

## ОТЗЫВ НАУЧНОГО КОНСУЛЬТАНТА

на диссертационную работу Линке Юлианы Юрьевны  
«УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ЯДЕРНЫЕ ОЦЕНКИ  
В НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ  
К НЕЛИНЕЙНЫМ РЕГРЕССИОННЫМ МОДЕЛЯМ»,  
представленную на соискание ученой степени доктора  
физико-математических наук по специальности  
1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика.

Диссертационная работа Ю. Ю. Линке посвящена решению ряда фундаментальных проблем, как теоретического, так и прикладного плана, связанных с задачами непараметрической и нелинейной регрессии.

Регрессионный анализ важен для приложений и относится к интенсивно развивающейся области математической статистики. В диссертации рассматривается классическая задача непараметрической регрессии, состоящая в восстановлении регрессионной функции по наблюдениям ее зашумленных значений в некотором известном наборе точек, называемых регрессорами. При рассмотрении этой задачи автор основное внимание уделяет получению условий, накладываемых на регрессоры, которые позволяют оценивать регрессионную функцию методами так называемого ядерного сглаживания. Этим методам посвящена обширная литература. Достаточно упомянуть работы таких известных ученых как Х.-Г. Мюллер, Э. А. Надарая, Т. Хсинг, Я. Фан, В. Хердле, П. Холл, Д. Мэйсон, У. Айнмаль, Т. Гассер, Ф. Яо, Э. Мэри.

В многочисленных работах в этой области модели с детерминированными и случайными регрессорами принято рассматривать отдельно. При этом для детерминированных регрессоров предполагается, как правило, условие регулярного заполнения ими области определения функции, а для случайных регрессоров — условие независимости и одинаковой распределенности, либо же той или иной формы слабой зависимости между регрессорами. Соискателем предложена и реализуется следующая идея: для того, чтобы восстановить регрессионную функцию, от регрессоров достаточно требовать лишь асимптотически плотного заполнения ими области задания регрессионной функции (с увеличением объема выборки). Эта весьма наглядная идея реализуется за счет применения к анализу структуры регрессионной модели новых ядерных оценок интегральных сумм Римана. Такой подход открывает возможность исследовать асимптотические свойства оценок за счет близости интегральных сумм и соответствующих интегралов, а не предельных теорем теории вероятностей. Новое условие в терминах плотных данных для восстановления регрессионной функции, по сути, обобщает практически все известные в литературе ограничения на регрессоры. Кроме того, это условие нечувствительно к зависимости регрессоров и включает в себя как ситуацию детерминированных регрессоров без дополнительного требования регулярности, так и случайных регрессоров, которые могут не удовлетворять условиям независимости или слабой зависимости. В диссертации условия на регрессоры и

новые ядерные оценки названы универсальными, именно, в силу их нечувствительности к стохастической природе регрессоров.

Отмечу, что условия, накладываемые на регрессоры, в терминах плотных данных, представляются весьма выигрышными и наглядными с практической точки зрения, поскольку на практике это означает, что в оценивании никак не задействован тот или иной тип зависимости регрессоров. Это кардинально расширяет класс регрессионных моделей, допускающих восстановление регрессионных функций. Именно этот фрагмент привлек мое внимание весной 2021 г., когда Ю. Ю. Линке выступала на Большом семинаре кафедры теории вероятностей МГУ, а я впервые познакомилась с результатами ее исследований. Этим же годом датируется и начало наших совместных исследований. С 2022 г. Ю. Ю. Линке является докторантом кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

За время работы над диссертацией на кафедре теории вероятностей соискателем были получены существенные продвижения в задачах непараметрической регрессии. Как следствие, результаты **первой главы** диссертации, посвященные непараметрическому оцениванию, составили ядро диссертационной работы. В частности, в нашей совместной работе (с соавторами) построен и исследован еще один новый класс универсальных оценок, относящийся к локально-линейным ядерным оценкам. Кроме того, получены обобщения на случай оценивания регрессионной функции нескольких переменных. Найдены более общие, чем ранее известные, универсальные условия состоятельности оценок Надарая-Ватсона и классических локально-линейных ядерных оценок. Новые достаточные условия равномерной состоятельности этих оценок также сформулированы в терминах плотных данных и предполагают более равномерное плотное заполнение регрессорами области задания функции, чем требуется для новых классов оценок. Не менее значимым достижением автора является перенос идей универсальности и условий в терминах плотных данных на регрессионную постановку задачи оценивания функций среднего и ковариации случайного процесса: построены универсальные ядерные оценки для указанных функций в различных постановках этой задачи.

