

**Отзыв официального оппонента**  
**на диссертацию Латы Александра Николаевича на тему**  
**«Производные структуры унарных алгебр», представленную на соискание**  
**ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности**  
**1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика**  
**(01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел»)**

Производные структуры как универсальных, так и классических алгебр — один из инструментов исследования строения и классификации этих алгебр. К наиболее распространенным производным структурам алгебр относятся их решетки подалгебр, конгруэнций, топологий, группы автоморфизмов, полугруппы эндоморфизмов и другие.

Диссертационная работа А.Н. Латы посвящена изучению решеток подалгебр (подалгебр) и решеток конгруэнций (конгруэнций) унарных алгебр и  $M$ -алгебр  $\langle A, d, f \rangle$ .  $M$ -алгеброй  $\langle A, d, f \rangle$  автор называет унарную алгебру  $\langle A, f \rangle$ , с дополнительной тернарной операцией  $d(x, y, z)$ , определенной по одному из правил (1)–(4). Причем унарная операция  $f$  является перестановочной с тернарной операцией  $d$ , т. е. удовлетворяет тождеству перестановочности  $f(d(x, y, z)) = d(f(x), f(y), f(z))$ .

Пусть  $\langle A, f \rangle$  — произвольный унар и  $x, y \in A$ . Для любого элемента  $x$  унара  $\langle A, f \rangle$  через  $f^n(x)$  обозначается результат  $n$ -кратного применения операции  $f$  к элементу  $x$ ; при этом  $f^0(x) = x$ . Положим  $M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$ , и  $k(x, y) = \min M_{x,y}$ , если  $M_{x,y} \neq \emptyset$  и  $k(x, y) = \infty$ , если  $M_{x,y} = \emptyset$ . Положим далее

$$p(x; y; z) = \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \leq k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \quad (1)$$

$$s(x; y; z) = \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) < k(y, z); \\ y, & \text{если } k(x, y) = k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \quad (2)$$

$$w(x; y; z) = \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) > k(y, z); \\ y, & \text{если } k(x, y) = k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) < k(y, z). \end{cases} \quad (3)$$

$$m(x; y; z) = \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \geq k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) < k(y, z). \end{cases} \quad (4)$$

Унарные алгебры имеют глубокие связи с другими разделами универсальной алгебры. В частности, любая унарная алгебра является полигоном над полугруппой. И, наоборот, всякий полигон над полугруппой является унарной алгеброй. Возможна интерпретация унарной алгебры как автомата без выхода (автомата Мура). Три теории — полигонов над полугруппами, унарных алгебр и алгебраическая теория автоматов — на самом деле представляют собой единую теорию, правда, формулируют свои понятия они на разных математических языках. Унарные алгебры используются при изучении других алгебраических систем. Г. Гретцер и Е.Т. Шмидт доказали, что для любой универсальной алгебры  $A$  существует унарная алгебра  $B$  такая, что  $\text{Con } A \cong \text{Con } B$ . В отличие от произвольных универсальных алгебр, где конгруэнции подалгебры могут не продолжаться до конгруэнций алгебры, конгруэнции подалгебры унарной алгебры всегда продолжаются до конгруэнций унарной алгебры, и, вообще, решетка конгруэнций подалгебры унарной алгебры изоморфно вкладывается в решетку конгруэнций унарной алгебры. В.К. Каргашов показал, что для произвольных коммутативных унарных алгебр, сигнатура которых содержит более одной операции, проблема описания решетки конгруэнций, обладающей заданным свойством, является гораздо более сложной. Д. Хобби и Р. Маккензи в своей монографии отмечают, что в теории конгруэнций часто удобнее работать с унарными алгебрами. Поскольку основные операции алгебры  $A$  определяют множество  $\text{Pol}_1 A$  всех унарных операций клона  $\text{Pol } A$ , а этот моноид определяет решетку конгруэнции алгебры  $A$ .

В ходе исследования для доказательства утверждений А.Н. Лата использовал методы универсальной алгебры, теории решеток и теории графов.

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Описаны коатомы, дополнения и копсевдодополнения в решетках конгруэнций  $M$ -алгебр  $\langle A, d, f \rangle$ .

2. Описаны  $M$ -алгебры  $\langle A, d, f \rangle$ , решетки конгруэнций которых являются решетками с дополнениями, с копсевдодополнениями или геометрическими решетками.
3. Описаны конгруэнц-когерентные унары, а также конгруэнц-когерентные, слабо и локально когерентные  $M$ -алгебры  $\langle A, d, f \rangle$ .
4. Найдены эквивалентные условия отсутствия подалгебр для унарной алгебры.

Соискатель имеет 11 опубликованных работ, в том числе по теме диссертации 11 работ, из них 3 статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (01.01.06 — «Математическая логика, алгебра и теория чисел»). Работ, написанных в соавторстве, нет.

Работа неоднократно апробирована на конференциях и научных семинарах.

Диссертационная работа А.Н. Латы состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 78 страниц. В списке литературы 122 наименования.

Первая глава диссертации является вводной и содержит основные определения, обозначения и вспомогательные результаты, которые используются в дальнейшем.

Вторая глава диссертации посвящена изучению решеток конгруэнций  $M$ -алгебр  $\langle A, d, f \rangle$ . В разделе 2.1 приведено описание строения коатомов в решетках конгруэнций данных алгебр. В разделе 2.2 приводится описание  $M$ -алгебр  $\langle A, d, f \rangle$ , решетки конгруэнций которых являются решетками с дополнениями, с относительными дополнениями, с копсевдодополнениями или геометрическими решетками. Дается описание дополнений и копсевдодополнений в решетках конгруэнций рассматриваемых алгебр.

Третья глава диссертации посвящена изучению конгруэнц-когерентности алгебр и ее модификациям. В разделе 3.1 дается определение конгруэнц-когерентности алгебры, изложен краткий обзор вопроса. В разделе 3.2 приводятся определения локальной и слабой когерентности алгебры. Доказываются

вспомогательные утверждения, используемые автором при доказательстве основных результатов работы. В разделе 3.3 доказываются основные результаты исследования конгруэнц-когерентности  $M$ -алгебр  $\langle A, d, f \rangle$ .

Четвертая глава диссертации посвящена алгебрам без собственных подалгебр. Дается краткий обзор результатов. В разделе 4.1 приводятся эквивалентные условия отсутствия подалгебр для унарной алгебры. В разделе 4.2 описывается алгоритм, который проверяет отсутствие подалгебр или находит собственные подалгебры и порождающие их элементы унарной алгебры, носитель и сигнатура которой конечны. В разделе 4.3 вводится определение изотопии унарных алгебр. Получено полное описание конечных унаров, изотопных унару без собственных подунаров.

В заключении подводятся итоги диссертационного исследования и перечисляются полученные результаты.

Результаты, полученные в диссертационной работе, имеют корректные формулировки и обоснованы строгими доказательствами.

По диссертации имеются следующие замечания:

1. Из доказательства леммы 2.1.2 не следует утверждение леммы о том, что любая неединичная конгруэнция алгебры  $\langle A, d, f \rangle$  содержится в конгруэнции  $\sigma_n$  для некоторого  $n > 0$ . Тем не менее, ссылки на лемму 2.1.2 можно заменить ссылками на леммы 1.3.4 и 1.3.8.

2. В разделе 4.2 для построенного алгоритма не приведены оценки сложности алгоритма.

Вместе с тем, указанные замечания не снижают значимости диссертационного исследования и не влияют на общую положительную оценку работы. Считаю, что диссертация представляет собой законченную научно-исследовательскую работу, исследование вносит вклад в развитие универсальной алгебры.

Полученные диссертантом результаты в первую очередь имеют теоретическую значимость и могут быть использованы для дальнейшего изучения унарных алгебр (полигонов над полугруппами) и алгебр с операторами.

Автореферат верно и полно отражает основные результаты диссертационной работы.

Считаю, что диссертационная работа Латы А.Н. «Производные структуры унарных алгебр» соответствует критериям, определенным пп. 2.1–2.5 «Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова», и оформлена согласно приложениям № 5, 6 «Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова».

По моему мнению, автор диссертации заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел»).

Доцент Департамента математики  
Факультета информационных технологий и  
анализа больших данных  
федерального государственного  
образовательного бюджетного учреждения  
высшего образования «Финансовый  
университет при Правительстве Российской  
Федерации»,  
кандидат физико-математических наук,  
доцент

О.В. Шашков

125167, Москва, Ленинградский пр-т, д.49/2,  
Телефон: +7(499)553-12-69, e-mail: ovshashkov@fa.ru