

**ОТЗЫВ официального оппонента
о диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
Быкова Владимира Владиславовича
на тему: «Верхнепредельные ляпуновские
характеристики линейных дифференциальных систем»
по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамиче-
ские системы и оптимальное управление»**

В настоящее время, в рамках теории показателей Ляпунова, одной из актуальных остается задача об описании зависимости асимптотических характеристик систем дифференциальных уравнений от их правых частей с точки зрения дескриптивной теории функций. Как известно, верхнепредельные функции занимают промежуточное положение между функциями первого и второго бэровских классов. В работах математиков московской и минской школ показано, что многие важные характеристики асимптотического поведения решений линейных дифференциальных систем являются верхнепредельными и не принадлежат первому классу Бэра в компактно-открытой топологии на пространстве систем. В отличие от функций первого класса Бэра, верхнепредельные функции гораздо менее изучены. Поэтому исследование свойств таких характеристик с точки зрения дескриптивной теории функций является актуальной задачей, лежащей на стыке теории дифференциальных уравнений и дескриптивной теории функций. Этим вопросам и посвящена диссертация В.В. Быкова.

Диссертация состоит из введения, семи глав (содержащих 29 разделов), заключения и списка цитированной литературы.

Первая глава является подготовительной, в ней даются определения изучаемых объектов и сводка известных фактов о них. Кроме того, в конце главы приведён обзор литературы по теме диссертации.

Во второй главе решается задача В.М. Миллионщикова об описании показателей Ляпунова семейства линейных дифференциальных систем с коэффициентами, непрерывно зависящими от параметра равномерно на временной полуоси. Рассматриваются две разновидности указанной задачи: описание отдельного показателя Ляпунова для семейства систем с ограниченными коэффициентами и описание спектра показателей Ляпунова для семейства систем с неограниченными коэффициентами. Для обеих задач получены исчерпывающие решения, причём в случае семейств систем с неограниченными коэффициентами требуемое семейство строится в виде суммы фиксированной системы, не зависящей от заданной верхнепределной функции и параметрического возмущения, убывающего к нулю на бесконечности быстрее любой экспоненты.

В третьей главе изучаются границы подвижности ляпуновских характеристик с точки зрения дескриптивной теории функций. Показано, что верхняя и нижняя границы подвижности верхнепределной ляпуновской характеристики под действием возмущений, ограниченных заданной функцией, сами являются верхнепределными. На основе полученных результатов решены задачи В.М. Миллионщикова о наименьшем классе Бэра максимальных и минимальных показателей (оценки для номеров этих классов снизу были ранее получены А.Н. Ветохиным).

Четвёртая глава посвящена изучению границ подвижности показателей Ляпунова под действием экспоненциально убывающих на бесконечности возмущений. В этой главе результаты А.Н. Ветохина о старших верхних сигма-показателе и экспоненциальном показателе Изобова распространены на промежуточные показатели, причём автору диссертации удалось освободиться от требования ограниченности коэффициентов рассматриваемых систем.

В пятой главе исследуется вопрос о бэровской классификации показателей Боля. Рассмотрены две разновидности этих показателей, предложенные В.М. Миллионщиковым — условные и относительные показатели. Для условных показателей Боля найден точный бэровский класс минимальных полунепрерывных сверху мажорант в равномерной топологии как функций параметра. Для относительных показателей установлена принадлежность четвёртому бэровскому классу (в настоящее время неизвестно, является ли эта оценка неулучшаемой). Кроме того, в этой же главе получено уточнение результата В.М. Миллионщикова о бэровском классе центральных показателей диффеоморфизмов риманова многообразия.

В шестой главе автором поставлена и решена задача о связи между бэровскими классами ляпуновских характеристик в двух наиболее часто используемых топологиях на пространстве линейных дифференциальных систем: равномерной и компактно-открытой. В диссертации установлено отсутствие какой-либо связи, кроме естественной, между указанными классами.

В седьмой главе изучается вопрос о представлении характеристик линейных систем в виде повторного предела от последовательности непрерывных функционалов, значения каждого из которых определяется сужением системы на некоторый отрезок временной полуоси (вообще говоря, свой для каждого такого функционала) — в диссертации они названы функционалами с компактным носителем. Показано, что каждую характеристику k -го класса Бэра в компактно-открытой топологии на пространстве линейных систем можно представить в виде k предельных переходов от последовательности непрерывных функционалов с компактным носителем, причём меньшего количества предельных переходов, вообще говоря, не хватит, даже если разрешить функционалам с компактным носителем быть разрывными.

Результаты диссертации являются актуальными, новыми и практически значимыми. Совокупность этих результатов представляет собой крупное научное достижение. В частности, автором диссертации получены полные решения ряда трудных и давно поставленных задач В.М. Миллионщикова об

описании показателей Ляпунова как функций параметра, о наименьшем бэровском классе мажорант и минорант показателей Ляпунова, мажорант условных показателей Боля и других. Помимо этого, диссертация содержит еще несколько интересных и важных результатов — отсутствие связи между классами Бэра ляпуновских характеристик в компактно-открытой и равномерной топологиях, совпадение классов формул и классов Бэра функционалов на пространстве линейных дифференциальных систем и другие.

Научные результаты диссертации, выносимые на защиту, получены лично автором и снабжены подробными доказательствами. Как большое и несомненное достоинство всей работы необходимо отметить её хороший стиль: ясность и точность изложения, чёткость формулировок и строгость доказательств. Результаты других авторов, упомянутые в тексте диссертации, отмечены соответствующими ссылками. Автореферат диссертации правильно и полно отражает её содержание и основные положения, выносимые на защиту.

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты прошли апробацию на международных конференциях и научных семинарах. Они могут быть использованы в Московском, Санкт-Петербургском, Белорусском, Удмуртском университетах, в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, в Институте математики НАН Беларуси и Институте математики и математического моделирования МОН Республики Казахстан.

По диссертации имеются следующие замечания.

1. В тексте диссертации, в формулировке леммы 2.2 (глава 2, стр.74), обозначение α никак не поясняется и только из доказательства леммы, в котором изложена техника построения параметрического семейства систем с i -м показателем Ляпунова, описываемым заданной верхнепределной функцией, можно понять, что α обозначает числовую последовательность.
2. В автореферате (стр. 11), после теоремы II, дающей описание спектра показателей Ляпунова для параметрических семейств систем с неогра-

ниченными коэффициентами, нет ссылки на совместный результат Е.А. Барабанова, автора диссертации и М.В. Карпука об описании спектра показателей Ляпунова семейства систем с ограниченными коэффициентами, непрерывного в равномерной топологии, что даёт несколько неполную картину о настоящем состоянии исследуемой задачи. Вместе с тем, в тексте диссертации соответствующая ссылка и пояснение имеются (стр. 9 и замечание 2.2, стр. 71).

3. На стр. 72 текста диссертации в 15-й строке снизу, должно быть, допущена опечатка – вместо фразы “Для доказательства теоремы 2.2...” скорее всего должна быть фраза “Для доказательства теоремы 2.1...”
4. Определения верхнего и нижнего сигма-показателей, данные в автореферате (стр. 15) и в тексте диссертации (п. 1.7, стр. 41), в отличие от определения верхних и нижних экспоненциальных показателей, асимметричны с точки зрения используемых для этого классов возмущений. Из доказательств утверждений п. 4.1 (стр. 134-148) и п. 4.2 (стр. 148-153) можно понять, что эта асимметрия является существенной. Тогда возникает вопрос, нельзя ли, определяя верхние и нижние сигма-показатели для одного и того же класса возмущений, получить результаты, аналогичные приведенным в пп. 4.1 и 4.2 текста диссертации?
5. На стр. 15 автореферата, в 11-й строке сверху, по всей видимости, допущена опечатка в индексах верхнего сигма-показателя (индексы должны быть записаны в обратном порядке).

Указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.01.02 — «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» (по физико-математическим наукам) и критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, а также

оформлена согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель Быков Владимир Владиславович заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 — «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления факультета ВМК
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Фурсов Андрей Серафимович

14.07.2022.

Контактные данные:

тел.: +7 (495) 932-88-53, e-mail: fursov@cs.msu.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом

защита диссертация:

01.01.02 — «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Адрес места работы:

19991 ГСП-1 Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, д.1,
стр. 52, 2-й учебный корпус, факультет ВМК
Тел.: +7 (495) 939-30-10; e-mail: cmc@cs.msu.ru

Подпись сотрудника Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

А.С. Фурсова удостоверяю:

