможно вычисление только интеграла по радиусу:

$$V = \frac{1}{2} G \sigma \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left( R^2 (3 \cos^2 \psi - 1) \ln(R_0 - R \cos \psi + p) + 3(R_0 + R \cos \psi) p \right) \cos \theta_0 d\theta_0 d\lambda_0 \Big|_{R_1}^{R_2}$$

$$V_R = G \sigma \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left( \frac{RR_0 (6 \cos^2 \psi - 1) - \cos \psi (3R^2 + R_0^2)}{p} + \right.$$

$$\left. + R(3 - \cos^2 \psi) \ln(R_0 - R \cos \psi + p) \right) \cos \theta_0 d\theta_0 d\lambda_0 \Big|_{R_1}^{R_2}$$

$$p = \sqrt{R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \psi}$$
(19)

Полученные интегралы не имеют решений в элементарных функциях и могут решаться только с помощью численных методов.



Также гравитационное поле тессероида может быть получено путем его разбиения на простые элементы, для которых гравитационное поле рассчитывается аналитически. В частности, в качестве таких элементов могут выступать тонкие радиальные стержни или точечные источники.

Помимо численного интегрирования и разбиения на простые элементы, широкое применение находит решение прямой задачи для сферической призмы путем аппроксимации данной модели многогранником (Рисунок 8) и решения прямой задачи в декартовой системе координат [Старостенко, Пятаков, 2012; Булычев и др., 1996].

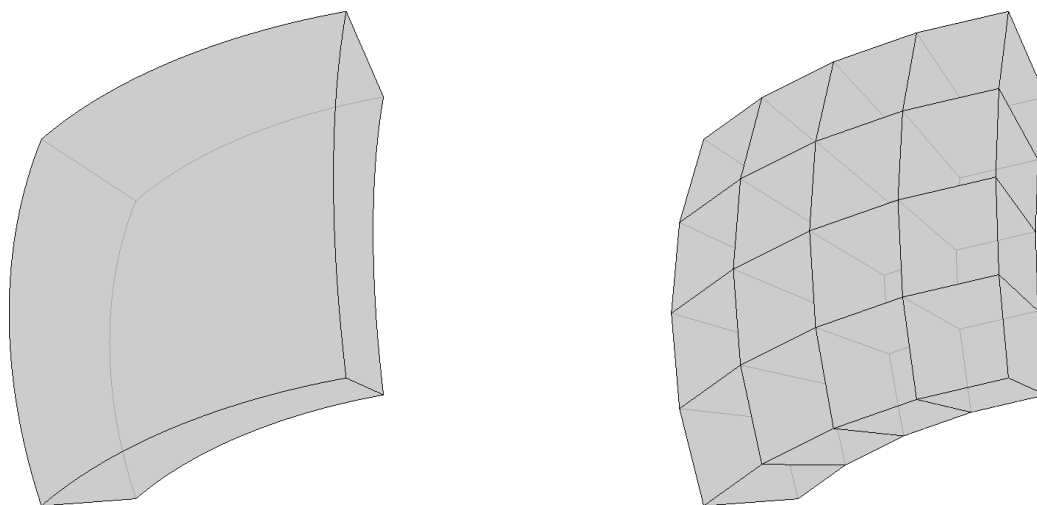


Рисунок 8 – Пример аппроксимации сферической призмы многогранником

В случае расчета силы притяжения, такой подход требует выполнения следующих шагов:

1. Все расчетные точки переводятся в декартову систему координат за  $N$  действий;
2. В каждой точке рассчитываются вектор силы притяжения, состоящий из трех компонент  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$ , что требует  $3N \cdot M$  действий, где  $M$  – количество граней многогранника;
3. Для каждой точки рассчитывается проекция вектора силы притяжения на направление нормали к сфере, что в свою очередь требует  $N$  действий.

Расчет нормальной компоненты силы притяжения с помощью численного интегрирования не требует перехода в декартову систему координат и расчета нескольких компонент поля и требует  $N \cdot M$  действий, где  $M$  – количество элементов разбиения области интегрирования.

Таким образом, подход численного интегрирования может потребовать меньшее количество действий по сравнению с разбиением на источники, для которых есть аналитическое

выражение для силы притяжения в сферической системе координат. Однако возникает вопрос о точности решения прямой задачи в обоих случаях.

Для оценки скорости и точности решения прямой задачи гравиразведки для сферической призмы проведено сравнение трех описанных подходов (разбиение на тонкие стержни, численное интегрирование и аппроксимация многогранником).

В качестве тестовой модели выбрана изометричная сферическая призма, верхняя граница которой совпадает с поверхностью сферы радиуса 1718 км. Размеры призмы выбраны  $5^\circ \times 5^\circ \times 15$  км (длина дуги  $5^\circ$  на сфере радиуса 1718 км составляет примерно 152 км). Проекция геометрического центра призмы расположена на экваторе. Избыточная плотность призмы составляет  $1 \text{ г/см}^3$ . Расчетная область разбита на 360 точек по широте и 180 точек по долготе. Поле рассчитывается на поверхности сферы радиуса 1738 км, то есть верхняя кромка призмы находится на глубине 20 км. Для сравнения трех подходов к решению прямой задачи рассчитано «эталонное» гравитационное поле (Рисунок 9).

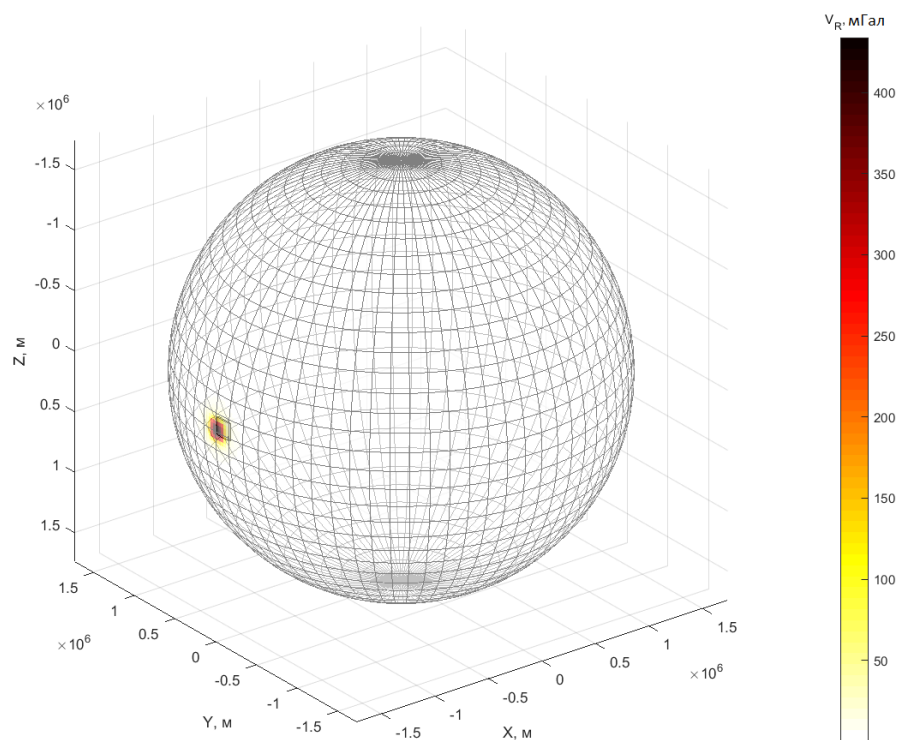


Рисунок 9 – Гравитационное поле эталонной модели сферической призмы

В качестве эталонного поля использовалось поле модели сферической призмы, полученное усреднением результатов решения прямой задачи для тессероида двумя способами: численное интегрирование и аппроксимация многогранником. В первом случае интервалы интегрирования по широте и долготе разбивались на 5 000 отрезков. В случае аппроксимации

многогранником каждая дуга сферической призмы разбивалась на 1000 прямолинейных отрезков.

Все расчеты выполнялись на персональном ноутбуке с процессором Intel Core i7-7700 HQ 2.80 ГГц на одном потоке. Реализации решений написаны на языке программирования C++.

Для каждого подхода прямая задача решалась для 10 вариантов с разным количеством элементов разбиения по широте ( $N_\theta$ ) и долготе ( $N_\lambda$ ). При выборе оптимального подхода сравнивалась длительность расчетов, амплитуда поля (амплитуда поля эталона составила 434.1 мГал), а также относительное отклонение амплитуды  $\varepsilon$  (отношение разницы амплитуд к амплитуде поля эталона, умноженное на 100%) (Таблица 3,

Рисунок 10). Максимальное отклонение для каждого рассчитанного поля соответствует точке, расположенной непосредственно над геометрическим центром призмы.

Таблица 3 Сравнение подходов к решению прямой задачи для сферической призмы

Разбиение на тонкие радиальные стержни				Численное интегрирование				Аппроксимация многогранником			
$N_\lambda N_\theta$	$t, c$	$V_R$ $max,$ мГал	$\varepsilon, \%$	$N_\lambda N_\theta$	$t, c$	$V_R$ $max,$ мГал	$\varepsilon, \%$	$N_\lambda N_\theta$	$t, c$	$V_R$ $max,$ мГал	$\varepsilon, \%$
100	0.05	503.8	16.1	100	0.33	504.0	16.1	1	0.32	409.2	5.7
400	0.20	468.4	7.9	400	1.30	468.5	8.0	4	1.15	432.1	0.4
2500	1	447.6	3.1	2500	8.14	447.7	3.2	25	7.38	433.3	0.1
10000	4	440.7	1.5	10000	34.2	440.8	1.6	64	18.3	433.7	0.1
40000	16	437.3	0.8	40000	123	437.4	0.8	100	56.0	433.8	0.0
160000	63	435.5	0.4	160000	473	435.7	0.4	400	106	433.9	0.0
490000	200	434.8	0.2	490000	1438	435.0	0.2	625	183	434.0	0.0
1000000	410	434.5	0.1	1000000	3191	434.7	0.2	1600	434	434.0	0.0
2250000	911	434.3	0.1	2250000	6399	434.4	0.1	2500	776	434.0	0.0
4000000	1605	434.2	0.0	4000000	11789	434.3	0.1	10000	2274	434.0	0.0
6250000	2501	434.1	0.0	6250000	19328	434.2	0.1	15625	4665	434.0	0.0
25000000	10019	434.1	0.0	25000000	72244	434.1	0.0	40000	11689	434.0	0.0

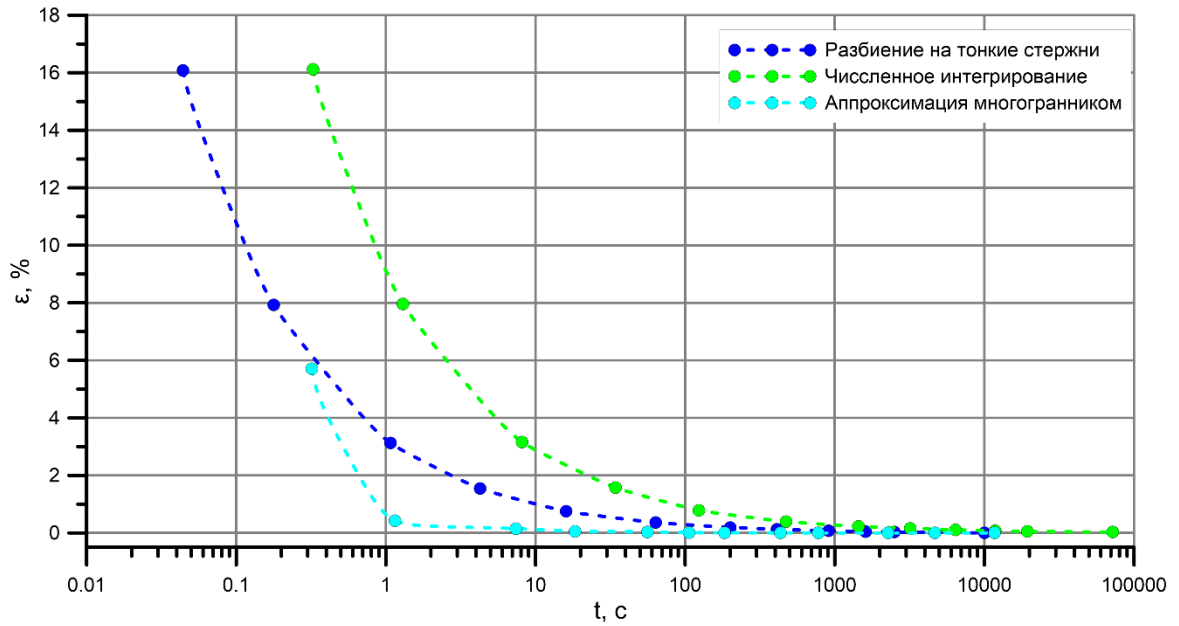


Рисунок 10 – Графики зависимости относительной ошибки от времени вычислений для различных подходов к решению прямой задачи для тессероида

Результаты показывают, наиболее быстрая сходимость характерна для решения прямой задачи путем аппроксимации многогранником. Наиболее затратным является подход, использующий численное интегрирование. Таким образом, при решении прямой задачи гравirazведки для модели сферической призмы рекомендуется применять подход, использующий аппроксимацию тессероида многогранником.

Далее была проведена оценка сходимости поля сферической призмы с плотностью  $1 \text{ г/см}^3$ , разбитой на стержни, в зависимости от количества элементов разбиения и глубины. Данный тест проводился для определения оптимального количества элементов разбиения, чтобы избежать лишних временных затрат при решении обратной задачи гравirazведки для Луны, разбитой на сеть ячеек. Оптимальным считалось количество элементов разбиения, при котором максимальное расхождение с эталонным полем не превышало  $\pm 0.05 \text{ мГал}$ , а максимальное относительное расхождение не превышало 5 %. Тест проводился для модели ячейки, которая в дальнейшем использовалась при подборе плотностных моделей Луны - размеры призмы  $0.7^\circ \times 0.5^\circ \times 2 \text{ км}$ . (Таблица 4; Рисунок 11).

Таблица 4 Зависимость оптимального количества элементов разбиения сферической призмы от глубины

Глубина центра призмы, км	Амплитуда поля ячейки, мГал	Разбиение на стержни			Численное интегрирование			Аппроксимация многогранником		
		$N_x N_y$	$\varepsilon, \%$	$t, c$	$N_x N_y$	$\varepsilon, \%$	$t, c$	$N_x N_y$	$\varepsilon, \%$	$t, c$
5	45.994	250000	0.08	114.46	250000	0.08	869.40	25	0.08	10.49
15	13.976	40000	0.33	12.66	40000	0.33	90.30	4	0.08	1.62
30	4.251	625	0.58	0.85	625	0.64	6.20	1	0.21	0.43
50	1.578	25	1.04	0.03	25	0.76	0.25	1	0.13	0.43
75	0.693	25	0.46	0.03	25	0.94	0.25	1	0.09	0.43
100	0.381	25	0.26	0.03	25	0.14	0.25	1	0.07	0.43
130	0.218	25	0.15	0.03	25	0.08	0.25	1	0.05	0.43
165	0.130	25	0.09	0.03	25	0.05	0.25	1	0.04	0.43
200	0.084	25	0.06	0.03	25	0.03	0.25	1	0.03	0.43

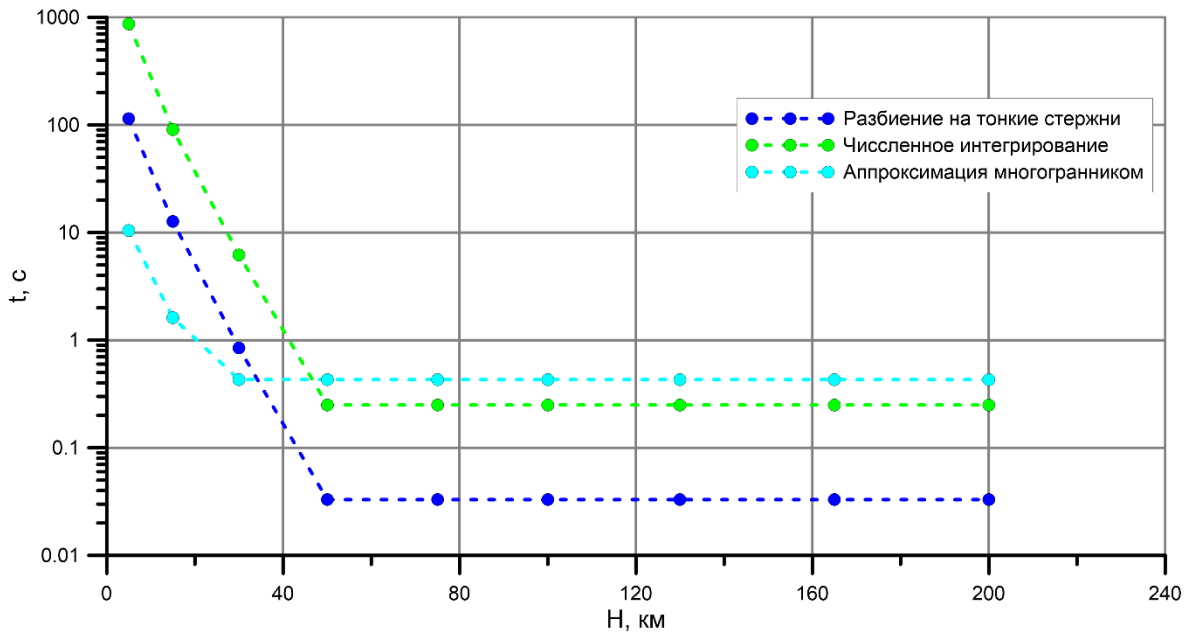


Рисунок 11 – График зависимости времени, необходимого на решение прямой задачи для сферической призмы с оптимальным количеством элементов разбиения, в зависимости от глубины ячейки

По результатам тестовых расчетов, можно сделать вывод, что для приповерхностных ячеек оптимально использование аппроксимации многогранником, поскольку численное интегрирование и разбиение на тонкие стержни демонстрируют более медленную сходимость. Начиная с глубины 50 км, для достаточного точного решения прямой задачи можно использовать

относительно небольшое количество элементов разбиения и оптимальным становится подход, использующий разбиение сферической призмы на тонкие стержни. Этот результат актуален для сферы радиуса 1738 км и позволяет в дальнейшем избежать лишних временных затрат при решении обратной задачи гравиразведки для Луны, разбитой на равномерную сеть ячеек.

### 2.3. Решение обратной задачи гравиразведки для точечного источника методом характерных точек<sup>3</sup>

Для быстрой оценки параметров источника аномалии гравитационного поля при его аппроксимации телом простой геометрической формы, в гравиразведке часто применяется метод характерных точек. В основе данного метода лежит связь геометрических параметров источников аномалий (например, глубины залегания) с расстояниями до характерных точек аномалии гравитационного поля (например, с точкой, в которой амплитуда аномалии уменьшается в 2 раза по сравнению с максимальной амплитудой).

Для анализа гравитационного поля, заданного на сфере, и построения начальных плотностных моделей также можно применять метод характерных точек. Для этого необходимо определить связь между характерными точками поля, заданного на сфере и параметрами источника.

На сфере заданного радиуса  $R$  гравитационный потенциал и сила притяжения достигают экстремума в точке с широтой и долготой равными широте и долготе точечной массы соответственно. Следовательно, в точке экстремума  $\theta_{\max} = \theta_0$  и  $\lambda_{\max} = \lambda_0$ :  $\cos\psi = 1$  и выражения для гравитационного потенциала и силы тяжести в точке экстремума имеют вид:

$$\begin{aligned} V_{\max} &= GM \frac{1}{R - R_0}, \\ V_{R_{\max}} &= GM \frac{1}{(R - R_0)^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Расстояние от начала координат до точечной массы  $R_0$  можно определить через отношение соответствующих компонент гравитационного поля сферы (гравитационного потенциала, силы притяжения) в точке  $P$  к максимальному значению:

<sup>3</sup>При подготовке данного раздела диссертации использована публикация, выполненная автором в соавторстве, в которой, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования:

1. Чепиго Л.С., Ткаченко Н.С., Лыгин И.В. Определение параметров точечного источника по гравитационному полю, заданному на сфере // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 4. Геология. 2019. № 2. С. 83–87. (0,31 п.л., авторский вклад 40%) Импакт-фактор РИНЦ: 0,38.

$$n = \frac{V(P)}{V_{max}} = \frac{R - R_0}{\sqrt{R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \psi}}, \quad (21)$$

$$k = \frac{V_R(P)}{V_{Rmax}} = \frac{(R - R_0 \cos \psi)(R - R_0)^2}{(R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \psi)^{3/2}}. \quad (22)$$

где  $n$  – отношение значений гравитационного потенциала в заданной точке и в точке экстремума,  $k$  – отношение значений силы притяжения в заданной точке и в точке экстремума.

Выражение (21) сводится к уравнению 2-й степени относительно  $R_0$ , которое имеет два корня: больше и меньше  $R$ , из которых условию задачи удовлетворяет только меньший, поскольку источник находится внутри сферы:

$$R_0^2 - 2RR_0 \frac{1 - n^2 \cos \psi}{1 - n^2} + R^2 = 0, \quad (23)$$

$$R_0 = \frac{k \sqrt{(1 - \cos \psi)(2 - k^2(1 + \cos \psi))} + k^2 \cos \psi - 1}{k^2 - 1} R.$$

Выражение (22) сводится к алгебраическому уравнению 6-й степени относительно  $R_0$ :

$$k_6 R_0^6 + k_5 R_0^5 + k_4 R_0^4 + k_3 R_0^3 + k_2 R_0^2 + k_1 R_0 + k_0 = 0,$$

$$k_6 = k^2 - \cos^2 \psi,$$

$$k_5 = R(4 \cos^2 \psi - 6k^2 \cos \psi + 2 \cos \psi),$$

$$k_4 = R^2(12k^2 \cos^2 \psi - 6 \cos^2 \psi + 3k^2 - 8 \cos \psi - 1), \quad (24)$$

$$k_3 = R^3(-8k^2 \cos^3 \psi + 4 \cos^2 \psi - 12k^2 \cos \psi + 12 \cos \psi + 4),$$

$$k_2 = R^4(12k^2 \cos^2 \psi - \cos^2 \psi + 3k^2 - 8 \cos \psi - 6),$$

$$k_1 = R^5(-6k^2 \cos \psi + 2 \cos \psi + 4),$$

$$k_0 = R^6(k^2 - 1).$$

Уравнение (24) решается численными методами (например, методом касательных) с заданной точностью. Среди шести возможных корней уравнения условию решаемой задачи соответствует единственное решение – действительное значение, величина которого меньше  $R$ .

Масса сферы определяется с учетом найденного положения центра сферы:

$$M = \frac{V_{max}(R - R_0)}{G},$$

$$M = \frac{V_{Rmax}(R - R_0)^2}{G}.$$
(25)

Таким образом, положение и массу точечного источника или центр масс сферического источника гравитационного поля можно определить двумя способами: по гравитационному потенциалу и радиальной составляющей силы притяжения. В первом случае оба параметра определяются аналитически, во втором случае глубина центра масс определяется численно, а масса аналитически по значениям глубины и амплитуды аномалии.

#### 2.4. Решение обратной задачи гравиразведки для тонкого радиального стержня методом характерных точек

При рассмотрении решения обратной задачи методом характерных точек для тонкого радиального стержня будем предполагать, что глубина его нижней границы много больше глубины верхней границы, то есть  $R_1 \rightarrow 0$ . Для решения обратной задачи будем использовать только выражения для радиальной составляющей силы притяжения. Для простоты заменим обозначение глубины верхней границы стержня на  $R_0$ .

Как и в случае точечного источника, экстремум силы притяжения достигается в точке непосредственно над источником аномалии, то есть экстремума  $\theta_{max} = \theta_0$  и  $\lambda_{max} = \lambda_0$ ,  $\cos\psi = 1$ . Тогда выражение для максимального значения радиальной составляющей силы притяжения:

$$V_{Rmax} = \frac{G\sigma_L R_0}{R(R - R_0)}$$
(26)

Запишем выражение для отношения силы притяжения стержня в произвольной точке к значению в точке экстремума:

$$n = \frac{V_R}{V_{Rmax}} = \frac{R - R_0}{\sqrt{R_0^2 + R^2 - 2R_0 R \cos\psi}}$$
(27)

Выражение (27) сводится к квадратному уравнению относительно  $R_0$ , которое имеет два корня:



$$n^2 = \frac{R^2 - 2R_0R + R_0^2}{R_0^2 + R^2 - 2R_0R\cos\psi}$$

$$(1 - n^2)R_0^2 - 2R_0R(1 - n^2\cos\psi) + (1 - n^2)R^2 = 0 \quad (28)$$

$$R_0 = R \frac{1 - n^2\cos\psi \pm n\sqrt{(1 - \cos\psi)(2 - n^2\cos\psi - n^2)}}{1 - n^2}$$

Очевидно, что интерес представляет только решение для внутренней области. Таким образом, итоговое выражение для расстояния от центра сферы до верхней кромки радиального тонкого стержня и глубины выглядит следующим образом:

$$R_0 = R \frac{1 - n^2\cos\psi - n\sqrt{(1 - \cos\psi)(2 - n^2\cos\psi - n^2)}}{1 - n^2} \quad (29)$$

$$h = R - R_0$$

Далее, по рассчитанной глубине залегания верхней границы стержня и по амплитуде аномалии можно определить его линейную плотность:

$$\sigma_L = \frac{V_{Rmax}R(R - R_0)}{GR_0} \quad (30)$$

Таким образом, для тонкого радиального стержня получены выражения для глубины залегания верхней кромки и его линейной плотности. Оба параметра определяются аналитически: глубина определяется через отношение величины аномалии радиальной составляющей силы тяжести в произвольной точке к величине аномалии в точке экстремума; избыточная линейная плотность стержня определяется через амплитуду аномалии и глубину залегания его верхней границы.

## 2.5. Заключение по Главе 2

По результатам, описанным в текущей главе, были сформулированы следующие защищаемые положения:

- Алгоритм решения прямой задачи гравиразведки для сферической призмы на основе ее аппроксимации набором тонких радиальных стержней;
- Методика решения обратной задачи гравиразведки для тел простой формы по полю, заданному на сферической поверхности.

### Глава 3. Решение обратной задачи гравirazведки с глубинной нормализацией функционала невязки

#### 3.1. Математические основы и проблемы решения обратной задачи гравirazведки для сеточных моделей<sup>4</sup>

Рассмотрим математические основы автоматизированного решения обратной задачи гравirazведки для сеточных моделей. Сеточная модель представляет собой прямоугольную область, разбитую на множество элементов простой формы. В пределах каждого элемента физические свойства остаются постоянными. В качестве элементов разбиения в двумерном случае обычно применяется бесконечная, ортогональная координатной плоскости прямоугольная призма.

Для случая, когда расчетные точки находятся на поверхности сеточной модели, а их горизонтальные координаты совпадают с горизонтальными координатами центров ячеек (либо узлов сетки) прямую и обратную задачу гравirazведки можно записать в матричном виде:

$$V_z = A\sigma$$

$$A = \begin{pmatrix} V_{z_{111}} & V_{z_{112}} & \dots & V_{z_{1,jk}} & \dots & V_{z_{1NM}} \\ V_{z_{211}} & V_{z_{212}} & \dots & V_{z_{2,jk}} & \dots & V_{z_{2NM}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{z_{i11}} & V_{z_{i12}} & \dots & V_{z_{i,jk}} & \dots & V_{z_{iNM}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{z_{N11}} & V_{z_{N12}} & \dots & V_{z_{N,jk}} & \dots & V_{z_{NNM}} \end{pmatrix}, V_z = \begin{pmatrix} V_{z_1} \\ V_{z_2} \\ \dots \\ V_{z_i} \\ \dots \\ V_{z_N} \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \dots \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \dots \\ \sigma_{ij} \\ \dots \\ \sigma_{MN} \end{pmatrix} \quad (31)$$

где  $A$  – оператор прямой задачи,  $V_{z_{ijk}}$  – сила притяжения  $jk$ -й ячейки с единичной плотностью в  $i$ -й точке,  $V_z$  – вектор наблюдаемого поля,  $\sigma$  – вектор-столбец плотности.

<sup>4</sup>При подготовке данного раздела диссертации использована публикация, выполненная автором в соавторстве, в которой, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования:

1. **Чепиго Л.С.**, Лыгин И.В., Булычев А.А. Решение обратной задачи гравirazведки с переменной скоростью градиентного спуска // Геофизические исследования, издательство ИФЗ РАН (М.) 2022, том 23, № 1, с. 5-19 (0,94 п.л., авторский вклад 40%) Импакт-фактор РИНЦ: 0,65.
2. Лыгин И.В., **Чепиго Л.С.**, Соколова Т.Б., Кузнецов К.М., Булычев А.А. Методика геоплотностного и геомагнитного интерактивного моделирования в зависимости от объема и состава априорной геолого-геофизической информации // Геофизика, издательство М.: Ред.-изд. Центр ЕАГО (Тверь: Полипресс) 2022, № 6, с. 57-70 (0,88 п.л., авторский вклад 40%) Импакт-фактор РИНЦ: 0,37.

В случае решения обратной задачи для сеточной модели, состоящей более чем из одного слоя, система уравнений (31) является недоопределенной и имеет бесконечное число решений.

Стандартным подходом к решению задачи (31) является минимизация функционала невязки  $L$ , включающего в себя наложение ограничений на распределение плотности с учетом априорных данных:

$$L = \|A\sigma - Vz\|^2 + c \|\sigma - \sigma_A\|^2 \rightarrow \min, \quad (32)$$

где  $c$  – постоянная величина, характеризующая уровень вклада априорных данных,  $\sigma_A$  – вектор априорных значений плотности.

Аналитическое решение данной задачи записывается в виде:

$$\sigma = (A^T A + c)^{-1} (AVz + c\sigma_A) \quad (33)$$

На практике аналитическое решение используется редко ввиду кубической сложности вычисления обратной матрицы, из-за чего временные затраты при решении обратной задачи.

Модели, подбираемые с помощью стандартного подхода к решению обратной задачи гравиразведки как системы линейных алгебраических уравнений, могут применяться при обработке данных, например для трансформаций полей на основе истокообразной аппроксимации, однако обычно они непригодны для оценки параметров аномалиеобразующих тел и геологической интерпретации.

Альтернативным подходом к решению задачи (31) является применение методов оптимизации, например, метода градиентного спуска [Гребенникова, 2017; Gill et al., 1982; Strutz, 2011]. На каждой итерации градиентного спуска вычисляется вектор-градиент функционала невязки, после чего вектор плотности смещается в направлении анти-градиента:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{n-1} - \alpha \nabla L(\sigma_{n-1}), \\ \nabla L(\sigma_{n-1}) &= 2A^T (A\sigma_{n-1} - Vz) + 2c(\sigma_{n-1} - \sigma_A) \end{aligned} \quad (34)$$

где  $\alpha$  – скорость градиентного спуска и является постоянным множителем.

При таком подходе максимальные значения градиента функционала невязки, а значит и наибольшие изменения плотности на каждом шаге, соответствуют приповерхностным ячейкам (Рисунок 12), поскольку шаг градиентного спуска для каждого значения плотности вычисляется как скалярное произведение вектора эффектов с вектором невязки. Та же проблема возникает и

при аналитическом решении обратной задачи гравirazведки как системы линейных алгебраических уравнений [Кобрунов, 2008; Кобрунов, Варфоломеев, 1981].

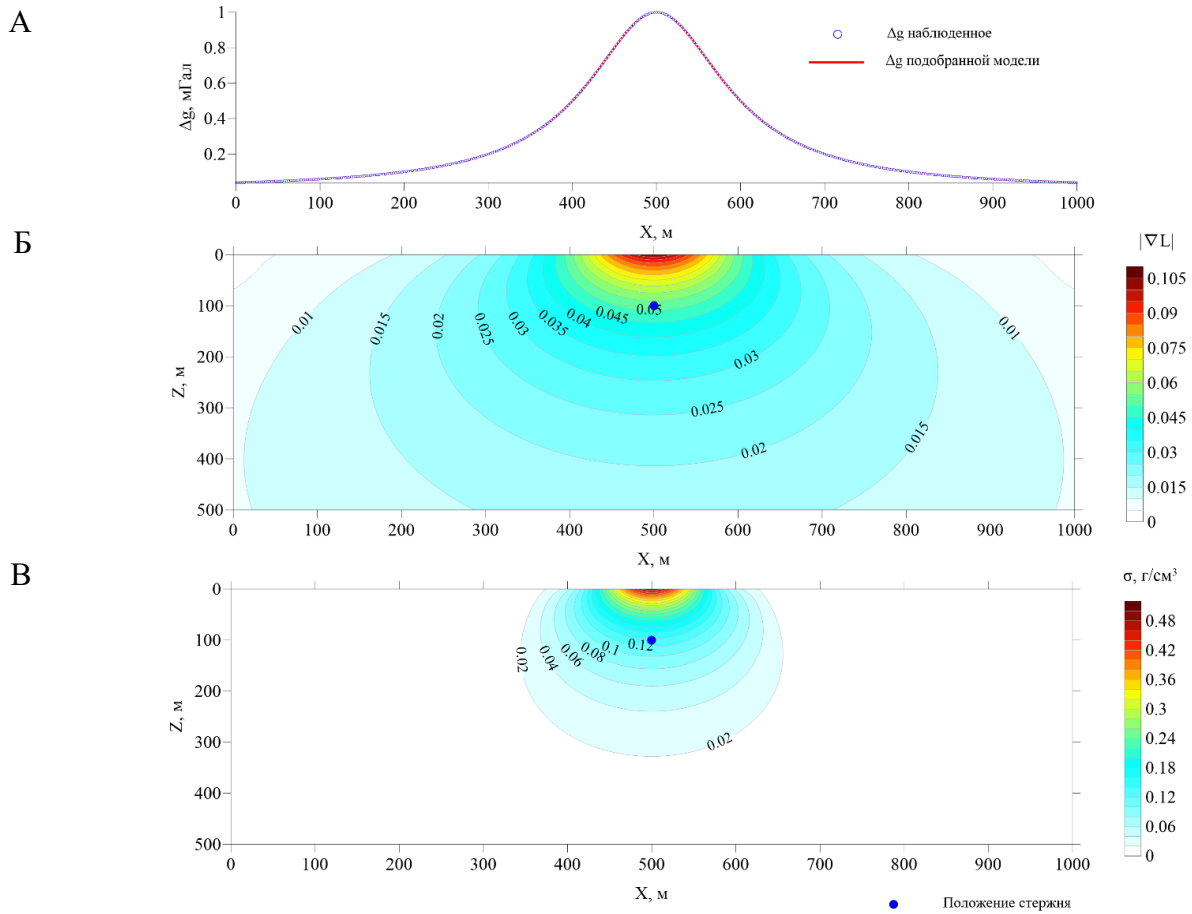


Рисунок 12 – Результаты подбора плотностной модели без априорной информации: А – модуль градиента функционала невязки при решении обратной задачи с нулевой начальной моделью для поля бесконечного горизонтального стержня (1-я итерация); Б – результат подбора плотностной модели по полю бесконечного горизонтального стержня без использования априорной информации

Таким образом, при использовании выражений (31) – (34) для автоматического решения обратной задачи гравirazведки, подбирается плотностная модель с контрастным приповерхностным слоем, а глубокие ячейки практически не участвуют в процессе подбора модели.

В случае наличия априорной плотностной модели, подобранная модель будет отличаться от нее контрастным приповерхностным слоем. Регуляризация также не всегда позволяет добиться качественного результата.

Стоит отметить, что описанный выше подход к решению обратной задачи имеет важное преимущество – скорость вычислений. Решение прямой задачи, необходимое для вычисления шага градиентного спуска, для каждого слоя может быть записано в виде свертки функции,

описывающей зависимость плотности от координаты (или координат в случае трехмерной задачи), с силой притяжения ячейки с единичной плотностью. Как было показано ранее в Главе 1, в таком случае решение прямой задачи может осуществляться в частотной области, что уменьшает временные затраты. Проанализируем асимптотику решения обратной задачи.

### 3.1.1. Асимптотика решения обратной задачи и временные затраты

На каждой итерации после решения прямой задачи осуществляется вычисление шага градиентного спуска для каждой ячейки. Для каждого слоя эта операция также может быть записана в виде свертки функции  $V_{z1}$ , описывающей силу притяжения ячейки с единичной плотностью, с функцией  $\Delta V_z$ , описывающей расхождение между наблюдаемым гравитационным полем  $V_z$  и полем текущей модели  $A\sigma$ :

$$\begin{aligned}\Delta V_z &= A\sigma - V_z \\ \Delta\sigma &= (V_{z1} * \Delta V_z) \\ \hat{\Delta\sigma} &= \hat{V}_{z1} \hat{\Delta V}_z\end{aligned}\tag{35}$$

Приведем сравнение асимптотики каждого из шагов при решении обратной задачи в действительной и частотной областях, выполняющихся при подборе двумерной (Таблица 5), трехмерной плоской (Таблица 6) и трехмерной сферической (Таблица 7) плотностных моделей с помощью метода градиентного спуска, а также итоговую асимптотику при одной итерации.

Будем считать, что двумерная модель состоит из  $N_z$  слоев, каждый из которых разбит на  $N_x$  ( $N_x$  является одной из степеней числа 2) ячеек. Трехмерная плоская модель также разбита  $N_z$  слоев по вертикали и  $N_x \times N_y$  ячеек по горизонтали, каждое из значений  $N_x$  и  $N_y$  является степенью числа 2. Трехмерная сферическая модель разбита на  $N_R$  слоев по радиусу и  $N_\lambda \times N_\theta$  ячеек по долготе и широте соответственно, при этом  $N_\lambda$  является степенью числа 2.

Таблица 5 Сравнение асимптотики решения двумерной обратной задачи в действительной и частотной области

Действие в пределах одной итерации	Асимптотика при решении обратной задачи в действительной области	Асимптотика при решении обратной задачи в частотной области
Прямое преобразование Фурье начальной плотностной модели	-	$O(N_z N_x \log N_x)$
Решение прямой задачи	$O(N_z N_x^2)$	$O(N_z N_x)$
Расчет расхождения между прямой и обратной задачей	$O(N_x)$	$O(N_x)$
Расчет шага градиентного спуска для всех ячеек	$O(N_z N_x^2)$	$O(N_z N_x)$
Обратное преобразование Фурье	-	$O(N_z N_x \log N_x)$
Итоговая асимптотика при одной итерации	$O(N_z N_x^2)$	$O(N_z N_x \log N_x)$

Таблица 6 Сравнение асимптотики решения трехмерной плоской обратной задачи в действительной и частотной области

Действие в пределах одной итерации	Асимптотика при решении обратной задачи в действительной области	Асимптотика при решении обратной задачи в частотной области
Прямое преобразование Фурье начальной плотностной модели	-	$O(N_z N_x N_y \log N_x N_y)$
Решение прямой задачи	$O(N_z N_x^2 N_y^2)$	$O(N_z N_x N_y)$
Расчет расхождения между прямой и обратной задачей	$O(N_x N_y)$	$O(N_x N_y)$
Расчет шага градиентного спуска для всех ячеек	$O(N_z N_x^2 N_y^2)$	$O(N_z N_x N_y)$
Обратное преобразование Фурье	-	$O(N_z N_x N_y \log N_x N_y)$
Итоговая асимптотика при одной итерации	$O(N_z N_x^2 N_y^2)$	$O(N_z N_x N_y \log N_x N_y)$

Таблица 7 Сравнение асимптотики решения трехмерной сферической обратной задачи в действительной и частотной области

Действие в пределах одной итерации	Асимптотика при решении обратной задачи в действительной области	Асимптотика при решении обратной задачи в частотной области
Прямое преобразование Фурье начальной плотностной модели	-	$O(N_R N_\theta N_\lambda \log N_\lambda)$
Решение прямой задачи	$O(N_R N_\theta^2 N_\lambda^2)$	$O(N_R N_\theta^2 N_\lambda)$
Расчет расхождения между прямой и обратной задачей	$O(N_\theta N_\lambda)$	$O(N_\theta N_\lambda)$
Расчет шага градиентного спуска для всех ячеек	$O(N_R N_\theta^2 N_\lambda^2)$	$O(N_R N_\theta^2 N_\lambda)$
Обратное преобразование Фурье	-	$O(N_R N_\theta N_\lambda \log N_\lambda)$
Итоговая асимптотика при одной итерации	$O(N_R N_\theta^2 N_\lambda^2)$	$O(N_R N_\theta^2 N_\lambda)$

Проанализируем увеличение временных затрат при увеличении количества ячеек в 2 раза вдоль каждой из осей для двумерных и трехмерных моделей для одной итерации.

$$\begin{aligned}
 t_{R2D}(N) &\sim N_z N_x^2 \\
 t_{R2D}(2N) &\sim 2N_z (2N_x)^2 = 8N_z N_x^2 \\
 t_{S2D}(N) &\sim N_z N_x \log N_x \\
 t_{S2D}(2N) &\sim 4N_z N_x \log(2N_x) \\
 \frac{t_{S2D}(2N)}{t_{S2D}(N)} &\sim \frac{4 \log(2N_x)}{\log N_x} = 4 \log_{N_x} 2N_x = 4(\log_{N_x} 2 + 1) \\
 t_{R3DF}(N) &\sim N_z N_x^2 N_y^2 \\
 t_{R3DF}(2N) &\sim 2N_z (2N_x)^2 (2N_y)^2 = 32N_z N_x^2 N_y^2 \\
 t_{S3DF}(N) &\sim N_z N_x N_y \log N_x N_y \\
 t_{S3DF}(2N) &\sim 8N_z N_x N_y \log(4N_x N_y) \\
 t_{S3DF}(N) &\sim N_R N_\theta^2 N_\lambda \\
 t_{S3DF}(N) &\sim 2N_R (2N_\theta)^2 2N_\lambda = 16N_R N_\theta^2 N_\lambda,
 \end{aligned} \tag{36}$$

где  $t_{R2D}$ ,  $t_{R3DF}$  и  $t_{R3DS}$  – длительность решения двумерной, трехмерной плоской и трехмерной сферической обратных задач гравиразведки в действительной области;  $t_{S2D}$ ,  $t_{S3DF}$  и  $t_{S3DS}$  – длительность решения двумерной, трехмерной плоской и трехмерной сферической обратных задач гравиразведки в частотной области.

Таким образом, при больших значениях  $N_x$  и  $N_y$  при детализации сети ячеек в 2 раза вдоль каждой оси, решение двумерной, трехмерной плоской и трехмерной сферической обратных задач в действительной области потребует примерно в 8, 32 и 32 раза больше времени, соответственно.

В аналогичной ситуации прирост длительности решения обратной задачи в частотной области составит  $4(\log_{N_x} 2 + 1)$ ,  $8(\log_{N_x N_y} 4 + 1)$  и 16 раз соответственно. При больших значениях  $N_x$  и  $N_y$  прирост времени, необходимого для решения двумерной и плоской трехмерной задачи в частотной области, стремится к 4 и 8 соответственно.

Следовательно, решение обратной задачи в частотной области имеет большую производительность по сравнению с решением в действительной области несмотря на необходимость выполнения дополнительных шагов: расчета прямого и обратного преобразований для наблюдаемого и рассчитанного полей, а также плотности ячеек.

### 3.2. Применение переменной скорости градиентного спуска при автоматическом подборе сеточных плотностных моделей<sup>5</sup>

Множество исследований посвящено решению проблемы, связанной со снижением чувствительности функционала невязки к изменению плотности глубоких ячеек. Различные авторы предлагают следующие решения: регуляризация [Тихонов, 1965; Тихонов, Арсенин, 1979], в частности, использование весовых функций [Li, Oldenbutg 1996; 1998], либо решение обратной задачи с помощью проекционного метода решения систем линейных алгебраических уравнений [Баландин, Шурина, 2000; Brezinski, 1997; Maess, 1988; Boyd, Dattorro, 2003]. В случае отсутствия достоверных априорных данных, перечисленные подходы не позволяют получить результат значительно отличающийся от стандартного, то есть они также сводятся к подбору

---

<sup>5</sup>При подготовке данного раздела диссертации использована публикация, выполненная автором в соавторстве, в которой, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования:

1. **Чепиго Л.С.**, Лыгин И.В., Булычев А.А. Решение обратной задачи гравиразведки с переменной скоростью градиентного спуска // Геофизические исследования, издательство ИФЗ РАН (М.) 2022, том 23, № 1, с. 5-19 (0,94 п.л., авторский вклад 40%) Импакт-фактор РИНЦ: 0,65.
2. Лыгин И.В., **Чепиго Л.С.**, Соколова Т.Б., Кузнецов К.М., Булычев А.А. Методика геоплотностного и геомагнитного интерактивного моделирования в зависимости от объема и состава априорной геолого-геофизической информации // Геофизика, издательство М.: Ред.-изд. Центр ЕАГО (Тверь: Полипресс) 2022, № 6, с. 57-70 (0,88 п.л., авторский вклад 40%) Импакт-фактор РИНЦ: 0,37.



модели с контрастным по подбираемому параметру приповерхностным слоем. В случае отсутствия обширных априорных данных о строении разреза (как, например, в случае исследования глубинного строения космических тел по их гравитационному полю), необходим подход к автоматизированному решению обратной задачи, позволяющий регулировать вклад ячеек в процесс подбора в зависимости от глубины и производить оценку хотя бы центра масс в автоматическом режиме.

### 3.2.1. Зависимость градиента функционала невязки от глубины для двумерного и трехмерного случаев

Рассмотрим зависимость градиента функционала невязки от глубины для поля бесконечного горизонтального тонкого стержня с линейной плотностью  $\sigma_L$ , расположенного в точке с координатами  $(0; z_0)$ . В качестве элементов разбиения сеточной модели для простоты также будем использовать тонкий стержень. Выражение для градиента функционала невязки, для элементов, расположенных на оси  $oZ$  (то есть под центром аномалии), в двумерном случае определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla L(0, z) &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} -\Delta g(x, z_0) \Delta g(x, z) dx = -8G^2 \sigma_L \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{z_0 z}{(x^2 + z_0^2)(x^2 + z^2)} \right) dx = \\ &= -8G^2 \sigma_L \frac{z_0 z}{z^2 - z_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{x^2 + z_0^2} - \frac{1}{x^2 + z^2} \right) dx = -8G^2 \sigma_L \frac{z_0 z}{z^2 - z_0^2} \left( \frac{1}{z_0} \operatorname{arctg} \frac{x}{z_0} - \frac{1}{z} \operatorname{arctg} \frac{x}{z} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \\ &= -8G^2 \sigma_L \frac{z \operatorname{arctg} \frac{x}{z_0} - z_0 \operatorname{arctg} \frac{x}{z}}{z^2 - z_0^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{8\pi G^2 \sigma_L}{z + z_0} \end{aligned} \quad (37)$$

Аналогичным образом рассмотрим выражение для градиента функционала невязки в трехмерном случае. Для простоты в качестве элементов разбиения будем использовать точечные источники, а в качестве наблюдаемого поля будем использовать поле точечного источника, расположенного в точке с координатами  $(0, 0, z_0)$ . Получим выражение для градиента функционала невязки для ряда элементов, расположенных под точкой экстремума поля:

$$\begin{aligned} \nabla L(0, 0, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} V_z(x, y, z_0) V_z(x, y, z) dx dy = \\ &= G^2 M \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_0 z}{((x^2 + y^2 + z_0^2)(x^2 + y^2 + z^2))^{\frac{3}{2}}} dx dy = -\frac{2\pi G^2 M}{(z + z_0)^2} \end{aligned} \quad (38)$$

Схожие результаты для трехмерных моделей были получены численно и другими исследователями, в частности они описаны в статьях [Li, Oldenburg 1996; 1998]. Авторы предлагают использовать глубинную весовую функцию для учета низкой чувствительности алгоритма к глубоким ячейкам. Весовая функция используется в виде регуляризирующего функционала, «штрафующего» модель за высокие значения избыточных плотностей в верхней части разреза:

$$L = \|A\sigma - Vz\|^2 + w(z) \|\sigma - \sigma_A\|^2 \rightarrow \min$$

$$w(z) \sim \frac{1}{(z+z_0)^2}$$
(39)

Также весовая функция может зависеть и от горизонтальных (или угловых в случае решения обратной задачи на сфере) координат, однако это возможно только в случае наличия достоверной априорной информации о распределении плотности. В противном случае, при фиксированном значении  $z_0$  максимальные избыточные плотности будут концентрироваться на одной глубине.

Альтернативой вышеописанного подхода к учету затухания чувствительности функционала невязки с глубиной является использование в качестве скорости градиентного спуска функции, зависящей от глубины:

$$\alpha(z) = \alpha_0 z^n$$

$$\sigma_n = \sigma_{n-1} - \alpha(z) \nabla L(\sigma_{n-1})$$
(40)

Данный подход позволит искусственно увеличить шаг градиентного спуска для глубоких ячеек и включить их в процесс подбора плотностной модели [Чепиги и др., 2022].

В случае наличия априорных данных степень возрастания скорости градиентного спуска с глубиной может подбираться исходя из соответствия подбираемой модели априорным данным. В противном случае, когда априорные данные отсутствуют, предлагается использовать в качестве скорости градиентного спуска функцию, возрастающую с глубиной со степенью из интервала [1, 2], границы указанного интервала соответствуют вытянутым и изолированным объектам соответственно.

### 3.3. Пример решения плоской обратной задачи гравirazведки с нормализацией функционала невязки для двумерных моделей

В качестве примера приведем тест на двумерной модели, состоящей из двух контрастных неоднородностей: бесконечный горизонтальный цилиндр (глубина верхней кромки 150 м, диаметр 100м) и бесконечная по горизонтали призма (глубина верхней кромки 100 м, высота 350 м, ширина 100 м), гравитационные эффекты которых не пересекаются (Рисунок 13; Таблица 8). Для профиля длиной 5 км составлена плотностная модель до глубины 1 км с равномерным разбиением по сети ячеек размером 10 x 2 м (

Таблица 9).

Для тестовой модели решена прямая двумерная задача, к результату которой добавлен шум с максимальной амплитудой 5% от максимальной амплитуды аномалии, то есть примерно  $\pm 0.03$  мГал. Зашумленное поле модели в дальнейшем использовано в качестве наблюдаемого при решении обратной задачи. Тестовые расчеты выполнены в программном обеспечении GravInv2D [Чепиго, 2019].

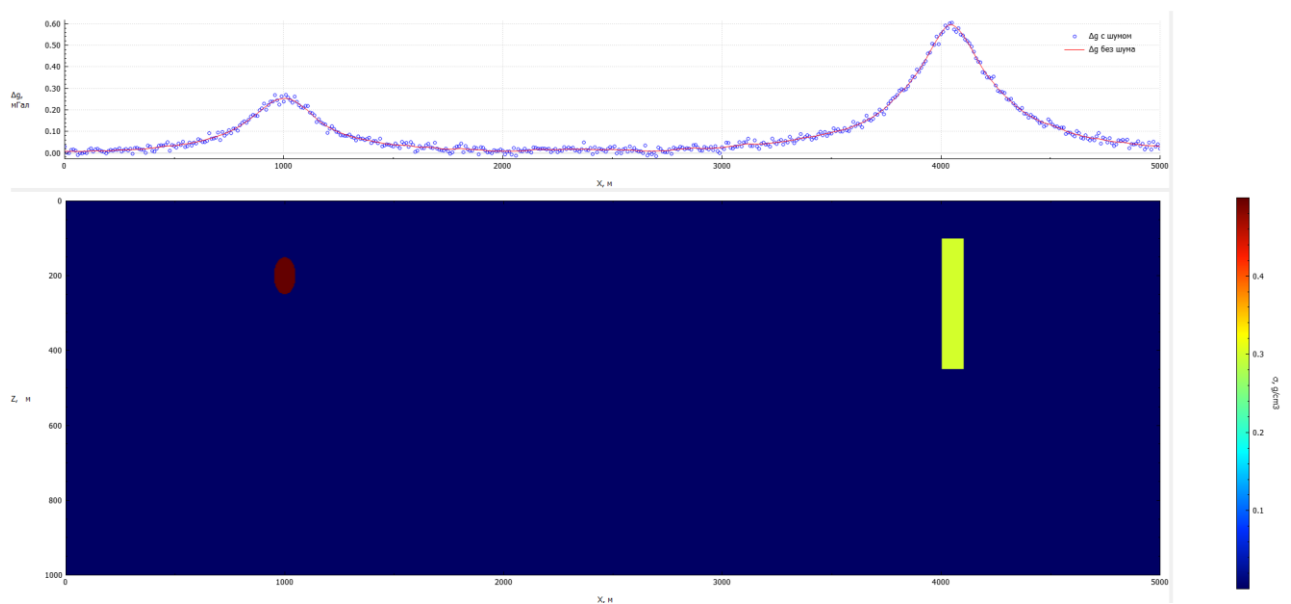


Рисунок 13 – Тестовая двумерная модель с зашумленным полем силы притяжения

Таблица 8 Параметры неоднородностей тестовой двумерной модели

Параметр	Цилиндр	Призма
$\Delta\sigma$ (г/см <sup>3</sup> )	0.5	0.3
$Z_{\min}$ (м)	150	100
$Z_{\max}$ (м)	250	450
$X_{\min}$ (м)	950	4000
$X_{\max}$ (м)	1050	4100
$\Delta V_z$ (мГал)	0.26	0.59

Таблица 9 Параметры сетки тестовой двумерной модели

Длина профиля (м)	5000
Максимальная глубина (м)	1000
Количество ячеек по горизонтали	501
Количество ячеек по вертикали	501
Длина ячейки (м)	10
Высота ячейки (м)	2

Решение обратной задачи выполнено без использования априорных данных с постоянной скоростью градиентного спуска, а также с тремя значениями степени возрастания с глубиной: 1, 1.5 и 2. Также при решении обратной задачи для локализации неоднородностей использован фокусирующий оператор, «штрафующий» малые значения избыточных плотностей:

$$F(\sigma) = \frac{1}{c} \| e^{-k(\sigma-\sigma_0)^2} + e^{-k(\sigma+\sigma_0)^2} \|, \quad (41)$$

где  $k$  – параметр, характеризующий крутизну спада,  $\sigma_0$  – параметр, характеризующий положение максимума функционала.

Данный оператор имеет локальный минимум в нуле, два локальных максимума в точках  $\pm\sigma_0$ , а также стремится к нулю при увеличении модуля плотности после перехода через пороговое значение  $\sigma_0$  (Рисунок 14). Таким образом, при добавлении выражения (41) к функционалу невязки (32) и последующей минимизации функционала невязки, будет подбираться модель, в которой избыточные плотности либо близки к нулю, либо имеют значения, выше порогового. При подборе моделей использованы значения  $k = 500$  и  $\sigma_0 = 0.1$  г/см<sup>3</sup>.

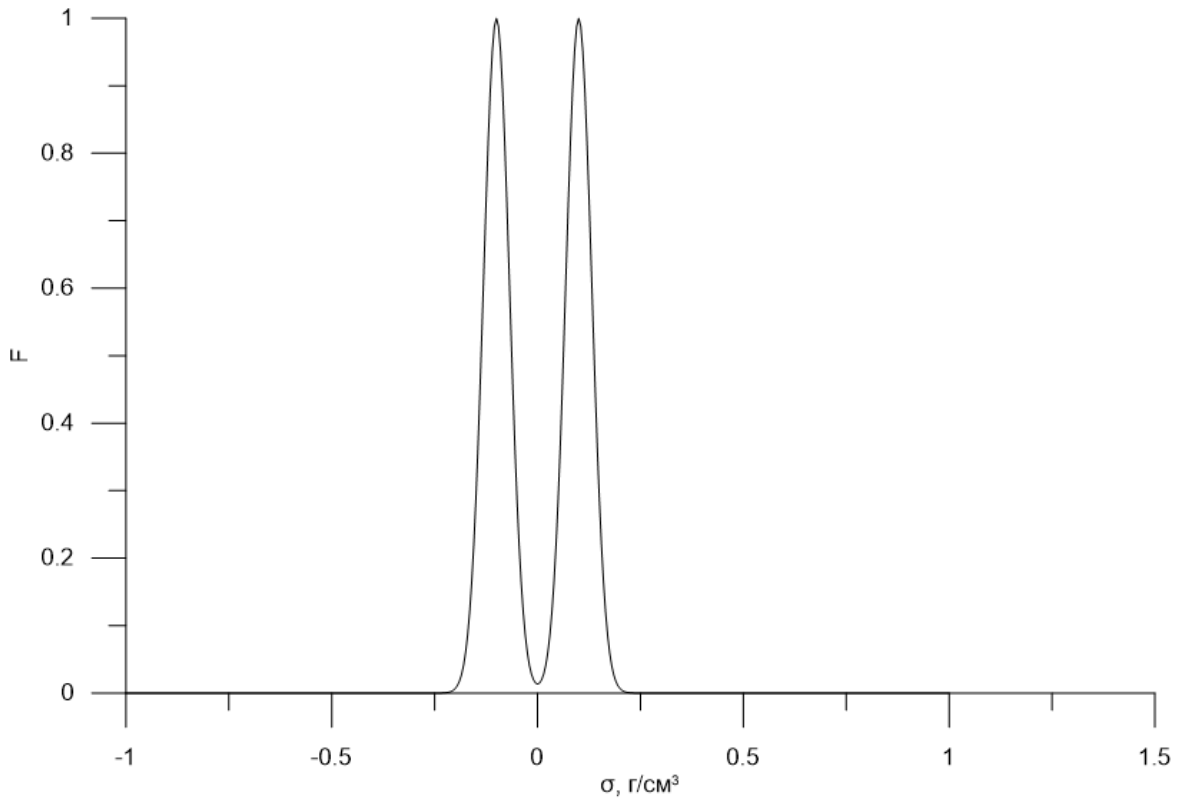


Рисунок 14 – График фокусирующего оператора при значениях  $k = 500$  и  $\sigma_0 = 0.1$  г/см<sup>3</sup>

При каждом значении степени параметра  $\alpha$  подобрана модель, после чего произведено сопоставление результатов подбора с истинной моделью (Рисунок 15, Таблица 10). Для оценки качества подбора вычислены погрешности определения координат центра масс для каждой неоднородности. Координаты центра масс определялись по экстремуму плотности. В каждом случае относительное расхождение между гравитационным полем подобранной модели и наблюдаемым полем составило менее 1%.

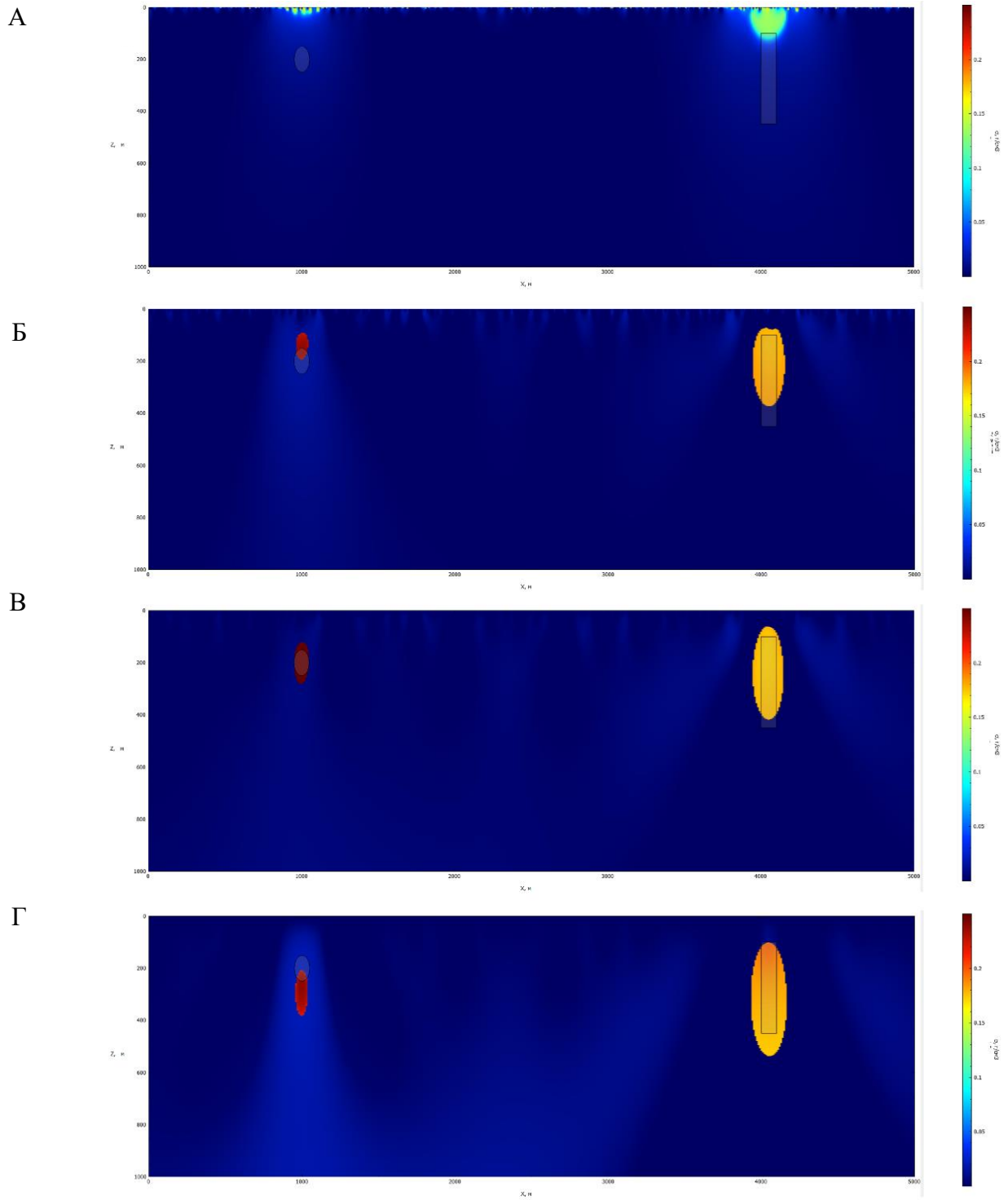


Рисунок 15 – Разрезы, полученные в результате подбора распределения плотности при А –  $\alpha = \text{const}$ ; Б –  $\alpha \sim z$ ; В –  $\alpha \sim z^{1.5}$ ; Г –  $\alpha \sim z^2$ . Истинные границы плотностных неоднородностей показаны черным контуром

Таблица 10 Сравнение результатов подбора двумерных плотностных моделей

Степень возрастания $\alpha$	0	1	1.5	2
Цилиндр				
Глубина центра масс цилиндра, полученная при решении обратной задачи (м)	0	140	195	280
Абсолютная погрешность определения глубины центра масс цилиндра (м)	200	60	5	80
Относительная погрешность определения глубины центра масс цилиндра (%)	100	30	2.5	40
Призма				
Глубина центра масс призмы (м)	0	215	260	300
Абсолютная погрешность определения глубины центра масс призмы (м)	275	60	15	25
Относительная погрешность определения глубины центра масс призмы (%)	100	22	5	9

Наилучшие результаты подбора были получены при  $\alpha \sim z^{1.5}$  – в обоих случаях относительная погрешность определения глубины центра масс составила не более 5%.

Во всех случаях получены заниженные оценки избыточной плотности, т.к. объем подобранных неоднородностей превышает объем модельных тел.

Таким образом, можно сделать вывод – даже в случае отсутствия априорных данных, при использовании переменной скорости градиентного спуска можно производить оценку глубины залегания центра масс, а также приблизительной формы неоднородности. Однако, для оценки избыточной плотности необходимо привлечение априорных данных, поскольку подобранные значения избыточной плотности могут значительно отличаться от истинных.

### 3.4. Пример решения плоской обратной задачи гравirazведки с нормализацией функционала невязки для трехмерных моделей

Для оценки возможностей предлагаемого подхода в трехмерном варианте также было проведено тестирование.

Рассмотрим тестовую модель, состоящую из трех локальных изометричных неоднородностей, расположенных на разных глубинах и разнесенных по горизонтали так, чтобы их гравитационные эффекты не пересекались (Рисунок 16, Таблица 11). Каждая неоднородность представляет собой поднятие над нижележащим горизонтальным слоем. Плотностная модель построена до глубины 1 км и разбита на сеть ячеек размером 25 x 25 x 5 м, образующих куб из 200x200x200 ячеек (Таблица 12).

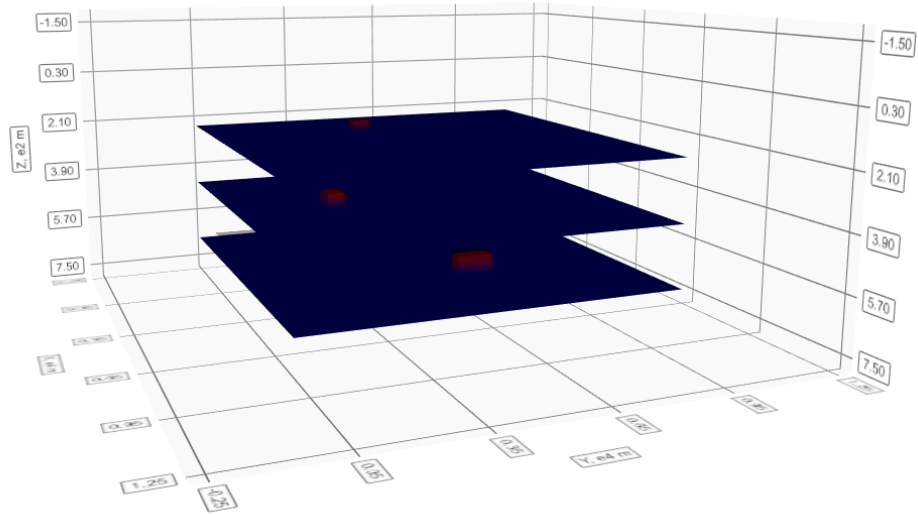


Рисунок 16 Тестовая трехмерная модель

Таблица 11 Параметры неоднородностей тестовой трехмерной модели

Параметр	Неоднородность 1	Неоднородность 2	Неоднородность 3
$\Delta\sigma$ (г/см <sup>3</sup> )	0.3	0.4	0.3
$Z_{\min}$ (м)	170	360	550
$Z_{\max}$ (м)	200	400	600
$X_{\min}$ (м)	2000	4000	6000
$X_{\max}$ (м)	2500	4750	6500
$Y_{\min}$ (м)	4000	2500	5500
$Y_{\max}$ (м)	4500	3000	6500
$\Delta V_z$ (мГал)	0.178	0.179	0.115

Таблица 12 Параметры сетки тестовой трехмерной модели

Размеры площади (м)	10 000 x 10 000
Максимальная глубина (м)	1 000
Количество ячеек по горизонтали	200 x 200
Количество ячеек по вертикали	200
Горизонтальные размеры ячейки (м)	25 x 25
Высота ячейки (м)	5



Гравитационное поле тестовой модели с шумом (Рисунок 17), как и в двумерном случае, использовано при решении обратной задачи в качестве наблюдаемого. В трехмерном тесте амплитуда шума также составила примерно 0.03 мГал, что составляет примерно 15% от максимальной амплитуды аномалии. Тестовые расчеты выполнены в программном обеспечении GravInv3D [Чепиго, 2020].

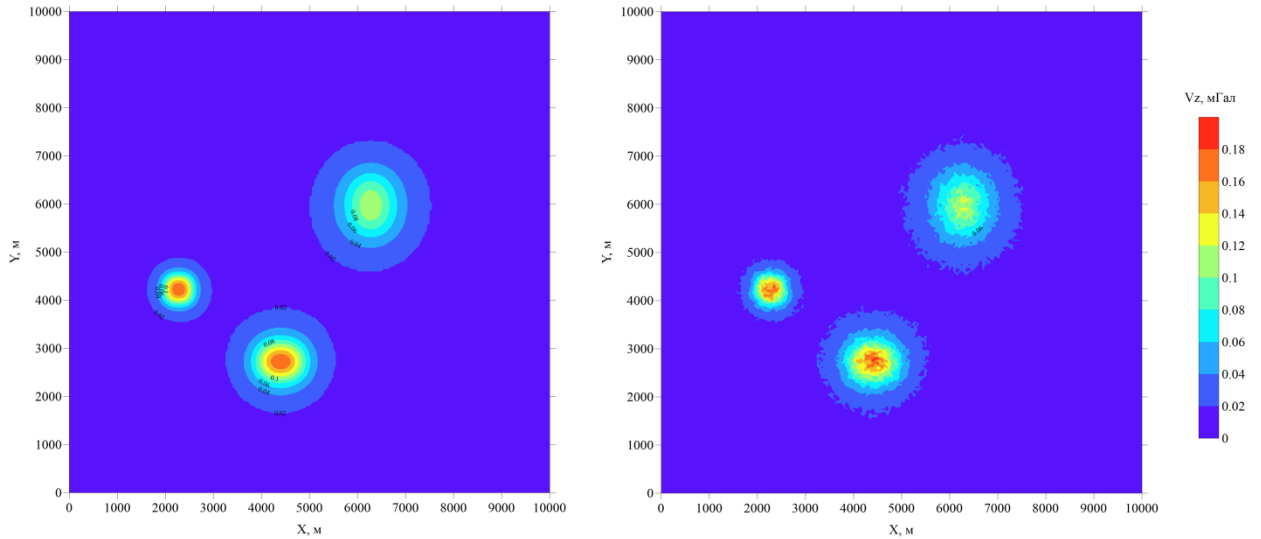


Рисунок 17 Гравитационное поле тестовой 3D модели без шума (слева) и с шумом (справа).

Как и в двумерном случае, решение обратной задачи производилось без использования априорных данных с использованием четырех значений степени возрастания коэффициента  $\alpha$  с глубиной:  $n = 0; 1; 1.5$  и  $2$ . Для каждого случая также, как и в двумерном случае, использован фокусирующий оператор с параметром крутизны  $500$  и пороговым значением плотности  $0.02$  г/см<sup>3</sup>.

Сопоставление результатов подбора проведено аналогично двумерному случаю (Рисунок 18, Таблица 13).

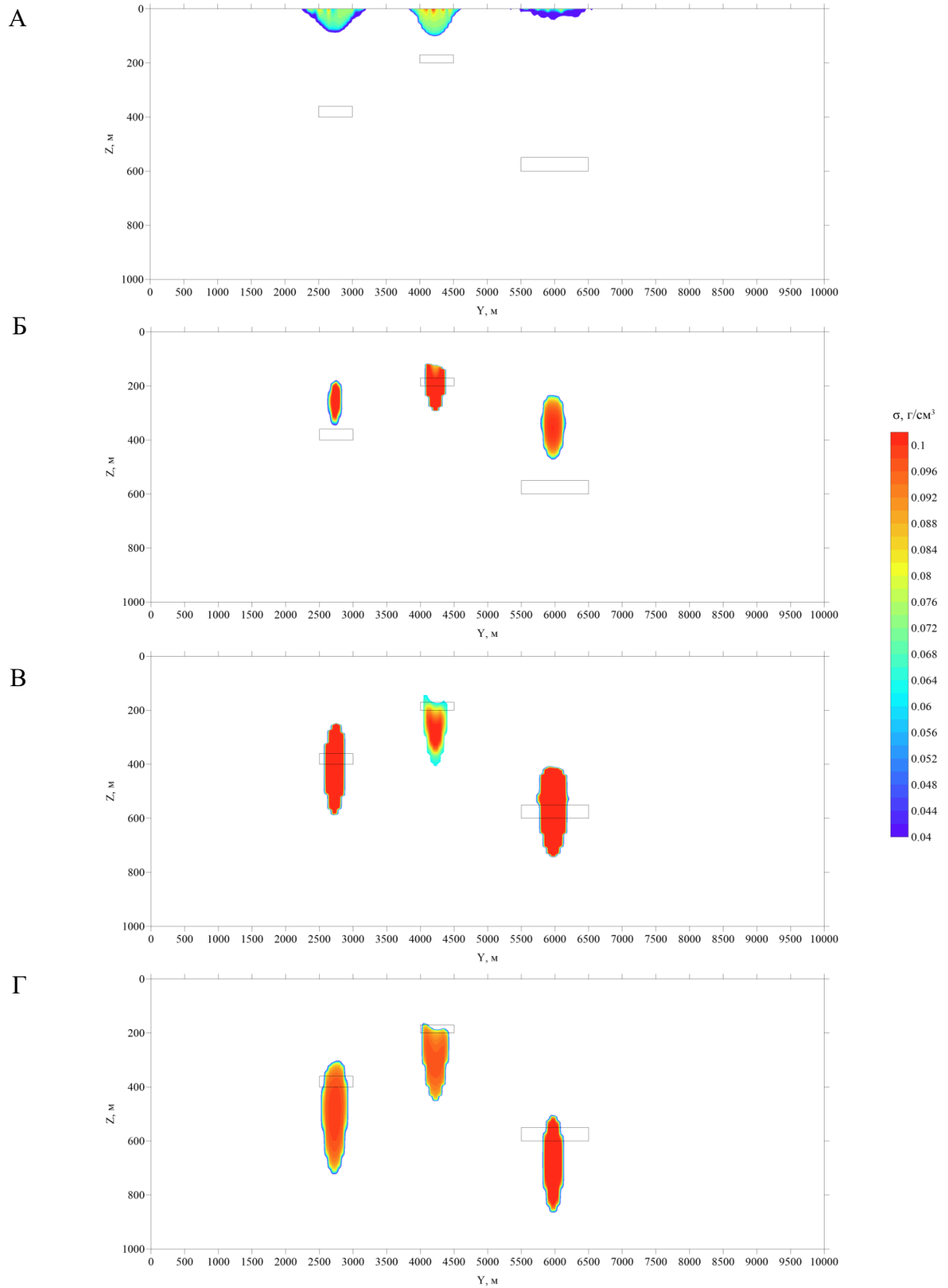


Рисунок 18 – Сравнение результатов подбора плотностных моделей (глубинные срезы вдоль оси OX) при различных параметрах степени возрастания коэффициента  $\alpha$  с глубиной: А –  $\alpha = \text{const}$ ; Б –  $\alpha \sim z$ ; В –  $\alpha \sim z^{1.5}$ ; Г –  $\alpha \sim z^2$

Таблица 13 Сравнение результатов подбора трехмерных плотностных моделей

Степень возрастания $\alpha$	0	1	1.5	2
Плотностная неоднородность 1				
Глубина центра масс неоднородности 1, полученная при решении обратной задачи (м)	0	195	250	315
Абсолютная погрешность определения глубины центра масс неоднородности 1 (м)	185	10	65	130
Относительная погрешность определения глубины центра масс неоднородности 1	100	5.4	35.1	70.3
Плотностная неоднородность 2				
Глубина центра масс неоднородности 2 (м)	0	250	395	500
Погрешность определения глубины центра масс неоднородности 2 (м)	380	130	15	120
Относительная погрешность определения глубины центра масс неоднородности 2 (%)	100	34.2	3.9	31.6
Плотностная неоднородность 3				
Глубина центра масс неоднородности 3 (м)	0	350	565	675
Погрешность определения глубины центра масс неоднородности 3 (м)	575	225	10	100
Относительная погрешность определения глубины центра масс неоднородности 3 (%)	100	39.1	1.7	17.4

При решении трехмерной обратной задачи для тестовой модели наилучшие результаты были получены для случаев  $\alpha \sim z^1$  и  $\alpha \sim z^{1.5}$ . При степени возрастания  $\alpha$  равной 1 наблюдается наименьшая погрешность определения центра масс наименее глубокого источника (относительная погрешность 5.4 %), глубины центров масс двух других неоднородностей наилучшим образом определяются при степени 1.5 (относительные погрешности 3.9 и 1.7 % соответственно).

Различные показатели степени в двумерном и трехмерном тесте связаны с различной зависимостью чувствительности функционала невязки от глубины и размеров для разных типов источников. Результаты тестов говорят о необходимости использования априорных данных для определения оптимального значения показателя степени параметра  $\alpha$ .

### 3.5 Решение сферической обратной задачи гравиразведки с нормализацией функционала невязки для сферических моделей

Для тестирования подхода к автоматизации решения обратной задачи гравиразведки на сфере построена синтетическая плотностная модель (Рисунок 19). В пределах сферы радиусом 1738 км на различных глубинах размещены 10 имеющих форму тессероида тел, 6 из которых являются изометричными (неоднородности 1 – 6), остальные 4 неоднородности – вытянутыми (неоднородности 7 – 10) (Таблица 14).

Расчет гравитационного поля плотностной модели (Рисунок 20) произведен на сфере радиуса 1748 км (то есть поле рассчитывалось на высоте 10 км над поверхностью сферы). По долготе и широте расчетная область разбита на 256 и 180 ячеек, соответственно.

Сеточная плотностная модель имела максимальный радиус 1738 и строилась до глубины 200 км (радиус 1538 км) с шагом 2 км (Таблица 15).

Как и в предыдущих тестах, для решения обратной задачи использовано гравитационное поле модели с добавлением шума. В текущем тесте амплитуда шума составила 5 мГал, то есть примерно 3% от максимальной амплитуды наиболее интенсивной аномалии (номер 7).

Тестовые расчеты выполнены в программном обеспечении GravInv Global [Чепиго и др., 2020].

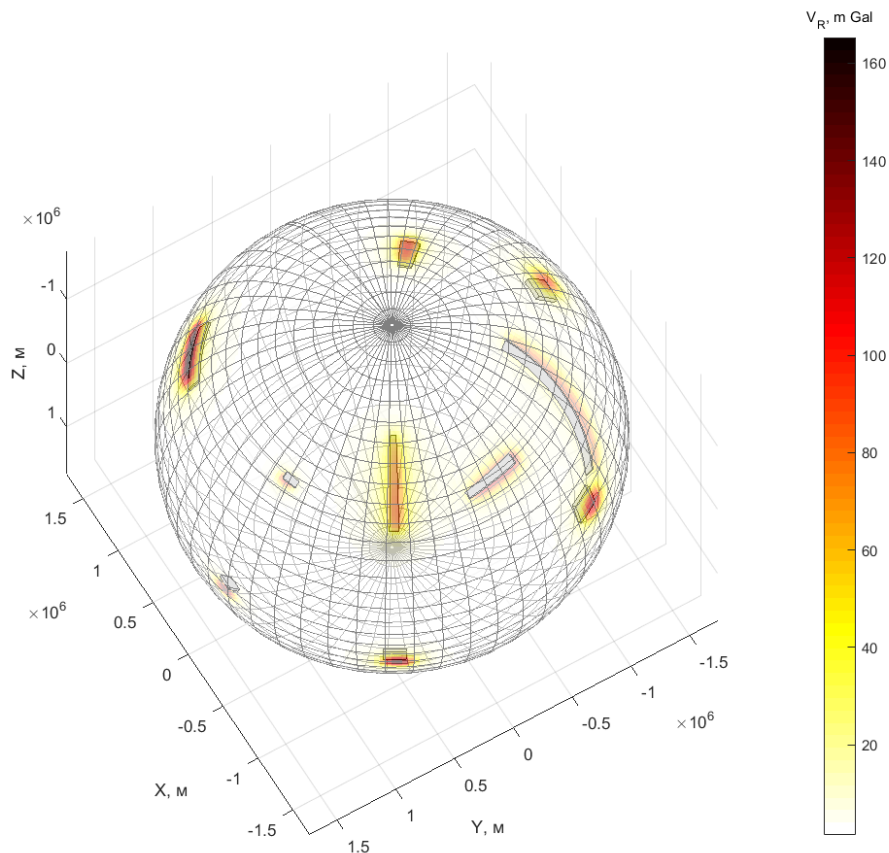


Рисунок 19 – Тестовая сферическая модель

Таблица 14 Параметры неоднородностей сферической модели

Номер неоднородности	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Изометричность по поверхности сферы да/нет	да	да	да	да	да	да	нет	нет	нет	нет
Направление простирания	-	-	-	-	-	-	З-В	Ю-С	Ю-С	З-В
Глубина центра (км)	30	40	50	60	70	80	30	40	50	60
Высота (км)	10	15	20	20	15	10	15	20	15	10
Долгота центра (°)	-160	-90	-30	30	90	140	-140	90	-30	90
Ширина по долготе (°)	4	5	6	7	8	10	20	5	3	50
Широта центра (°)	-60	-35	-10	15	40	65	30	-60	50	-30
Ширина по широте (°)	4	5	6	7	8	10	5	15	25	3
Избыточная плотность, (г/см <sup>3</sup> )	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.50	0.35	0.40	0.45	0.50
Амплитуда аномалии (мГал)	28	70	119	137	107	68	150	85	141	76

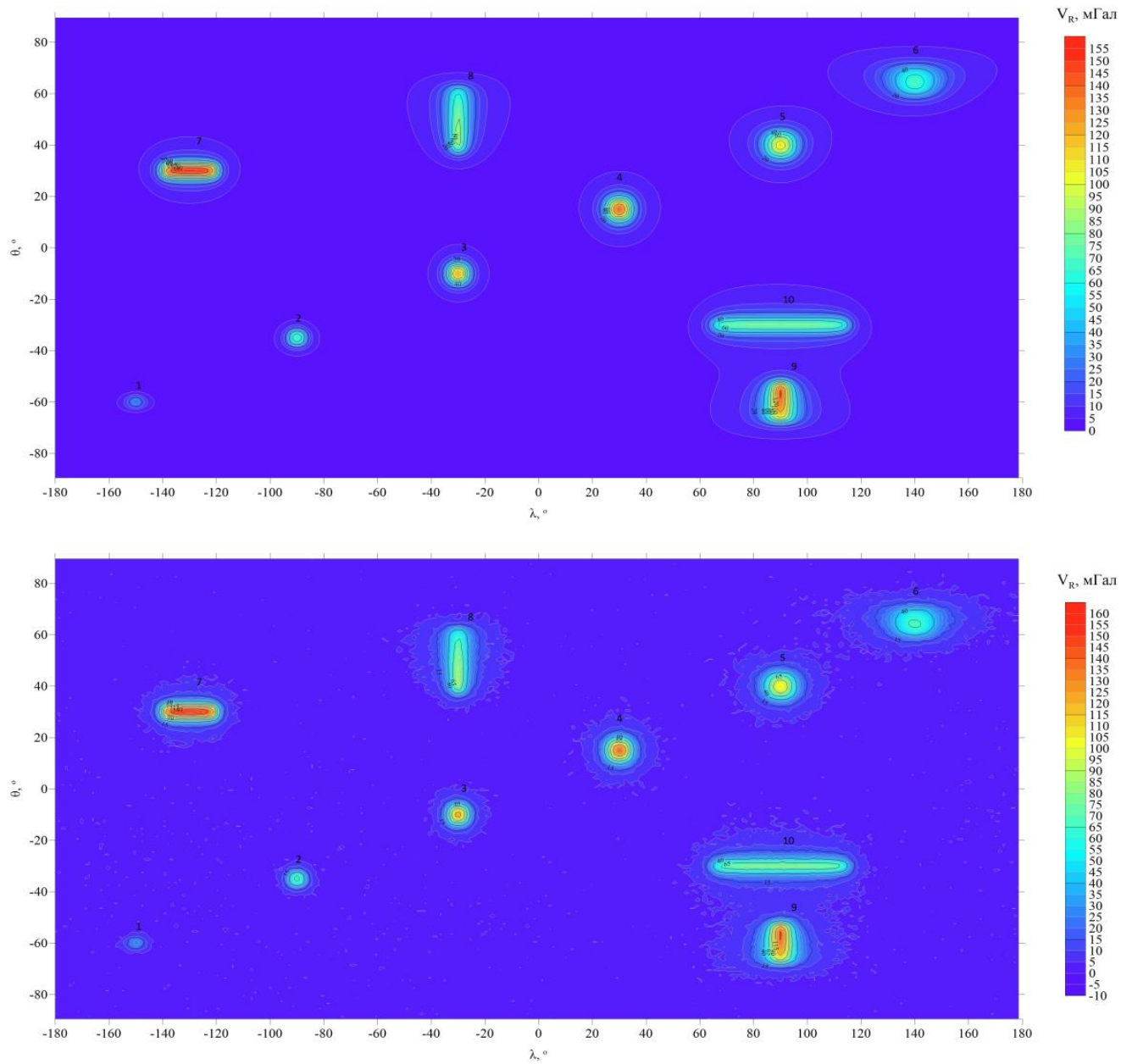


Рисунок 20 – Поле силы притяжения тестовой сферической модели без шума и с шумом.

Номера аномалий соответствуют номерам неоднородностей

Таблица 15 Параметры сетки тестовой сферической модели

Расчетный радиус (км)	1748
Минимальная долгота (°)	-180.0
Максимальная долгота (°)	178.6
Шаг по долготе (°)	1.4
Минимальная широта (°)	-89.5
Максимальная широта (°)	89.5
Шаг по широте (°)	1.0
Максимальный радиус (км)	1738.0
Минимальный радиус (км)	1538.0
Шаг по глубине (км)	2.0
Количество ячеек по широте	180
Количество ячеек по долготе	256
Количество ячеек по глубине	100

Основной задачей данного теста является оценка возможности определения параметров плотностных неоднородностей по аномалиям гравитационного поля, схожего с полем Луны. Аномалии изометричных неоднородностей по параметрам аналогичны лунным масконам, аномалии вытянутых неоднородностей – линейным аномалиям, выявленным в ходе миссии GRAIL [Zuber et al., 2013]. Глубины источников выбраны исходя из априорной информации о мощности лунной коры и предположения, что источником высокоамплитудных аномалий гравитационного поля являются уплотнения в нижней части лунной коры.

В соответствии с этим в качестве максимальной избыточной плотности выбрано значение  $0.5 \text{ г/см}^3$ , что соответствует оценочной разнице плотностей между лунной корой и мантией [Chenet et al., 2006; Garcia et al., 2011; Wiczorek et al., 2006]. Также аналогичные избыточные плотности могут возникать на границе между земной корой (при плотности  $2.9 \text{ г/см}^3$ ) и верхней мантией (при плотности  $3.4 \text{ г/см}^3$ ) [Anderson, 1989]. Некоторые исследования указывают на то, что значение плотности  $0.5 \text{ г/см}^3$  может быть завышенным. В частности, в работе [Wiczorek et al., 2012] показано, что плотность лунной коры может изменяться в пределах от  $2.8$  до  $2.9 \text{ г/см}^3$ , а плотность лунной мантии принимает значения в  $3.15 \text{ г/см}^3$  в областях, где мощность коры составляет примерно  $40 \text{ км}$ . Таким образом, избыточная плотность на уровне подошвы лунной коры может составлять  $0.25 \text{ г/см}^3$ . Напротив, если связывать лунные масконы с приповерхностными источниками, значение избыточной плотности может превышать  $0.5 \text{ г/см}^3$  и достигать  $1 \text{ г/см}^3$  [Оганесян, 2004], однако в данном тесте рассматривались только глубокие источники аномалий и плотности выше  $0.5 \text{ г/см}^3$  не рассматривались.

Решение обратной задачи осуществлено для трех значений степени возрастания скорости градиентного спуска с глубиной - 1, 1.5 и 2. В данном случае не использовался постоянный параметр  $\alpha$ , поскольку предыдущие тесты уже показали невозможность определения глубины источников аномалий гравитационного поля при таком подходе.

Как и в предыдущих тестах, при анализе результатов подбора сравнивались точность определения центра масс всех источников (Рисунок 21, Таблица 16).

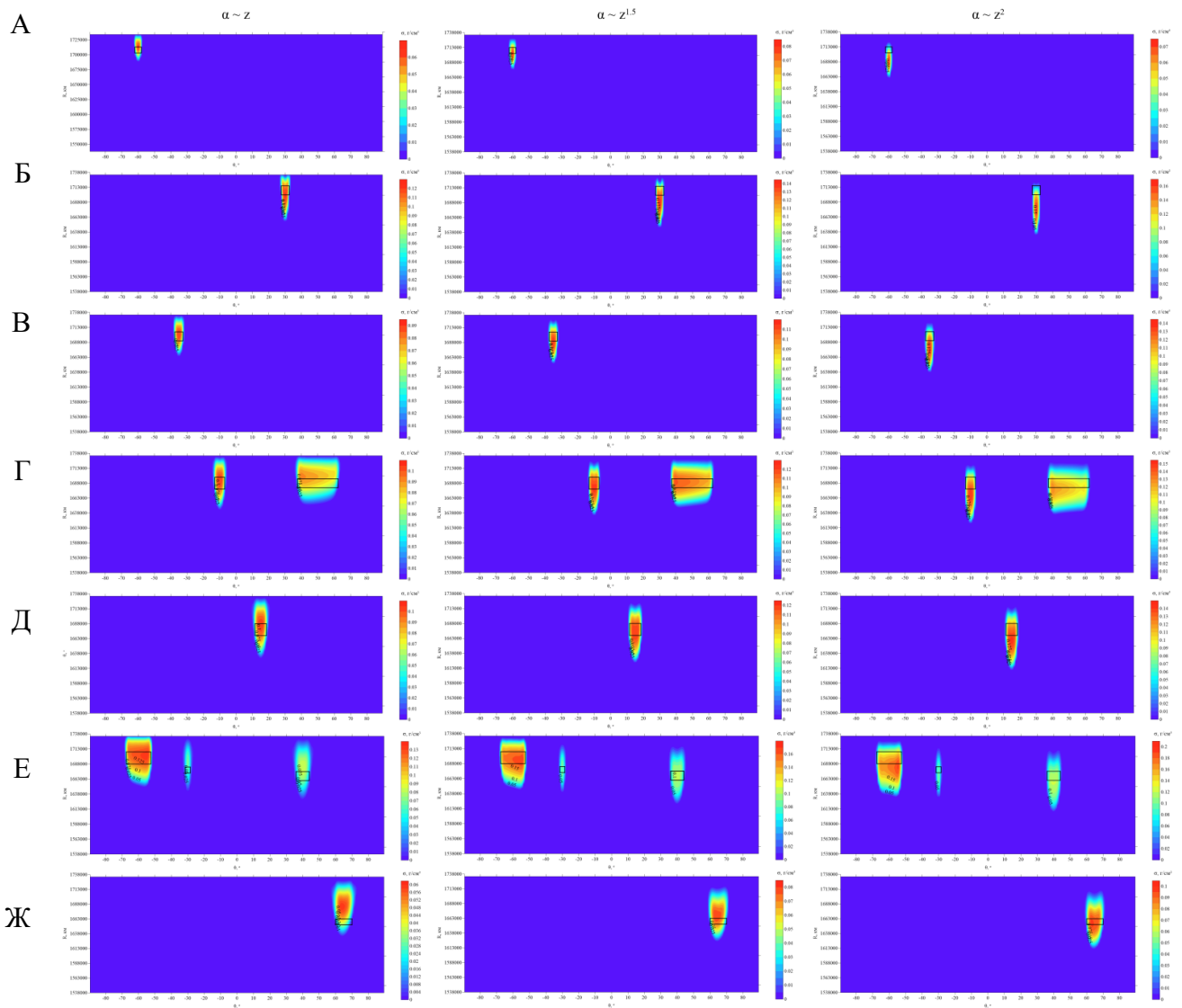


Рисунок 21 – Глубинные срезы по подобранным сферическим моделям. Срезы проходят через неоднородности: А – 1; Б – 7; В – 2; Г – 3 и 9; Д – 4; Е – 8, 10 и 5; Ж – 6



Таблица 16 Сравнение результатов подбора сферической модели

Номер неоднородности /изометричность	Истинная глубина центра, км	Параметр	Результаты подбора		
			1	1.5	2
1/да	30	h, км	25	33	47
		$\Delta$ , км	5	3	17
		$\delta$ , %	17	10	57
2/да	40	h, км	36	45	53
		$\Delta$ , км	4	5	13
		$\delta$ , %	10	13	33
3/да	50	h, км	45	55	67
		$\Delta$ , км	5	5	17
		$\delta$ , %	10	10	34
4/да	60	h, км	52	64	76
		$\Delta$ , км	8	4	16
		$\delta$ , %	13	7	27
5/да	70	h, км	55	71	81
		$\Delta$ , км	15	1	11
		$\delta$ , %	21	1	16
6/да	80	h, км	57	73	82
		$\Delta$ , км	23	7	2
		$\delta$ , %	29	9	3
7/нет	30	h, км	35	40	58
		$\Delta$ , км	5	10	28
		$\delta$ , %	17	33	92
8/нет	40	h, км	36	43	52
		$\Delta$ , км	4	3	12
		$\delta$ , %	10	8	30
9/нет	50	h, км	40	49	58
		$\Delta$ , км	10	1	8
		$\delta$ , %	20	2	16
10/нет	60	h, км	50	58	67
		$\Delta$ , км	10	2	7
		$\delta$ , %	17	3	12

Для сферической тестовой модели также наблюдаются лучшие результаты по всем неоднородностям при одном значении степени -  $\alpha \sim z^{1.5}$ . Наибольшая погрешность определения центра масс соответствует неоднородности № 7, представляющей собой вытянутый вдоль параллели источник. Для данной неоднородности относительная погрешность оценки глубины центра масс составила 33 % при показателе степени 1.5. Во всех остальных случаях при данном показателе относительная погрешность не превышает 13 %. Стоит отметить, что также достаточно качественные результаты получены при  $\alpha \sim z^1$  - максимальная относительная погрешность определения центра масс составила 21 и 29 % для неоднородностей с центром масс на глубине 70 и 80 км соответственно, для остальных неоднородностей относительное расхождение не превысило 20%.

В результате тестов было показано, что подход, использующий степенную функцию, зависящую от глубины, в качестве шага градиентного спуска, позволяет регулировать подбор плотностной модели и включать глубокие ячейки в процесс подбора. Для каждой тестовой модели при определенном значении показателя степени подобраны плотностные разрезы, достаточно точно отображающие положение источников аномалий гравитационного поля. Для выбора оптимального показателя степени и подбора наиболее достоверных моделей необходимо использовать априорную информацию о возможной глубине неоднородностей.

Также по результатам сферического теста были выбраны оптимальные показатели степени для подбора плотностной модели Луны – 1 и 1.5. При данных показателях с высокой степенью точности определяется положение центра не только изометричных, но и вытянутых неоднородностей, благодаря чему возможна оценка параметров источников не только лунных масконов, но и линейных аномалий.

По результатам, описанным в текущей главе, сформулировано третье защищаемое положение:

– Методика подбора сеточной плотностной модели, в основе которой лежит использование скорости градиентного спуска, зависящей от глубины как степенная функция.

## Глава 4. Построение плотностных моделей для областей лунных масконов

### 4.1. Обзор модели гравитационного поля Луны

При плотностном моделировании использована модель гравитационного поля Луны [Zuber et al., 2013], которая представлена в виде разложения гравитационного потенциала на сферические гармоники до 900 порядка, что подходит для построения карты гравитационного поля с шагом до  $0.2^\circ$ . Данная модель получена путем введения в модель GRGM900C (Рисунок 22) топографической поправки с плотностью  $2.5 \text{ г/см}^3$ . Модель GRGM900C получена по результатам спутниковой миссии Gravity Recovery and Climate Experiment (GRAIL) [Zuber et al., 2013]. Топографическая модель Луны, которая применялась для введения топографической поправки, была построена по результатам измерений лазерным альтиметром Lunar Orbiter Laser Altimeter (LOLA) [Smith et. al, 2010; 2017] (Рисунок 23), который был расположен на автоматической межпланетной станции Lunar Reconnaissance Orbiter (LRO) [Robinson et al., 2010].

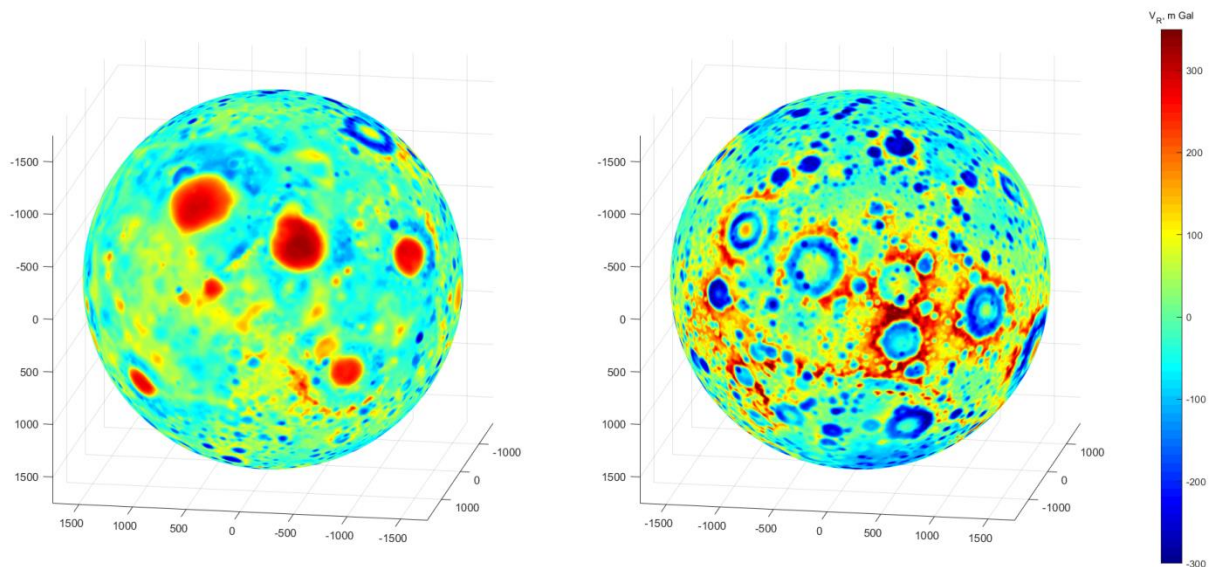


Рисунок 22 – Гравитационное поле Луны на радиусе 1748 км. Видимая сторона расположена слева, обратная сторона – справа

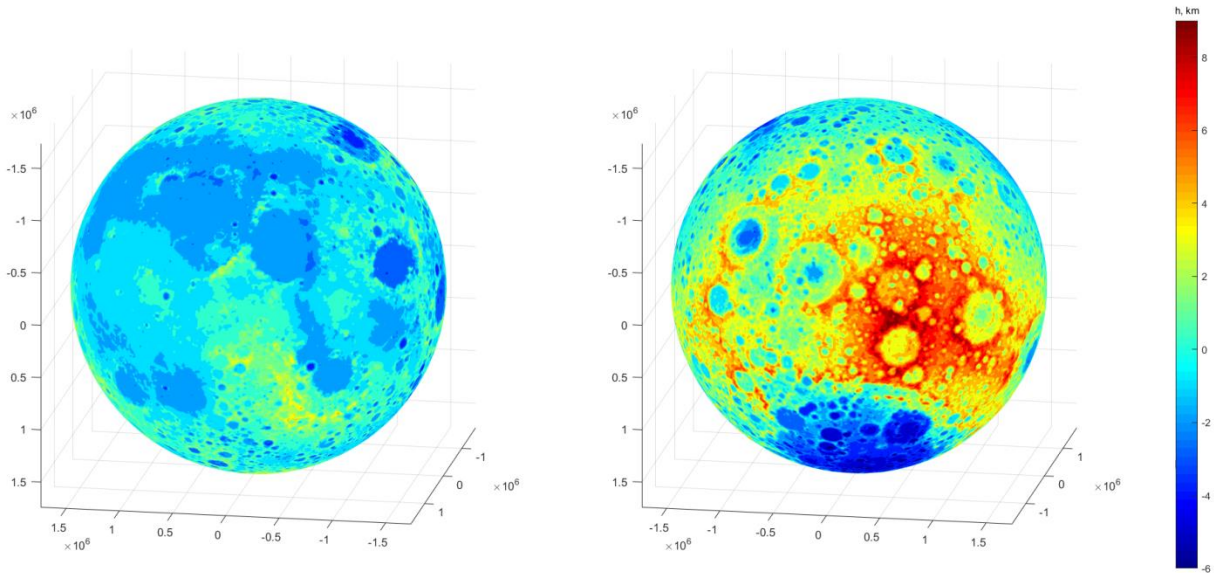


Рисунок 23 – Карта высот лунной поверхности относительно среднего радиуса (1737 км). Видимая сторона расположена слева, обратная сторона – справа

Для расчета гравитационного потенциала и нормальной составляющей силы тяжести по сферическим гармоникам была создана вычислительная программа. Разложение нормальной составляющей силы притяжения на сферические гармоники записывается следующим образом:

$$V_R = -\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{GM}{R^2} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n (n+1) \left(\frac{a}{R}\right)^n (\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)) \bar{P}_n^m(\cos(\theta)) \quad (42)$$

При дальнейшем подборе плотностных моделей Луны использована нормальная составляющая силы тяжести (Рисунок 24) на радиусе 1748 км. Особый интерес при плотностном моделировании представляли области лунных масконов – положительных аномалий гравитационного поля, амплитуда которых достигает несколько сотен мГал, а также линейные аномалии, амплитуда которых также измеряется в десятках и сотнях мГал.

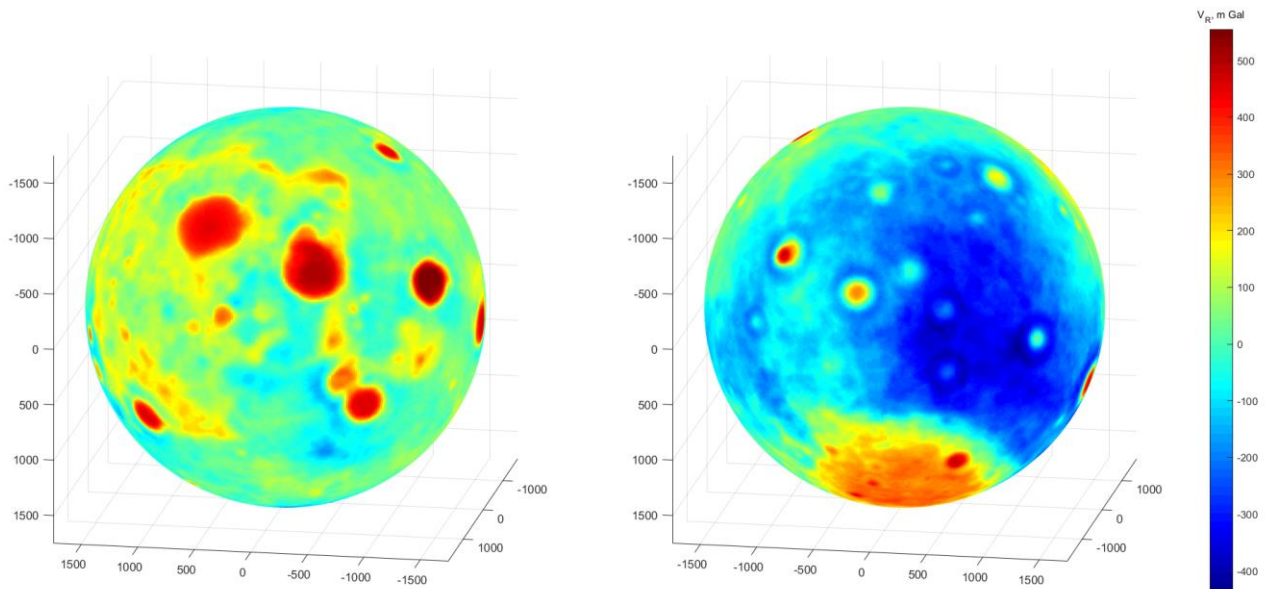


Рисунок 24 – Гравитационное поле Луны в редукции Буге на радиусе 1748 км. Видимая сторона расположена слева, обратная сторона – справа

На карте аномалий силы тяжести в редукции Буге выделяется множество изометричных положительных аномалий – масконов. Основной целью плотностного моделирования являлся подбор параметров источников данных аномалий.

Существует множество теорий происхождения лунных масконов. На сегодняшний день наиболее распространенной является теория, предложенная Р. Болдуином [Baldwin, 1968] – масконы могли образоваться в результате ударов крупных космических тел о поверхность Луны, в результате которых в лунной коре создавались гигантские выемки. Далее, расположенная ниже более плотная мантия выдавливала дно выемки, в результате чего под местом удара образовывался выступ мантии, который и создает положительную аномалию гравитационного поля.

Подбор плотностных моделей Луны выполнен в два этапа: аппроксимация источников основных аномалий телами простой формы и автоматизированный подбор сеточной плотностной модели, разбитой на сферические призмы. В качестве априорных данных использована модель образования масконов, предложенная Р. Болдуином, учтена информация о среднем значении мощности лунной коры – 40-50 км [Жарков, 1983; Оганесян, 2004; Khan et al., 2013; Williams et al. 2014]. Таким образом, предположительная глубина источников лунных масконов должна располагаться на интервале глубин, соответствующем мощности коры.

#### 4.2. Подбор параметров источников Лунных масконов, аппроксимируемых телами простой формы

Для ручной оценки параметров плотностных неоднородностей Луны выбраны 6 масконов. Выбранные аномалии расположены в пределах лунных морей либо ударных кратеров (Таблица 17, Рисунок 25). Три аномальные зоны расположены в пределах видимой стороны Луны и три – расположены на обратной стороне.

Таблица 17 Параметры аномалий, по которым проводилась ручная оценка параметров источников

№	Лунный регион	Широта центра аномалии	Долгота центра аномалии	Амплитуда аномалии (мГал)	Ширина аномалии вдоль меридиана	Ширина аномалии вдоль параллели
1	Кратер Гримальди	5.2 ° ю. ш.	68.2 ° з. д.	460	5	5
2	Море Кризисов	17.0 ° с. ш.	69.1 ° в. д.	640	13	15
3	Море Гумбольдта	56.5 ° с. ш.	81.3 ° в. д.	515	9	15
4	Кратер Бейс-Баллот	20.5 ° с. ш.	174.5 ° в. д.	560	9	10
5	Море Восточное	19.5 ° ю. ш.	94.4 ° з. д.	800	13	13
6	Кратер Ридберг	46.3 ° ю. ш.	96.3 ° з. д.	540	11	12

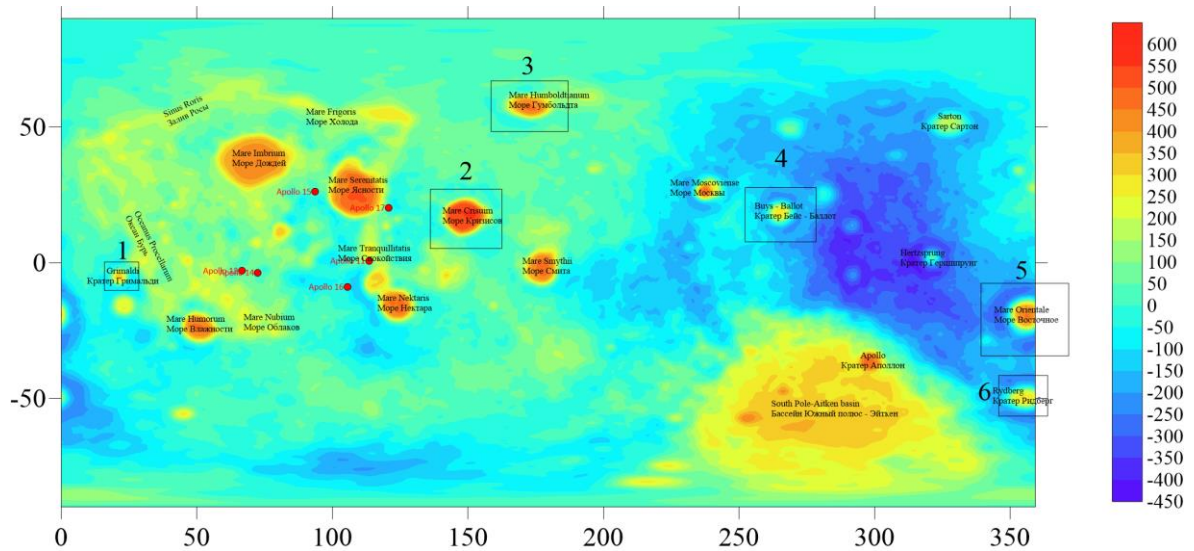


Рисунок 25 – Положение масконов на карте аномалий силы тяжести в редукции Буге, для которых выполнена оценка параметров источников методом интерактивного подбора

На первом этапе построения плотностных моделей подобраны оптимальные значения параметров точечного источника и тонкого вертикального (радиального) стержня по методу характерных точек. Подбор параметров источников осуществлен как без учета, так и с учетом сферичности (Таблица 18, Рисунок 26, Рисунок 27). Для точечного источника произведен подбор глубины залегания и массы, для радиального стержня – глубины верхней кромки и избыточной плотности. При подборе параметров стержня без учета сферичности предположено, что глубина его нижней кромки находится на бесконечно большой глубине, в случае учета сферичности использована модель стержня с нижней кромкой в начале координат. Для перехода от сферической системы координат к проекционной использована цилиндрическая проекция Миллера [Snyder, 1993].

Таблица 18 Результаты подбора параметров точечного источника и тонкого вертикального (радиального) стержня по МХТ. Глубина отсчитывается от сферы радиуса 1748 км

Регион	Точечный источник				Тонкий стержень			
	Без учета сферичности		С учетом сферичности		Без учета сферичности		С учетом сферичности	
	Глубина, км	Масса, $10^{18}$ кг	Глубина, км	Масса, $10^{18}$ кг	Глубина верхней кромки, км	Линейная плотность, $10^{12}$ кг/м <sup>2</sup>	Глубина верхней кромки, км	Линейная плотность, $10^{12}$ кг/м <sup>2</sup>
Кратер Гримальди	109	0.68	100	0.62	48	2.76	31	1.88
Море Кризисов	261	5.77	184	2.83	115	9.78	59	5.06
Море Гумбольдта	235	3.98	177	2.33	104	7.51	45	3.21
Кратер Бейс-Баллот	142	1.53	137	1.40	63	4.76	47	4.00
Море Восточное	220	5.22	196	4.55	97	10.50	63	7.71
Кратер Ридберг	191	2.92	155	1.97	85	6.74	59	5.07



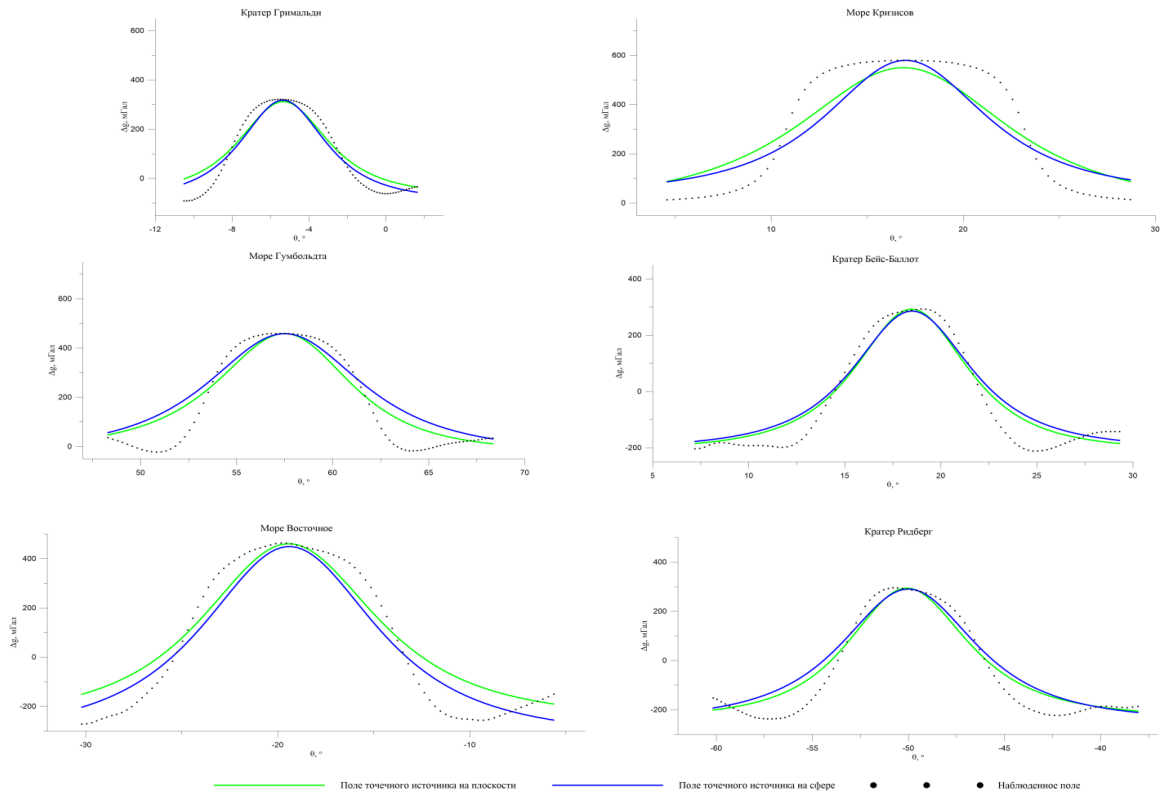


Рисунок 26 – Графики наблюдаемого и рассчитанного полей силы тяжести для моделей точечного источника на плоскости и сфере

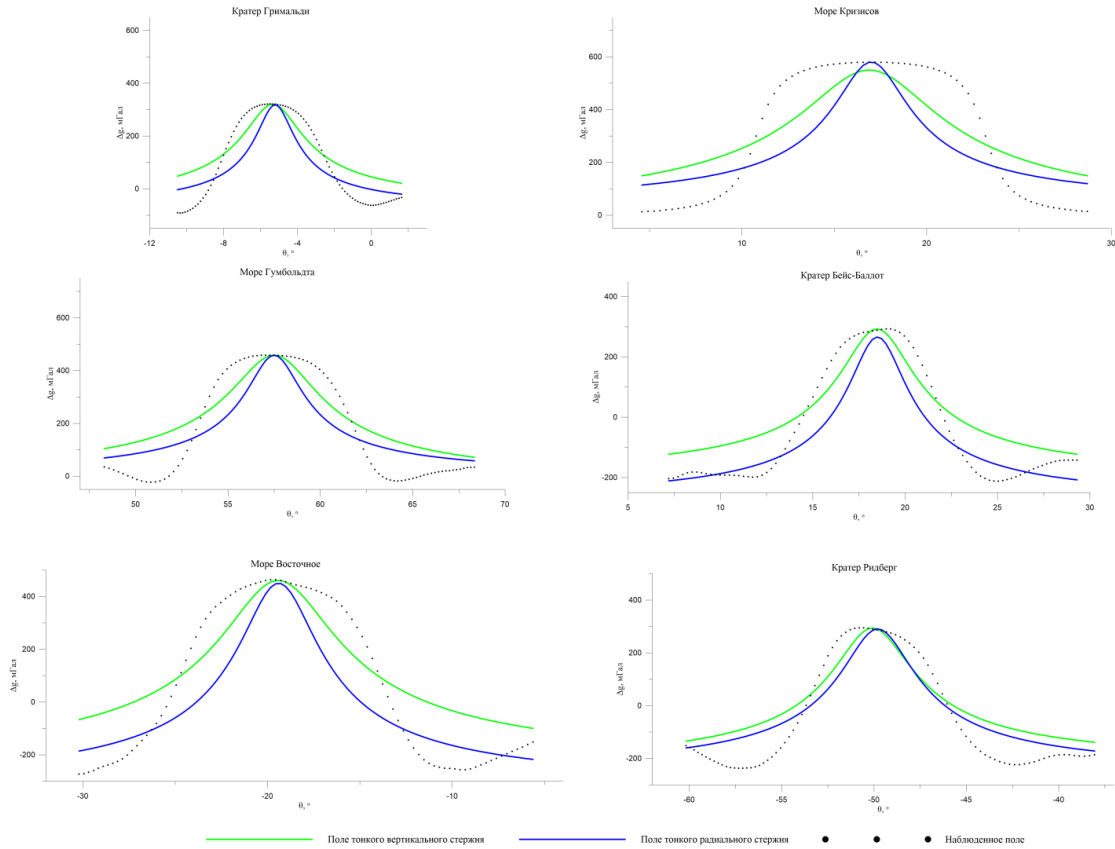


Рисунок 27 – Графики наблюдаемого и рассчитанного полей силы тяжести для модели тонкого вертикального (радиального) стержня

Визуальное сравнение графиков наблюдаемого и рассчитанного поля позволяет сделать вывод, что модели точечного источника и тонкого радиального стержня могут подходить только для аномалий в пределах кратеров Бейс-Баллот и Ридберг. Однако даже для этих двух областей в случае аппроксимации точечным источником полученные оценки глубины источников являются сильно завышенными, если исходить из теории Болдуина и средней мощности лунной коры в 40 км. Также важно отметить, что во всех случаях оценки параметров без учета сферичности превышают соответствующие значения, полученные с учетом сферичности.

Далее была выполнена оценка параметров источников, аппроксимируемых прямоугольной (в плоском случае) и сферической призмой. При подборе была зафиксирована нижняя кромка на глубине 50 км относительно сферы радиуса 1748 км (т.е. 40 км относительно поверхности сферы со средним радиусом Луны 1738 км), а также избыточная плотность ( $0.5 \text{ г/см}^3$ ). В результате были получены оценки мощности и ширины призм, аппроксимирующих источники аномалий в выбранных регионах (Таблица 19, Рисунок 28).

Таблица 19 Результаты подбора параметров прямоугольной призмы и тессероида. Глубина отсчитывается от сферы радиуса 1738 км

Регион	Глубина верхней кромки, км		Мощность, км		Ширина вдоль параллели ( $\Delta\lambda$ ), км		Ширина вдоль меридиана ( $\Delta\theta$ ), км	
	Плоск.	Сфер.	Плоск.	Сфер.	Плоск.	Сфер.	Плоск.	Сфер.
Кратер Гримальди	20	18	30	32	150	149	150	150
Море Кризисов	17	15	33	35	360	358	390	389
Море Гумбольдта	23	20	27	30	400	231	300	239
Кратер Бейс-Баллот	19	18	31	32	220	196	200	194
Море Восточное	10	5	40	45	310	311	330	330
Кратер Ридберг	20	15	30	35	320	238	250	210

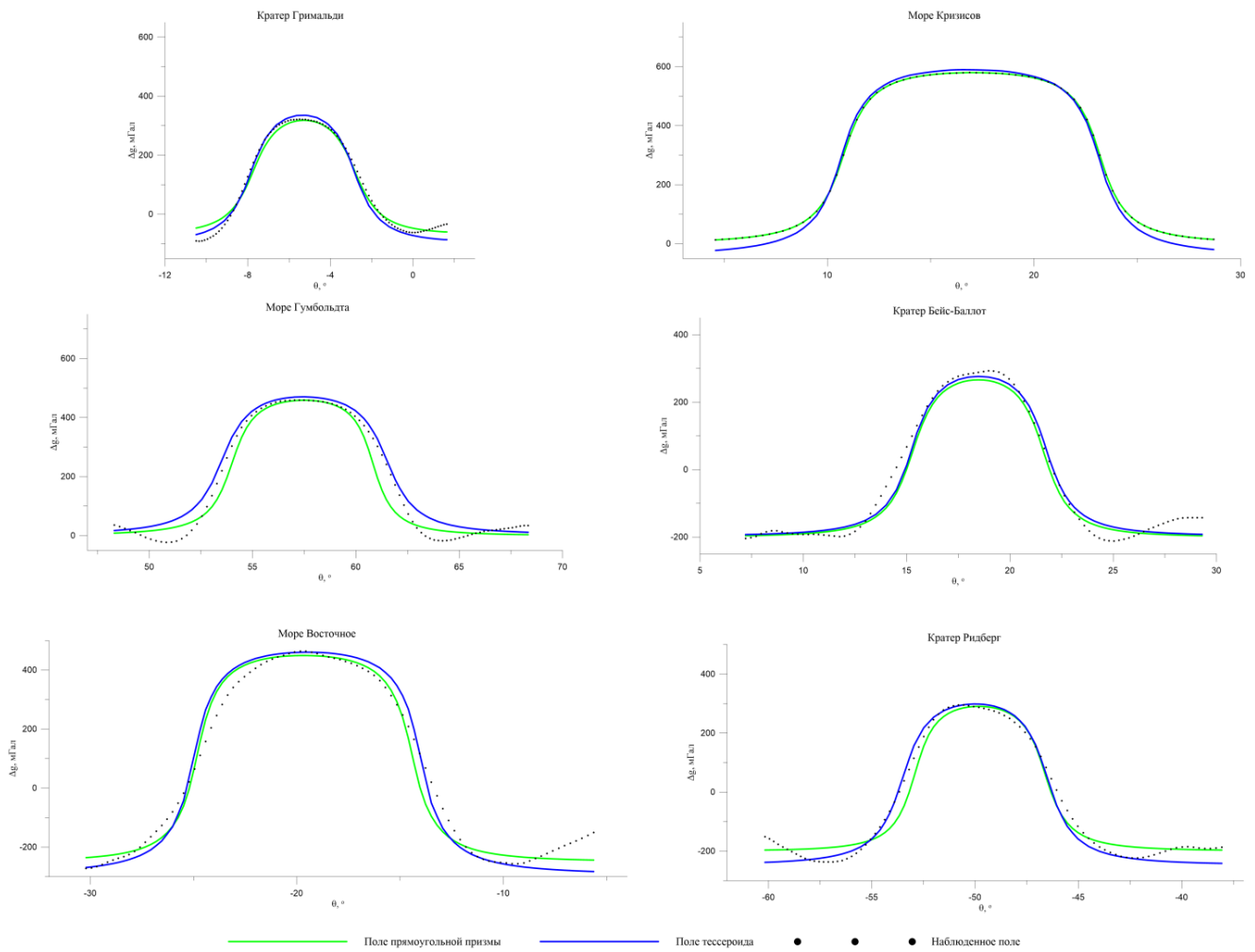


Рисунок 28 – Графики наблюдаемого и рассчитанного поля силы тяжести для моделей прямоугольной и сферической призмы (срезы вдоль меридиана)

Во всех случаях глубина верхней кромки сферической призмы принимает меньшие значения по сравнению с аналогичным параметром для прямоугольной призмы. Кроме того, стоит отметить значительные расхождения в горизонтальных (угловых) размерах призм в случаях, когда источник и соответствующая аномалия располагаются в высоких широтах, что связано с искажением масштаба при проецировании поля, заданного на сфере.

Полученные результаты в дальнейшем использованы для подбора оптимальных значений степени возрастания шага градиентного спуска, с помощью которого регулируется глубина источников аномалий гравитационного поля при решении обратной задачи гравиразведки для сеточных моделей. Также по результатам, описанным в данном разделе, сделан вывод, что источники масконов не могут быть полностью описаны телами простой геометрической формы, поскольку даже при аппроксимации их тессероидом или прямоугольной призмой, не удастся полностью описать все особенности гравитационного поля лунных масконов.

### 4.3. Автоматизированный подбор сеточной плотностной модели Луны

Поскольку подбор трехмерных плотностных моделей требует значительных вычислительных ресурсов и времени, примеры построения сеточных плотностных моделей Луны практически отсутствуют. Одним из таких примеров является результат, приведенный в статье [Liang et al., 2014]: авторами построена плотностная модель Луны, разбитой на ячейки  $3^\circ \times 3^\circ$  по углам и 10 км по радиусу.

Кроме того, существуют примеры решения совместной обратной задачи сейсморазведки и гравиразведки [Кронрод, Кусков 2011; Khan et al., 2007], однако данные исследования являются не достаточно детальными и относятся только к регионам, в которых располагались сейсмографы в рамках миссий «Аполлон-12», «Аполлон-14», «Аполлон-15» и «Аполлон-16» [Goins et al., 1981; Lattham et al., 1969; Nakamura et al., 1982].

Применение разработанных методик решения трехмерной обратной задачи гравиметрии на сфере позволило построить более детальные модели с шагом по долготе  $0.7^\circ$  (512 точек по долготе для решения обратной задачи в частотной области) и  $0.5^\circ$  по широте (Таблица 20). Всего было построено две модели: до центра Луны с шагом 11 км и до глубины 200 км с шагом 2 км. В качестве среднего радиуса Луны использовано значение 1738 км.

Таблица 20 Параметры разбиения плотностной модели Луны

Минимальная долгота ( $^\circ$ )	-180.0
Максимальная долгота ( $^\circ$ )	179.3
Шаг по долготе ( $^\circ$ )	0.7
Минимальная широта ( $^\circ$ )	-90
Максимальная широта ( $^\circ$ )	90
Шаг по широте ( $^\circ$ )	0.5
Минимальная глубина (км)	0.0
Максимальная глубина (км)	200/1738
Шаг по глубине (км)	2/11
Количество ячеек по широте	361
Количество ячеек по долготе	512
Количество ячеек по глубине	100/158

При подборе плотностных моделей, как и в подготовительных тестах, использован фокусирующий функционал с пороговым значением плотности равным  $0.1 \text{ г/см}^3$ , и параметром

крутизны равным 50. Для каждого из двух вариантов разбиения модели обратная задача решена с показателем степени роста шага градиентного спуска, равным 1.

На первом этапе подбора сеточной модели распределения избыточных плотностей внутри Луны подобрана модель до центра Луны. Целью подбора такой модели была возможности залегания источников масконов на больших глубинах, чем предполагают современные теории.

Несмотря на использование переменного шага градиентного спуска, установлено, что наиболее контрастные неоднородности располагаются вблизи поверхности Луны (Рисунок 29). Это полностью согласуется с теорией Болдуина а также другими теориями, предполагающими расположение источников масконов вблизи поверхности.

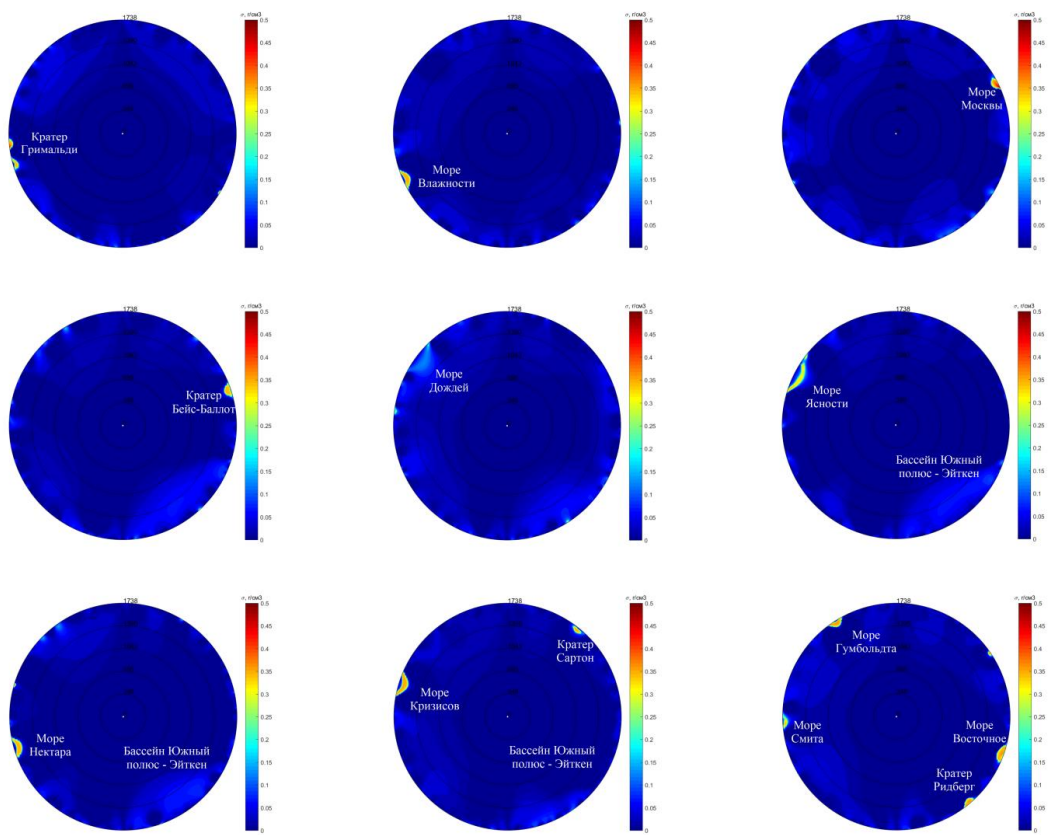


Рисунок 29 – Плотностные срезы вдоль меридиана до центра Луны, проходящие через основные аномальные зоны Луны

Далее, для более детальной реконструкции плотностной модели верхней части Луны (до глубины 200 км) построена более детальная плотностная модель, с шагом 2 км по глубине (Рисунок 30).

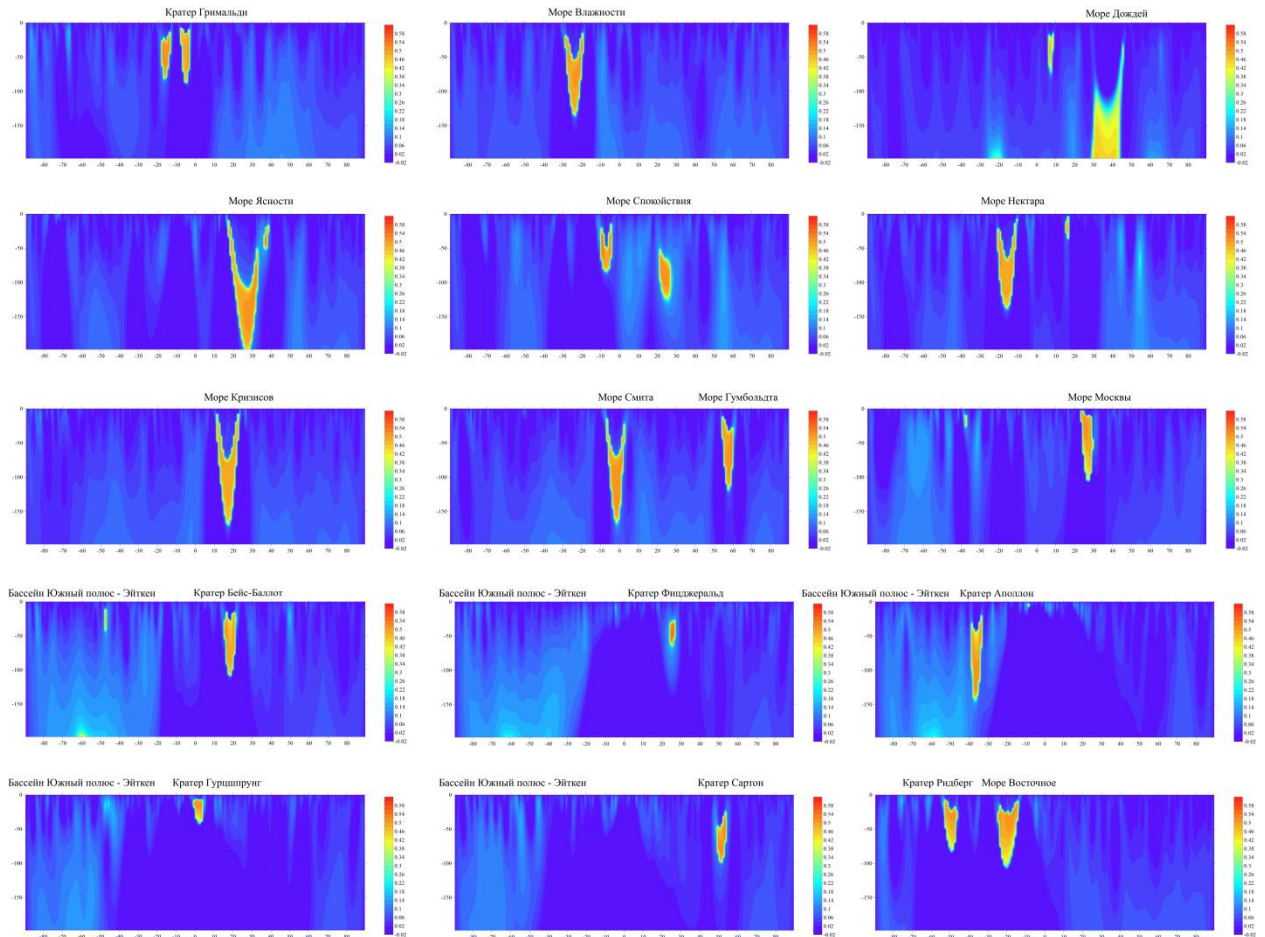


Рисунок 30 – Плотностные срезы до глубины 200 км вдоль меридианов, проходящих через основные аномальные зоны Луны

При решении обратной задачи гравиразведки с параметром  $\alpha \sim z^1$ , а также ограничении глубины модели значением 200 км и максимальной избыточной плотности значением  $0.55 \text{ г/см}^3$ , источники аномалий в некоторых областях (например, в пределах большинства морей) распространяются до глубин, превышающих значения мощности лунной коры соответствующих регионов.

## Заключение

При решении прямых и обратных задач геофизики, как и во многих других отраслях, ключевую роль играет время. Минимизация временных затрат и автоматизация процесса плотностного моделирования – крайне актуальная задача современной гравиразведки. Данная задача актуальна как при решении задач в детальных, так и в региональных и глобальных масштабах. Однако даже полная автоматизация процесса решения обратной задачи не может заменить работу опытного интерпретатора геофизических данных, строящего плотностные модели не только исходя из высокой точности подбора (минимизации расхождения между наблюдаемым полем и полем подобранной модели), но и на основании всего объема априорной геологической и геофизической информации, на представлениях о возможной геологической ситуации и производственном опыте. В связи с этим, важным направлением исследований является создание аппарата и средств, позволяющих интерактивно регулировать процедуру подбора плотностной модели, в частности, глубины залегания источников аномалий гравитационного поля.

В настоящей работе представлена теоретическая база решения прямой и обратной задачи гравиразведки на сфере для тел простой геометрической формы (точечный источник и радиальный стержень). Обратная задача в данном случае решается по аналогии с МХТ, применяющимся при оценке параметров источников в декартовой системе координат, и позволяющим производить первичную оценку параметров неоднородностей. Также выполнена оценка оптимального подхода к решению прямой задачи для сферической призмы, что в дальнейшем позволит снижать временные затраты как при решении прямой задачи для сеточных моделей, так и при решении обратной задачи в ручном или автоматическом режиме.

Кроме того, в рамках диссертационной работы разработан подход к включению глубоких ячеек в процедуру подбора модели при решении обратной задачи гравиразведки для сеточных моделей. Эффективность разработанного подхода не зависит от масштабов размеров исследуемой области и размерности пространства, в котором строятся плотностные модели.

Результаты диссертационной работы опробованы на практических примерах и могут применяться при решении любых задач, требующих построения моделей распределения избыточных плотностей по наблюдаемому гравитационному полю. В гравиметрии и гравиразведке подход к автоматизированному решению обратных задач может применяться как для двумерного, так и трехмерного плоского и сферического плотностного моделирования.

С помощью разработанных подходов к решению обратных задач для простых и произвольных моделей построена сеточная плотностная модель Луны с разрешением  $0.7^\circ$  по

долготе,  $0.5^\circ$  по широте и 11 км по глубине до центра Луны, а также более детальная модель верхней части Луны с тем же угловым разрешением и шагом по радиусу 2 км до глубины 200 км.

Полученные результаты могут использоваться в дальнейшем при решении научных и прикладных задач, связанных с изучением глубинного строения, как локальных участков земной коры, так и Земли и небесных тел в целом.



## Список литературы

1. Баландин М.Ю., Шурина Э.П., Методы решения СЛАУ большой размерности. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. — 70 стр.
2. Блох Ю.И. Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий: Учеб. пособие. М.: РГГРУ, 2009. 232 с.
3. Булычев А.А., Гайнанов А.Г., Гилод Д.А. и др. Количественная интерпретация спутниковых геофизических данных // Физика Земли. 1996. № 3. С. 26–32.
4. Булычев А.А., Гилод Д.А., Кривошея К.В. Построение трехмерной плотностной модели литосферы океанов по полю высот геоида // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 4. Геология. 2002. № 2. С. 40–47.
5. Булычев А.А., Джамалов Р.Г., Сидоров Р.В. Использование спутниковой системы GRACE для мониторинга изменений водных ресурсов // Недропользование XXI 2011. № 2. С. 24–27.
6. Булычев А.А., Кривошея К.В., Мелихов В.Р., Зальцман Р.В. Вычисление аномального гравитационного потенциала и его производных на сфере // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 4. Геология. 1998. № 2. С. 42–46.
7. Булычев А.А., Лыгин И.В., Мелихов В.Р. Численные методы решения прямых задач грави- и магниторазведки (конспект лекций): Учеб. пособие для студентов и магистрантов специализации «Геофизика». М., 2010. 164 с.
8. Булычев А.А., Лыгин И.В., Соколова Т.Б. и др. Конспект лекций по курсу «Гравиразведка». Ч. I. М.: КДУ, «Университетская книга», 2017. 124 с.
9. Бычков С.Г., Долгаль А.С., Симанов А.А. Вычисление аномалий силы тяжести при высокоточных гравиметрических съемках. Пермь. УрО РАН. 2015. 142 с.
10. Гравиразведка. Справочник Геофизика // под редакцией Е.А. Мудрецово́й, К.Е. Веселова, Недр, Москва, 1990 г., 607 стр., УДК: 550.831, ISBN: 5-247-00626-7.
11. Гребенникова И.В. Методы оптимизации: учебное пособие // Екатеринбург: УрФУ, 2017.— 148 с.
12. Долгаль А.С., Бычков С.Г., Костицын В.И., Симанов А.А., Хохлова В.В. Моделирование гравитационных эффектов, обусловленных влиянием сферичности Земли // Геофизика. — 2018. — № 5. — С. 50-56.
13. Долгаль А.С., Бычков С.Г., Костицын В.И., Симанов А.А., Хохлова В.В. Приближенная 3D-оценка гравитационных аномалий, обусловленных шарообразной формой Земли // Геофизика. — 2019. — № 5. — С. 56-62.
14. Жарков В.Н. Внутреннее строение Земли и планет. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 416 с.

15. Жаров В.Е. Сферическая астрономия: учебник // Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга. — Москва: ДМК Пресс, 2022. — 480 с. — ISBN 978-5-89818-109-3.
16. Жданов М.С. Аналогии интеграла типа Коши в теории геофизических полей. М.: Наука, 1984. 327 с.
17. Кобрунов А.И. Математические основы теории интерпретации геофизических данных: учеб. пособие. Ухта: УГТУ, 2008. 288 с.
18. Кобрунов А.И., Варфоломеев В.А. Об одном методе  $\varepsilon$ -эквивалентных перераспределений и его использовании при интерпретации гравитационных полей // Известия АН СССР. Физика Земли. 1981. № 10. С.25–44.
19. Кошляков Н.С., Глинер Э. Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. Учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. М., «Высшая школа», 1970. 712 с.
20. Кронрод В.А., Кусков О.Л. Моделирование химического состава и размеров ядра Луны инверсией сейсмических и гравитационных данных // Физика Земли, изд.-во Наука (М.), 2011, № 8, с. 62–80.
21. Кузнецов К.М., Лыгин И.В., Булычев А.А. Алгоритм численного решения прямой задачи гравиметрии от сферического слоя переменной плотности // Геофизика. 2017. № 1. С. 22–27.
22. Ладовский И.В., Бызов Д.Д., Чернокутов А.И. О проблеме построения среднемасштабных плотностных моделей для сфероидальной Земли // Уральский геофизический вестник. 2017. № 1 (29). С. 73–95.
23. Лыгин И.В., **Чешиго Л.С.**, Соколова Т.Б., Кузнецов К.М., Булычев А.А. Методика геоплотностного и геомагнитного интерактивного моделирования в зависимости от объема и состава априорной геолого-геофизической информации // Геофизика. 2022, № 6, с. 57-70. RSCI (0,88 п.л., авторский вклад 40%). Импакт-фактор РИНЦ: 0,37
24. Мареев А.В., Совершенствование методики и алгоритмов определения полной топографической редукции силы тяжести по геодезическим данным // Автор-т на соиск. Степени канд. тех. н. Новосибирск, СГУГиТ, 2018.
25. Мартышко П.С. и др. О решении прямой задачи гравиметрии в криволинейных и декартовых координатах: эллипсоид Красовского и «плоская» модель // Физика Земли, 2018, № 4, с. 31–39.
26. Мелихов В.Р., Састри Р.Г., Булычев А.А. Решение прямой задачи гравиразведки с помощью быстрого преобразования Фурье // в журнале Мат-лы 6-ой конференции аспирантов и молодых ученых Деп. в ВИНТИ, 1980, № 1445, с. 80-80.

27. Миронов В.С. Курс гравиразведки. 2-е изд, перераб. и доп. // Л.: Недра, 1980 – 543 с.
28. Михайлов В.О., Пане И., Хаен М. и др. Сравнительный анализ временных вариаций глобального гравитационного поля по данным спутников Грейс в областях трех недавних гигантских землетрясений // Изв. РАН, «Физика Земли», 2014 № 2, с. 29–40.
29. Михайлов В.О., Диаман М., Любушин А.А. и др. Крупномасштабный асейсмический крип в областях сильных землетрясений по данным спутников ГРЕЙС о временных вариациях гравитационного поля // Известия РАН сер. "Физика Земли", 2016. №4, с.70-81.
30. Оганесян С.М. Регулярные методы решения трехмерных задач гравиразведки // Ереван «Гитутюн», 2004, 381 с.
31. Серкеров С.А. Гравиразведки и магниторазведка: Учеб. для вузов // М. Недра, 1999 – 437 с. ISBN – 5-247-03840-1.
32. Старостенко В.И., Манукян А.Г. Решение прямой задачи гравиметрии на шарообразной Земле // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1983. - № 12 – С. 34–50.
33. Старостенко В.И., Манукян А.Г., Загоротко А.Н. Методы решения прямых задач гравиметрии и магнитометрии на шарообразных планетах / Киев: Наукова думка, 1986. 112 с.
34. Старостенко В.И., Пятаков Ю.В. Решение прямых задач гравиметрии для сферических аппроксимирующих тел. Алгоритмы // Известия Томского политехнического университета. 2013 № 1. с. 28–34.
35. Старостенко В.И., Пятаков Ю.В. Решение прямых задач гравиметрии для сферических аппроксимирующих тел. Тестирование алгоритмов // Известия Томского политехнического университета. 2013 № 1. с. 35–39.
36. Страхов В.Н. Методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Пермь.: ПГУ, 1984. 71 с.
37. Страхов В.Н., Лучицкий А.И. О решении прямых двумерных задач гравиметрии и магнитометрии // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980. № 8. С. 65–83.
38. Страхов В.Н., Лучицкий А.И. Решение прямой задачи гравиметрии и магнитометрии для некоторых классов распределения масс. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980. № 10. С. 48–64.
39. Страхов В.Н., Лапина М.И., Шубникова М.П. Решение прямых двухмерных задач гравиметрии и магнитометрии для многоугольников с полиномиальной плотностью и намагниченностью на основе комбинированных алгоритмов // Решение прямой и обратной задач гравиметрии и магнитометрии (вопросы теории и методики). М.: Наука, 1985. С. 102–190.

40. Тихонов А. Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // ДАН СССР, 1965, т. 163, № 3, с. 591–594.
41. Тихонов А. Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 283 с.
42. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учеб. пособие. – 6-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во МГУ, 1999 ISBN 5-211-04138.
43. Ткаченко Н.С., Лыгин И.В. Применение спутниковой миссии GRACE для решения геологических и географических задач // Вестник Московского Университета. 2017. № 2. С. 3–7.
44. Хмелевской В.К. и др. Геофизические методы исследований // Учебное пособие для геологических специальностей вузов, Петропавловск-Камчатский: изд-во КГПУ, 2004, 232 с.
45. Хохлова В.В. Учет сферичности Земли при обработке гравиметрических данных // Геофизика. 2015 № 5. с. 59–64.
46. Хохлова В.В. Алгоритм расчета радиальной составляющей силы тяжести // Горное эхо. 2019 № 3 (76). с. 43–45.
47. Цирульский А.В. Вопросы теории и методы интерпретации потенциальных геофизических полей: Учеб. пособие. Л.: ЛГУ. 1989. 96 с.
48. **Чепиго Л.С., Булычев А.А.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018619677 TG2D1g 9 августа 2018.
49. **Чепиго Л.С.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019662512 GravInv2D, 25 сентября 2019.
50. **Чепиго Л.С.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020615095 GravInv3D, 14 мая 2020.
51. **Чепиго Л.С., Кузнецов К.М.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № GravInv Global, 14 мая 2020.
52. **Чепиго Л.С.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022610137 GravMagInv, 10 января 2022.
53. **Чепиго Л.С.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022611050 GravInv, 19 января 2022.
54. **Чепиго Л.С., Лыгин И.В., Булычев А.А.** Прямая двумерная задача гравиразведки от многоугольника с параболической плотностью // Вестник Московского университета. Серия 4. Геология. 2019. № 4. С. 89–93. RSCI (0,31 п.л., авторский вклад 40%). Импакт-фактор РИНЦ: 0,38
55. **Чепиго Л.С., Ткаченко Н.С., Лыгин И.В.** Определение параметров точечного источника по гравитационному полю, заданному на сфере // Вестник Московского университета.

Серия 4. Геология. 2019. № 2. С. 83–87. RSCI (0,31 п.л., авторский вклад 40%). Импакт-фактор РИНЦ: 0,38

56. **Чепиго Л.С.,** Лыгин И.В., Булычев А.А. Решение обратной задачи гравиразведки с переменной скоростью градиентного спуска // Геофизические исследования, издательство ИФЗ РАН (М.) 2022, том 23, № 1, с. 5-19. RSCI (0,94 п.л., авторский вклад 40%). Импакт-фактор РИНЦ: 0,65

57. Anderson D.L. Theory of the Earth // Theory of the Earth. Boston, Blackwell Publications, 1989.

58. Armitage T.W.K. et al. Arctic sea surface height variability and change from satellite radar altimetry and GRACE, 2003–2014 // J. Geophys. Res. Ocean. 2016. Vol. 121, № 6. P. 4303–4322.

59. Baldwin R. B. Lunar mascons: Another interpretation. Science, 1968, 162(3860), 1407–1408.

60. Bear G.W., Al-Shukri H.J., Rudman A.J. Linear inversion of gravity data for 3-D density distributions // Geophysics. 1995. Vol. 60, № 5. P. 1354–1364.

61. Besserer J. et al. GRAIL gravity constraints on the vertical and lateral density structure of the lunar crust // Geophys. Res. Lett. 2014. Vol. 41, № 16. P. 5771–5777.

62. Brezinski C. Projection methods for linear systems // J. Comput. Appl. Math. 1997. Vol. 77, № 1–2. P. 35–51.

63. Boyd S., Dattorro J. Alternating Projections // J. Appl. Probab. 2003. Vol. 29, № 4. P. 1.

64. Chen J.L. et al. Low degree spherical harmonic influences on Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE) water storage estimates // Geophys. Res. Lett. 2005. Vol. 32, № 14. P. 1–4.

65. Chenet H. et al. Lateral variations of lunar crustal thickness from the Apollo seismic data set // Earth Planet. Sci. Lett. 2006. Vol. 243, № 1–2. P. 1–14.

66. Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., Stein C. Introduction to Algorithms, 3rd Edition // MIT Press, 2009. – ISBN 0-262-03384-4.

67. D’Urso M.G. The Gravity Anomaly of a 2D polygonal body having density contrast given by polynomial functions // Surv. Geophys. 2015. Vol. 36, N 3. P. 391–425.

68. D’Urso M.G. Gravity Anomaly of a polyhedral bodies having a polynomial density contrast // Surv. Geophys. 2015. 52 p.

69. Fullagar P., Pears G. Towards geologically realistic inversion // Adv. Geophys. Invers. Model. 2007. Vol. 28, № Proceedings of Exploration 07: Fifth Decennial International Conference on Mineral Exploration. P. 444–460.

70. Garcia R.F. et al. Very preliminary reference Moon model // Phys. Earth Planet. Inter. 2011. Vol. 188, № 1–2. P. 96–113.

71. Gill P. E.; Murray W.; Wright M. H. Practical Optimization. London: Academic Press 1982. ISBN 0-12-283952-8.
72. Goins N. R., Dainty A. M., & Toksöz M. N. Lunar seismology: The internal structure of the Moon. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 1981, 86(B6), P. 5061–5074.
73. Gong S. et al. Thicknesses of mare basalts on the Moon from gravity and topography // *J. Geophys. Res. Planets*. 2016. Vol. 121, № 5. P. 854–870.
74. Heck B., Seitz K. A comparison of the tesseroïd, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling. *Journal of Geodesy*, 2013, 81(2), 121–136.
75. Kato M., Sasaki S., Takizawa Y. The Kaguya mission overview // *Space Sci. Rev.* 2010. Vol. 154, № 1–4. P. 3–19.
76. Khan A. et al. Joint inversion of seismic and gravity data for lunar composition and thermal state // *Geophys. J. Int.* 2007. Vol. 168, № 1. P. 243–258.
77. Khan A. et al. The lunar moho and the internal structure of the Moon: A geophysical perspective. *Tectonophysics*, 2013, 609, P. 331–352.
78. Latham G. et al. The Apollo passive seismic experiment // *Science*, 1969. Vol. 165, № 3890. P. 241–250.
79. Li Y., Oldenburg W. 3-D inversion of magnetic data // *Geophysics*. 1996, 61 (2), 394 – 408 p.
80. Li Y., Oldenburg W. 3-D inversion of gravity data // *Geophysics*. 1998, 63 (1), 109 – 119 p.
81. Liang Q., Chen C., Li Y., 3-D inversion of gravity data in spherical coordinates with application to the GRAIL data // *J. Geophys. Res. Planets*. 2014, 119, 1359 – 1373 p.
82. Maess G. Projection methods solving rectangular systems of linear equations // *J. Comput. Appl. Math.* 1988. Vol. 24, № 1–2. P. 107–119.
83. Mémin A. et al. Interannual variation of the Antarctic Ice Sheet from a combined analysis of satellite gravimetry and altimetry data // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2015. Vol. 422. P. 150–156.
84. Mikhailov V. et al. Numerical modelling of postseismic rupture propagation after the Sumatra 26.12.2004 earthquake constrained by GRACE gravity data. *Geophysical Journal International.*, 2013, Vol. 194. Issue 2, p640-650.
85. Moholdt G., Wouters B., Gardner A.S. Recent mass changes of glaciers in the Russian High Arctic // *Geophys. Res. Lett.* 2012. Vol. 39, № 10.
86. Mundim K.C., Lemaire T.J., Bassrei A. Optimization of non-linear gravity models through generalized simulated annealing // *Phys. A Stat. Mech. its Appl.* 1998. Vol. 252, № 3–4. P. 405–416.

87. Nakamura Y., Latham G. V., Dorman H.J. Apollo lunar seismic experiment - final summary. // *J. Geophys. Res.* 1982. Vol. 87, № Supplement. p. A117-A123.
88. Penatti N.C. et al. Satellite-based hydrological dynamics of the world's largest continuous wetland // *Remote Sens. Environ.* 2015. Vol. 170. P. 1–13.
89. Reid A. B., Allsop J. M., Granser H, Millett A. J., Somerton I. W., 1990, Magnetic interpretation in three dimensions using Euler Deconvolution, *Geophysics*. Vol.55, pp. 80-91.
90. Robinson M.S. et al. Lunar reconnaissance orbiter camera (LROC) instrument overview // *Space Sci. Rev.* 2010. Vol. 150, № 1–4. P. 81–124.
91. Save H., Bettadpur S., Tapley B.D. High-resolution CSR GRACE RL05 mascons// *J. Geophys. Res. Solid Earth*. 2016. Vol. 121, N 10. P. 7547–7569.
92. Schultz P.H., Spudis P.D. Beginning and end of lunar mare volcanism // *Nature*. 1983. Vol. 302, № 5905. P. 233–236.
93. Seo K.W. et al. Surface mass balance contributions to acceleration of Antarctic ice mass loss during 2003-2013 // *J. Geophys. Res. Solid Earth*. 2015. Vol. 120, № 5. P. 3617–3627.
94. Silva J.B.C., Costa D.C.L., Barbosa V.C.F. Gravity inversion of basement relief and estimation of density contrast variation with depth // *Geophysics*. 2006. Vol. 71, № 5.
95. Sipser M. Introduction to the Theory of Computation // *ACM SIGACT News*. 1996. Vol. 27, № 1. P. 27–29.
96. Smith D.E. et al. The lunar orbiter laser altimeter investigation on the lunar reconnaissance orbiter mission // *Space Sci. Rev.* 2010. Vol. 150, № 1–4. P. 209–241.
97. Smith D.E. et al. Summary of the results from the lunar orbiter laser altimeter after seven years in lunar orbit // *Icarus*. 2017. Vol. 283. P. 70–91.
98. Snyder J.P. Flattering the Earth: Two Thousand Years of Map Projections // 1993, pp. 179, 183, ISBN 0-226-76747-7.
99. Strutz T. Data Fitting and Uncertainty: A practical introduction to weighted least squares and beyond // Vieweg + Teubner. 2011. P. 244.
100. Tapley B.D., Bettadpur S., Watkins M. et al. The gravity recovery and climate experiment: Mission overview and early results: GRACE mission overview and early results // *Geophys. Res. Lett.* 2004. Vol. 31. № 9. P. 1–4.
101. Thompson D. T., 1982, EULDPH: A new technique for making computer-assisted depth estimates from magnetic data. *Geophysics*, Vol.47, pp.31–37.
102. Van der Meijde M., Julià J., Assumpção M. Gravity derived Moho for South America // *Tectonophysics*. 2013. Vol. 609. P. 456–467.
103. Wang H. et al. Increased water storage in North America and Scandinavia from GRACE gravity data // *Nat. Geosci.* 2013. Vol. 6, № 1. P. 38–42.

104. Wieczorek M.A. et al. The constitution and structure of the Lunar interior // *Rev. Mineral. Geochemistry*. 2006. Vol. 60. P. 221–364.
105. Wieczorek M.A. et al. The crust of the moon as seen by GRAIL // *Science* . 2013. Vol. 339, № 6120. P. 671–675.
106. Wiese D.N., Landerer F.W., Watkins M.M. Quantifying and reducing leakage errors in the JPL RL05M GRACE mascon solution: GRACE JPL RL05M leakage error reduction // *Water Resour. Res.* 2016. Vol. 52, N 9. P. 7490–7502.
107. Williams J.G. et al. Lunar interior properties from the GRAIL mission // *J. Geophys. Res. Planets*. 2014. Vol. 119, № 7. P. 1546–1578.
108. Zhou X. Analytic solution of the gravity anomaly of irregular 2D masses with density contrast varying as a 2D polynomial function // *Geophysics*. 2010. Vol. 75, N 2. P. I11–I19.
109. Zuber M. T., Smith D. E., Watkins M. M., et al. Gravity field of the Moon from the gravity recovery and interior laboratory (GRAIL) mission // *Science*. 2013. Vol. 339, N 6120 P. 668–671.