Важной особенностью диссертации является введение в задачи непараметрической регрессии условий на регрессоры в терминах плотных данных. Автор назвал это нововведение «концепцией плотных данных» и реализует эту концепцию как для новых ядерных оценок, так и для известных ранее. Концепция плотных данных позволяет получать близкие к минимальным, причем наглядные, условия на регрессоры, существенно ослабить известные ранее ограничения на эти величины, а также открывает возможность единого подхода к исследованию моделей как с детерминированными, так и случайными регрессорами. На мой взгляд, концепция плотных данных представляется весьма перспективной и в других постановках задач непараметрической регрессии. И ее систематическое развитие в диссертации можно характеризовать **как важное научное достижение**.

Во **второй главе** рассматриваются модели нелинейной регрессии. Разработаны методы построения явных  $\alpha_n$ -состоятельных или асимптотически нормальных оце-

нок конечномерных параметров в задачах нелинейной регрессии в случае плотного заполнения регрессорами некоторой области, что решает проблему поиска предварительных (начальных) оценок для ньютоновских одношаговых процедур оценивания параметров рассматриваемых моделей. Ранее, до исследований Ю. Ю. Линке в этом направлении, явные оценки в задачах нелинейной регрессии были известны, по-видимому, лишь для очень ограниченного круга моделей с аддитивными погрешностями, и проблема построения предварительных оценок для широких классов моделей нелинейной регрессии оставалась открытой. Такого рода достаточно общие методы построения явных оценок в нелинейной регрессии предложены, по-видимому, впервые. Отметим, что в основе одного из новых подходов построения оценок, развитого в диссертации, лежат аддитивные преобразования наблюдений с конструкциями интегральных сумм Римана, а в основе другого — непараметрические ядерные оценки, предложенные в диссертации.

В **третьей главе** проведен асимптотический анализ одношаговых  $M$ -оценок в случае разнораспределенных выборочных данных, имеющих ту же асимптотическую точность, как и оптимальные  $M$ -оценки (например, оценки метода наименьших квадратов, квазиправдоподобия, максимального правдоподобия в нелинейной регрессии). В такой общности в случае разнораспределенных наблюдений рассматриваемые типы одношаговых оценок исследуются также, по-видимому, впервые. Эти результаты, в совокупности с методами построения предварительных оценок регрессионной функции, открывают возможность находить оптимальные явные одношаговые оценки для широкого класса моделей нелинейной регрессии.

В диссертации получены принципиально новые результаты, которые, по моему мнению, вносят значительный вклад в развитие регрессионного анализа. Таким образом, диссертационная работа Ю. Ю. Линке представляет собой целостное исследование, которое можно квалифицировать как **важное научное достижение**. Хотя работа носит теоретический характер, она относится к направлению, востребованному практикой. Результаты диссертации существенно расширяют методологию оценивания в задачах непараметрической и нелинейной регрессии и имеют большую перспективу не только с теоретической, но и с прикладной точки зрения. Диссертационная работа открывает, по моему мнению, новую область исследований в теории непараметрического оценивания, связанную с универсальными оценками и условиями в терминах плотных данных. К несомненным достоинствам работы можно отнести подробные библиографические ссылки по тематике исследования, приведенные во введении и отражающие как актуальность тематики исследования, так и новизну полученных результатов.

Результаты диссертации опубликованы в 19 статьях (причем 10 из них без соавторов) в ведущих российских и международных научных журналах по тематике исследования, среди которых Теория вероятностей и ее применения», «Математические заметки», «Communications in Statistics – Theory and Methods», «Mathematics», «Statistics», «Metrika», «Statistics & Probability Letters».

Апробация результатов диссертации прошла на ведущих семинарах МГУ, таких

как «Диалог о настоящем и будущем» (руководитель акад. В. А. Садовничий), Большом кафедральном семинаре кафедры теории вероятностей механико-математического факультета (руководитель акад. А. Н. Ширяев), семинаре кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики (руководитель проф. В. Ю. Королев), и многочисленных российских и международных конференциях.

Подводя итог, считаю, что диссертационная работа Юлианы Юрьевны Линке «Универсальные ядерные оценки в непараметрической регрессии с приложениями к нелинейным регрессионным моделям» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а ее автор заслуживает присуждения ей степени доктора физико-математических наук.

Рекомендую принять диссертацию к защите в диссертационном совете МГУ.011.3 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по специальности 1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика.

#### Научный консультант

доктор физико-математических наук, доцент,  
профессор кафедры теории вероятностей  
механико-математического факультета МГУ  
имени М. В. Ломоносова

02.02.2024



Е. Б. Яровая

Подпись профессора кафедры теории вероятностей,  
доктора физико-математических наук, доцента Е. Б. Яровой  
удостоверяю.

Декан механико-математического факультета МГУ  
имени М. В. Ломоносова, член-корреспондент РАН,  
доктор физико-математических наук, профессор



А. И. Шафаревич

Контактные данные:

probability@yandex.ru +7(495)9391403

<http://new.math.msu.su/department/probab>

Адрес места работы: 119991, Москва, Ленинские горы, 1, МГУ, Главное здание, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей.