

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Блинкова Евгения Владимировна

**Исследование динамической структуры низкоорбитальной области околоземного
космического пространства**

1.3.1 Физика космоса, астрономия

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

Доктор физико-математических наук, профессор
Бордовицына Татьяна Валентиновна

Томск – 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
Глава 1. ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ.....	13
1.1 Уравнения движения.....	13
1.2 Математические модели возмущающих сил, действующих на ИСЗ.....	14
1.2.1 Возмущения от несферичности гeопотенциала. Алгоритм Каннингема.....	14
1.2.2 Лунно-солнечные возмущения.....	15
1.2.3 Возмущения от светового давления.....	16
1.2.4 Возмущения от сопротивления атмосферы.....	17
Глава 2. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ.....	19
2.1 Алгоритм MEGNO–анализа орбитальной эволюции объектов.....	19
2.1.1 Характеристики хаотичности движения.....	19
2.1.2 Алгоритм вычисления характеристик хаотичности движения ИСЗ.....	20
2.2 Исследование резонансных структур.....	23
2.2.1 Методика выявления орбитальных резонансов.....	23
2.2.2 Выявление вековых резонансов.....	25
2.3 Интегратор LOBBIE.....	28
2.4 Работа с каталогом NORAD.....	29
Глава 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕЙ РЕЗОНАНСНОЙ СТРУКТУРЫ НИЗКООРБИТАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ.....	31
3.1 Описание общей резонансной структуры низкоорбитальной области.....	31
3.1.1 Орбитальные резонансы.....	31
3.1.2 Вековые резонансы.....	32
3.2 Исследование области орбитального резонанса 1:3 со скоростью вращения Земли.....	34
3.3 Исследование областей орбитальных резонансов 1:4, 1:6 и 1:8 со скоростью вращения Земли.....	46
3.4 Исследование областей орбитальных резонансов 1:5, 1:7 и 1:9 со скоростью вращения Земли.....	60
3.5 Исследование областей орбитальных резонансов 1:10 и 1:11 со скоростью вращения Земли.....	65
3.6 Исследование динамики объектов под действием светового давления и вековых резонансов.....	68
3.7 Особенности динамики объектов, движущихся вне областей орбитальных резонансов ...	71
3.8 Анализ динамики избранных реальных объектов.....	76
3.9. Выводы.....	90
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	91
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	93
ПРИЛОЖЕНИЕ А (Справочное) Дополнительные графические материалы.....	95

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы

Проблема засорения космическим мусором околоземного пространства является глобальной. Например, командование воздушно-космической обороны Северной Америки (<https://celestrak.org/>) на данный момент имеет данные о почти 13 тысячах объектах размером более 10 см. Только 6% из них являются функционирующими ИСЗ. Кроме того, существует и множество мелких объектов, которые невозможно отследить в силу их малых размеров и большой скорости. Вся эта масса отработавших космических аппаратов, ступеней и блоков ракет-носителей, и их обломков, образовавшихся в результате взрывов и столкновений, является угрозой не только для использования околоземного пространства, но и представляет прямую опасность для Земли. Под действием различных возмущений неуправляемые объекты могут менять свою орбиту, что приводит к новым космическим столкновениям и разрастанию количества обломков космического мусора, или к их падению на Землю. В последнем случае, при неполном сгорании космического мусора в атмосфере, его обломки могут быть опасны для людей и наземных объектов.

Основными факторами, которые приводят к изменению орбиты, являются резонансные возмущения. На данный момент, резонансная структура околоземного космического пространства (ОКП) мало изучена. Орбитальный резонанс возникает, если есть целочисленная соизмеримость среднего движения спутника со скоростью вращения Земли. Кроме того, соизмеримость может возникать между скоростями изменения долготы перицентра и долготы восходящего узла спутника с одной из частот движения Солнца (Земли) или Луны. К собственным частотам движения третьего тела относятся его среднее движение и скорости изменения долгот перицентра и восходящего узла. Такие резонансы называются вековыми. Кроме того, при наложении резонансов, как мы покажем в дальнейшем, может возникать хаотичность в движении объектов, что делает их движение плохо предсказуемым.

Создание и размещение в околоземном космическом пространстве новых космических систем, а также поиск орбит для утилизации или паркинга отработавших объектов, требуют детального знания динамической структуры околоземного пространства. Из всего сказанного следует, что проблема исследования динамической структуры ОКП является актуальной.

Степень разработанности

Изучение влияния орбитальных (тессеральных) и вековых резонансов на динамику околоземных объектов было начато в 60-ые годы прошлого столетия работами М. Марандо, Р. Аллана, Л. Блиндзера, Б. Гарфинкеля, Г. Гедсона [1-6] и др. в области орбитальных резонансов и работами М. Лидова[7] и Дж. Кукка[8] в области вековых резонансов.

За прошедший период было выполнено и опубликовано большое количество исследований. Рассмотреть результаты всех этих исследований здесь не представляется возможным, поэтому мы ограничимся только теми работами, которые имеют непосредственное отношение к данной работе.

Многочастотность в движении околоземных космических объектов приводит к расщеплению орбитальных резонансов. Р. Аллан [2,3] выделил три компонента мультиплета орбитальных резонансов из критического аргумента возмущающей функции, а затем Э.Д. Кузнецов [9] для резонанса 1:2 получил еще две компоненты. Результаты Э.Д. Кузнецова и др.[9] были записаны в нашей работе [10] в общем виде. Во всех последующих наших исследованиях, и в настоящей работе, рассматривается пятикомпонентный резонансный мультиплет.

В работе С. Волк и др. [11] был предложен оригинальный алгоритм вычисления быстрой ляпуновской характеристики MEGNO (Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbit) [12-15], позволяющий интегрировать совместно с уравнениями движения уравнения параметров, используемых для вычисления MEGNO. В этой же работе было показано, что влияние светового давления вносит в аргумент возмущающей функции среднюю долготу Солнца, что может менять структуру резонансных возмущений объекта.

Развертывание глобальных навигационных систем GPS и ГЛОНАСС привело к возникновению интереса к исследованию динамической структуры области функционирования этих систем [16-18]. В первых двух работах рассматриваются только вековые резонансы, в третьей работе и орбитальный, и вековые резонансы.

Ряд исследований орбитальных и вековых резонансов был выполнен группой А. Целлети. Обзор работ приведен в [19]. Все результаты получены аналитическими методами.

Следует отметить также работы С. Брейтера [20-23] по исследованию вековых резонансов со средним движением третьего тела, где он впервые показал, что наложение двух вековых резонансов может приводить к возникновению хаотизации движения.

В работе Е. М. Алесси и др [24] было впервые высказано предположение, что действие вековых резонансов, связанных со средним движением Солнца, усиливает влияние светового давления.

Вопросы совместного действия светового давления и вековых резонансов на динамику околоземных объекты в последнее время привлекают всё большее внимание. Обзор работ можно найти во введении к работе [25]. В указанной работе рассматривается возникновение так называемого флипа, т.е. переворота движения объекта с прямого на обратное, возникающее при переходе наклона через 90° под действием светового давления и при наличии в движении вековых резонансов. Показано, что световое давление при большой парусности (отношение миделева сечения к массе объекта) может вызывать такие перевороты, а при определенных условиях подавлять такие перевороты, вызываемые эффектом Лидова-Козаи.

Цели и задачи

Объектом исследования являются различные реальные и модельные объекты ОКП, движущиеся под действием законов физики. **Предметом исследования** является динамическая структура ОКП, которая выявляется путем исследования динамики объектов. Исходя из этого, цель работы формулируется как выявление динамической структуры низкоорбитальной области

ОКП и исследование особенностей динамики объектов, движущихся в этой области под влиянием орбитальных и вековых резонансов.

Для реализации поставленной цели были решены следующие задачи:

- исследована структура орбитальных резонансов высоких порядков, возникающих в динамике объектов, движущихся в низкоорбитальной области ОКП;
- выполнен анализ динамической структуры зон орбитальных резонансов с использованием быстрой ляпуновской характеристики MEGNO [11-15] и построены соответствующие карты;
- произведен общий анализ вековых резонансов, возникающих в движении объектов, и построены карты расположения вековых резонансов относительно исследуемых областей орбитальных резонансов;
- изучена особенность движения объектов под действием светового давления, при одновременном влиянии вековых резонансов, связанных со средним движением Солнца;
- на все карты нанесены положения реальных объектов, взятые из каталога NORAD, который ведет командование воздушно-космической обороны Северной Америки;
- выявлены особенности динамической эволюции орбит реальных объектов под влиянием резонансов.

Научная новизна работы

Научная новизна работы состоит в следующем:

- дано полное описание структуры орбитальных резонансов 1:3, 1:4, 1:5, 1:6, 1:7, 1:8, 1:9, 1:10 и 1:11 со скоростью вращения Земли;
- произведен анализ вековых резонансов области от 8000 км до 21000 км по большой полуоси и от 0° до 180° по наклонению, тем самым представлена самая полная структура вековых резонансов низкоорбитальной области. В данной работе, диапазон исследования был выбран исходя из динамической структуры орбитальных резонансов. Так, области орбитальных резонансов 1:3, 1:10 и 1:11 имеют не характерные картины резонансной структуры и являются верхней и нижними границами области, которую мы будем называть низкоорбитальным пространством;
- численными методами показано, что действие вековых резонансов, связанных со средним движением Солнца, усиливает влияние светового давления. Исследования проводились в диапазоне больших полуосей от 6500 км до 9500 км и по наклонению от 0° до 90°. Коэффициент парусности принимался равным $1 \text{ м}^2/\text{кг}$;
- показано также, что действие светового давления способно менять структуру вековых резонансов объекта;
- выявлены реальные объекты, которые движутся в условиях наложения резонансов различных типов, что приводит к хаотизации их движения.

Научная и практическая значимость работы

В работе впервые исследована резонансная структура низкоорбитальной области ОКП и построены соответствующие карты.

Обобщены формулы четвертой и пятой компоненты мультиплета орбитального резонанса, полученные Э. Д. Кузнецовым [9] для резонанса 1:2 со скоростью вращения Земли, на случай произвольного резонанса и путем численного моделирования подтверждена пятикомпонентная структура резонансного мультиплета практически для всех рассмотренных резонансов.

Полученные в работе данные об орбитальной эволюции объектов рассматриваемой области ОКП позволяют на стадиях разработки и утилизации космических систем выбирать для размещения или паркинга области ОКП с оптимальными свойствами динамики объектов.

Методология и методы исследования

Основные законы динамики небесных тел являются методологией исследования. В качестве метода исследования выступает численно-аналитическое моделирование движения объектов. Выявление орбитальных и вековых резонансов производится по следующей схеме:

- выполняется численное моделирование долговременной орбитальной эволюции объектов при помощи усовершенствованного программного комплекса «Численная модель движения систем ИСЗ» [26] с учетом возмущений от несферичности Земли, притяжения Луны, Солнца, а при необходимости и возмущений от светового давления;

- по полученным данным о движении объектов, вычисляются резонансные характеристики орбитальных и вековых резонансов по специальным аналитическим формулам. Причем для вычисления вековых частот используются и аналитические, и численные способы, поскольку аналитические формулы дают искажённые результаты при больших эксцентриситетах, а формулы для численного моделирования имеют особенности при малых эксцентриситетах;

- производится численное исследование эволюции во времени резонансных характеристик, оценивается близость к нулю резонансного соотношения и устанавливается тип поведения критического аргумента: циркуляция – резонанс отсутствует, либрация – резонанс есть, и он устойчив, смена циркуляции и либрации – резонанс неустойчив.

Совместно с уравнениями движения обычно интегрируются уравнения для вычисления текущего и усредненного параметров MEGNO. Эволюция во времени усредненного параметра MEGNO показывает степень хаотизации движения объекта. Так, например, известно, что для квазипериодических (регулярных) орбит параметр MEGNO осциллирует около 2, для устойчивых орбит типа гармонического осциллятора усредненное значение MEGNO равно нулю, а при значении параметра MEGNO больше 2 и его линейном росте имеет место хаотизация движения, что не позволяет точно прогнозировать орбитальное движение объекта.

Положения, выносимые на защиту

1. Наличие пятикомпонентного мультиплета в орбитальном резонансе прослеживается в подавляющем большинстве рассмотренных резонансов.

2. Орбитальные резонансы могут способствовать появлению хаоса в движении объектов за счет наложения нескольких резонансных компонент мультиплета.

3. Вековые резонансы пронизывают все рассматриваемое орбитальное пространство. Наложение вековых резонансов может являться источником хаоса.

4. Вековые резонансы, связанные со средним движением Солнца, усиливают влияние светового давления. При этом влияние светового давления может менять резонансную структуру объекта.

5. Орбитальная эволюция реальных объектов показывает влияние всех обнаруженных в данной области пространства резонансных структур.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты научной работы представлены на следующих научных конференциях:

Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики (Томск, 2018), XI Международная конференция: Околосолнечная астрономия и космическое наследие (Казань, 2019), Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики (Томск, 2019), Конференция «Наука будущего» и форум «Наука будущего – наука молодых» (Сочи, 2019), 49-я Международная студенческая научная конференция «Физика космоса» (Екатеринбург, 2020), The eleventh Moscow solar system symposium 11m-s3 (Москва, 2020), Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики (Томск, 2020), Всероссийская астрономическая конференция (Москва, 2021), Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики (Томск, 2021), XI Всероссийская конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики» (Томск, 2022).

Основные результаты по теме диссертации представлены в 15 печатных изданиях, из которых 5 статей, опубликованных в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science/Scopus/RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.3.1. Физика космоса, астрономия:

1. Томилова И. В., Блинкова Е.В., Бордовицына Т. В. Особенности динамики объектов, движущихся в окрестности резонанса 1:3 с вращением Земли // *Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы*, 2019. Т 53. № 5. С. 323–338 DOI: 10.1134/S0320930X19050074 (Двухлетний импакт-фактор РИНЦ 2021: 1,253) // Переводная версия: Tomilova I.V., Blinkova E.V., Bordovitsyna T.V. Features of the dynamics of objects moving in the neighborhood of the 1:3 resonance with the Earth's rotation//*Solar System Research*. 2019. Vol.53. №5. P.307-321. DOI: 10.1134/S0038094619050071 (Двухлетний импакт-фактор WoS 2021: 0,790) Личный вклад: 70%

2. Александрова А.Г., Блинкова Е.В., Бордовицына Т.В., Попандопуло Н.А., Томилова И.В. Вековые резонансы в динамике объектов, движущихся в областях LEO–MEO околоземного орбитального пространства// *Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы*, 2021. Т 55. № 3. С. 272–287 DOI: 10.31857/S0320930X21030014 (Двухлетний импакт-фактор РИНЦ 2021: 1,253) // Переводная версия: Aleksandrova A.G., Blinkova E.V., Bordovitsyna

T.V., Popandopulo N.A., Tomilova I.V. Secular resonances in the dynamics of objects moving in LEO–MEO regions of near-earth orbital space/ *Solar System Research*. 2021. Vol.55. №3. P.266-281. DOI: 10.1134/S0038094621030011 (Двухлетний импакт-фактор WoS 2021: 0,790) Личный вклад: 45%

3. Томилова И. В., Блинкова Е.В., Бордовицына Т. В. Особенности динамики объектов, движущихся в зонах орбитальных резонансов 1:4, 1:6 и 1:8 с вращением Земли// *Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы*, 2021. Т 55. № 5. С. 427–443 DOI: 10.31857/S0320930X21040101 (Двухлетний импакт-фактор РИНЦ 2021: 1,253) // Переводная версия: Tomilova I.V., Blinkova E.V., Bordovitsyna T.V. Features of the dynamics of objects moving in the zones of orbital resonances 1 : 4, 1 : 6, and 1 : 8 with the Earth’s rotation// *Solar System Research*. 2021. Vol.55. №5. P.420-436. DOI: 10.1134/S0038094621040092 (Двухлетний импакт-фактор WoS 2021: 0,790) Личный вклад: 70%

4. Блинкова Е.В., Бордовицына Т. В. Исследование совместного влияния светового давления и вековых резонансов, связанных со средним движением Солнца, на динамику объектов в области LEO// *Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы*, 2022. Т 56. № 4. С. 219–236 DOI: 10.31857/S0320930X22040028 (Двухлетний импакт-фактор РИНЦ 2021: 1,253) // Переводная версия: Blinkova E.V., Bordovitsyna T.V. Investigation of the joint effect of light pressure and secular resonances associated with the mean motion of the Sun on the dynamics of objects in the LEO region// *Solar System Research*. 2022. Vol.56. №4. P.207-224. DOI: 10.1134/S0038094622040025 (Двухлетний импакт-фактор WoS 2021: 0,790) Личный вклад: 80%

5. Блинкова Е.В., Бордовицына Т. В. Исследование динамики области орбитальных резонансов высоких порядков// *Вестник Томского государственного университета. Математика и Механика*, 2022. № 79. С. 58-68 DOI: 10.17223/19988621/79/5 (Двухлетний импакт-фактор РИНЦ 2021: 0,963) Личный вклад: 80%;

а также 10 публикаций в трудах конференций:

1. Блинкова Е.В., Томилова И.В. Орбитальная эволюция объектов, движущихся в окрестности резонанса 1:3 с вращением Земли, в условиях наложения резонансов различных типов// VIII Всероссийская молодежная научная конференция "Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики - 2018". Материалы конференции. Под редакцией М.Ю. Орлова. 2019. С. 177-180.

2. Blinkova E.V., Aleksandrova A.G., Bordovitsyna T.V., Popandopulo N.A., Tomilova I.V. Study of the dynamic structure of LEO-MEO regions of the near-earth orbital space// *The Eleventh Moscow Solar System Symposium 11M-S3*. Москва, 2020. С. 260-262.

3. Блинкова Е.В., Красавин Д.С. Исследование динамической структуры околоземного орбитального пространства в области резонанса 1:4 со скоростью вращения Земли// *Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики - 2019*. Материалы IX Всероссийской молодежной научной конференции. Под редакцией М.Ю. Орлова. 2020. С. 214-216.

4. Блинкова Е.В., Томилова И.В. Орбитальная эволюция объектов, движущихся в окрестности резонанса 1: 4 с вращением Земли// *Физика космоса. труды 49-й Международной студенческой научной конференции*. Министерство науки и высшего образования РФ,

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина. 2020. С. 153-154.

5. Красавин Д.С., Александрова А.Г., Бордовицына Т.В., Блинкова Е.В., Томилова И.В. Компьютерное моделирование с применением искусственных нейронных сетей в исследовании динамической структуры околоземного орбитального пространства// XLV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых - пионеров освоения космического пространства. сборник тезисов : в 4 т.. Москва, 2021. С. 418-423.

6. Блинкова Е.В., Александрова А.Г., Бордовицына Т.В., Попандопуло Н.А., Томилова И.В. Особенности динамики объектов, движущихся в областях LEO-MEO околоземного космического пространства под действием вековых резонансов различных типов// X Всероссийская научная конференция с международным участием «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики -2020». Материалы конференции. под редакцией М.Ю. Орлова. Томск, 2021. С. 196-200.

7. Блинкова Е.В., Бордовицына Т.В. Исследование динамики объекта 84414 из каталога NORAD// X Всероссийская научная конференция с международным участием «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики -2020». Материалы конференции. под редакцией М.Ю. Орлова. Томск, 2021. С. 193-196.

8. Томилова И.В., Александрова А.Г., Блинкова Е.В., Бордовицына Т.В., Попандопуло Н.А. Резонансная структура и динамическая эволюция объектов высокоорбитальной области околоземного орбитального пространства// Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики - 2021. Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием. Под редакцией М.Ю. Орлова. Томск, 2022. С. 295-299.

9. Томилова И. В., Александрова А. Г., Блинкова Е. В., Бордовицына Т. В., Попандопуло Н. А. Исследование резонансной структуры высокой орбитальной области ОКП методами численного моделирования // Всероссийская астрономическая конференция ВАК-2021: Астрономия в эпоху многоканальных исследований, Москва, 23–28 августа 2021 года. Москва: МГУ имени М.В. Ломоносова, 2021. С. 95–96.

10. Блинкова Е.В., Бордовицына Т.В. Исследование совместного влияния светового давления и вековых резонансов, связанных со средним движением Солнца, на динамику объектов в области LEO// Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики - 2021. Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием. Под редакцией М.Ю. Орлова. Томск, 2022. С. 267-270.

Исследования проведены при поддержке 5 НИР: грант фонда им. Д.И. Менделеева №8.1.14.2018 «Исследование актуальных проблем динамики малых объектов Солнечной системы, связанных с реализацией существующих и планируемых космических миссий» 2018г., грант РФФИ №18-32-00735 мол_а «Исследование особенностей динамики околоземных космических объектов в условиях наложения резонансов различных типов»2018-2020г., грант РНФ №19-72-10022 «Исследование сложных задач динамики околоземных объектов методами

компьютерного моделирования и машинного анализа данных» 2019-2022г., грант РФФИ №20-32-90095 «Аспиранты» по теме «Исследование динамики совокупности неуправляемых объектов, движущихся в областях LEO и LEO-MEO околоземного космического пространства (ОКП)» 2020-2022г.; тема выполняемая в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № FSWM-2020-0049 по теме «Численное моделирование движения малых тел Солнечной системы на основе позиционных наблюдений» 2020 – 2024 гг.

Все представленные в диссертации результаты получены, обработаны и проанализированы при непосредственном участии автора.

Личный вклад

Соискателем совместно с научным руководителем определены цель и задачи, исследования. Все результаты по численному моделированию динамики объектов, построению динамической структуры изучаемой области ОКП и анализу результатов получены соискателем лично. Научный руководитель соискателя, а также руководители проектов, по которым выполнялась работа, принимали участие в постановке задачи и обсуждении результатов.

В совместных работах с И. В. Томиловой, А. Г. Александровой и Т. В. Бордовицыной указанные соавторы участвовали в постановке задач и обсуждении результатов, полученных лично соискателем. В обширной работе четырех авторов А. Г. Александрова, Е. В. Блинкова, Т. В. Бордовицына, Н. А. Попандопуло, И. В. Томилова соискателю принадлежат все исследования структуры вековых резонансов рассматриваемой области околоземного космического пространства. В работах с Д. С. Красавиным последнему принадлежит машинная проверка результатов соискателя с помощью искусственных нейронных сетей. В работах с участием Н. А. Попандопуло последнему принадлежат результаты по исследованию верхней части области МЕО, не имеющие отношения к данной диссертационной работе.

Краткое содержание диссертационной работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников (45 наименований) и одного приложения, содержит 107 рисунков и 5 таблиц. Общий объем работы составляет 113 страниц.

В первой главе дается описание используемой численной модели движения ИСЗ. Рассматриваются уравнения движения и математическая модель возмущающих сил, связанных с несферичностью геопотенциала, влиянием Луны и Солнца, а также с действием светового давления. Дано описание возмущающих сил, приведены алгоритмы вычисления их влияния. Все расчеты выполняются с применением усовершенствованного комплекса «Численная модель движения систем ИСЗ» [26] на кластере СКИФ ТГУ с использованием параллельных вычислений.

Во второй главе приводится описание используемых методов. Дается описание характеристик хаотичности движения MEGNO [11-15] и алгоритм их вычисления. Эти характеристики вычисляются одновременно с прогнозированием движения ИСЗ. После

прогнозирования движения под действием различных возмущений, вычисляются координаты и скорости объектов на определенном интервале времени. В данной главе описывается выявление резонансных структур с помощью полученных из прогноза данных. Резонансные структуры орбитальных резонансов состоят из пяти компонент мультиплета и вычисляются на каждом шаге с помощью аналитических формул. Вековые резонансные характеристики получаются из однократно и двукратно осредненного аргумента, выделенного из возмущающей функции: по 20 апсидально-нодальных типов резонансных характеристик, связанных с прецессией орбиты Луны и Солнца и по 16 вековых резонансов, связанных со средним движением третьего тела [27]. Особенности вычисления частот зависят от величины эксцентриситета и наклона. При их малых значениях применяются аналитические формулы [28], а при больших значениях эксцентриситета – формулы точной методики [27].

Все вычисления производятся на усовершенствованном комплексе «Численная модель движения систем ИСЗ», основанного на интеграторе Lobbie [29]. Данный интегратор заменил ранее используемый интегратор Эверхарта.

Кроме того, в работе изучается движение реальных объектов. Положения реальных наблюдаемых объектов, населяющих околоземное космическое пространство, представлено в каталоге NORAD. Это как функционирующие космические аппараты, так и отработавшие объекты и обломки космического мусора. Данные в каталоге состоят из набора двухстрочных элементов, которые несут в себе всю необходимую информацию о наблюдаемых объектах. Для перевода этих данных в прямоугольные координаты была использована модель SGP4 [30].

Все результаты работы описаны *в главе три*.

В подразделе 3.1 дано общее описание структуры орбитальных и вековых резонансов области ОКП, расположенной по большой полуоси в диапазоне от 8000 км до 21000 км по большой полуоси и от 0° до 180° по наклону. Показано относительное положение областей орбитальных резонансов 1:3, 1:4, 1:5, 1:6, 1:7, 1:8, 1:9, 1:10 и 1:11 со скоростью вращения Земли и детально описана структура вековых резонансов.

Подразделы 3.2–3.5 посвящены детальному описанию динамических структур областей орбитальных резонансов 1:3, 1:4, 1:5, 1:6, 1:7, 1:8, 1:9, 1:10 и 1:11 со скоростью вращения Земли. Для каждой области орбитального резонанса построены карты распределения всех типов резонансов, как орбитальных, так и вековых, и MEGNO-карты, которые показывают области повышенной хаотизации орбит. На все карты были нанесены реальные объекты, взятые из каталога NORAD. Кроме того, в этих разделах показан анализ эволюции орбит модельных и реальных объектов, попадающих под влияние орбитальных резонансов.

Подраздел 3.6 связан с исследованием динамики объектов под действием светового давления и вековых резонансов, со средним движением Солнца. Здесь проверено численными методами предположение, высказанное в работе [24], что действие вековых резонансов, связанных со средним движением Солнца, усиливает влияние светового давления. Исследована структура вековых резонансов, связанных со средним движением Солнца и произведено сравнение с картой, полученной [24]. Кроме того, в отличие от работы указанных авторов в данной работе рассмотрены неустойчивые резонансы и резонансы более высоких порядков. Все

резонансы на картах выявлены с учетом действия светового давления. Для того, чтобы увидеть его влияние были построены аналогичные карты распределения вековых резонансов и без учета действия светового давления.

Для проверки усиления влияния светового давления, при действии вековых резонансов со средним движением Солнца, как и в работе [24], были построены карты распределение амплитуды колебаний эксцентриситета с учетом светового давления и без него.

В подразделе 3.7 обсуждаются особенности динамики объектов, движущихся вне областей орбитальных резонансов, а в частности в областях влияния нодальных резонансов, которые пронизывают всю исследуемую область при 0° , 90° и 180° .

В подразделе 3.8 дан анализ динамики избранных реальных объектов из каталога NORAD, попадающих в области действия вековых резонансов, со средним движением Солнца.

В подразделе 3.9 представлены выводы, которые были сделаны, исходя из проведенных исследований.

В *заключении* перечислены основные результаты, представленные в диссертационной работе.

Глава 1. ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ

В данной Главе представлены теоретические результаты и алгоритмы других авторов, использованные автором диссертации при получении результатов, изложенных в публикациях [10, 27, 31, 32, 33], выполненных соискателем Блинковой Е.В. в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования.

1.1 Уравнения движения

В данной работе будем пользоваться моделью, описанной в пособии Бордовицыной Т.В. и Авдюшева В.А. [34, с.32], в которой представлено «... движение искусственного спутника Земли как движение материальной частицы бесконечно малой массы в поле тяготения центрального тела с массой M под действием сил, определенных потенциальной функцией U и совокупности сил P , не имеющих потенциала. Тогда дифференциальные уравнения движения частицы в инерциальной прямоугольной системе координат, связанной с центральным телом M , можно представить в виде»

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} + P \quad (1.1)$$

с начальными условиями

$$x_0 = x(t_0), \quad \dot{x}_0 = \dot{x}(t_0), \quad (1.2)$$

где

$$U = \frac{\mu}{r} - R. \quad (1.3)$$

Где $\frac{\mu}{r}$ – потенциал, обусловленный притяжением сферической Земли, рассматриваемой как материальная точка, а R – возмущающая функция, $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ – вектор положения спутника, t – физическое время, r – модуль вектора положения, $\mu = k^2(M)$, k^2 – универсальная гравитационная постоянная, $U = U(t, x)$, $\partial / \partial x$ – градиент. Причем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \mathbf{Q} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}'},$$

Где $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$ – матрица перехода из вращающейся системы координат в инерциальную систему, V – потенциал притяжения Земли в системе координат, жестко связанной с Землей.

1.2 Математические модели возмущающих сил, действующих на ИСЗ

1.2.1 Возмущения от несферичности геопотенциала. Алгоритм Каннингема

Потенциал притяжения Земли, действующего на внешнюю точку, будем представлять в следующем виде [35]:

$$V = \frac{fm}{r_0} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n+1} P_{n,m}(\sin \varphi) [\bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda] \right\}, \quad (1.4)$$

где r_0 – средний радиус Земли; r – радиус-вектор внешней точки; φ , λ – широта и долгота; $\bar{C}_{n,m}$, $\bar{S}_{n,m}$ – нормализованные гармонические коэффициенты; $P_{n,m}(\sin \varphi)$ – присоединенная функция Лежандра порядка n и степени m . Для вычисления составляющих разложения и их производных введем функцию

$$V_{n,m} \equiv \frac{P_{n,m}(\sin \varphi)(\cos m\lambda + i \sin m\lambda)}{r^{n+1}}, \quad (1.5)$$

Перепишем (1.4) в следующем виде:

$$V = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n r_0^n (C_{n,m} - iS_{n,m}) V_{n,m}. \quad (1.6)$$

Выразим x , y , z через r , λ , φ :

$$x = r \cos \varphi \cos \lambda, \quad y = r \cos \varphi \sin \lambda, \quad z = r \sin \varphi.$$

Выразим $V_{n,m}$ через x , y , z :

$$V_{n,m} = \frac{P_{n,m}(\sin \varphi)(x + iy)^m}{\cos^m \varphi}. \quad (1.7)$$

Л. Каннингемом, А. Дрожинером и К. Холшевниковым [34] были разработаны рекуррентные соотношения для вычисления шаровых функций $V_{n,m}$ и их производных.

В настоящей работе мы будем использовать алгоритм Каннингема, который для полностью нормированных шаровых функций, имеет следующий вид:

$$\bar{V}_{n,m} = \sqrt{\frac{E_m(2n+1)}{E_{m-1}2m}} \frac{x + iy}{r^2} \bar{V}_{n-1,m-1} (m = n), \quad (1.8)$$

$$\bar{V}_{n,m} = \sqrt{\frac{4n^2 - 1}{n^2 - m^2}} \frac{z}{r^2} \bar{V}_{n-1,m} - \sqrt{\frac{(2n+1)[(n-1)^2 - m^2]}{(2n-3)(n^2 - m^2)}} \frac{1}{r^2} \bar{V}_{n-2,m},$$

$$r^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2, V_{0,0} = \frac{1}{r},$$

где

$$E_m = \begin{cases} 1, m = 0 \\ 2, m \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial x} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+2)(n+m+1)}{2n+3}} \frac{\bar{V}_{n+1,m+1}}{2} + \\ &+ \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m+2)(n-m+1)}{E_{m-1}(2n+3)}} \frac{\bar{V}_{n+1,m+1}}{2}, (m > 0) \\ \frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial x} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(n+2)(n+1)}{2(2n+3)}} \text{Real} V_{n+1,1}, (m = 0) \\ \frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial y} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+2)(n+m+1)}{2n+3}} i \frac{\bar{V}_{n+1,m+1}}{2} + \\ &+ \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m+2)(n-m+1)}{E_{m-1}(2n+3)}} i \frac{\bar{V}_{n+1,m+1}}{2}, (m > 0) \\ \frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial y} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(n+2)(n+1)}{2(2n+3)}} \text{Imag} V_{n+1,1}, (m = 0) \\ \frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial z} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+1)(n-m+1)}{2n+3}} V_{n+1,m}, (m \geq 0) \end{aligned} \quad (1.9)$$

1.2.2 Лунно-солнечные возмущения

Одним из возмущающих факторов, в движении ИСЗ является гравитационное притяжение Луны и Солнца. Если при моделировании динамики спутника необходимо учитывать эти возмущения, то в уравнениях движения появляется сила, которая выражается следующей формулой [36]:

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} = \mu' \left(\frac{\tilde{x}_i - x_i}{\Delta^3} - \frac{\tilde{x}_i}{r'^3} \right), \quad (1.10)$$

где $\Delta = \sqrt{(\tilde{x}_1 - x_1)^2 + (\tilde{x}_2 - x_2)^2 + (\tilde{x}_3 - x_3)^2}$ – расстояние от спутника до возмущающего тела; $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ – вектор положения возмущающего тела; $r' = |x|$, а μ' – произведение постоянной тяготения на массу возмущающего тела.

Формула (1.10) отражает влияние третьего тела на объект и применима для случаев как с Луной, так и с Солнцем. Если стоит задача учесть влияние сразу двух возмущающих тел, то в уравнения движения (1.1) добавляются сразу два слагаемых типа (1.10). Для существенного уменьшения ошибок прогнозирования нужно пользоваться высокоточной теорией движения Луны и Солнца при вычислении их координат. В работе используются фундаментальные эфемериды больших планет, фонд DE 421.

1.2.3 Возмущения от светового давления.

Солнечная радиация способна вызывать собственные возмущения в движении ИСЗ. Степень таких возмущений зависит от размера объекта и его отражательной способности. Как описано в учебном пособии Бордовицыной Т.В., Авдюшева В.А., «Будем предполагать, что мощность потока солнечной радиации постоянна, сила светового давления всегда направлена по линии Земля-Солнце, орбита Земли круговая, спутник имеет сферическую форму. При этих предположениях сила прямого светового давления Солнца на спутник может быть задана формулой» [34, с.43]:

$$P = kqs' \left(\frac{a_s}{\Delta_s} \right)^2 \frac{x_s - x}{\Delta_s}, \quad (1.11)$$

где x и x_s – соответственно вектора положения спутника и Солнца в геоцентрической системе координат; k – отражательный параметр, (при $k=1$ – отражение зеркальное, при $k=1.44$ – диффузное); Δ_s – расстояние между объектом и Солнцем; a_s – большая полуось орбиты Земли; $q = 4.65 \cdot 10^5$ дин/см² – солнечная постоянная; s' – парусность объекта.

Возмущения от светового давления способны оказывать влияние только если спутник освещен Солнцем. Таким образом, «основную трудность при вычислении возмущений, вызванных световым давлением, представляет учет эффекта вхождения спутника в тень Земли. Проблему решает введение в формулу (1.11) так называемой функции тени.» [34, с.44] Данная функция определяет освещен спутник Солнцем, находится в полутени или находится в тени.

Предположим, что тень Земли имеет форму конуса. В этом случае условия для функции тени можно записать следующим образом:

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{если } \sin(\theta - \varphi) \geq \sin \gamma, \\ \Psi_c, & \text{если } \sin(\theta - \varphi) < \sin \gamma, \\ 0, & \text{если } \sin(\varphi - \theta) \geq \sin \gamma. \end{cases} \quad (1.13)$$

Здесь

$$\sin \gamma = R_2 / \Delta_2, \quad \sin \varphi = a_1 / r, \quad \cos \theta = (x_s, x_s - x_2) / r\Delta',$$

а значение теневой функции в области полутени δ_c определяется в форме

$$\delta_c = 1 - (1/\pi) \left(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\sin^2(\varphi/2)}{\sin^2(\gamma/2)} (v - \sin v \cos v) \right),$$

$$\cos \alpha = (\cos \varphi - \cos \theta \cos \gamma) / \sin \theta \sin \gamma,$$

$$\cos v = (\cos \gamma - \cos \theta \cos \varphi) / \sin \theta \sin \varphi.$$

Сила отраженной от Земли радиации, может быть представлена формулой:

$$P' = g s' \left(\frac{a_s}{r_s} \right) \left(\frac{r_0}{r} \right) \left[k' \cos^2 \varphi + k'' \delta \sin(\beta - \psi) \right] \frac{x}{r}. \quad (1.14)$$

Здесь β выражает такое значение угла ψ , при котором диффузное отражение практически нивелируется; k' — коэффициент инфракрасного отражения от Земли; k'' — коэффициент радиального диффузного отражения. Значения коэффициентов k' и k'' изменяются в пределах $0.2 \leq k' \leq 0.3$, $0.37 \leq k'' \leq 0.57$.

Функция δ определена соотношениями

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{если, } \cos \psi \geq \cos \beta \\ 0, & \text{если, } \cos \psi < \cos \beta \end{cases}. \quad (1.15)$$

Значение угла β подбирается экспериментальным путем.

1.2.4 Возмущения от сопротивления атмосферы.

Следует учитывать влияние атмосферы при исследовании динамики объектов, движущихся на высоте 150-1500 км. На такой высоте воздействие атмосферы является вторым по величине фактором после притяжения Земли. Даже разреженная атмосфера способна оказывать сопротивление, которое уменьшает скорость объекта. Сила такого сопротивления может быть описана формулой:

$$P = \frac{1}{2} S c_d \rho v_{\text{омн}}^2, \quad (1.16)$$

где S — миделево сечение спутника; ρ — плотность воздуха; $v_{\text{омн}}$ — скорость спутника относительно атмосферы; c_d — коэффициент аэродинамического сопротивления воздуха;

Так как атмосфера Земли не постоянна и зависит от активности Солнца, «наибольшая сложность при определении возмущений от сопротивления атмосферы заключается в вычислении плотности атмосферы ρ . Величина плотности атмосферы является функцией молекулярного веса воздуха M и его абсолютной кинетической температуры T » [34, с.46]:

$$\rho = \rho_1 \frac{MT}{M_1 T_1} e^{\int_{h_1}^h \frac{gM}{R_0 T} dh}, \quad (1.17)$$

Где $\rho, M, T, \rho_1, M_1, T_1$ — значения соответствующих величин на высоте h и h_1 над поверхностью Земли соответственно.

Кроме того, в пособии Бордовицыной Т.В., Авдюшева В.А. сказано, что «изменение параметров M и T – это функции времени и геофизических факторов изменения состояния атмосферы, зависящих от активности Солнца. Именно поэтому в изменении параметров атмосферы наблюдается периодичность, связанная с обращением Земли вокруг Солнца, с обращением Солнца вокруг своей оси, с изменением солнечной активности в течение одиннадцатилетнего цикла и т.п.»[34, с.47].

Модели атмосферы, учитывающие зависимость ее параметров не только от высоты, но и от перечисленных выше факторов, принято называть динамическими. Процесс построения этих моделей очень трудоемкий, однако, квазидинамические модели, учитывающие влияние перечисленных выше факторов, существуют. Такими моделями являются отечественная модель ГОСТ Р 25645.166-2004 (ГОСТ Р.2004) и модель NASA NRLMSISE-00(<http://modelweb.gsfc.nasa.gov/atmos/nrlmsise00.html>). В применяемой в данной работе численной модели движения ИСЗ используется модель NASA.

Глава 2. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В данной Главе представлены теоретические результаты и алгоритмы других авторов, использованные автором диссертации при получении результатов, изложенных в публикациях [10, 27, 31, 32, 33], выполненных соискателем Блинковой Е.В. в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования.

2.1 Алгоритм MEGNO–анализа орбитальной эволюции объектов

2.1.1 Характеристики хаотичности движения

Будем рассматривать усредненный параметр MEGNO (Mean Exponential Growth of Nearby Orbit) [12-15], как основную характеристику хаотичности движения. MEGNO является взвешенной по времени интегральной формой ляпуновского характеристического числа (LCN).

Будем считать, что система уравнений движения (1.1) определяет динамику объекта, а $\phi(t) = \phi(t, x_0, t_0)$ есть решение этой системы при начальных условиях (t_0, x_0) . Тогда формула для вычисления LCN запишется как:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta_\phi(t)\|}{\|\delta_\phi(t_0)\|}, \quad (2.1)$$

Где $\delta_\phi(t)$ — касательный вектор, который определяет изменение начального бесконечно малого отклонения $\delta_\phi(t_0) \equiv \delta_0$ между решением $\phi(t)$ и очень близкой орбитой. Этот вектор можно описать вариационным уравнением с точностью до бесконечно малых первого порядка

$$\dot{\delta}_\phi = \frac{d}{dt} \delta_\phi(t) = \mathbf{J}(\mathbf{f}(\phi(t))) \delta_\phi(t), \quad \mathbf{J}(\mathbf{f}(\phi(t))) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\phi(t)), \quad (2.2)$$

Где $\mathbf{J}(\phi(t))$ – матрица Якоби.

Параметр LCN может быть записан в интегральной форме:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\dot{\delta}_\phi(s)}{\delta_\phi(s)} ds, \quad (2.3)$$

причем $\delta_\phi = \|\delta_\phi\|$, $\dot{\delta}_\phi = \dot{\delta}_\phi \cdot \delta_\phi / \delta_\phi$.

По определению параметр MEGNO $Y_\phi(t)$ является взвешенной по времени интегральной формой LCN и записывается в виде:

$$Y_\phi(t) = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\dot{\delta}_\phi(s)}{\delta_\phi(s)} s ds, \quad (2.4)$$

а средняя величина $\bar{Y}_\phi(t)$ получается, как:

$$\bar{Y}_\phi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t Y_\phi(s) ds. \quad (2.5)$$

Как уже упоминалось, эволюция во времени параметра $\bar{Y}_\phi(t)$ показывает степень хаотизации орбиты. Так, например, известно, что для квазипериодических (регулярных) орбит $\bar{Y}_\phi(t)$ осциллирует около 2, для хаотических орбит $\bar{Y}_\phi(t)$ всегда больше 2 и этот показатель растет линейно, а для устойчивых орбит типа гармонического осциллятора $\bar{Y}_\phi(t) = 0$.

При численном моделировании целесообразно заменить [11] интегральные формулы (2.4) и (2.5) дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d}{dt} y = \frac{\dot{\delta} \cdot \delta}{\delta \cdot \delta} t, \quad \frac{d}{dt} w = 2 \frac{y}{t}, \quad (2.6)$$

Где величины y и w связаны с параметрами MEGNO как

$$Y(t) = 2y(t)/t, \quad \bar{Y}(t) = w(t)/t. \quad (2.7)$$

Как сказано в работе Бордовицыной Т.В., Александровой А.Г., Чувашова И.Н. «рекомендуется совместное интегрирование уравнений (1.1) и (2.2) осуществлять в прямоугольных координатах и скоростях, что позволяет исследовать орбиты с любыми эксцентриситетами и наклонениями. Для интегрирования следует использовать эффективный метод высокого порядка и разрядную сетку ЭВМ, гарантирующие, что ошибки интегрирования не попадут в вычисленные величины MEGNO.» [14, с.15]

Кроме того, «...выбор величины начального вектора δ_0 может оказывать влияние на характер получаемой эволюции движения, поэтому рекомендуется подбор величины вектора проводить на заведомо регулярных орбитах, для которых $\bar{Y}_\phi(t) \leq 2$.» [14, с.15]

2.1.2 Алгоритм вычисления характеристик хаотичности движения ИСЗ

Как ранее сказано, для вычисления параметра MEGNO будем интегрировать уравнения (2.7) совместно с уравнениями движения (1.1) и уравнениями в вариациях (2.2). В этом случае δ_0 есть малая вариация начальных условий, $\delta_\phi(t)$ – вариация текущих параметров, а матрица Якоби состоит из двух блоков

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{OA} \\ \mathbf{BO} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

где \mathbf{A} – единичная матрица, а матрица \mathbf{B} имеет вид

$$\mathbf{B} = -\mathbf{J} \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \right) + \mathbf{J} \left(\frac{\partial R_L}{\partial \mathbf{x}} \right) + \mathbf{J} \left(\frac{\partial R_S}{\partial \mathbf{x}} \right) + \mathbf{J} \left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}} \right). \quad (2.9)$$

Где $\mathbf{J}(\partial U/\partial \mathbf{x})$ – матрица частных производных второго порядка от геопотенциала, $\mathbf{J}(\partial R_L/\partial \mathbf{x})$ и $\mathbf{J}(\partial R_S/\partial \mathbf{x})$ соответственно матрицы частных производных второго порядка от возмущающих функций Луны и Солнца, а $\mathbf{J}(\partial P/\partial \mathbf{x})$ – матрица частных производных второго порядка от радиационного давления.

Прежде чем вычислять вторые частные производные от потенциала притяжения Земли, представим потенциал Земли в следующем виде:

$$V = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n r_0^n (C_{n,m} - iS_{n,m}) V_{n,m}, \quad (2.10)$$

а его производные в виде

$$\frac{\partial V}{\partial x'_j} = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n r_0^n (C_{n,m} - iS_{n,m}) \frac{\partial V_{n,m}}{\partial x'_j}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x'_j \partial x'_k} = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n r_0^n (C_{n,m} - iS_{n,m}) \frac{\partial^2 V_{n,m}}{\partial x'_j \partial x'_k}, \quad (2.12)$$

где функции V и их частные производные вычисляются в прямоугольной системе координат, жестко связанной с Землей.

Рекуррентные соотношения для вычисления функций $\bar{V}_{n,m}$ определяются формулой (1.8), их производные – формулой (1.9), а вторые частные производные могут быть выражены через первые производные следующим образом [14,15]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{V}_{nm}}{\partial x_1'^2} &= -\frac{1}{2} \sqrt{X_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m+1}}{\partial x_1'} + \frac{1}{2} \sqrt{Y_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m-1}}{\partial x_1'}, (m > 0), \quad \frac{\partial^2 \bar{V}_{n0}}{\partial x_1'^2} = -\sqrt{X_{n0}} \operatorname{Re} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,1}}{\partial x_1'}, \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{nm}}{\partial x_1' \partial x_2'} &= -\frac{1}{2} \sqrt{X_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m+1}}{\partial x_2'} + \frac{1}{2} \sqrt{Y_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m-1}}{\partial x_2'}, (m > 0), \quad \frac{\partial^2 \bar{V}_{n0}}{\partial x_1'^2} = -\sqrt{X_{n0}} \operatorname{Re} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,1}}{\partial x_2'}, \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{nm}}{\partial x_2'^2} &= \frac{i}{2} \sqrt{X_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m+1}}{\partial x_2'} + \frac{i}{2} \sqrt{Y_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m-1}}{\partial x_2'}, (m > 0), \quad \frac{\partial^2 \bar{V}_{n0}}{\partial x_2'^2} = -\sqrt{X_{n0}} \operatorname{Im} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,1}}{\partial x_2'}, \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{nm}}{\partial x_1' \partial x_3'} &= -\frac{1}{2} \sqrt{X_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m+1}}{\partial x_3'} + \frac{1}{2} \sqrt{Y_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m-1}}{\partial x_3'}, (m > 0), \quad \frac{\partial^2 \bar{V}_{n0}}{\partial x_1' \partial x_3'} = -\sqrt{X_{n0}} \operatorname{Re} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,1}}{\partial x_3'}, \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{nm}}{\partial x_2' \partial x_3'} &= \frac{i}{2} \sqrt{X_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m+1}}{\partial x_3'} + \frac{i}{2} \sqrt{Y_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m-1}}{\partial x_3'}, (m > 0), \quad \frac{\partial^2 \bar{V}_{n0}}{\partial x_2' \partial x_3'} = -\sqrt{X_{n0}} \operatorname{Im} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,1}}{\partial x_3'}, \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{n0}}{\partial x_3'^2} &= -\sqrt{Z_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m}}{\partial x_3'}, \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

где

$$X_{nm} = \left(\frac{E_m}{E_{m+1}} \right) \frac{(2n+1)(n+m+1)(n+m+2)}{2n+3},$$

$$Y_{nm} = \left(\frac{E_m}{E_{m-1}} \right) \frac{(2n+1)(n-m+1)(n-m+2)}{2n+3},$$

$$Z_{nm} = \frac{(2n+1)(n+m+1)(n-m+1)}{2n+3},$$

$$\left(\frac{E_m}{E_{m+1}} \right) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & m=0, \\ 1, & m>0, \end{cases} \quad \left(\frac{E_m}{E_{m-1}} \right) = \begin{cases} 2, & m=1; \\ 1, & m>1. \end{cases}$$

Более того, вторые частные производные могут быть выражены непосредственно через функции $\bar{V}_{n,m}$. Следует сказать, что при компьютерной реализации отдается предпочтение вычислению с помощью формул (2.13), так как этот способ использует меньше арифметических операций и затрачивает меньше памяти ЭВМ для хранения табличной информации.

Используя формулу (1.10) для функций вторых частных производных, обусловленных притяжением Луны и Солнца $\partial R_L / \partial(x_1, x_2, x_3)$ и $\partial R_S / \partial(x_1, x_2, x_3)$ ($j, k = 1, 2, 3$), можно легко получить следующие основные соотношения [14,15]:

$$\frac{\partial^2 R_L}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\mu'_L}{\Delta_L^3} \left[\frac{3(x_{Lj} - x_j)(x_{Lk} - x_k)}{\Delta_L^2} - E_{jk} \right], \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial^2 R_S}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\mu'_S}{\Delta_S^3} \left[\frac{3(x_{Sj} - x_j)(x_{Sk} - x_k)}{\Delta_S^2} - E_{jk} \right], \quad (2.15)$$

$$E_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases}$$

Здесь μ'_L и μ'_S – произведения постоянной тяготения на массу соответствующих возмущающих тел; x_{Lj} и x_{Sj} – прямоугольные координаты возмущающих тел в инерциальной геоцентрической системе координат ($j = 1, 2, 3$);

$$\Delta_L = \sqrt{\sum_{j=1}^3 (x_{Lj} - x_j)^2}, \quad \Delta_S = \sqrt{\sum_{j=1}^3 (x_{Sj} - x_j)^2}.$$

В формулах (2.14) и (2.15) координаты возмущающих тел определяются в рамках тех же теорий, которые используются обычно при вычислении частных производных $\partial R_L / \partial x_j$ и $\partial R_S / \partial x_j$.

Производные от радиационных сил имеют вид [14,15]:

$$\frac{\partial P_k}{\partial x_j} = L\delta \left(\varepsilon_{jk} - \frac{3\tilde{x}_j\tilde{x}_k}{\Delta_s^2} \right) - \frac{L}{c\Delta_s^2} \delta \left((\dot{\tilde{x}}_k \cdot \tilde{x}_j) \varepsilon_{jk} + \dot{\tilde{x}}_j\tilde{x}_k - 2\dot{\tilde{x}}_k\tilde{x}_j - \frac{4\tilde{x}_k\tilde{x}_j(\dot{\tilde{x}}_j \cdot \tilde{x}_k)}{\Delta_s^2} \right), \quad (2.16)$$

$$L = k\vartheta s' \left(\frac{a_E}{\Delta_s} \right)^2$$

где $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{X}_s$, \mathbf{x} – вектор положения спутника в геоцентрической системе координат; \mathbf{X}_s – вектор положения Солнца в геоцентрической системе координат; Δ_s – расстояние между спутником и Солнцем; a_E – большая полуось орбиты Земли; k – параметр, характеризующий отражательные свойства поверхности спутника (при $k=1$ – отражение зеркальное, при $k=1.44$ – диффузное), ϑ – солнечная постоянная; s' – парусность спутника, представляющая собой отношение площади миделева сечения спутника к его массе, δ – функция тени.

В результате алгоритм вычисления характеристик хаотичности движения MEGNO состоит в численном интегрировании уравнений (1.1), (2.2) и (2.7) с использованием формул (2.8) – (2.15).

2.2 Исследование резонансных структур

2.2.1 Методика выявления орбитальных резонансов

Орбитальный резонанс в небесной механике представляет собой соизмеримость периодов обращения двух (или более) небесных тел. Что касается спутников Земли, то здесь в качестве объекта, вступающего в резонанс со спутником, выступает избыток массы, возникший вследствие эллиптичности экватора Земли и вращающийся со скоростью вращения Земли. Регулярное прохождение спутника над этим избытком массы создает явление резонанса в движении спутника.

Для получения резонансных соотношений, связанных со средним движением спутника, будем использовать разложение

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^n U_{n,m} \quad (2.17)$$

$$U_{n,m} = \frac{fmr_0^n}{a^{n+1}} \sum_{p=0}^{\infty} F_{n,m,p}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{n,p,q}(e) S(\omega, M, \Omega, \theta),$$

где

$$S(\omega, M, \Omega, \theta) = \begin{cases} C_{n,m} & n-m \text{ чет} \\ -S_{n,m} & n-m \text{ нечет} \end{cases} \cos[(n-2p)\omega + (n-2p+q)M + m(\Omega-\theta)] \quad (2.18)$$

$$+ \begin{cases} S_{n,m} & n-m \text{ чет} \\ C_{n,m} & n-m \text{ нечет} \end{cases} \sin[(n-2p)\omega + (n-2p+q)M + m(\Omega-\theta)]$$

Здесь θ – гринвичское звездное время, $F_{n,m,p}(i)$ и $G_{n,p,q}(e)$ – функции наклона и функции эксцентриситета соответственно.

Нас интересует только аргумент

$$\Phi = (n - 2p)\omega + (n - 2p + q)M + m(\Omega - \theta) \quad (2.19)$$

причем

$$M = M_0 + n(t - t_0), \quad \omega = \omega_0 + \dot{\omega}(t - t_0), \quad \Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0).$$

В формуле (2.19) обозначения традиционные.

Сформируем частоты, соответствующие рассматриваемому резонансу, используя методику, предложенную Р. Аланом [2,3], уточненную Э. Д. Кузнецовым [9] для резонанса 1:2 и обобщенную нами [10]. Выделим их из аргумента возмущающей функции (2.19),

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_1 &= u(\dot{M} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}) - m\dot{\theta}, \\ \dot{\Phi}_2 &= u(\dot{\omega} + \dot{M}) + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta}), \\ \dot{\Phi}_3 &= u\dot{M} + m(\dot{\omega} + \dot{\Omega} - \dot{\theta}), \\ \dot{\Phi}_4 &= u(\dot{M} - \dot{\Omega} + \dot{\omega}) - m\dot{\theta}, \\ \dot{\Phi}_5 &= u\dot{M} + m(-\dot{\omega} + 2\dot{\Omega} - \dot{\theta}), \end{aligned} \quad (2.20)$$

и соответствующие им критические аргументы

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= u(M + \omega + \Omega) - m\theta, \\ \Phi_2 &= u(\omega + M) + m(\Omega - \theta), \\ \Phi_3 &= uM + m(\omega + \Omega - \theta), \\ \Phi_4 &= u(M - \Omega + \omega) - m\theta, \\ \Phi_5 &= uM + m(-\omega + 2\Omega - \theta), \end{aligned} \quad (2.21)$$

То обстоятельство, что в сформированные частоты и критические аргументы входят не все члены, содержащиеся в аргументе, не принципиально. Всегда можно косинус угла, содержащего все члены, разделить на сумму косинусов, один из которых будет содержать только резонансные члены, а второй все остальное. Таким образом, будет выделена та составляющая, которая дает в движении вековой или долгопериодический эффект с большой амплитудой. Все остальное для анализа несущественно.

Необходимым условием для возникновения резонанса является близость резонансных соотношений (2.20) к нулю. Если это условие выполняется, то изучается характер эволюции во времени их критических аргументов (2.21). Таким образом, резонанс считается устойчивым, если критический аргумент испытывает либрационное изменение, а при циркуляционном изменении

со временем считается, что резонанса нет. Если либрация сменяется циркуляцией или наоборот, считаем резонанс неустойчивым.

2.2.2 Выявление вековых резонансов

Следуя [28], запишем формулу возмущающей функции, описывающей влияние на спутник Земли третьего тела, через элементы орбиты:

$$R = \frac{\mu'}{a'} \sum_{l=2}^{\infty} \alpha^l \sum_{\bar{m}=0}^l (-1)^{l-\bar{m}} \chi_{\bar{m}} \frac{(l-\bar{m})!}{(l+\bar{m})!} \times \sum_{p,p'=0}^l F_{l\bar{m}p}(i) F_{l\bar{m}p'}(i') \times \quad (2.22)$$

$$\times \sum_{q,q'=-\infty}^{\infty} X_{l-2p+q}^{l,l-2p}(e) X_{l-2p'+q'}^{-l-1,l-2p'}(e') \times \cos \psi,$$

где $\alpha = a/a'$, $\mu' = Gm'_{L,S}$ – произведение гравитационной постоянной на массу возмущающего тела (Луны (L) или Солнца (S)), $F\dots(i)$ – функция наклона, $X\dots(e)$ – функция эксцентриситета.

Аргумент косинуса ψ является функцией, которая имеет следующий вид:

$$\psi = (l-2p'+q')\lambda' - (l-2p+q)\lambda - q'\varpi' + q\varpi + (\bar{m}-l+2p')\Omega' - (\bar{m}-l+2p)\Omega \quad (2.23)$$

Здесь $\lambda = \varpi + M$, $\lambda' = \varpi' + M'$ – средние долготы спутника и третьего тела, $\varpi = \Omega + \omega$, $\varpi' = \Omega' + \omega'$ – долготы перигея спутника и возмущающего тела, $a, i, e, \Omega, \omega, M$ – большая полуось, наклонение, эксцентриситет, долгота восходящего узла, аргумент перигея, средняя аномалия орбиты спутника, $a', i', e', \Omega', \omega', M'$ – такие же элементы орбиты возмущающего тела. Элементы i, Ω, i', Ω' отнесены к экватору Земли.

Как описано в статье Бордовицкой Т.В., Томиловой И.В., Чувашова И.Н. «будем считать, что спутник подвержен влиянию сжатия Земли, описываемого второй зональной гармоникой геопотенциала, а также притяжению Луны и Солнца, которые рассматриваются как материальные точки, движущиеся по эллипсам с вращающимися линиями аписид и узлов. При сделанных предположениях аргумент разложения возмущающей функции в ряд (2.23) в однократно осредненной задаче будет иметь следующий вид» [37, с.161]

$$\underline{\psi} = (l-2p'+q')M' - (l-2p)\omega + (l-2p')\omega' - \bar{m}(\Omega - \Omega'), \quad (2.24)$$

а в двукратно осредненный аргумент возмущающей функции (2.23) будет выглядеть как

$$\underline{\underline{\psi}} = (l-2p')\omega' - (l-2p)\omega - \bar{m}(\Omega - \Omega'), \quad (2.25)$$

причем

$$M' = M'_0 + \dot{M}'(t-t_0), \quad \omega' = \omega'_0 + \dot{\omega}'(t-t_0), \quad \Omega' = \Omega'_0 + \dot{\Omega}'(t-t_0), \quad (2.26)$$

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega}(t-t_0), \quad \Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t-t_0).$$

Таким образом, условие возникновения резонанса запишется в следующем виде

$$\underline{\dot{\psi}} \approx 0, \quad \underline{\dot{\Psi}} \approx 0. \quad (2.27)$$

Выражения будем называть (2.27) резонансными соотношениями.

Запишем вековые частоты в движении спутника:

$$\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_{J_2} + \dot{\Omega}_L + \dot{\Omega}_S, \quad \dot{\omega} = \dot{\omega}_J + \dot{\omega}_L + \dot{\omega}_S \quad (2.28)$$

Вычисление формул (2.28) производится путем численного моделирования [38] с использованием уравнений Ньютона Эйлера

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin u}{p \sin i} W; \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos u}{e} S + \frac{\sin u}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) T - \frac{r \sin u}{p \operatorname{tg} i} W, \quad (2.29)$$

где S, T, W – возмущающие ускорения, записанные в орбитальной системе координат и связанные с правыми частями уравнений движения известными соотношениями [34]. Вековые частоты возмущающих тел также получают численно из фонда координат больших планет DE421 с использованием производной от интерполяционного полинома Лагранжа 12-го порядка:

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^n (x_i \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n \frac{1}{t_i - t_j} (\sum_{j=1}^n \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq i, k \neq j}}^n (t - t_k))). \quad (2.30)$$

При малых значениях наклона и эксцентриситета формулы (2.29) могут давать искаженные результаты. В этих случаях частоты определяются с помощью аналитических формул:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_{J_2} &= -\frac{3}{2} J_2 \bar{n} \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \cos i (1 - e^2)^{-2}, \\ \dot{\omega}_{J_2} &= \frac{3}{4} J_2 \bar{n} \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \frac{5 \cos^2 i - 1}{(1 - e^2)^2}, \\ \dot{\Omega}_{L,S} &= -\frac{3}{16} \bar{n} \frac{m'_{L,S}}{m_{\oplus}} \left(\frac{a}{a'}\right)^3 \frac{2 + 3e^2}{\sqrt{1 - e^2}} (2 - 3 \sin^2 i') \cos i, \\ \dot{\omega}_{L,S} &= \frac{3}{16} \bar{n} \frac{m'_{L,S}}{m_{\oplus}} \left(\frac{a}{a'}\right)^3 \frac{4 - 5 \sin^2 i + e^2}{\sqrt{1 - e^2}} (2 - 3 \sin^2 i'). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Здесь r_0 – экваториальный радиус Земли, a, e, i, \bar{n} – большая полуось, эксцентриситет наклона орбиты и среднее движение спутника, a', e', i', \bar{n}' – большая полуось, эксцентриситет, наклонение орбиты и среднее движение третьего тела, $m'_{L,S}/m_{\oplus}$ – отношение масс третьего тела $m'_{L,S}$ и Земли m_{\oplus} , l, p, p', \bar{m}, q' – целочисленные индексы.

Аналитические формулы имеют особенности при эксцентриситетах близким к 1, поэтому формулы (2.29) и (2.31) являются взаимозаменяемыми. Выбор формулы зависит от величины эксцентриситета.

Для каждого критического аргумента строятся динамические портреты резонансов в фазовой плоскости

$$x = e \cos \psi, y = e \sin \psi \quad (2.32)$$

Они используются для определения устойчивости резонанса.

Варьируя коэффициенты в формулах (2.24) и (2.25), получим левые части резонансных соотношений (2.27), которые для краткости будем называть типом резонансного соотношения. Из однократно осредненной задачи (2.24) получим типы резонансных соотношений вековых резонансов, связанных со средним движением третьего тела, а из двукратно осредненной задачи (2.25) – резонансные соотношения апсидально-нодальных вековых резонансов.

В таблицах 1 и 2 приведены наборы рассматриваемых вековых резонансов: апсидально-нодальных до шестого порядка включительно (таблица 1) и резонансов, связанных со средним движением возмущающего тела, второго–пятого порядков (таблица 2). Поскольку величины $\dot{\omega}'_S$ и $\dot{\Omega}'_S$, связанные с прецессией орбиты Земли, пренебрежимо малы, формулы, приведенные в таблице 1 для апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Солнца, существенно упрощаются, и эти резонансы практически становятся геометрическими. В дальнейшем мы будем пользоваться этим свойством для объединения резонансов в группы при представлении результатов в графическом виде.

Таблица 1 — Типы апсидально-нодальных резонансов первого-шестого порядков

№	Тип резонансного соотношения	№	Тип резонансного соотношения	№	Тип резонансного соотношения
1	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) + \dot{\omega} - \dot{\omega}'_{S,L}$	8	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) - 2\dot{\omega} - 2\dot{\omega}'_{S,L}$	15	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) + 2\dot{\omega}'_{S,L}$
2	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) - \dot{\omega} + \dot{\omega}'_{S,L}$	9	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) + \dot{\omega}$	16	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) - 2\dot{\omega}'_{S,L}$
3	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) + \dot{\omega} + \dot{\omega}'_{S,L}$	10	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) - \dot{\omega}$	17	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L})$
4	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) - \dot{\omega} - \dot{\omega}'_{S,L}$	11	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) + 2\dot{\omega}$	18	$\dot{\omega} - \dot{\omega}'_{S,L}$
5	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) + 2\dot{\omega} - 2\dot{\omega}'_{S,L}$	12	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) - 2\dot{\omega}$	19	$\dot{\omega} + \dot{\omega}'_{S,L}$
6	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) - 2\dot{\omega} + 2\dot{\omega}'_{S,L}$	13	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) + \dot{\omega}'_{S,L}$	20	$\dot{\omega}$
7	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) + 2\dot{\omega} + 2\dot{\omega}'_{S,L}$	14	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) - \dot{\omega}'_{S,L}$		

Геометрический резонанс $\underline{\underline{\psi}} = \dot{\omega} \approx 0$, трактуемый как $\underline{\underline{\psi}} = \dot{\pi} \pm \dot{\Omega} = \dot{\omega} \approx 0$ является резонансом первого порядка. Этот резонанс был открыт Лидовым [7] в задачах о движении ИСЗ и Козаи [39] – в динамике астероидов, в рамках двукратно осредненной ограниченной задачи трех тел. В данной работе резонансные соотношения и критические аргументы будут определяться по результатам численного моделирования без какого-либо осреднения, поэтому

резонанс $\dot{\psi} = \dot{\omega} \approx 0$, который, как можно будет увидеть в дальнейшем, играет очень важную роль в динамике околоземных объектов будем называть резонансом типа Лидова–Козаи.

Таблица 2 — Типы вековых резонансов со скоростью движения возмущающего тела второго–пятого порядков

№	Тип резонансного соотношения	№	Тип резонансного соотношения	№	Тип резонансного соотношения
1	$\dot{M}'_{S,L} - \dot{\omega}$	7	$\dot{M}'_{S,L} + \dot{\omega} - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L})$	13	$\dot{M}'_{S,L} - 2\dot{\omega} - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L})$
2	$\dot{M}'_{S,L} + \dot{\omega}$	8	$\dot{M}'_{S,L} - \dot{\omega} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L})$	14	$\dot{M}'_{S,L} + 2\dot{\omega} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L})$
3	$\dot{M}'_{S,L} - 2\dot{\omega}$	9	$\dot{M}'_{S,L} - \dot{\omega} - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L})$	15	$\dot{M}'_{S,L} - 2\dot{\omega} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L})$
4	$\dot{M}'_{S,L} + 2\dot{\omega}$	10	$\dot{M}'_{S,L} + \dot{\omega} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L})$	16	$\dot{M}'_{S,L} + 2\dot{\omega} - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L})$
5	$\dot{M}'_{S,L} - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L})$	11	$\dot{M}'_{S,L} - 2(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L})$		
6	$\dot{M}'_{S,L} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L})$	12	$\dot{M}'_{S,L} + 2(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L})$		

Применяемая здесь методика выявления того или иного резонанса аналогична методике выявления орбитальных резонансов: исследование малости резонансных соотношений (2.27) и определение типа эволюции во времени соотношений (2.24) и (2.25), так называемых критических аргументов [40]. При исследовании долговременной эволюции во времени соотношений (2.27), (2.24) и (2.25) значения элементов орбиты спутника определяются с помощью численного моделирования.

2.3 Интегратор LOBBIE

В диссертации используется усовершенствованный комплекс «Численная модель движения систем ИСЗ» [26] в котором применяется новый коллакационный интегратор Lobbie [29]. Было показано [41], что данный интегратор обладает рядом преимуществ по сравнению с другими интеграторами. В том числе, было произведено сравнение с интегратором Эверхарта, который использовался в предшествующей версии «Численная модель движения систем ИСЗ».

Сравнение интегратора Эверхарта и Lobbie не является корректным из-за несовпадения порядков: интегратор Эверхарта имеет только нечетные порядки, так как построен на разбиениях Радау, а интегратор Lobbie построен на разбиениях Лобатто и имеет только четные порядки. Несмотря на это, сравнение смежных порядков в сильноэллиптическом случае показало, что интегратор Эверхарта, с более высоким порядком, уступает интегратору Lobbie по точности.

Кроме того, преимуществом нового интегратора Lobbie является возможность решения смешанных дифференциальных уравнений первого и второго порядков. Для того, чтобы решать такие системы с использованием интегратора Эверхарта, необходимо все уравнения второго порядка приводить к первому. Но даже при решении систем первого порядка интегратор Lobbie

показывает эффективность значительно выше. Решение таких систем используется при изучении динамического хаоса, а также для линеаризации, регуляризации и стабилизации уравнений движения.

2.4 Работа с каталогом NORAD

Каталог NORAD является открытой системой, в которой находится информация о положении реальных объектов. Все объекты в каталоге наблюдаются командованием воздушно-космической обороны Северной Америки. Сам каталог расположен на сайте <http://celestrak.com/NORAD/elements/>. В каталоге, координаты всех наблюдаемых объектов, представлены в виде двухстрочных TLE-элементов (Two-line element set). Строки представляют собой стандартный формат двухстрочного набора орбитальных элементов, идентичный тому, который используется NORAD и NASA.

Пример строк TLE-элементов представлен ниже:

```

AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
1 NNNNU NNNNAAA NNNN.NNNNNNNN +.NNNNNNNN +NNNNN-N +NNNNN-N N NNNNN
2 NNNNN NNN.NNNN NNN.NNNN NNNNNNNN NNN.NNNN NNN.NNNN NN.NNNNNNNNNNNNNNN

```

Нулевая строка является названием спутника и может содержать до 24 символов.

Строки 1 и 2 представляют собой стандартный двухстрочный набор орбитальных элементов, в следующем формате (Таблица 3):

Таблица 3 — Обозначение содержания TLE-элементов по номерам позиций

Номер позиции в строке	Описание
Строка 1	
01-01	Номер строки данных элемента
03-07	Номер спутника
10-11	Международное обозначение (последние две цифры года запуска)
12-14	Международное обозначение (Номер запуска года)
15-17	Международное обозначение (часть запуска)
19-20	год эпохи (последние две цифры года)
21-32	Эпоха (юлианский день и дробная часть дня)
Номер позиции в строке	Описание
34-43	Первая производная среднего движения по времени или баллистический коэффициент (в зависимости от типа эфемерид)

Продолжение таблицы 3

45-52	Вторая производная среднего движения по времени (предполагается десятичная точка; пусто, если не определено)
54-61	Термин сопротивления BSTAR, если использовалась общая теория возмущений GP4. В противном случае коэффициент радиационного давления. (Предполагается десятичная точка)
63-63	Тип эфемерид
65-68	Номер элемента
69-69	Контрольная сумма (по модулю 10) (буквы, пробелы, точки, знаки плюс = 0; знаки минус = 1)
Строка 2	
01-01	Номер строки данных элемента
03-07	Номер спутника
09-16	Наклон [°]
18-25	Прямое восхождение восходящего узла [°]
27-33	Эксцентриситет (предполагается десятичная точка)
35-42	Аргумент перигея [°]
44-51	Средняя аномалия [°]
53-63	Среднее движение [оборотов в день]
64-68	Число оборотов в эпоху [Оборот]
69-69	Контрольная сумма (по модулю 10)

Для перевода их в прямоугольные координаты и скорости была использована модель SGP4 [30]. Данная модель была разработана Кеном Крэнфордом в 1970 году для околоземных объектов, период которых составляет менее 225 минут.

Глава 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕЙ РЕЗОНАНСНОЙ СТРУКТУРЫ НИЗКООРБИТАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

При написании данной Главы диссертации использованы публикации [10, 27, 31, 32, 33], выполненные соискателем Блинковой Е.В. в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования.

3.1 Описание общей резонансной структуры низкоорбитальной области

Настоящий подраздел посвящен описанию динамической структуры области низкоорбитального пространства в диапазоне больших полуосей от 8000 км до 21000 км, состоящей из орбитальных и вековых резонансов, а также зон различной хаотизации движения. Данный диапазон был выбран исходя из динамической структуры орбитального пространства. Далее будет показано, что нижний и верхний из рассмотренных в работе орбитальных резонансов имеют не характерную структуру, по сравнению с другими орбитальными резонансами, расположенными между ними. Таким образом, эти резонансы являются границами области, которую в рамках данной работы мы называем низкоорбитальной. Прогнозирование движения космических аппаратов производилось с помощью усовершенствованного комплекса «Численная модель движения систем ИСЗ», основанного на интеграторе Lobbie, с помощью кластера СКИФ «Cyberia» ТГУ. При моделировании движения учитывались возмущения от Луны, Солнца и несферичности геопонтециала Земли до 10 порядка и степени. Модельные объекты были размещены в сетке наклонений от 0° до 180°, с эксцентриситетом 0.001. Сетка распределения по большой полуоси зависит от области исследования.

3.1.1 Орбитальные резонансы

В работе исследованы зоны орбитальных резонансов из низкоорбитальной области. Исследуемые зоны резонансов находятся выше области действия атмосферы и не подвержены ее влиянию. Диапазон резонансных областей представлен в таблице 4.

Таблица 4 — Диапазоны резонансных областей по большой полуоси

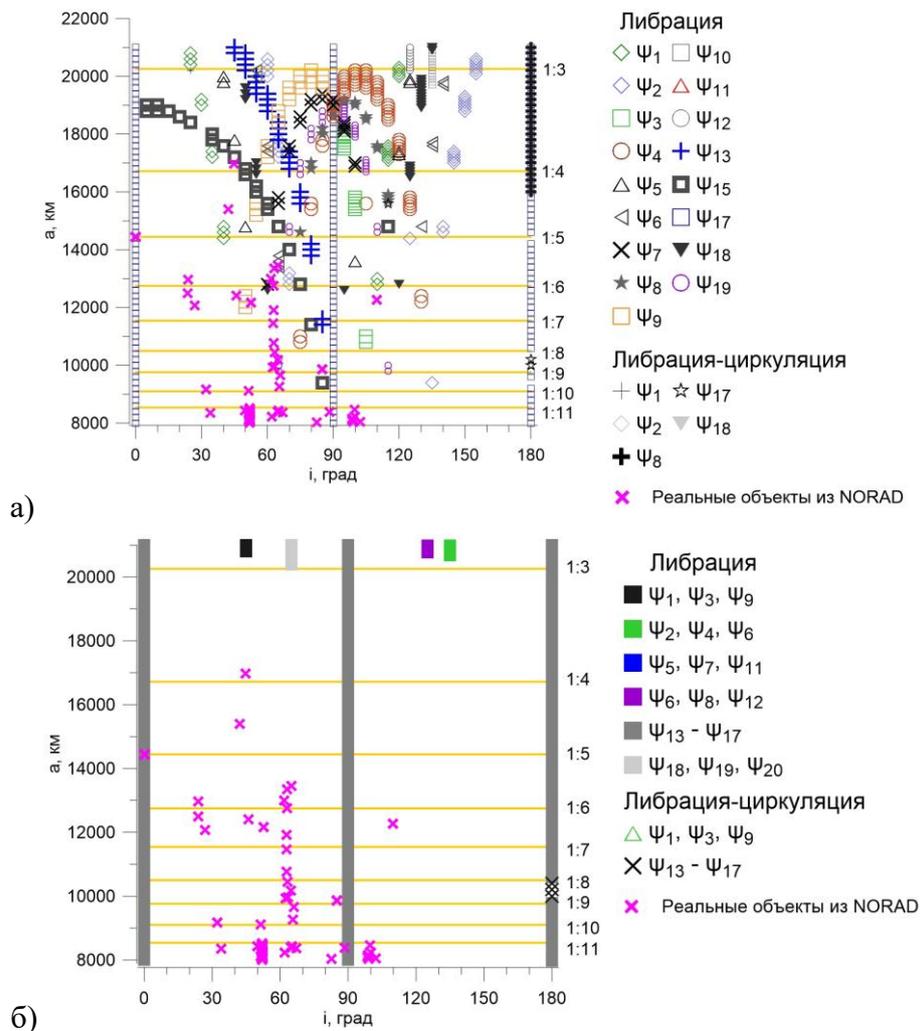
Тип орбитального резонанса	Диапазон по большой полуоси, км	Тип орбитального резонанса	Диапазон по большой полуоси, км
1:3	20260-20285	1:8	10500-10580
1:4	16720-16750	1:9	9700-9800
1:5	14400-14480	1:10	9040-9150
1:6	12750-12800	1:11	8475-8600
1:7	11500-11570		

3.1.2 Вековые резонансы

Методика выявления вековых резонансов изложена в разделе 2.2, а представленные в данном разделе результаты опубликованы в [27].

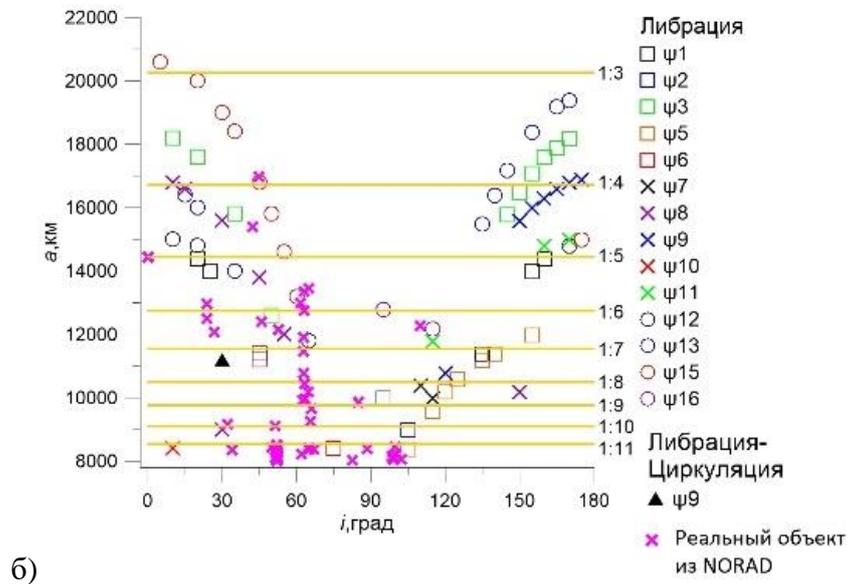
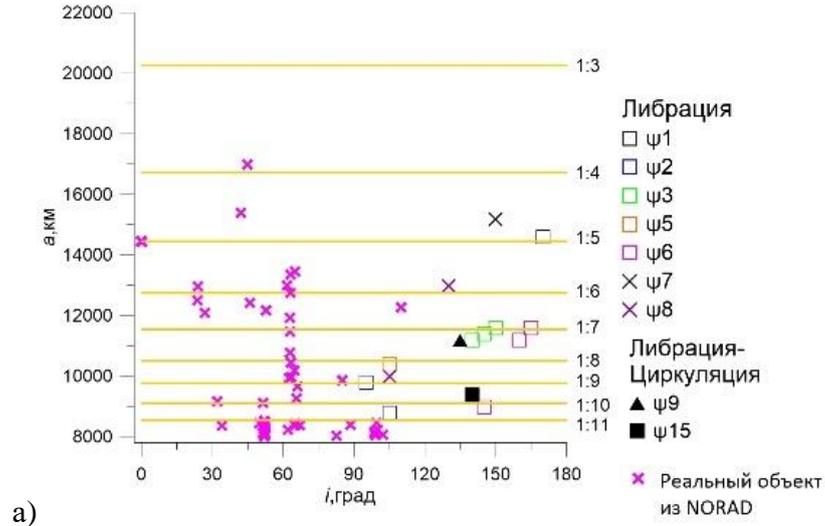
Численный эксперимент производился следующим образом: модельные объекты были равномерно распределены в пределах больших полуосей от 8000 км до 21000 км с шагом 200 км и по наклонениям от 0° до 180° с шагом 5° . Были выбраны почти круговые орбиты модельных объектов с эксцентриситетом 0.001.

Общая картина вековых резонансов представлена на рисунке 1 и 2. Кроме того, на все карты вековых резонансов было нанесено относительное положение областей орбитальных резонансов и реальных объектов, населяющих низкоорбитальное пространство. Всего в рассмотренной области расположено 145 объектов с эксцентриситетом меньше 0,5. Данные по расположению реальных объектов были взяты из каталога NORAD. На рисунках здесь и далее введены такие обозначения: ψ – критический аргумент векового резонанса, а приписанный ему номер есть номер типа резонанса из таблицы 1 или 2.



а) апсидально-нодальные резонансы с прецессией орбиты Луны, б) апсидально-нодальные резонансы с прецессией орбиты Солнца

Рисунок 1 — Общая картина вековых апсидально-нодальных резонансов



а) резонансы со средним движением Луны, б) резонансы со средним движением Солнца

Рисунок 2 — Общая картина вековых резонансов, со средним движением третьего тела

Как показывают данные, приведенные на рисунках 1 и 2, в низкоорбитальной области ОКП действует большое количество вековых резонансов.

На рисунке 1а и 1б представленные резонансы, связанные с прецессией орбиты Луны и Солнца соответственно. В геоцентрической системе координат, прецессия орбиты Солнца является отражением прецессии орбиты Земли. Так как этот параметр является малым, некоторые резонансы на рисунке 1б совпадают.

Нодальный резонанс $\underline{\psi}_{17} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{s,L}) \approx 0$ пронизывает все рассмотренное орбитальное пространство при наклонениях 0° , 90° и 180° как в случае с Луной, так и с Солнцем. Вековые резонансы, связанные с прецессией орбиты Луны, более плотно покрывают рассматриваемую область, а резонансы с прецессией орбиты Солнца в большей степени начинают проявляться

только на орбитах выше 20000 км по большой полуоси и практически не затрагивают областей орбитальных резонансов.

На рисунках 2а и 2б показано распределение вековых резонансов, связанных со средним движением Луны и Солнца соответственно. Вековые резонансы со средним движением Солнца распределены в диапазоне больших полуосей от 8000 км до 21000 км по обе стороны от наклона 90° , а вековые резонансы со средним движением Луны проявляются только на орбитах, большие полуоси которых менее 16000 км и только в динамике объектов с обратным движением.

Далее мы рассмотрим резонансную структуру областей, представленных в таблице 4, и особенности динамики объектов, определяемые этой структурой.

3.2 Исследование области орбитального резонанса 1:3 со скоростью вращения Земли

Область резонанса 1:3 находится в диапазоне больших полуосей от 20250 км до 20280 км и является самой высокорасположенной областью орбитального резонанса, рассмотренной в этой работе. Методика выявления орбитального резонанса изложена в разделе 2.2.1. Компоненты мультиплета орбитального резонанса вычислялись по формулам (2.19) и (2.20), результаты исследования представлены в [10].

На рисунке 3 показано распределение компонент мультиплета орбитального резонанса 1:3 со скоростью вращения Земли.

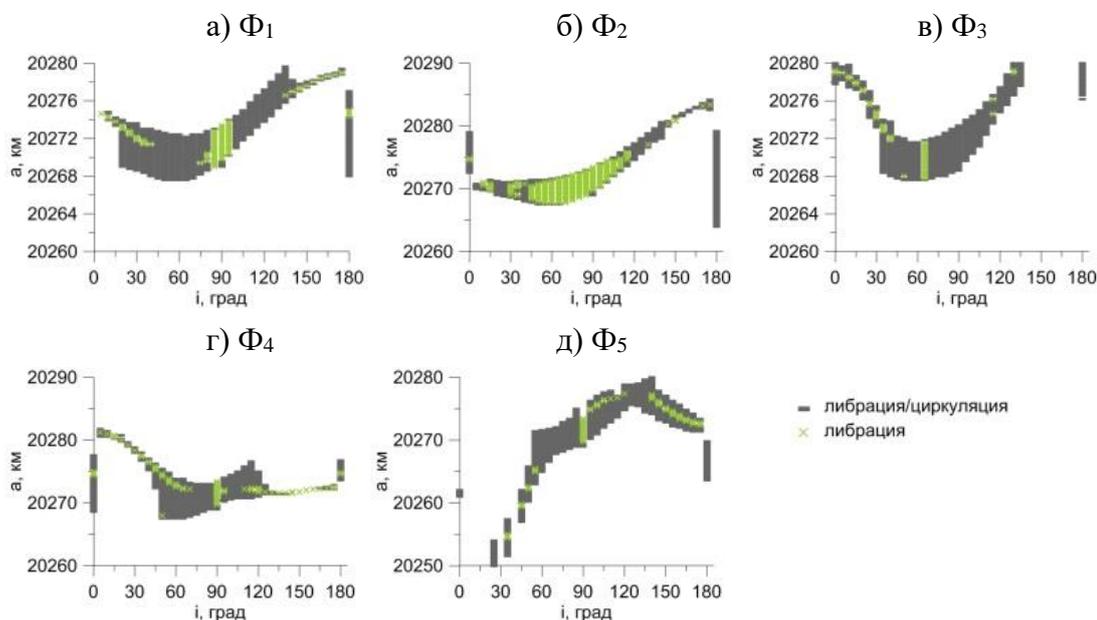


Рисунок 3 — Карта компонент мультиплета орбитального резонанса 1:3

В основном структуру орбитального резонанса формирует неустойчивое влияние компонент мультиплета, которое показано на рисунке 3 серым цветом. Устойчивое влияние присутствует у всех компонент и наибольшую площадь покрытия имеет вторая компонента мультиплета орбитального резонанса.

Кроме того, структуру орбитального пространства формируют и вековые резонансы. На рисунке 4 показано распределение вековых апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Луны.

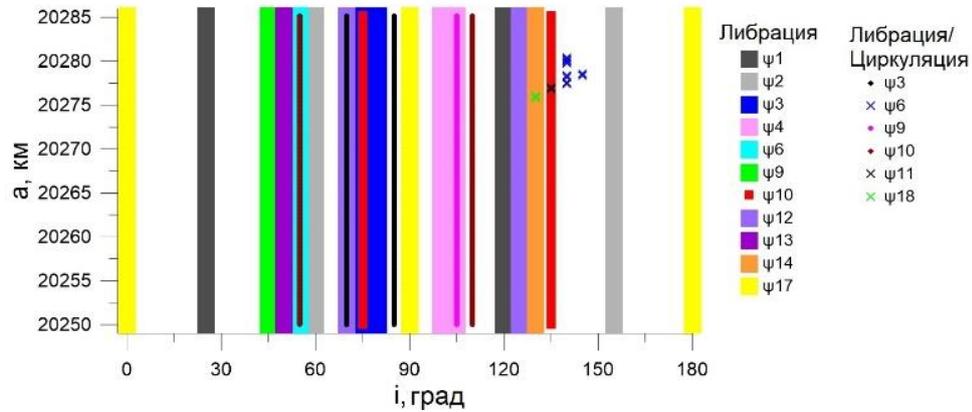


Рисунок 4 — Распределение вековых апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Луны, в области орбитального резонанса 1:3

Данные на рисунке показывают, что в рассмотренной области действует большое количество апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Луны, которые в основном расположены при наклонениях от 45° до 135° . Здесь же проявляют свое действие и неустойчивые резонансы, которые накладываются на устойчивые.

На рисунке 5 представлено распределение вековых апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Солнца. Как и для случая с Луной, здесь вековой резонанс $\dot{\psi}_{17} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) \approx 0$ пронизывает всю область по наклонениям 0° , 90° и 180° . В этой области действуют все типы резонансов, представленных в таблице 1, причем как устойчивые, так и неустойчивые.

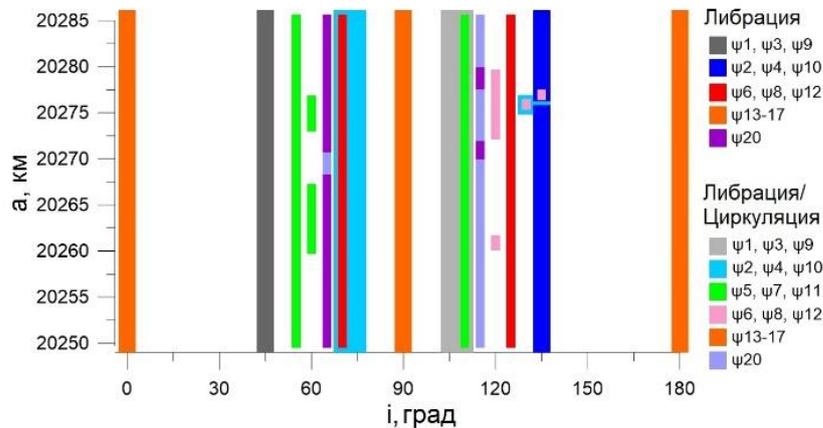


Рисунок 5 — Распределение вековых апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Солнца, в области орбитального резонанса 1:3

Вековых резонансов, связанных со средним движением третьего тела в области 1:3 не обнаружено.

Кроме того, динамическую структуру характеризует параметр MEGNO, который показывает степень хаотизации движения объектов. Для области орбитального резонанса 1:3 карта MEGNO-параметра представлена на рисунке 6.

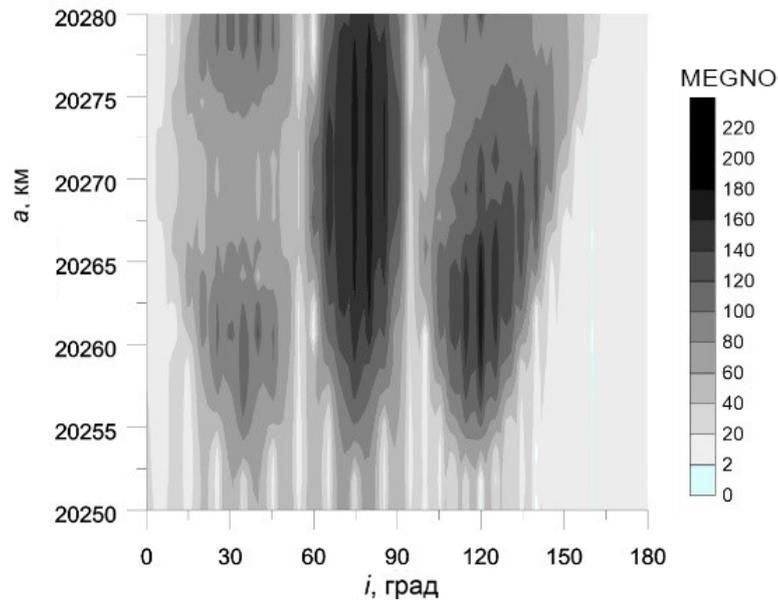
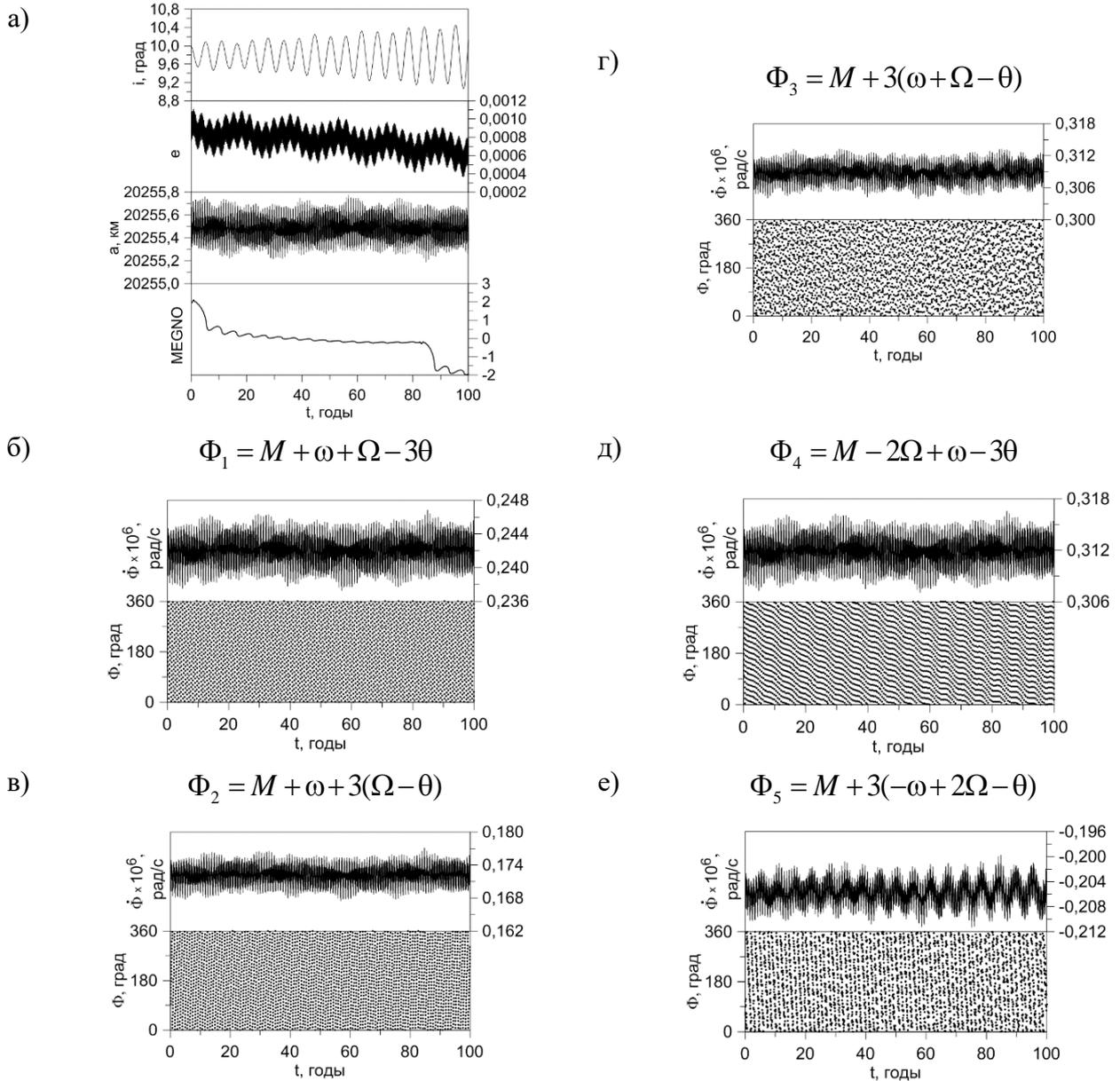


Рисунок 6 — Карта MEGNO-параметра для орбитального резонанса 1:3 со скоростью вращения Земли

Данные, приведенные, на рисунке 6 показывают, что рассмотренная область отличается высокой степенью хаотизации орбит, причем наибольшую степень хаотизации наблюдается в области наклонов от 60° до 90° . Это можно объяснить наложением большого количества резонансов различных типов, как вековых, так и орбитальных.

Рассмотрим эволюцию объектов исследуемой области орбитального пространства в зависимости от действия на движение объектов резонансов различных типов.

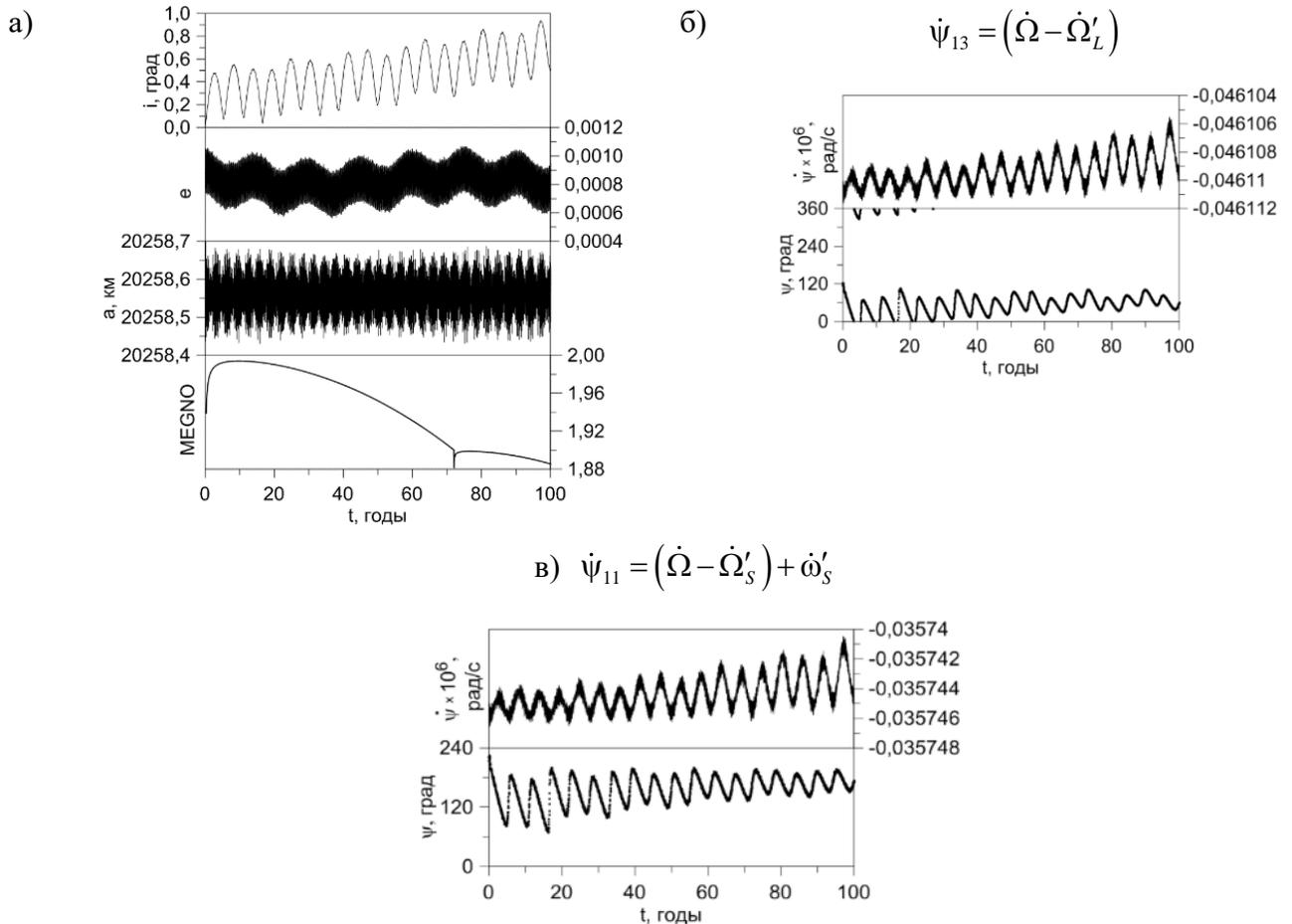
Для начала, приведем пример объекта, который движется в области отсутствия резонансов (рисунок 7). Он имеет начальную большую полуось 20255,6 км и начальное наклонение 10° . Эксцентриситет у этого и последующих объектов был взят 0,001. Все компоненты мультиплета циркулируют, что говорит об отсутствии орбитальных резонансов. Вековых резонансов, в данной области, также не было обнаружено. На объект не действуют факторы, которые могли бы существенно изменить его движение. Об этом свидетельствует и параметр MEGNO, который на протяжении всего столетнего интервала времени осциллирует около нуля.



а) эволюция основных орбитальных элементов и параметров MEGNO; б) эволюция $\dot{\Phi}_1, \Phi_1$; в) эволюция $\dot{\Phi}_2, \Phi_2$; г) эволюция $\dot{\Phi}_3, \Phi_3$; д) эволюция $\dot{\Phi}_4, \Phi_4$; е) эволюция $\dot{\Phi}_5, \Phi_5$

Рисунок 7 — Эволюция основных орбитальных элементов, параметров MEGNO и компонент мультиплета орбитального резонанса 1:3

На рисунке 8 показана эволюция орбиты объекта с начальным наклонением 0° и большой полуосью 20258,6 км. На этот объект действуют два устойчивых вековых апсидально-нодальных резонанса, связанных с прецессией орбиты Солнца и Луны. Несмотря на их присутствие, параметр MEGNO близок к 2.

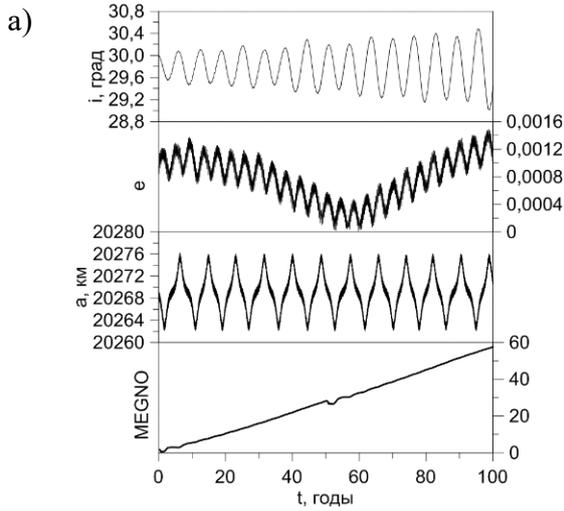


а) эволюция основных орбитальных элементов и параметров MEGNO; б) эволюция параметров векового резонанса $\dot{\Psi}_{13}$, Ψ_{13} , связанного с прецессией орбиты Луны; в) эволюция параметров векового резонанса $\dot{\Psi}_{11}$, Ψ_{11} связанного с прецессией орбиты Солнца

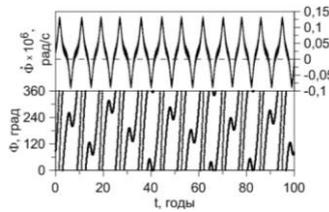
Рисунок 8 — Эволюция основных орбитальных элементов, параметров MEGNO и параметров вековых резонансов

Далее следует интересный пример движения в области устойчивого орбитального резонанса 1:3 (Рисунок 9). На рисунке 9 объект находится в зоне острого орбитального резонанса, резонансные аргументы четырех компонент мультиплета переходят через нулевые значения, критический аргумент второй компоненты уверенно либрирует, а критический аргумент первой компоненты многократно меняет циркуляционные колебания на либрационные и обратно. Параметр MEGNO растет быстро. Начальные параметры объекта: $i=30^\circ$, $a=20269$ км.

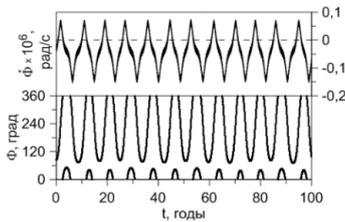
На интервале времени от 50 до 70 лет эксцентриситет опускается практически до нуля, на этом участке происходят искажения критических аргументов вековых резонансов (рисунок 9 ж, з, и) в силу малости эксцентриситета.



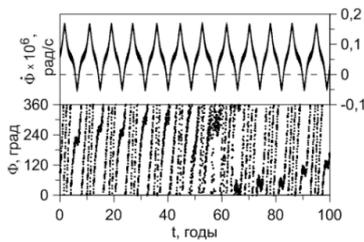
б) $\Phi_1 = M + \omega + \Omega - 3\theta$



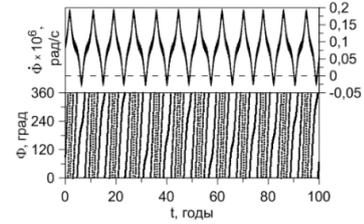
в) $\Phi_2 = M + \omega + 3(\Omega - \theta)$



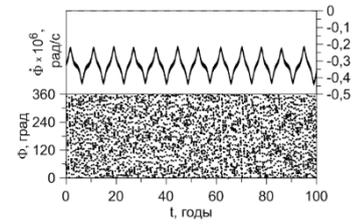
г) $\Phi_3 = M + 3(\omega + \Omega - \theta)$



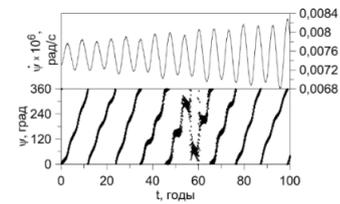
д) $\Phi_4 = M - 2\Omega + \omega - 3\theta$



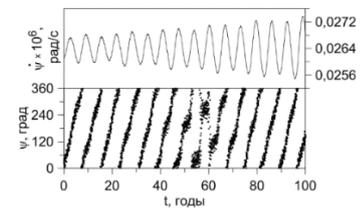
е) $\Phi_5 = M + 3(-\omega + 2\Omega - \theta)$



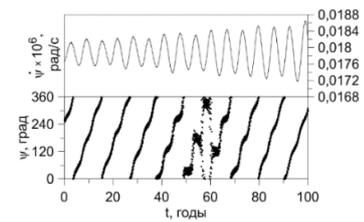
ж) $\dot{\Psi}_{10} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) + \dot{\omega}$



з) $\dot{\Psi}_{14} = \dot{\omega} - \dot{\omega}'_L$



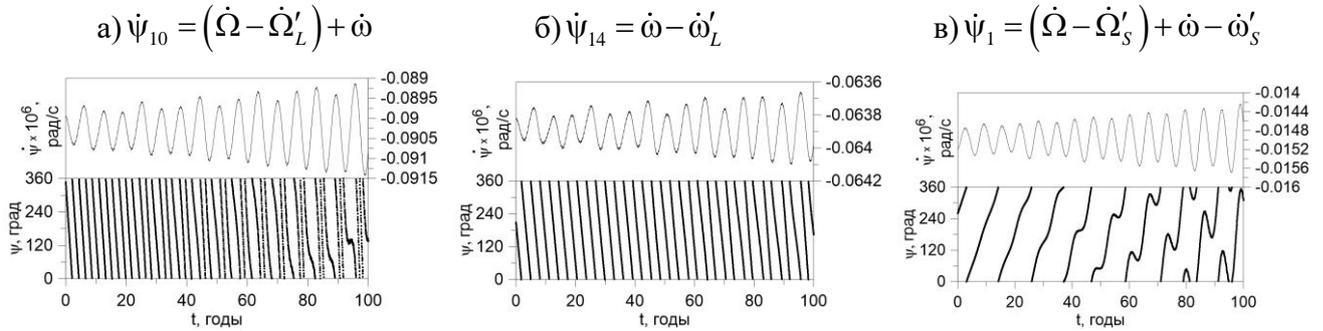
и) $\dot{\Psi}_1 = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) + \dot{\omega} - \dot{\omega}'_S$



а) эволюция основных орбитальных элементов и параметров MEGNO; б) эволюция $\dot{\Phi}_1$, Φ_1 ; в) эволюция $\dot{\Phi}_2$, Φ_2 ; г) эволюция $\dot{\Phi}_3$, Φ_3 ; д) эволюция $\dot{\Phi}_4$, Φ_4 ; е) эволюция $\dot{\Phi}_5$, Φ_5 ; ж) эволюция $\dot{\Psi}_{10}$, Ψ_{10} с прецессией Луны; з) эволюция $\dot{\Psi}_{14}$, Ψ_{14} с прецессией Луны; и) эволюция $\dot{\Psi}_1$, Ψ_1 с прецессией Солнца

Рисунок 9 — Эволюция основных орбитальных элементов, параметров MEGNO, компонент мультиплета орбитального резонанса 1:3 и параметров вековых резонансов

О том, что это именно искажения, а не участки либрации свидетельствуют резонансные характеристики, полученные аналитическим методом (рисунок 10), который не имеет особенностей при малых эксцентриситетах. Эти резонансные характеристики показывают, что критические аргументы вековых резонансов циркулируют на всем временном интервале.



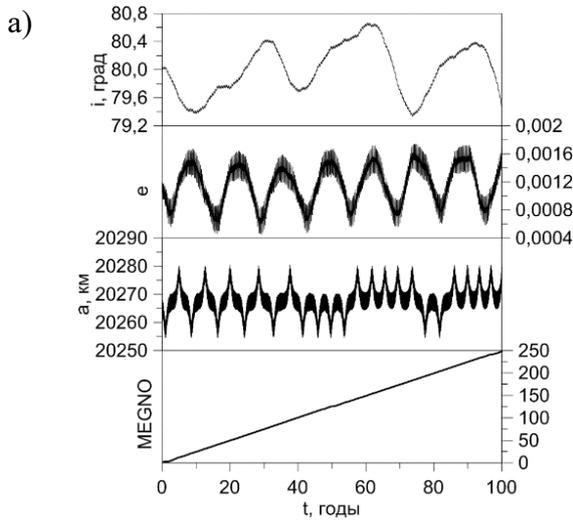
- а) эволюция $\dot{\Psi}_{10}$, Ψ_{10} с прецессией Луны; б) эволюция $\dot{\Psi}_{14}$, Ψ_{14} с прецессией Луны;
в) эволюция $\dot{\Psi}_1$, Ψ_1 с прецессией Солнца

Рисунок 10 — Эволюция параметров вековых резонансов, полученных аналитическим методом

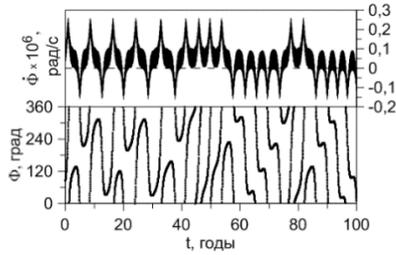
Таким образом, в данном примере к хаотизации движения приводят орбитальные резонансы и, возможно, вековые резонансы более высоких порядков, которые не были рассмотрены в работе.

Следующий пример демонстрирует орбитальную эволюцию объекта, на который действует устойчивый вековой резонанс, связанный с прецессией орбиты Луны (Рисунок 11). Начальные параметры объекта равны: $i=80^\circ$, $a=20267$ км.

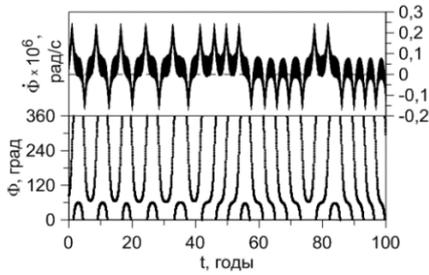
Движение происходит в области острого орбитального резонанса. Все резонансные соотношения компонентов мультиплета проходят через нулевые значения. Критический аргумент второго типа вначале временного интервала имеет либрационные колебания, но под действием векового резонанса начинает менять свое поведение на циркуляцию. В тот же момент, все остальные критические аргументы начинают испытывать некоторые изменения, оставаясь в состоянии «циркуляция-либрация». В результате такого действия резонансов показатель MEGNO стремительно растет.



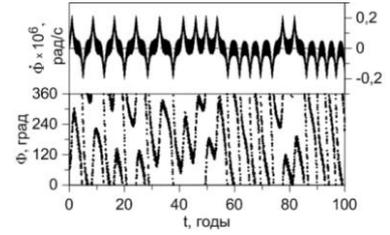
б) $\Phi_1 = M + \omega + \Omega - 3\theta$



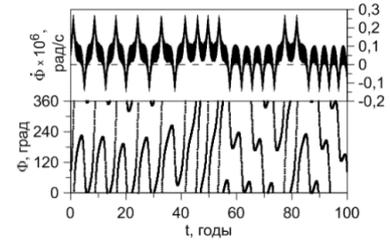
в) $\Phi_2 = M + \omega + 3(\Omega - \theta)$



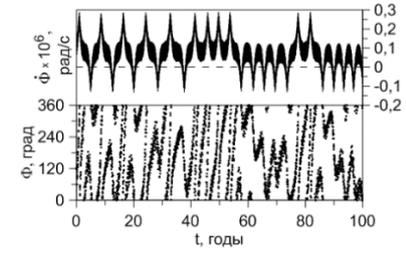
г) $\Phi_3 = M + 3(\omega + \Omega - \theta)$



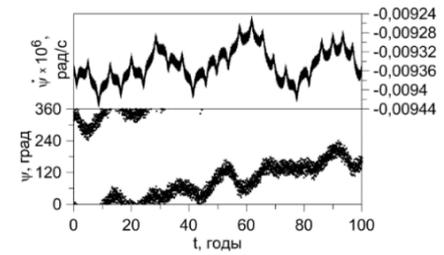
д) $\Phi_4 = M - 2\Omega + \omega - 3\theta$



е) $\Phi_5 = M + 3(-\omega + 2\Omega - \theta)$



ж) $\dot{\Psi}_3 = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) + \dot{\omega} + \dot{\omega}'_L$



а) эволюция основных орбитальных элементов и параметров MEGNO; б) эволюция $\dot{\Phi}_1, \Phi_1$; в) эволюция $\dot{\Phi}_2, \Phi_2$; г) эволюция $\dot{\Phi}_3, \Phi_3$; д) эволюция $\dot{\Phi}_4, \Phi_4$; е) эволюция $\dot{\Phi}_5, \Phi_5$; ж) эволюция $\dot{\Psi}_3, \Psi_3$ с прецессией Луны

Рисунок 11 — Эволюция основных орбитальных элементов, параметров MEGNO, компонент мультиплета орбитального резонанса 1:3 и параметры векового резонанса

Приведем два интересных примера, для объектов, имеющих одинаковое наклонение $i=90^\circ$ и близкие значения большой полуоси $a=20268$ км (рисунок 12а) и $a=20269$ км (рисунок 12б).

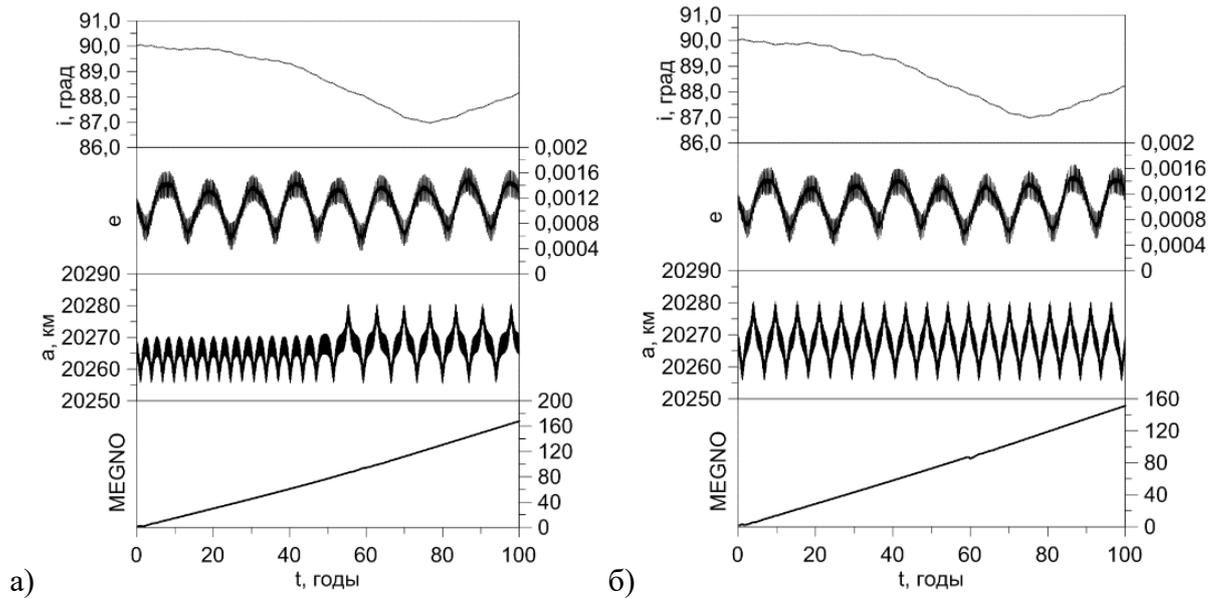
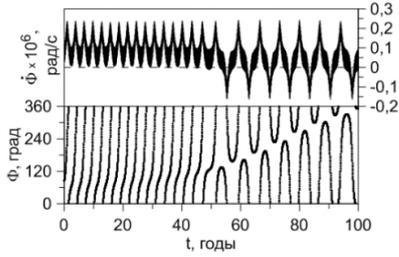


Рисунок 12 — Эволюция основных орбитальных элементов и параметров MEGNO для двух близких объектов

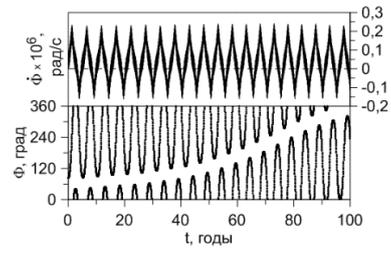
И в том, и в другом случаях оба объекта находятся в зоне острого орбитального резонанса, резонансные аргументы всех компонент мультиплета переходят через нулевые значения (рисунок 13). Вековые резонансы у объектов одни и те же (рисунок 14). Но на более низкой орбите критические аргументы (рисунок 13а-д) циркулируют первую половину временного интервала и примерно через 50 лет на объект начинают действовать первая, вторая и четвертая компоненты мультиплета орбитального резонанса 1:3. В результате этого, меняется амплитуда колебаний большой полуоси у объекта на рисунке 12а. На второй объект (рисунок 12б) три компоненты мультиплета орбитального резонанса действуют на всем столетнем интервале (рисунок 13е-к), поэтому большая полуось не подверглась изменениям.

Комплексное действие всех выявленных резонансов влечёт быстрый рост MEGNO параметра.

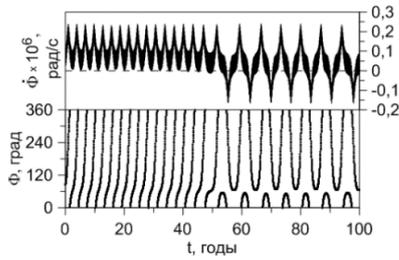
а) $\Phi_1 = M + \omega + \Omega - 3\theta$



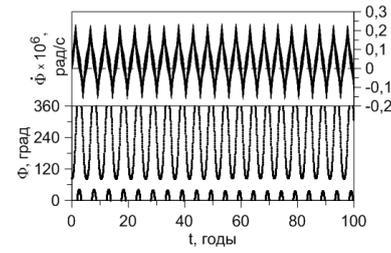
е) $\Phi_1 = M + \omega + \Omega - 3\theta$



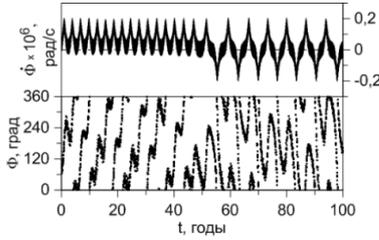
б) $\Phi_2 = M + \omega + 3(\Omega - \theta)$



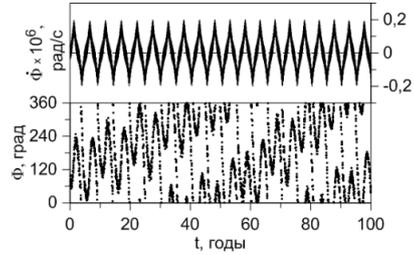
ж) $\Phi_2 = M + \omega + 3(\Omega - \theta)$



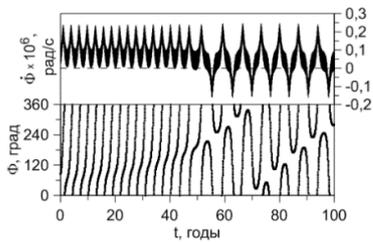
в) $\Phi_3 = M + 3(\omega + \Omega - \theta)$



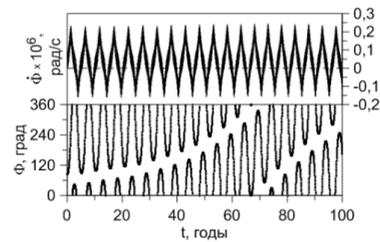
з) $\Phi_3 = M + 3(\omega + \Omega - \theta)$



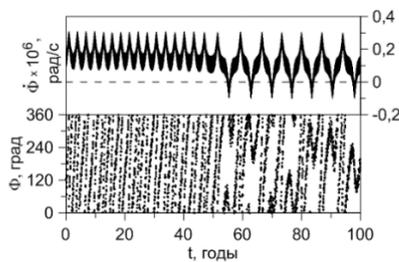
г) $\Phi_4 = M - 2\Omega + \omega - 3\theta$



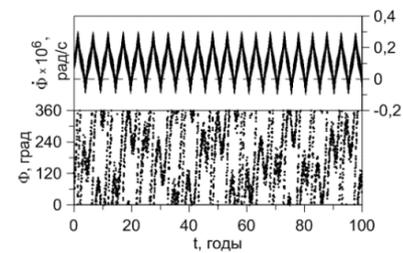
и) $\Phi_4 = M - 2\Omega + \omega - 3\theta$



д) $\Phi_5 = M + 3(-\omega + 2\Omega - \theta)$



к) $\Phi_5 = M + 3(-\omega + 2\Omega - \theta)$

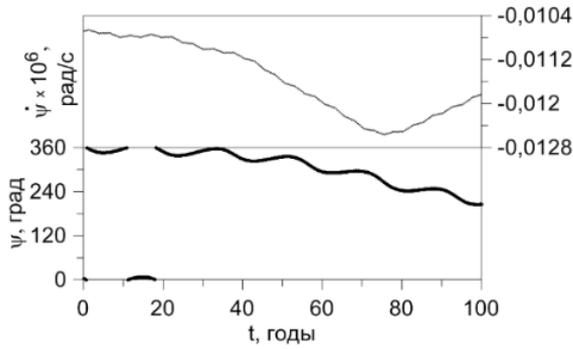


а)-д) эволюция компонент мультиплета для первого объекта: $\dot{\Phi}_1, \Phi_1 - \dot{\Phi}_5, \Phi_5$;

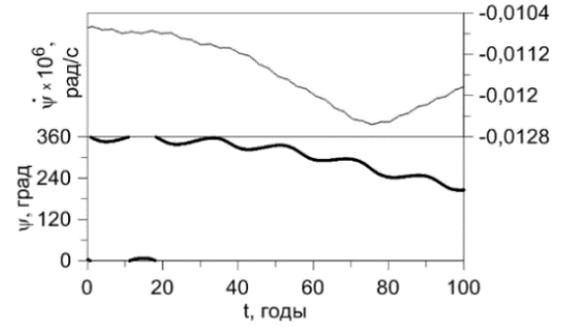
е)-к) эволюция компонент мультиплета для второго объекта: $\dot{\Phi}_1, \Phi_1 - \dot{\Phi}_5, \Phi_5$

Рисунок 13 — Эволюция компонент мультиплета орбитального резонанса 1:3 для двух близких объектов

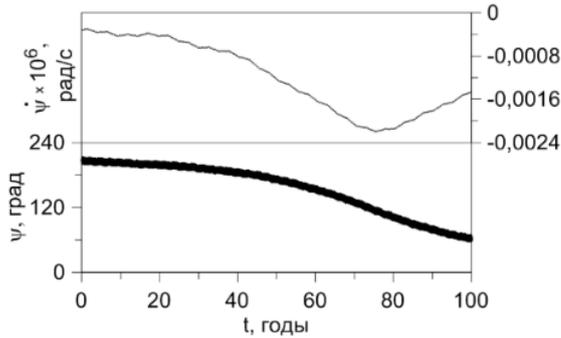
$$\text{a) } \dot{\psi}_{13} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L)$$



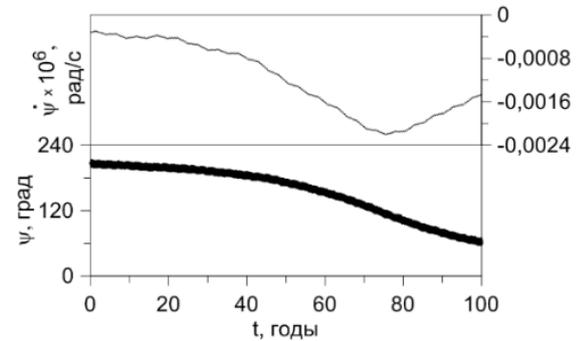
$$\text{b) } \dot{\psi}_{13} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L)$$



$$\text{б) } \dot{\psi}_5 = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) + 2\dot{\omega}'_S$$



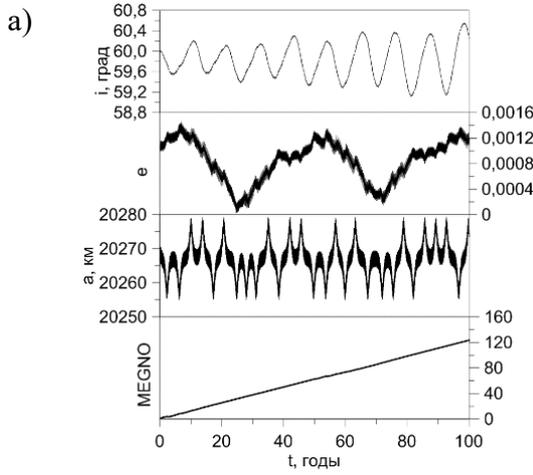
$$\text{г) } \dot{\psi}_5 = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) + 2\dot{\omega}'_S$$



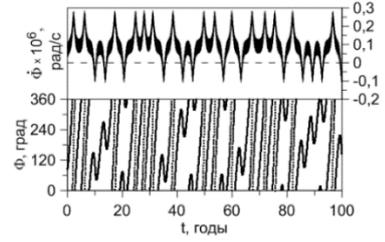
- а) Параметры векового резонанса $\dot{\psi}_{13}$, ψ_{13} с прецессией Луны, б) $\dot{\psi}_5$, ψ_5 с прецессией Солнца для первого объекта;
 в) Параметры векового резонанса $\dot{\psi}_{13}$, ψ_{13} с прецессией Луны, г) $\dot{\psi}_5$, ψ_5 с прецессией Солнца для второго объекта

Рисунок 14 — Эволюция параметров вековых резонансов для двух близких объектов

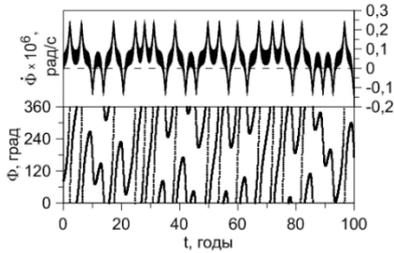
Далее приведем пример объекта, движущегося в зоне действия неустойчивого орбитального резонанса 1:3 (Рисунок 15). Начальные параметры объекта равны: $i=70^\circ$, $a=20270$ км. В этой области все резонансные соотношения компонентов мультиплетта проходят через нулевые значения, а все критические аргументы имеют состояние «циркуляция-либрация». В то же время на объект действует устойчивый апсидально–нодальный резонанс $\dot{\psi}_2 = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - \dot{\omega} + \dot{\omega}'_L$ с прецессией орбиты Луны.



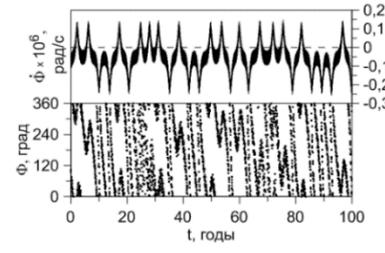
д) $\Phi_4 = M - 2\Omega + \omega - 3\theta$



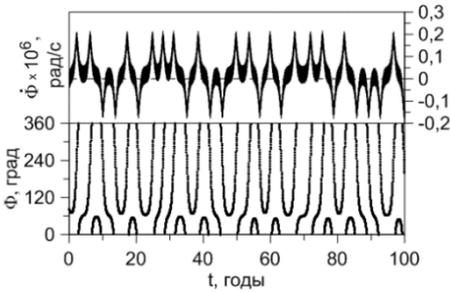
б) $\Phi_1 = M + \omega + \Omega - 3\theta$



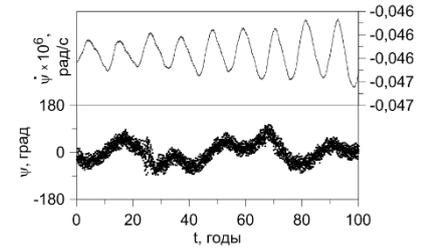
е) $\Phi_5 = M + 3(-\omega + 2\Omega - \theta)$



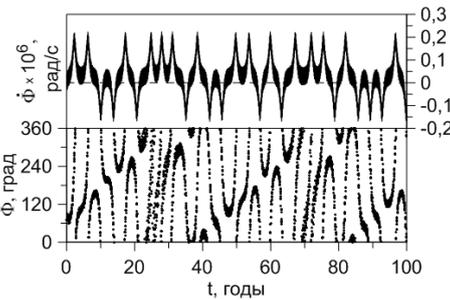
в) $\Phi_2 = M + \omega + 3(\Omega - \theta)$



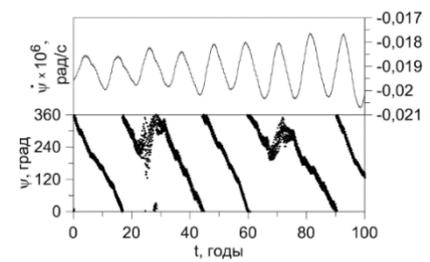
ж) $\dot{\psi}_2 = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - \dot{\omega} + \dot{\omega}'_L$



г) $\Phi_3 = M + 3(\omega + \Omega - \theta)$



з) $\dot{\psi}_7 = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) + 2\dot{\omega}$

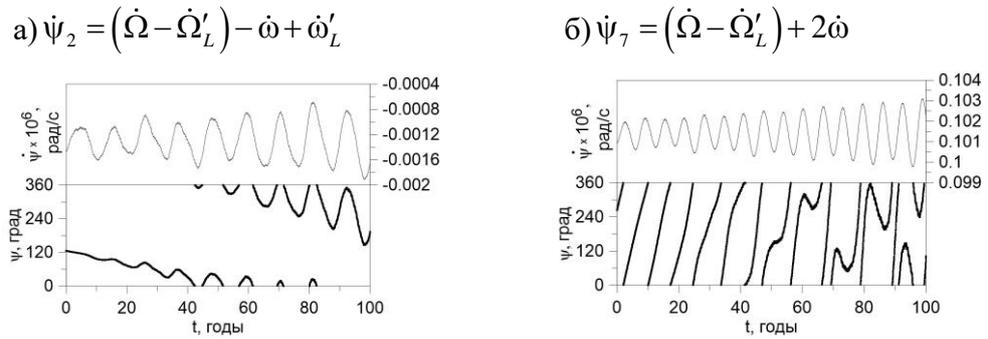


а) эволюция основных орбитальных элементов и параметров MEGNO; б) эволюция $\dot{\Phi}_1, \Phi_1$; в) эволюция $\dot{\Phi}_2, \Phi_2$; г) эволюция $\dot{\Phi}_3, \Phi_3$; д) эволюция $\dot{\Phi}_4, \Phi_4$; е) эволюция $\dot{\Phi}_5, \Phi_5$; ж) эволюция $\dot{\psi}_2, \psi_2$ с прецессией Луны; з) эволюция $\dot{\psi}_7, \psi_7$ с прецессией Луны

Рисунок 15 — Эволюция основных орбитальных элементов, параметров MEGNO, компонент мультиплета орбитального резонанса и параметры вековых резонансов

В результате такого влияния, значение эксцентриситета начинает уменьшаться. В момент, когда эксцентриситет становится близок к нулю, происходят искажения критического аргумента векового резонанса $\dot{\psi}_7 = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) + 2\dot{\omega}$, связанного с прецессией орбиты Луны. Такое поведение векового резонанса наблюдается дважды на протяжении столетнего интервала.

Чтобы убедиться, что на данных участках происходят искажения численной методики, приведем характеристики вековых резонансов, полученных аналитическим методом (рисунок 16).



а) эволюция $\dot{\psi}_2$, ψ_2 с прецессией Луны; б) эволюция $\dot{\psi}_7$, ψ_7 с прецессией Луны

Рисунок 16 — Эволюция параметров вековых резонансов, полученных аналитическим методом

На рисунке 16 показано, что вековой резонанс $\dot{\psi}_2 = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - \dot{\omega} + \dot{\omega}'_L$, действительно испытывает либрационные колебания, что подтверждает правильность численной методики вычисления этого резонанса. Однако вековой резонанс $\dot{\psi}_7 = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) + 2\dot{\omega}$ циркулирует на всем временном интервале и это говорит о том, что численная методика дает искажения при приближении эксцентриситета к нулю. Несмотря на то, что объект и так имеет малый эксцентриситет, порядка 0.001, искажения происходят только на участках с экстремально низкими значениями эксцентриситета.

Таким образом, в рамках проведенных исследований можно утверждать, что в области действия резонанса 1:3 со скоростью вращения Земли большинство объектов показывают высокую хаотичность движения. Причем это можно объяснить наложением резонансов различных типов.

3.3 Исследование областей орбитальных резонансов 1:4, 1:6 и 1:8 со скоростью вращения Земли

Относительное положение орбитальных резонансов 1:4, 1:6 и 1:8 представлено на рисунках 1 и 2. Эта группа резонансов рассмотрена в одном разделе из-за сходства структуры распределения резонансов и удобства сравнения. Исследование из этого раздела представлено в [31]. Компоненты мультиплета орбитального резонанса 1:4 приведены на рисунке 17.

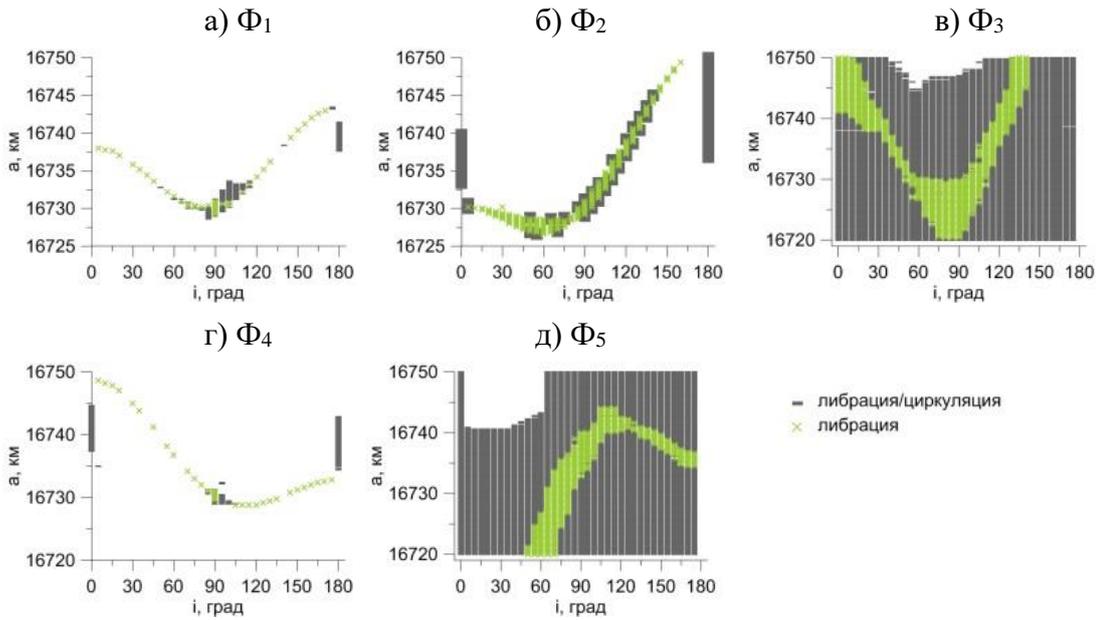


Рисунок 17 — Карта компонент мультиплета орбитального резонанса 1:4

Следует отметить, что здесь наибольшие зоны устойчивости показывают вторая, третья и пятая компоненты мультиплета орбитального резонанса. Третья и пятая компоненты действуют практически во всей резонансной области и в основном преобладает неустойчивое влияние. Первая и четвертая компоненты имеют тонкую линию действия.

На рисунке 18 показано распределение в зоне орбитального резонанса 1:4 апсидально-нодальных вековых резонансов, связанных с прецессией орбиты Солнца, которая является отражением прецессии орбиты Земли, а на рисунке 19 – связанных с прецессией орбиты Луны. Как показывают приведенные на рисунке 18 и 19 данные, в рассматриваемой области орбитального пространства действует один устойчивый апсидально-нодальный резонанс, связанный с прецессией орбиты Солнца, и девять устойчивых резонансов, связанных с прецессией орбиты Луны. В области от 5° до 40° и от 140° до 175° по наклонению вообще не обнаружено вековых резонансов. В области больших полуосей от 16725 до 16750 км проявляют свое действие несколько неустойчивых резонансов, связанных как с прецессией орбиты Луны, так и Солнца, но только для наклонений 50° до 110° . Резонанс Лидова-Козаи практически отсутствует.

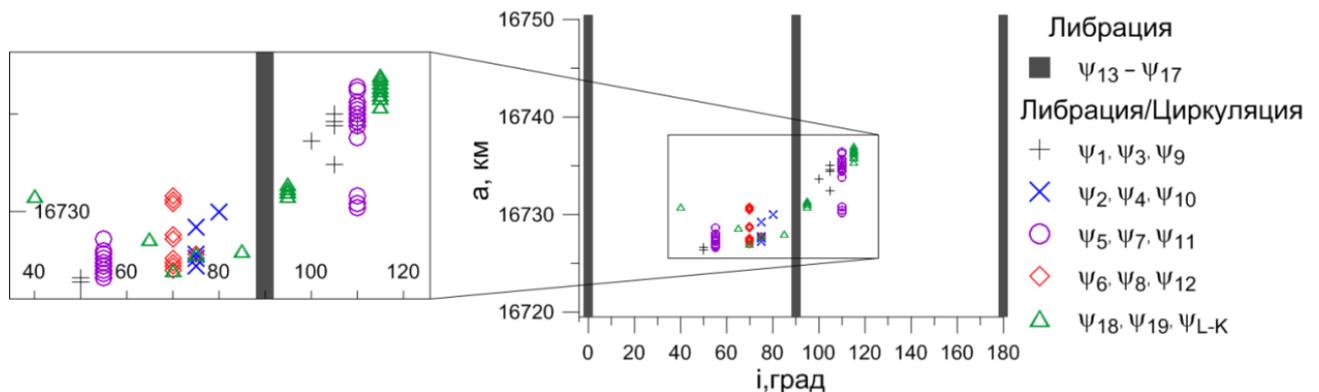


Рисунок 18 — Распределение в зоне орбитального резонанса 1:4 вековых апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Солнца (Земли)

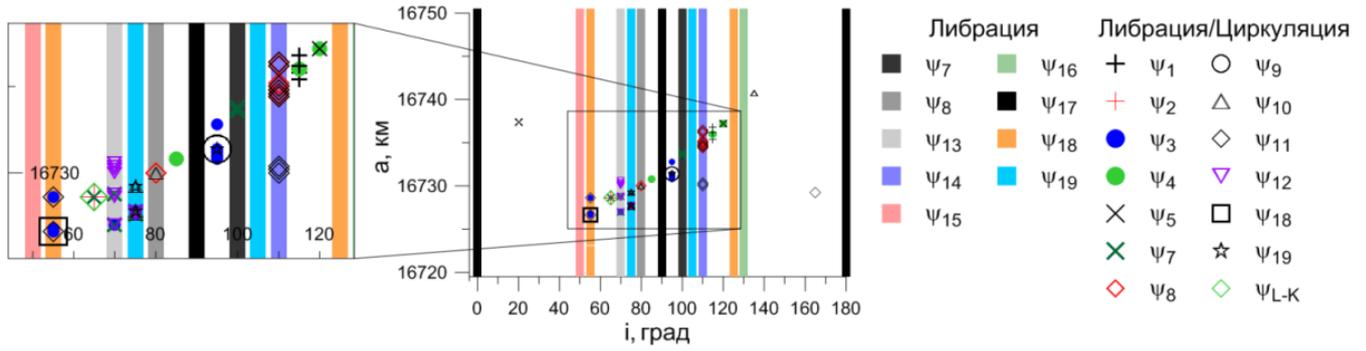


Рисунок 19 — Распределение в зоне орбитального резонанса 1:4 вековых апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Луны

На рисунке 20 показано распределение вековых резонансов, связанных со средним движением Луны (L) и Солнца (S). Эти резонансы появляются впервые в этой области околоземного орбитального пространства. В более высоких областях таких резонансов нет. Устойчивых резонансов только три.

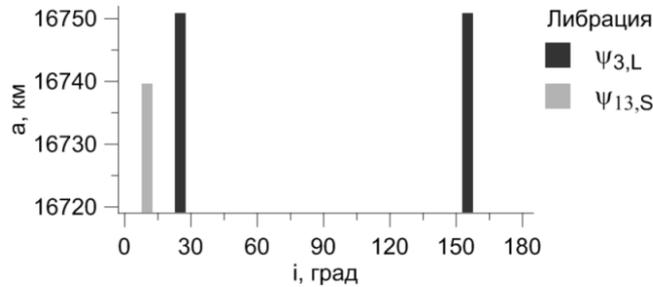


Рисунок 20 — Распределение в зоне орбитального резонанса 1:4 вековых резонансов, связанных со средним движением возмущающих тел: Луны (L) и Солнца (S)

Следующий рассмотренный резонанс 1:6 со скоростью вращения Земли. Компоненты его мультиплета представлены на рисунке 21.

Особенностью резонанса 1:6 является слабая устойчивость компонент его мультиплета. Наибольшей устойчивостью обладает вторая, третья и пятая компоненты мультиплета. Однако зоны устойчивости у всех компонент гораздо уже, чем у резонанса 1:4.

На рисунке 21 отмечено положение реального объекта, который попадает в область резонанса 1:6. Это американский военный спутник связи TacSat4. На рисунке А.1 представлена информация о динамике этого спутника.

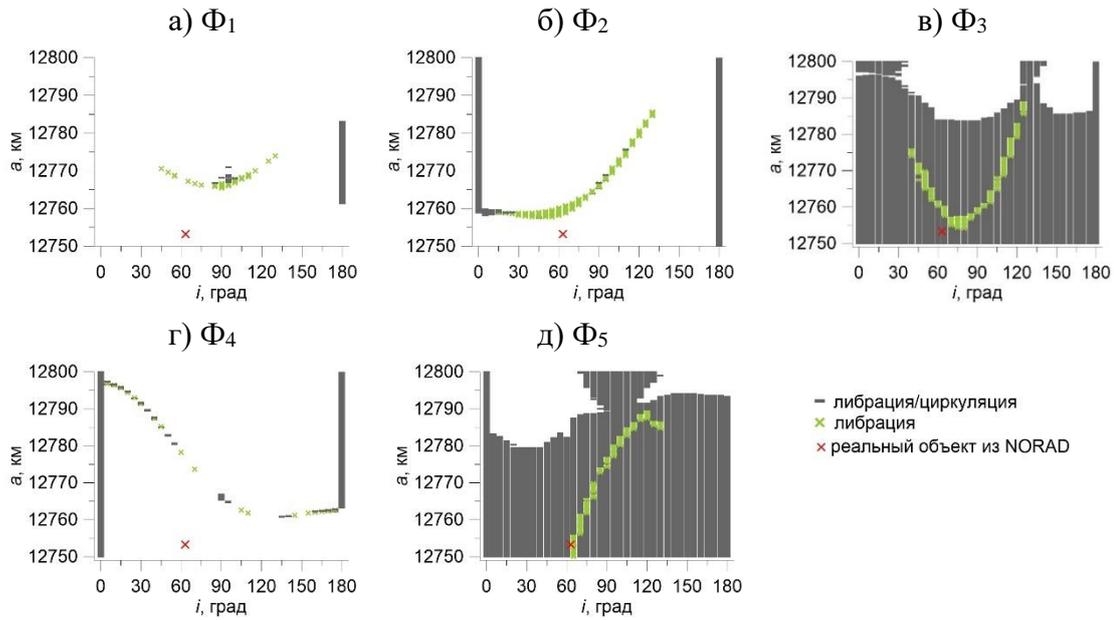


Рисунок 21 — Карта компонент мультиплета орбитального резонанса 1:6

На спутник TacSat4 действуют две компоненты мультиплета орбитального резонанса 1:6. Все действующие резонансы для этого объекта (рисунок А.1б-д) представлены на интервале времени 3 года, так как спутник достаточно низкий и совершает большое количество оборотов уже на таком интервале времени. В этом случае было необходимо подобрать оптимальный интервал прогнозирования, так как слишком большое количество оборотов может помешать выявлению резонансов. Например, либрация со смещением центра колебаний или короткие участки либрации, сменяющиеся циркуляцией, на большом временном интервале могут не выявляться и показывать отсутствие резонанса. Но эволюция элементов объекта на большом интервале времени наоборот более информативна, поэтому для лучшей наглядности представлена на интервале 100 лет (рисунок А.1а). Кроме того, на объект действует два вековых апсидальных резонанса, связанных с прецессией орбиты Луны. Наличие множества резонансов, влияющих на один объект, ведет к тому, что его движение становится хаотичным. Об этом свидетельствует параметр MEGNO, который стремительно растет с начала временного интервала. Большая полуось сильно раскачивается, амплитуда ее колебаний иногда достигает 60км. Данный спутник лучше не оставлять на этой орбите после его отработки.

Остановимся на структуре вековых резонансов, действующих в области орбитального резонанса 1:6 со скоростью вращения Земли (рисунки 22, 23). Приведенные данные показывают, что в данной области действуют 8 апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Луны (рисунок 22 а) и практически геометрический резонанс первого порядка $\dot{\psi}_{17,S} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) \approx 0$, учитывая что $\dot{\Omega}'_S \approx 0$ из-за медленной прецессии орбиты Солнца (Земли) (рисунок 23 б). Число действующих резонансов со средними движениями Луны и Солнца равно четырем (рисунок 23): по два резонанса с Луной и Солнцем.

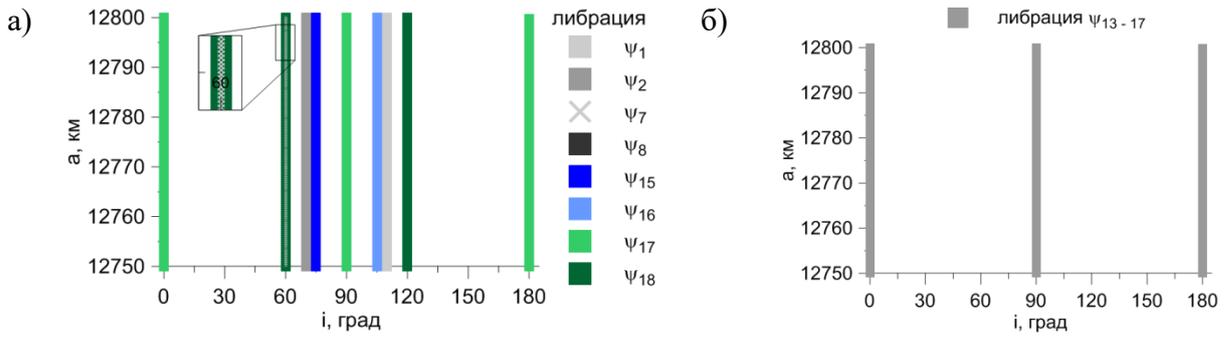


Рисунок 22 — Распределение вековых апсидально–нодальных резонансов в области орбитального резонанса 1:6 со скоростью вращения Земли: а) вековые резонансы, связанные с прецессией орбиты Луны, б) вековые резонансы, связанные с прецессией орбиты Солнца

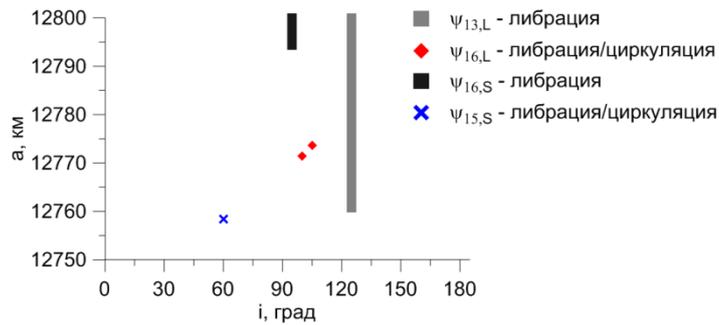


Рисунок 23 — Распределение вековых резонансов, связанных со средним движением Луны (L) и Солнца (S)

Компоненты мультиплета орбитального резонанса 1:8 со скоростью вращения Земли (рисунок 24) имеют еще более узкие зоны устойчивости, чем компоненты мультиплета орбитального резонанса 1:6, кроме того, третья и пятая компоненты полностью неустойчивы. Реальные объекты в эту область не попадают.

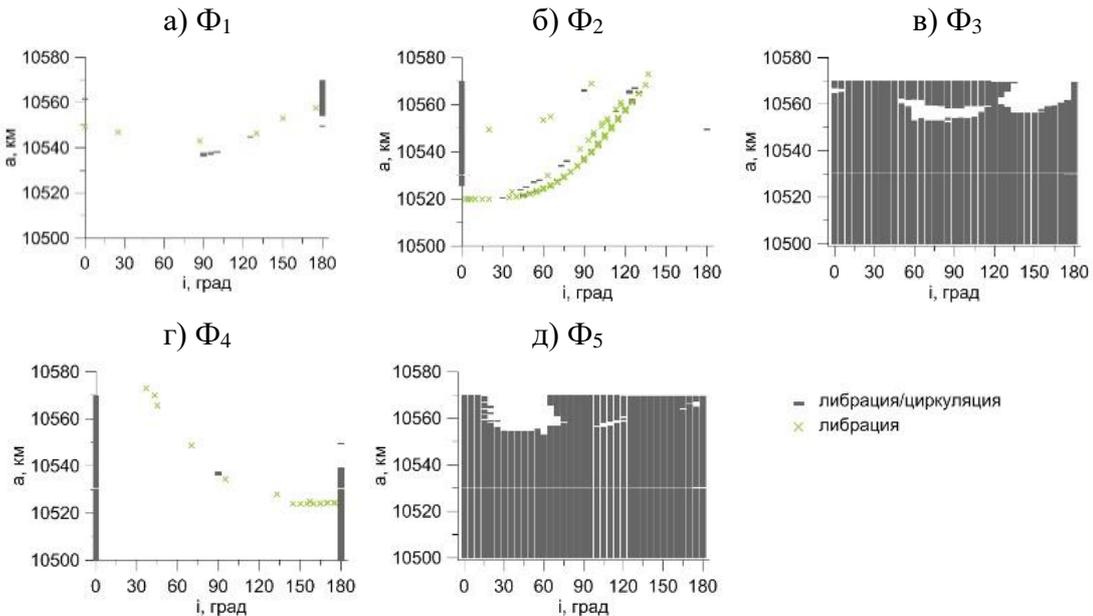


Рисунок 24 — Карта компонент мультиплета орбитального резонанса 1:8

На движение объектов в области орбитального резонанса 1:8 со скоростью вращения Земли оказывают влияние всего несколько вековых резонансов (рисунки 25, 26).

Здесь, как и в области орбитального резонанса 1:6, на объекты с наклонениями 0° , 90° и 180° действует устойчивый вековой апсидально-нодальный резонанс $\underline{\underline{\psi}}_{17,L} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) \approx 0$, связанный с прецессией Луны (рисунок 25а), и группа резонансов $\underline{\underline{\psi}}_{13-17,S} \approx 0$, связанных с прецессией орбиты Солнца (рисунок 25б), которые в силу малости $\dot{\Omega}'_S$ фактически являются одним резонансом $\underline{\underline{\psi}}_{13-17,S} \approx \dot{\Omega} \approx 0$

На объекты с наклонениями 125° действуют два апсидально-нодальных резонанса, связанных с прецессией орбиты Луны (рисунок 25а): $\underline{\underline{\psi}}_{6,L} \approx 0$ – для объектов с большими полуосями a от 10561 км до 10569 км и $\underline{\underline{\psi}}_{12,L} \approx 0$ – для объектов с a от 10500 км до 10511 км. Встречается несколько объектов с неустойчивым резонансом Лидова-Козаи. Кроме того, в данной области действуют 4 устойчивых и 2 неустойчивых вековых резонанса со средним движением Солнца и 2 устойчивых и 1 неустойчивый резонанс со средним движением Луны.

Резонансы, связанные со средним движением Луны (рисунок 26а), действуют в небольшом диапазоне больших полуосей для объектов с наклонениями 60° ($\underline{\underline{\psi}}_{6,L} \approx 0$), 120° ($\underline{\underline{\psi}}_{7,L} \approx 0$) и 125° ($\underline{\underline{\psi}}_{3,L} \approx 0$).

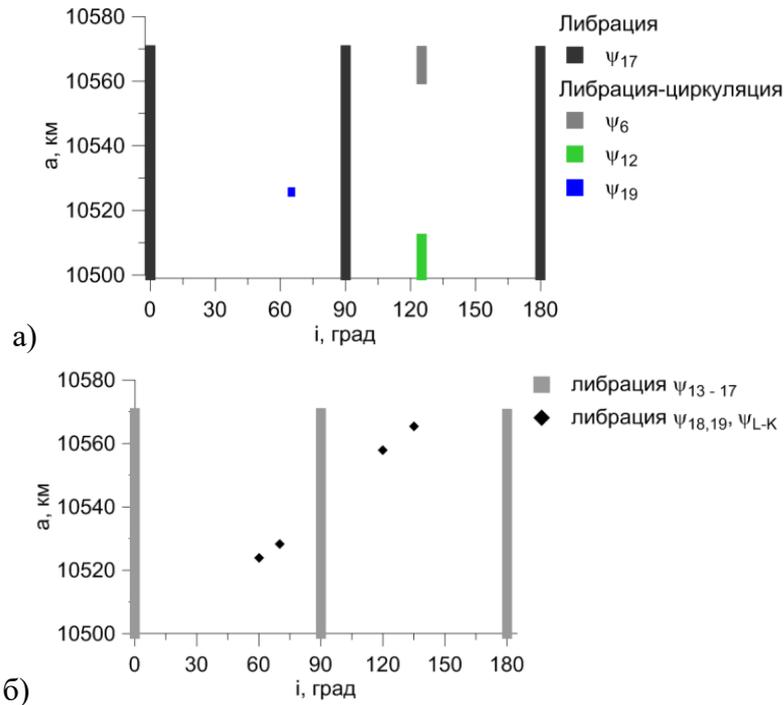


Рисунок 25 — Распределение вековых апсидально-нодальных резонансов: а) с прецессией орбиты Луны, б) с прецессией орбиты Солнца

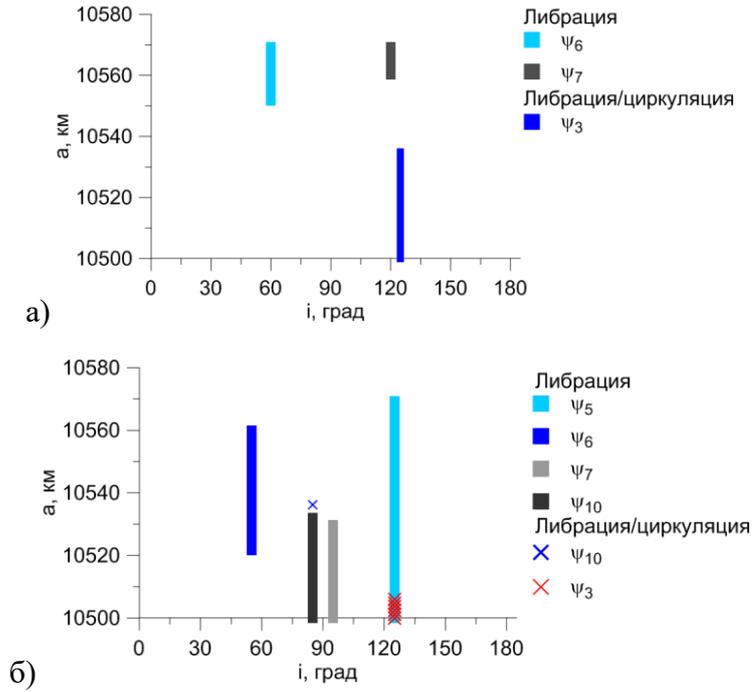


Рисунок 26 — Распределение вековых резонансов со средними движениями возмущающих тел:
а) Луны, б) Солнца

Резонансы $\dot{\psi}_{7,S} \approx 0$ и $\dot{\psi}_{10,S} \approx 0$, связанные со средним движением Солнца (рисунок 26б), действуют в приполярной области ($i = 85^\circ$ и 95°) на объекты в диапазоне больших полуосей от 10500 км до 10530 км. Резонанс $\dot{\psi}_{5,S} \approx 0$ действует на объекты с наклоном 125° во всей рассматриваемой области. В динамике объектов с $i = 55^\circ$ и $a = 10520 - 10560$ км выявляется резонанс $\dot{\psi}_{6,S} \approx 0$.

На рисунке 27 представлена MEGNO-карта для областей резонанса 1:4, 1:6 и 1:8 со скоростью вращения Земли. На них изображены зоны хаотизации движения. Наиболее темным цветом представлена область, в которой невозможно прогнозировать движение объектов.

Если сравнить графики, приведенные на рисунке 27 с соответствующими картами компонент мультиплета на рисунках 17, 21 и 24, можно сделать вывод, что зона хаотизации проходит по линии действия второй компоненты мультиплета орбитального резонанса. Известно [42], что хаотизация движения происходит в результате перекрытия нескольких резонансов различных типов. Таким образом, в рассмотренных случаях, хаотизация происходит в результате наложение на вторую компоненту орбитального резонанса других резонансов, в том числе неустойчивых.

Таким образом, главной особенностью динамики объектов исследуемых областей орбитального пространства низкоорбитальной зоны является совместное действие на объекты резонансов различных типов и большое обилие сочетаний действующих резонансов.

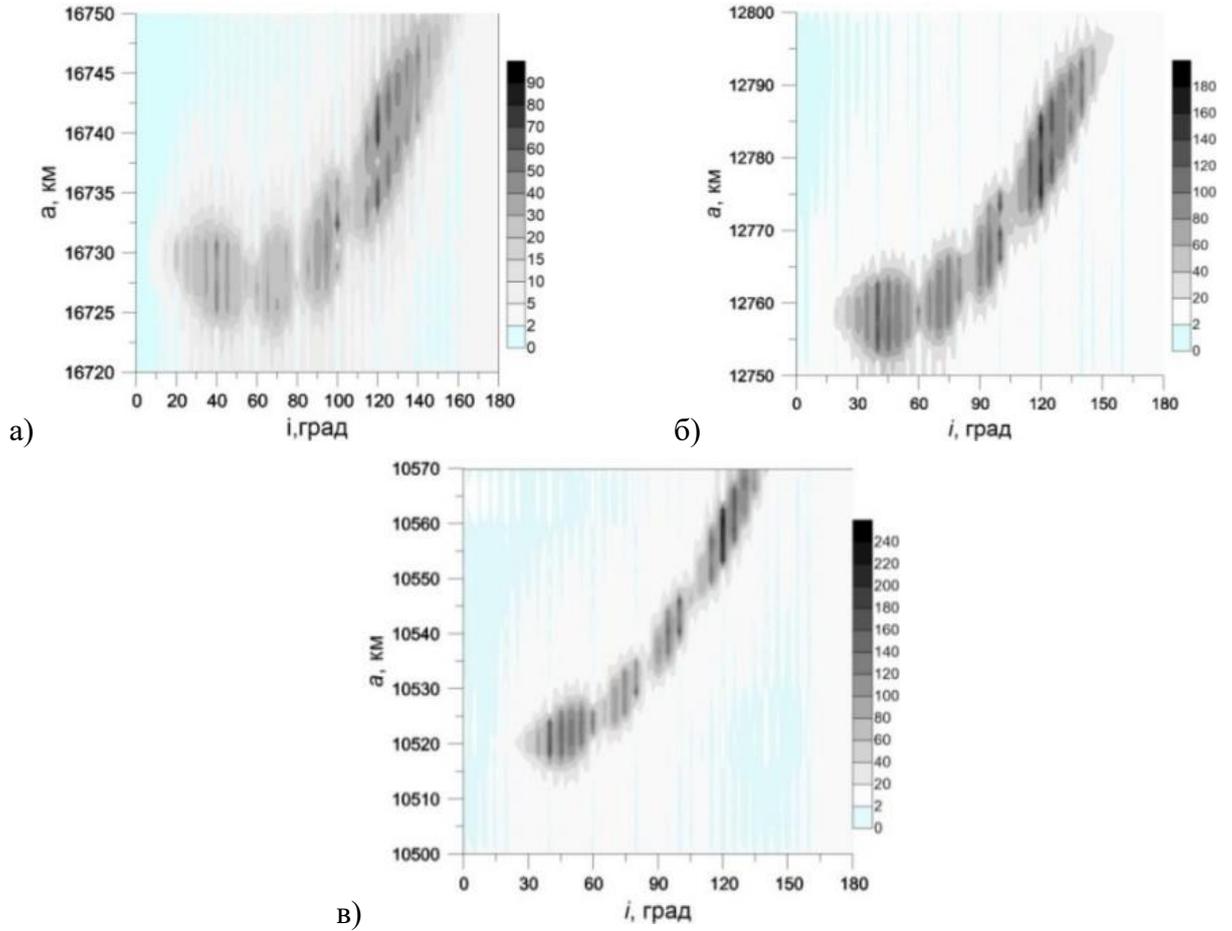


Рисунок 27 — MEGNO-карты областей резонанса: а) 1:4, б) 1:6, в) 1:8 со скоростью вращения Земли

Далее рассмотрим, как эти наложения резонансов проявляются в орбитальной эволюции объектов из разных резонансных зон.

Для последующего сравнения на рисунке 28 показана орбитальная эволюция объекта, не подверженного действию резонансов. Начальные параметры объекта равны: $i=40^\circ$, $a=16722,8$ км. Движение на 100-летнем интервале регулярно.

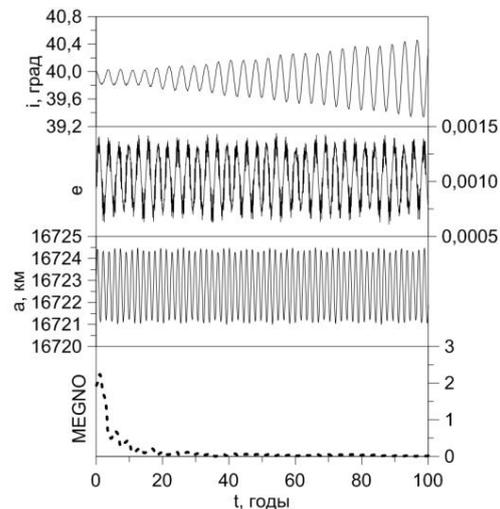


Рисунок 28 — Орбитальная эволюция объекта в отсутствии резонансов

На рисунке 29 показана орбитальная эволюция объекта, движущегося в области наложения устойчивой компоненты $\Phi_2 = (M + \omega) + 4(\Omega - \theta)$ (рисунок 30б) орбитального резонанса и векового апсидально-нодального резонанса $\underline{\underline{\psi}}_{17,L} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) \approx 0$ (рисунок 30е). Начальные параметры объекта равны: $i=80^\circ$, $a=16729$ км.

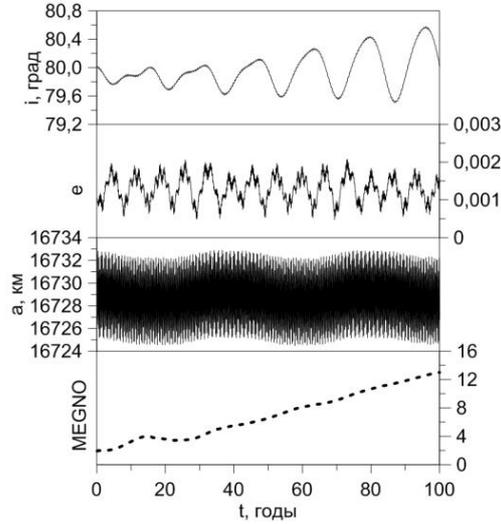
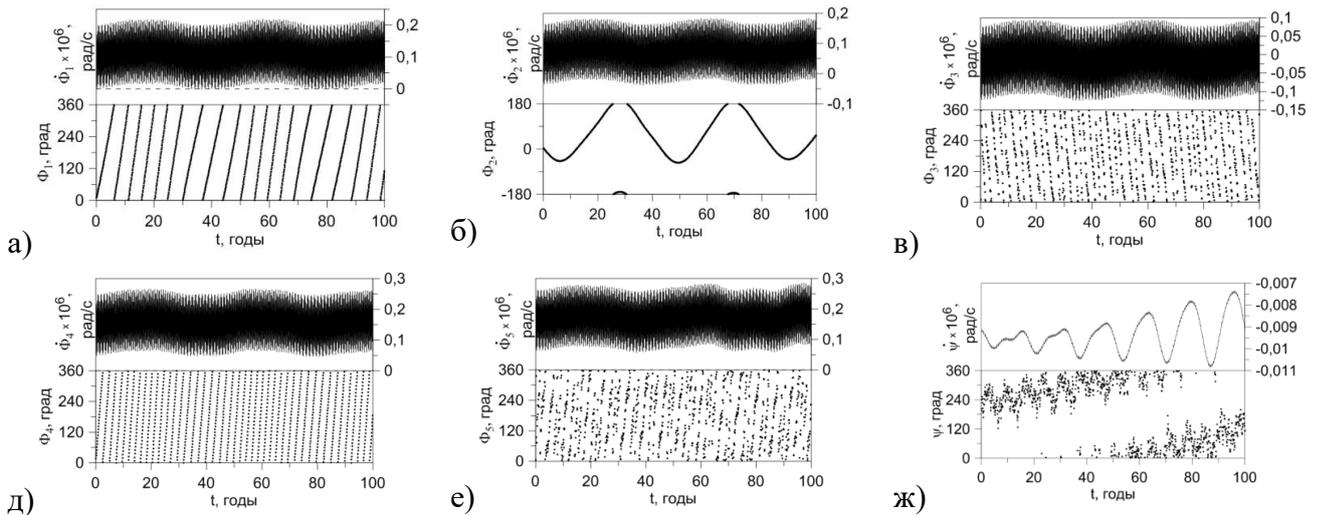


Рисунок 29 — Эволюция основных орбитальных элементов и параметра MEGNO

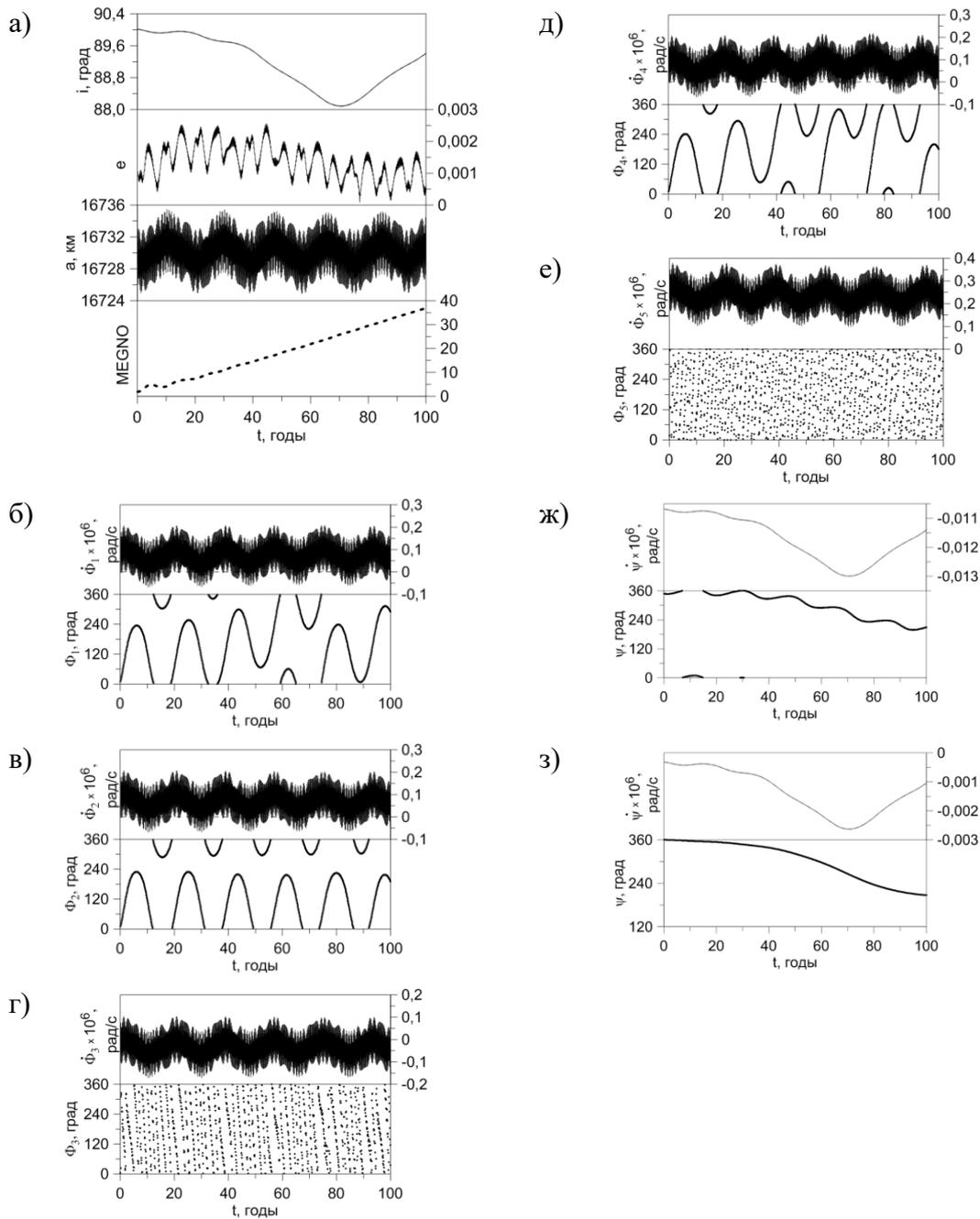
Следует отметить, что у данного объекта компоненты Φ_1 и Φ_3 мультиплета орбитального резонанса 1:4 со скоростью вращения Земли циркулируют на всем интервале исследования, но соответствующие им резонансные соотношения $\dot{\Phi}_1$ и $\dot{\Phi}_3$ многократно переходят через нулевые значения (рисунок 30а,в). Хотя элементы орбиты у данного объекта ведут себя устойчиво, параметр MEGNO быстро растет, что говорит о высокой хаотизации орбиты.



а) – д) компоненты мультиплета орбитального резонанса 1:4 со скоростью вращения Земли;
 е) характеристики апсидально-нодального резонанса $\underline{\underline{\psi}}_{17,L} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) \approx 0$

Рисунок 30 — Особенности движения объекта в зоне наложения орбитального и векового апсидально-нодального резонанса

На рисунке 31 приведен пример орбитальной эволюции объекта под действием наложения устойчивых и неустойчивых компонент мультиплета орбитального резонанса 1:4 со скоростью вращения Земли. Начальные параметры объекта равны: $i=90^\circ$, $a=16730$ км.

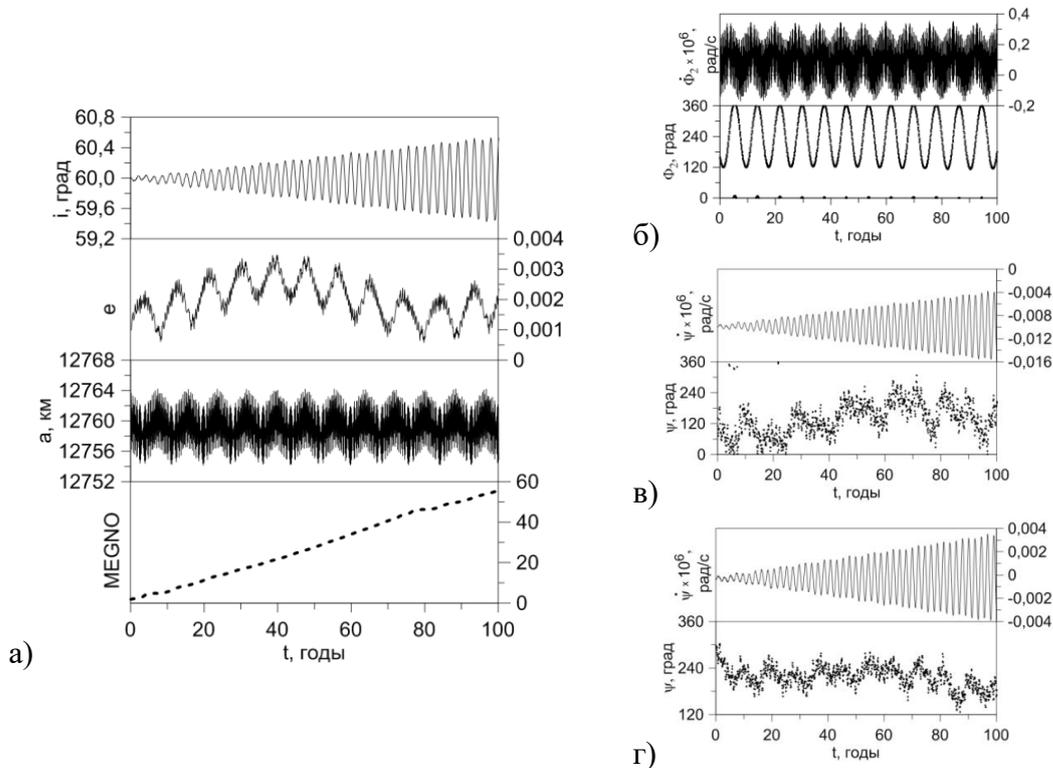


а) орбитальная эволюция объекта; б) – е) компоненты мультиплета орбитального резонанса 1:4 со скоростью вращения Земли; ж) и з) соответственно характеристики вековых апсидально-нодального резонансов $\dot{\psi}_{17,L} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) \approx 0$ и $\dot{\psi}_{17,S} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) \approx 0$

Рисунок 31 — Особенности орбитальной эволюции объекта в зоне наложения резонансов различных типов

Компонента $\dot{\Phi}_3$ многократно переходит через нулевое значение и два вековых апсидально-нодальных резонансов первого порядка устойчиво либрируют в окрестности нулевого значения резонансного соотношения. Окрестность составляет 1×10^{-9} рад/с. Движение хаотично, а в эволюции наклона орбиты объекта отчетливо прослеживается влияние вековых резонансов $\dot{\psi}_{17,L} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) \approx 0$ и $\dot{\psi}_{17,S} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) \approx 0$.

Далее рассмотрим орбитальную эволюцию объекта ($i=60^\circ$, $a=12758$ км) в условиях наложения орбитального резонанса 1:6 со скоростью вращения Земли, который имеет либрирующую на всем интервале исследования компоненту Φ_2 и многократно переходящую через 0 компоненту $\dot{\Phi}_3$, и двух вековых апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Луны (рисунок 32). Параметр MEGNO стремительно увеличивается. Наблюдаются долгопериодические колебания эксцентриситета, которые вероятнее всего, является следствием влияния вековых резонансов.

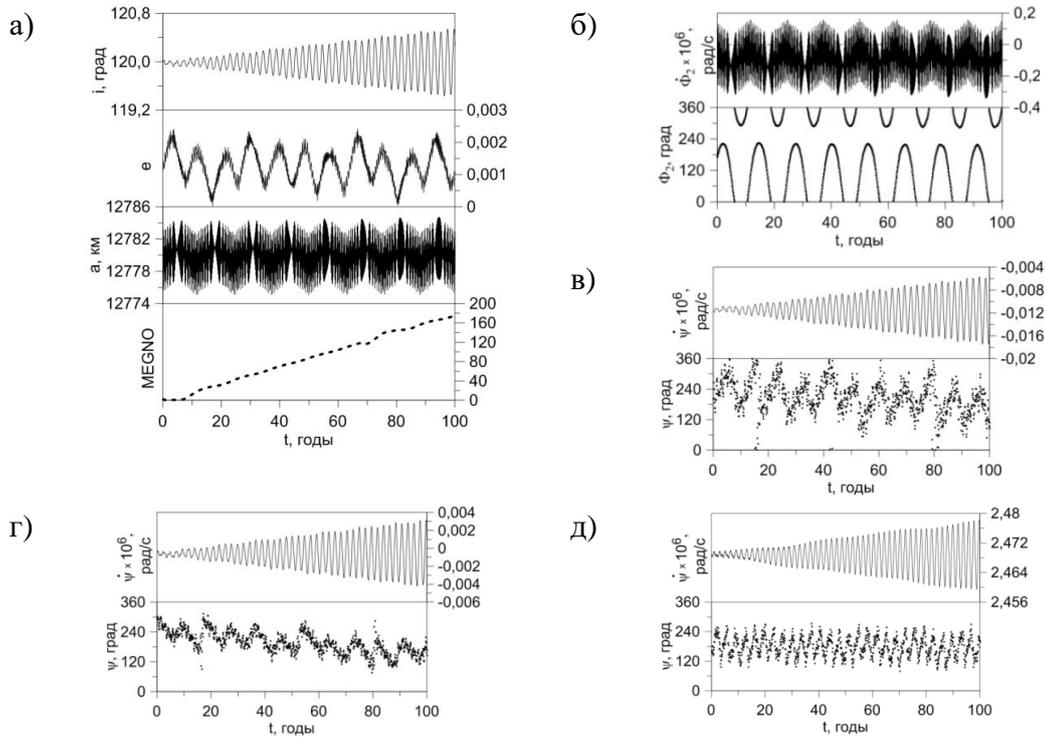


а) орбитальная эволюция объекта; б) вторая компонента мультиплета орбитального резонанса 1:6 со скоростью вращения Земли $\dot{\Phi}_2$; в) и г) соответственно характеристики вековых апсидально-нодальных резонансов $\dot{\psi}_{7,L} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) + 2\dot{\omega} + 2\dot{\omega}'_L \approx 0$ и $\dot{\psi}_{18,L} = \dot{\omega} - \dot{\omega}'_L \approx 0$

Рисунок 32 — Особенности динамики объектов при наложении компонент мультиплета орбитального резонанса и вековых апсидально-нодальных резонансов

На рисунке 33 приведен пример орбитальной эволюции в условиях наложения устойчивых резонансов трех типов: орбитального резонанса 1:6 со скоростью вращения Земли (компонента Φ_2 либрирует, $\dot{\Phi}_3$ переходит через нулевое значение, но циркулирует), двух апсидально-

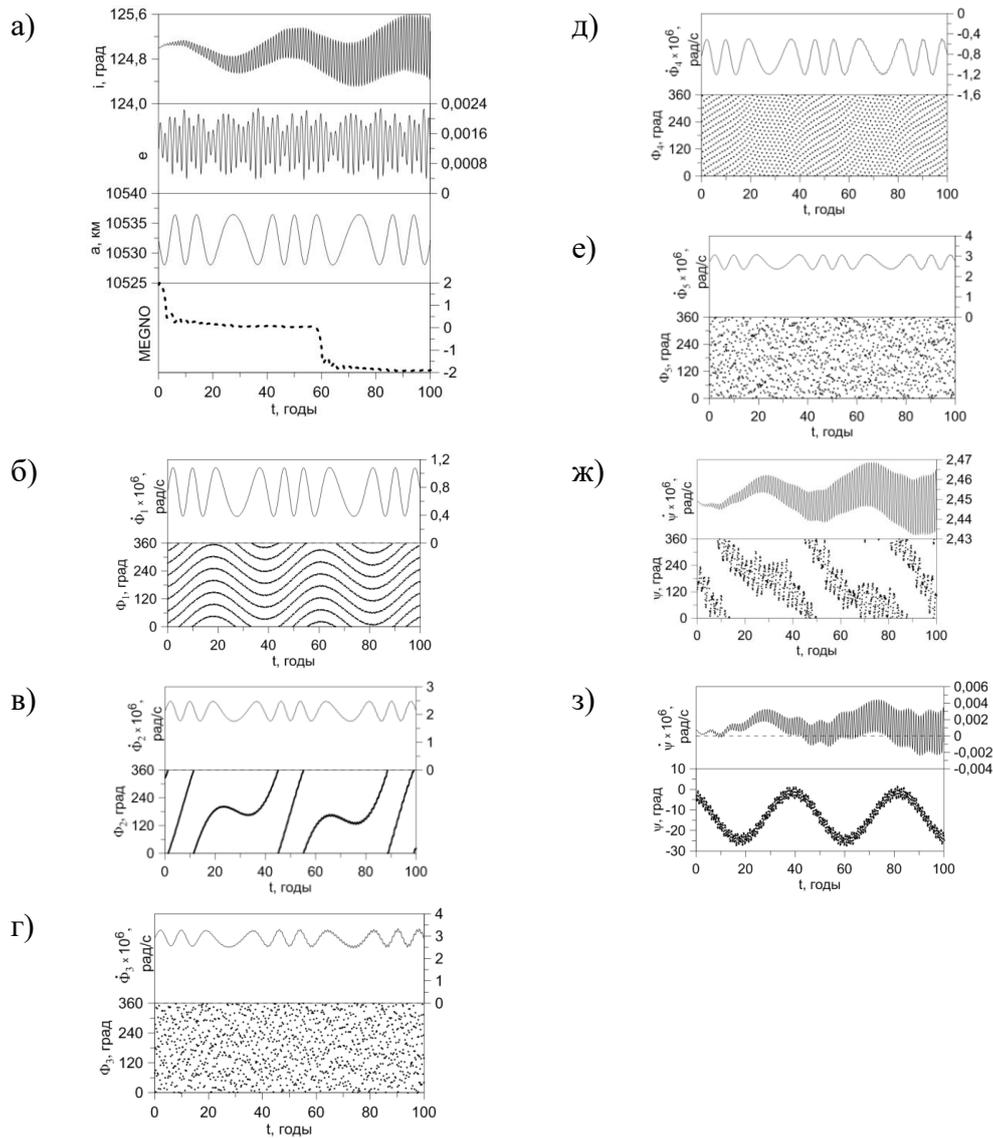
нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Луны ($\underline{\dot{\psi}}_{8,L} \approx 0$ и $\underline{\dot{\psi}}_{18,L} \approx 0$) и резонанс со средним движением Луны $\underline{\dot{\psi}}_{13,L} \approx 0$. Начальные параметры объекта равны: $i=120^\circ$, $a=12781$ км. Движение объекта хаотично.



а) орбитальная эволюция объекта; б) вторая компонента мультиплета орбитального резонанса 1:6 со скоростью вращения Земли; в) и г) соответственно характеристики вековых апсидально-нодальных резонансов $\underline{\dot{\psi}}_{8,L} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) - 2\dot{\omega} - 2\dot{\omega}'_{S,L} \approx 0$ и $\underline{\dot{\psi}}_{18,L} = \dot{\omega} - \dot{\omega}'_L \approx 0$; д) характеристики векового резонанса со средним движением Луны $\underline{\dot{\psi}}_{13,L} = \bar{n}'_{S,L} - 2\dot{\omega} - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}') \approx 0$

Рисунок 33 — Особенности динамики объектов при наложении компонент мультиплета орбитального резонанса и вековых резонансов различных типов

Далее покажем пример объекта, в движении которого отсутствует хаотичность. На рисунке 34 приведен пример объекта, у которого критический аргумент Φ_2 орбитального резонанса и критический аргумент $\underline{\dot{\psi}}_{3,L} \approx 0$ векового резонанса со средним движением Луны неустойчивы, но при этом соответствующие им резонансные соотношения $\dot{\Phi}_2$ и $\underline{\dot{\psi}}_{3,L} \approx 0$ не переходят через ноль и колеблются довольно далеко от нуля, а следовательно их влияние минимально. Компоненты $\dot{\Phi}_1, \dot{\Phi}_3, \dot{\Phi}_4, \dot{\Phi}_5$ также не переходят через ноль на интервале исследования. Начальные параметры объекта равны: $i=125^\circ$, $a=10532,4$ км.

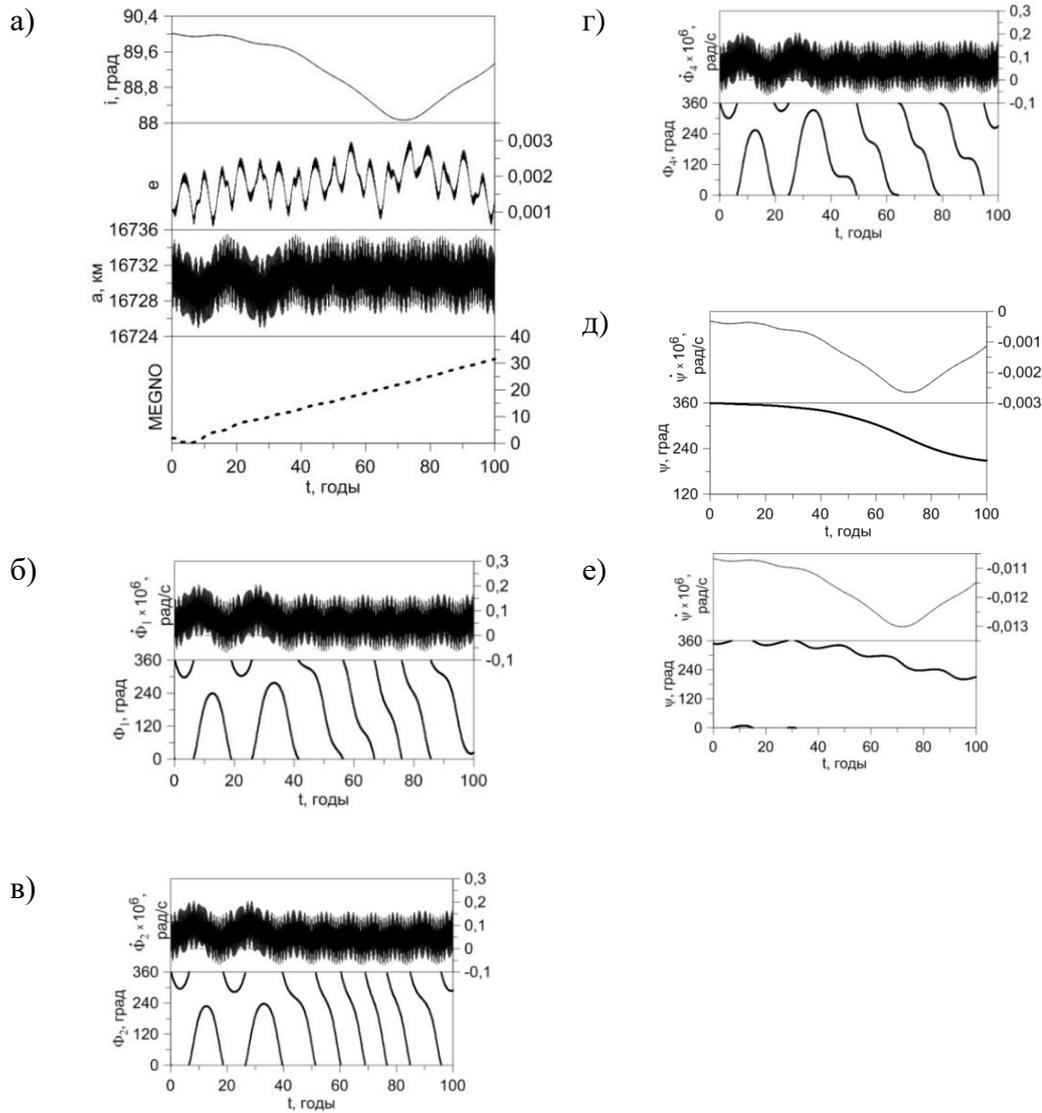


а) орбитальная эволюция объекта; б) – е) компоненты мультиплета орбитального резонанса 1:8 со скоростью вращения Земли; ж) и з) соответственно характеристики вековых резонансов со средними движениями возмущающих тел $\dot{\psi}_{3,L} \approx 0$ и $\dot{\psi}_{5,S} \approx 0$

Рисунок 34 — Особенности динамики объектов при наложении компонент мультиплета орбитального резонанса и вековых резонансов со средними движениями возмущающих тел

Кроме того, объект подвержен влиянию устойчивого резонанса со средним движением Солнца $\dot{\psi}_{5,S} \approx 0$, устойчивые вековые резонансы, как было показано в работе [43], не приводят к возникновению хаотичности, поэтому движение объекта остается регулярным. В то же время большая полуось испытывает долгопериодические колебания с амплитудой близкой к 10 км.

Следующий пример объекта, движущегося под действием вековых и орбитальных резонансов различных типов (рисунок 35). Начальные параметры объекта равны: $i=90^\circ$, $a=16730$ км.



а) орбитальная эволюция объекта; б) эволюция $\dot{\Phi}_1$, Φ_1 ; в) эволюция $\dot{\Phi}_2$, Φ_2 ; г) эволюция $\dot{\Phi}_4$, Φ_4 ; д) и е) соответственно характеристики апсидально-нодальных резонансов $\underline{\underline{\dot{\psi}}}_{17,S} \approx 0$ и $\underline{\underline{\dot{\psi}}}_{17,L} \approx 0$

Рисунок 35 — Особенности динамики объектов при наложении компонент орбитального резонанса 1:4 и вековых резонансов различных типов

На рисунке 35 приведены данные орбитальной эволюции объекта, подверженного действию трех неустойчивых компонент мультиплета орбитального резонанса 1:4, двух устойчивых вековых апсидально-нодальных резонансов $\underline{\underline{\dot{\psi}}}_{17,S} \approx 0$ и $\underline{\underline{\dot{\psi}}}_{17,L} \approx 0$. Причиной возникновения хаотичности в движении рассматриваемого объекта является наложение неустойчивых компонент мультиплета орбитального резонанса со скоростью вращения Земли.

3.4 Исследование областей орбитальных резонансов 1:5, 1:7 и 1:9 со скоростью вращения Земли

Рассмотрим следующую группу резонансов 1:5, 1:7 и 1:9 со скоростью вращения Земли. Результаты исследования данной группы резонансов представлено в [32].

Карты распределения пяти компонент мультиплета орбитального резонанса 1:5 со скоростью вращения Земли представлены на рисунке 36. Первая, вторая и четвертая компоненты имеют четкие устойчивые линии действия. Третья и пятая компонента имеют бóльшую площадь покрытия, но в основном это неустойчивые резонансы.

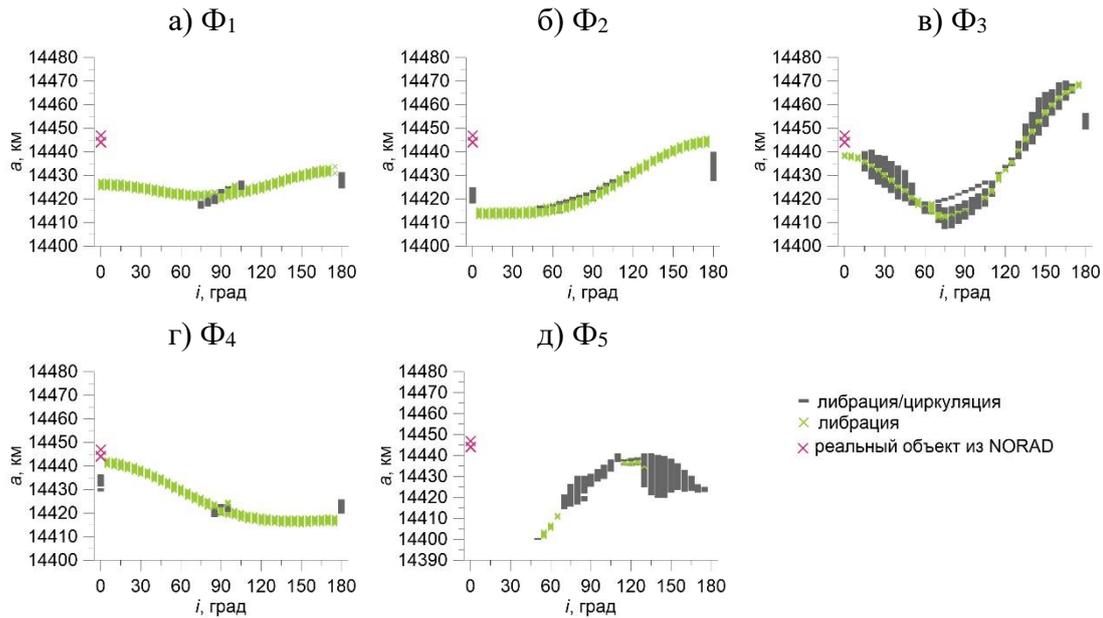


Рисунок 36 — Карта компонент мультиплета орбитального резонанса 1:5

На карту компонент мультиплета орбитального резонанса были нанесены реальные объекты, взятые из каталога NORAD. В данной области располагаются 20 спутников связи группировки ОЗб. Они имеют наклонение приближенное к 0° , один спутник имеет большую полуось 14447 км, а остальные 14444 км. Ни один из этих спутников не попадает под действие орбитального резонанса 1:5.

Структура вековых апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Луны, в области орбитального резонанса 1:5, представлена на рисунке А.2.

Из-за большого количества действующих резонансов, на рисунке А.2 представлено два графика распределения резонансов: устойчивых (рисунок А.2а) и неустойчивых резонансов (рисунок А.2б). Данные на рисунке показывают, что структура резонансов в этой области сложна и отличается большим количеством наложений, как устойчивых, так и неустойчивых резонансов. Кроме того, существуют области от 5° до 35° и от 145° до 175° , где резонансы вовсе отсутствуют.

Для большей наглядности, количество наложений апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Луны, представлено на рисунке А.3, из которого видно, что наибольшая концентрация резонансов приходится для наклонений 70° и 110° .

На рисунке А.4 представлена карта распределения вековых апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Солнца. По аналогии с распределением лунных апсидально-нодальных резонансов, здесь их наибольшая концентрация находится в области наклонений от 45° до 135° . В рассмотренной области действует и резонанс Лидова-Козаи. При наклонениях 65° и 115° он проявляет устойчивое действие, а при наклонениях 60° и 120° – неустойчивое.

Вековых резонансов, связанных со средним движением Луны в области резонанса 1:5 не обнаружено, а резонансы со средним движением Солнца представлены на рисунке А.5. Наибольшая концентрация вековых резонансов со средним движением Солнца расположена в области наклонений от 20° до 55° и от 125° до 160° . Здесь можно отметить зеркальную структуру относительно наклонения 90° . Например, при значении наклонения 30° , во всем пространстве по большой полуоси действует устойчивый резонанс $\dot{\psi}_{12,S} = \vec{n}'_{S,L} + 2(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}')$, а при обратном движении (наклонение 150°) действует резонанс $\dot{\psi}_{11,S} = \vec{n}'_{S,L} - 2(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}')$. Так, у каждого резонанса, действующего на прямом движении, есть аналог резонанса, который действует при обратном.

Рассмотрим следующий орбитальный резонанс 1:7 со скоростью вращения Земли. Расположение областей влияния компонент его мультиплета представлено на рисунке 37.

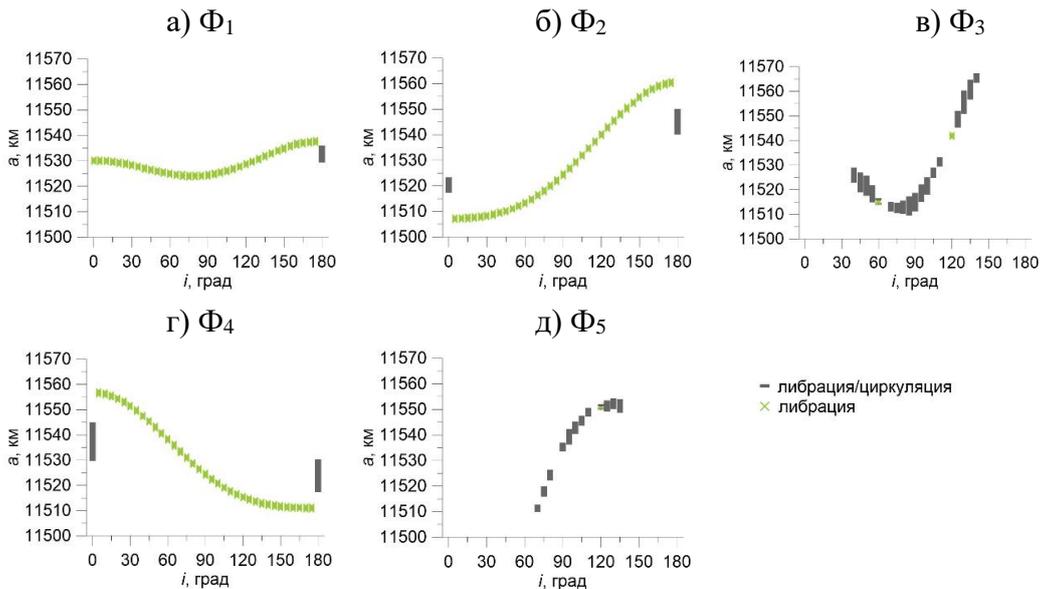


Рисунок 37 — Карта компонент мультиплета орбитального резонанса 1:7

Четкие устойчивые линии действия резонанса имеют только компоненты Φ_1 , Φ_2 и Φ_4 . Третья и пятая компоненты в основном не устойчивы и имеют небольшую площадь покрытия по сравнению с соответствующими компонентами мультиплета орбитального резонанса 1:5. В данной области не расположено никаких реальных объектов.

На рисунке А.6 представлено распределение вековых апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Луны. Как и для резонанса 1:5, из-за большого количества резонансов, данные на рисунке разделены на устойчивые и неустойчивые резонансы. Для большей наглядности, количество наложений резонансов представлены на рисунке А.7.

Наиболее загруженной резонансами зоной является область при наклонениях 70° и 110° . В этой зоне действуют как устойчивые, так и неустойчивые резонансы. Кроме того, в области от 11540 км до 11570 км по большой полуоси, начинают проявляться точечные резонансы, которые не пронизывают всю рассмотренную область. Причем, при наклонениях от 0° до 30° и от 150° до 180° , появляются только устойчивые резонансы, а при наклонениях от 60° до 115° в основном неустойчивые резонансы.

Картина распределения вековых апсидально-нодальных резонансов с прецессией орбиты Солнца представлена на рисунке А.8.

Все рассмотренное пространство по большой полуоси пронизывают только устойчивые резонансы под номерами $\underline{\underline{\psi}}_{1,S} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) + \dot{\omega} - \dot{\omega}'_S$, $\underline{\underline{\psi}}_{2,S} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) - \dot{\omega} + \dot{\omega}'_S$, $\underline{\underline{\psi}}_{13,S} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) + \dot{\omega}'_S$ и другие резонансы, которые являются их геометрическими аналогами. Резонанс Лидова-Козаи является устойчивым только при наклонении 115° и только при большой полуоси меньше 11530 км. Остальные резонансы являются либо неустойчивыми, либо проявляют свое действие точно на некоторых участках.

На рисунке А.9 представлены вековые резонансы со средним движением Луны. В области резонанса 1:7 они проявляются только при наклонениях от 0° до 20° и от 160° до 180° , и при больших полуосях от 11510 км до 11535 км. Резонансы не пронизывают пространство, а действуют точно.

Вековые резонансы со средним движением Солнца, наоборот, имеют пронизывающую структуру (рисунок А.10). По аналогии с областью 1:5, здесь вековые резонансы со средним движением Солнца имеют зеркальную структуру относительно наклонения 90° и у каждого резонанса из прямого движения есть свой аналог резонанса в обратном движении.

Общей особенностью всех вековых резонансов в области 1:7 является наличие участков точечного влияния резонансов начиная с больших полуосей выше 11540 км.

Следующий рассмотренный резонанс 1:9 со скоростью вращения Земли (рисунок 38).

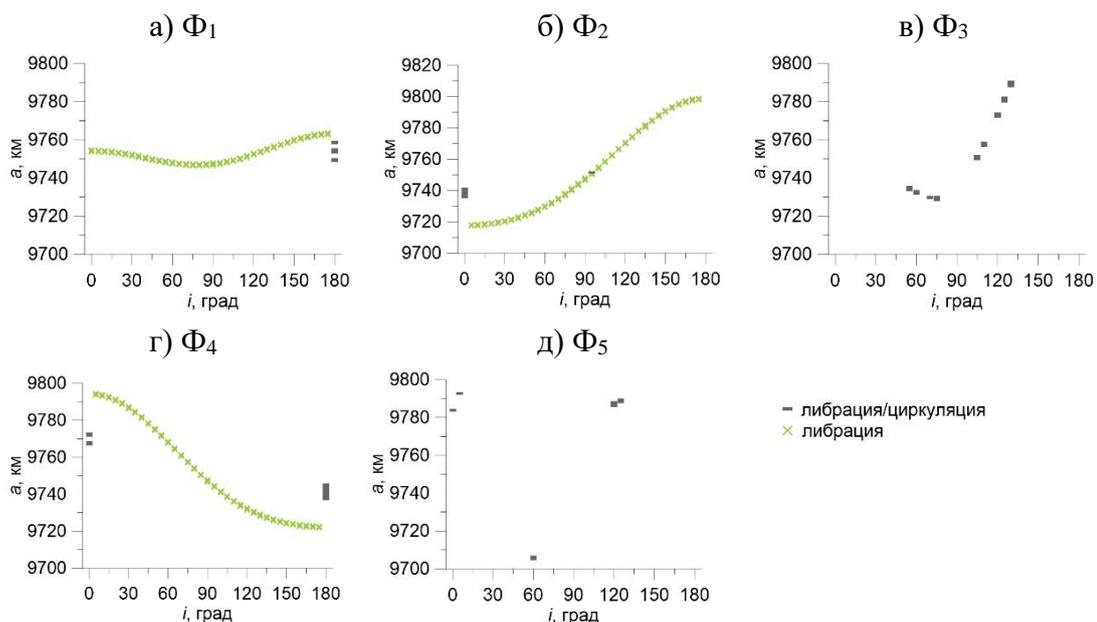


Рисунок 38 — Карта компонент мультиплета орбитального резонанса 1:9

Как и для предыдущих двух областей, первая, вторая и четвертая компоненты устойчивы. Вторая и пятая компоненты в этой области практически исчезают. Реальных объектов в данной области нет.

Карта распределения вековых апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Луны (рисунок А.11), показывает, что зона покрытия резонансов намного меньше, чем у двух предыдущих областей. Количество наложений резонансов сокращается, но возрастает количество точно действующих резонансов, которые расположены в основном по наклонениям от 0° до 30° и от 150° до 180° .

В области резонанса 1:9 действуют в основном точечные апсидально-нодальные резонансы с прецессией орбиты Солнца (рисунок А.12), которые распределены по наклонениям от 60° до 75° и от 105° до 120° , и в приэкваториальных зонах с большими полуосями около 9725 км и 9775 км. Только резонансы $\underline{\underline{\psi}}_{13-17,S} \approx 0$ имеют устойчивую пронизывающую структуру при наклонениях 0° , 90° и 180° , как и в остальных рассмотренных выше областях. Лунный резонанс $\underline{\underline{\psi}}_{17,L} \approx 0$ является аналогом солнечных резонансов $\underline{\underline{\psi}}_{13-17,S} \approx 0$ и имеет такую же зону покрытия. Это подтверждается и результатами, представленными в разделе 3.1.

Кроме того, в экваториальных зонах находится большое количество точечных вековых резонансов со средним движением Луны, но они уже распределены при больших полуосях около 9715 км, 9750 км и 9790 км (рисунок А.13).

Вековые резонансы, связанные со средним движением Солнца (рисунок А.14), имеют почти зеркальную структуру относительно наклонения 90° . Здесь резонанс $\underline{\underline{\psi}}_{6,S} = \bar{n}'_S + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}')$ имеет устойчивое влияние только при большой полуоси ниже, чем 9765 км, несмотря на то что его аналог $\underline{\underline{\psi}}_{5,S} = \bar{n}'_S - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}')$ для обратного движения действует во всей области. Точечное влияние резонансов наблюдается в экваториальных зонах и при наклонениях 65° и 115° .

Ниже представлены MEGNO-карты для трех, рассмотренных выше областей (рисунок 39).

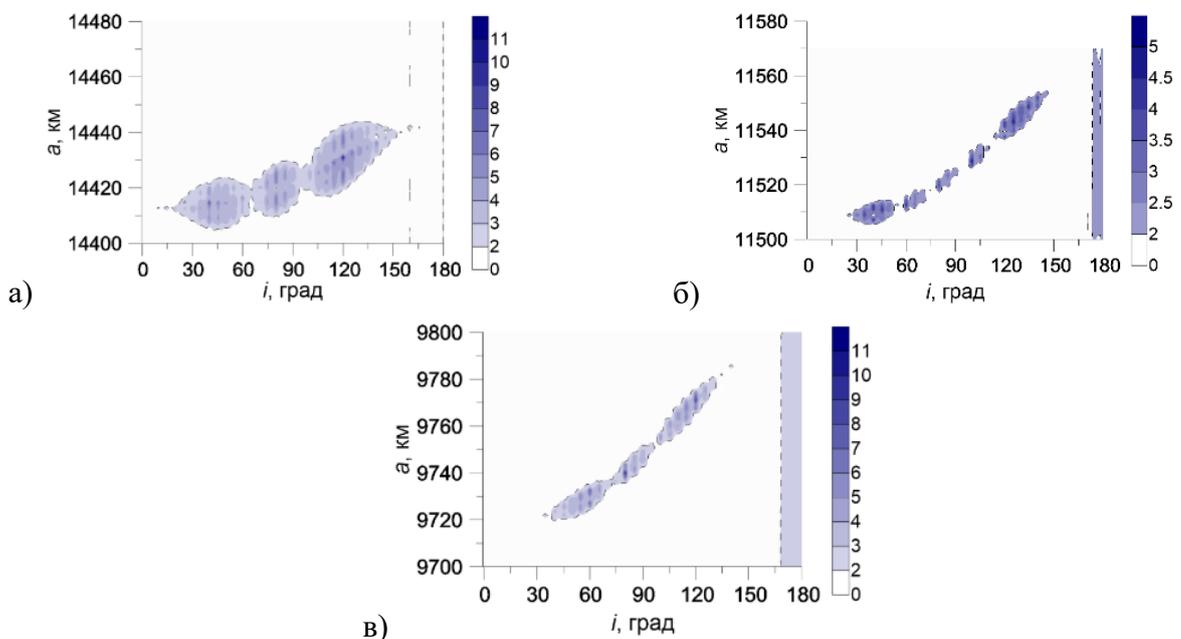


Рисунок 39 — MEGNO-карта областей орбитального резонанса а) 1:5, б) 1:7, в) 1:9

Сравнивая рисунки 36, 37 и 38 с соответствующими им MEGNO-картами (рисунок 39) можно сказать, что хаотизация движения происходит по линии действия второй компоненты мультиплета орбитального резонанса, путем наложения на нее других резонансов различных типов. Данный вывод аналогичен выводу, сделанному из анализа орбитальных областей 1:4, 1:6 и 1:8.

Исследуем особенности динамики объектов, расположенных в рассмотренных резонансных областях.

Первый объект ($i=115^\circ$, $a=14426$ км) подвержен устойчивому влиянию первой компоненты мультиплета орбитального резонанса 1:5 и неустойчивому влиянию третьей компоненты мультиплета резонанса 1:5. Его динамика представлена на рисунке А.15. Кроме того, на данный объект действуют три устойчивых апсидально-нодальных резонанса как с прецессией орбиты Луны, так и Солнца. Параметр MEGNO растет линейно, что говорит о неустойчивом движении.

Приведем пример объекта (рисунок А.16), который имеет такое же наклонение как у объекта на рисунке А.15, но расположен выше орбитального резонанса ($i=115^\circ$, $a=14459$ км). Такой объект подвержен идентичному набору вековых резонансов, но параметр MEGNO остается меньше 2. Таким образом, данный пример подтверждает, что орбитальные резонансы способны приводить к хаотизации движения объекта.

Рассмотрим следующий пример. Объект ($i=100^\circ$, $a=11524$ км) находится в области действия второй компоненты мультиплета орбитального резонанса 1:7 и векового апсидально-нодального резонанса, связанного с прецессией орбиты Луны (рисунок А.17). Резонансное соотношение орбитального резонанса в этом случае имеет большие выбросы, но основное количество точек сконцентрировано около нуля. Такие выбросы обусловлены особенностями методики при экстремально низких эксцентриситетах, которыми можно здесь и далее пренебречь. Несмотря на отсутствие неустойчивых резонансов, параметр MEGNO становится больше 2 и растет линейно, что говорит о хаотизации движения. Таким образом, наличие только устойчивых резонансов в совокупности со второй компонентой мультиплета орбитального резонанса может приводить к невозможности прогнозирования движения.

Следующие два примера (рисунки А.18 и А.19) взяты с одинаковыми наклонениями 90° , но разными большими полуосями $a=11517$ км и $a=11553$ км соответственно. В обоих случаях действуют вековые апсидально-нодальные резонансы $\underline{\underline{\psi}}_{17,L} \approx 0$, $\underline{\underline{\psi}}_{13-17,S} \approx 0$, что характерно для выбранного наклонения. В первом случае добавляется влияние первой, второй и четвертой компоненты мультиплета орбитального резонанса 1:7, во втором случае орбитальные резонансы отсутствуют. Сравнивая эти два случая, можно сделать вывод, что на хаотизацию движения в этой области влияют только орбитальные резонансы, так как без их влияния параметр MEGNO указывает, что орбита устойчива. Причем в случае, изображенном на рисунке 18, первые 20 лет первая и четвертые компоненты мультиплета орбитального резонанса имеют устойчивое влияние, но параметр MEGNO в это время имел тенденцию роста. Это говорит о том, что устойчивые орбитальные резонансы могут приводить к хаотизации движения.

Следующий пример объекта (рисунок А.20) из области резонанса 1:9 ($i=70^\circ$, $a=9730$ км). На него действует только вторая компонента мультиплета орбитального резонанса, но параметр

MEGNO имеет линейный рост и достигает больших значений. Несмотря на то, что здесь не выявлено других резонансов, хаотизация движения говорит о том, что на этот объект могут действовать другие резонансы более высоких порядков, которые не были рассмотрены в данной работе. Такой вывод следует из [42].

На рисунке 39 показана область повышенной хаотизации при наклонениях от 170° до 180° . Эта область не связана с орбитальными резонансами. Следующий пример был взят из этой области (рисунок А.21). Объект имеет наклонение 180° , на который действуют свойственные этому наклонению резонансы $\underline{\Psi}_{17,L}$, $\underline{\Psi}_{13-17,S}$, и большую полуось 9762,9 км. Других резонансов, действующих на этот объект не обнаружено, но тем не менее параметр MEGNO указывает на то, что происходит хаотизация движения. Таким образом, можно сделать вывод, что для области 1:9, на хаотизацию движения влияют и вековые резонансы, которые расположены в области наклонений от 170° до 180° .

Из описанных выше результатов, можно сделать вывод, что в области резонансов 1:5, 1:7 и 1:9, основополагающей возникновения хаотизации движения является наличие второй компоненты мультиплета орбитального резонанса. А для областей 1:7 и 1:9 проявление хаотизации при обратном движении в экваториальной зоне вызвано наложением вековых резонансов различных типов.

3.5 Исследование областей орбитальных резонансов 1:10 и 1:11 со скоростью вращения Земли

Следующие две области 1:10 и 1:11 имеют близкие картины эволюции компонент мультиплета орбитальных резонансов (рисунок 40). Третья и пятая компоненты мультиплета у резонансов исчезают. Размах компонент мультиплета у резонанса 1:10 составляет около 110 км, у резонанса 1:11 – 120 км. Результаты исследования этих областей опубликованы в [32].

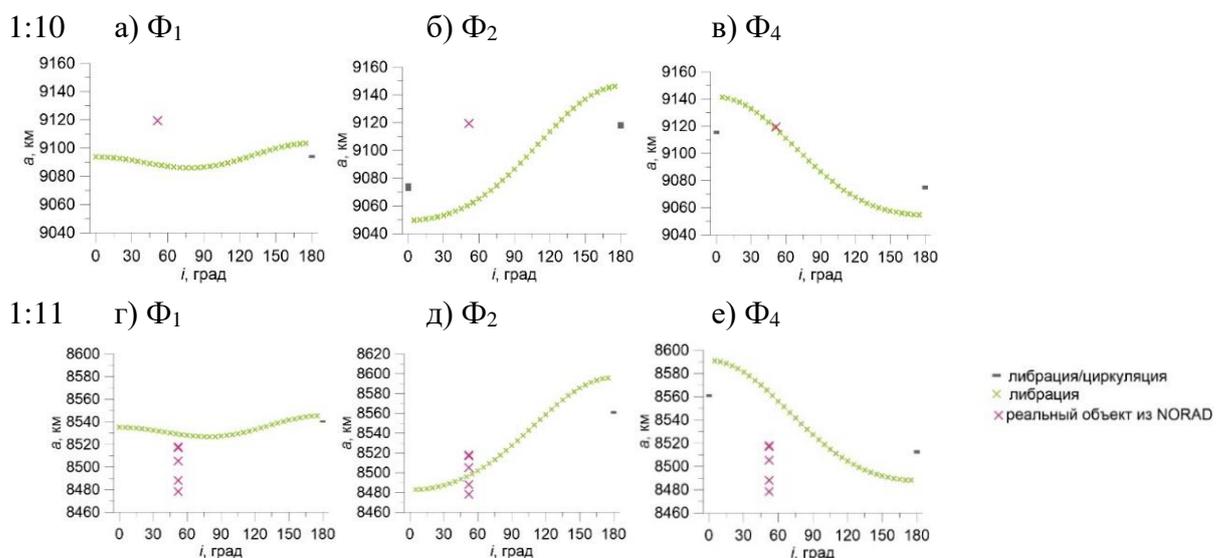


Рисунок 40 — а)-в): карта компонент мультиплета для орбитального резонанса 1:10;
г)-е) карта компонент мультиплета для орбитального резонанса 1:11

Присутствующие в данных областях реальные объекты не попадают на действующий резонанс. Единственный объект в области резонанса 1:10 является космическим мусором. На рисунке 40в видно, что объект расположен в области четвертой компоненты мультиплета резонанса. Однако, анализ показал, что четвертая компонента для этого объекта циркулирует. Это обозначает отсутствие резонанса.

В области резонанса 1:11 расположено пять спутников Globalstar. Их положение близко к действующему резонансу, но все же они не попадают в область его действия.

Карты распределения апсидально-нодальных вековых резонансов, связанных со средним движением Луны, представлены на рисунке А.22. В области резонанса 1:10 (рисунок А.22а) практически все пронизывающие резонансы являются устойчивыми, кроме резонанса $\underline{\underline{\psi}}_{18,L}$, который действует неустойчиво при наклонениях 60° и 120° . Наложений резонансов практически не прослеживается, кроме небольших точечных участков.

Данные, представленные для области резонанса 1:11 на рисунке А.22б показывают, что здесь действует только два резонанса пронизывающих рассмотренную область. Это резонанс $\underline{\underline{\psi}}_{17,L}$, который действует во всех рассмотренных выше областях, и резонанс $\underline{\underline{\psi}}_{2,L}$. Все остальные резонансы действуют точно, в основном при наклонениях от 0° до 35° и от 140° до 180° . Для наклонения 65° и 115° , точно неустойчиво действует резонанс $\underline{\underline{\psi}}_{19,L}$.

На карте распределения вековых апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Солнца (рисунок А.23), показано, что пронизывают рассмотренные области только резонанс $\underline{\underline{\psi}}_{13-17,S}$ при наклонениях 0° , 90° и 180° , остальные резонансы действуют точно.

Карты распределения вековых резонансов, связанных со средним движением Луны (рисунок А.24) показывают, что действуют эти резонансы только точно и в основном в экваториальных зонах.

Вековые резонансы со средним движением Солнца (рисунок А.25) тоже в большинстве своем проявляются на точечных участках, с наибольшей концентрацией в экваториальных зонах. В области 1:10 действуют и некоторые резонансы, которые пронизывают структуру рассмотренного пространства. Для области 1:11, пронизывающие структуры вековых резонансов расположены ниже отметки большой полуоси 8580 км.

MEGNO-карта для резонансов 1:10 и 1:11(рисунок 41) отличается от карт резонансов, рассмотренных выше. Орбитальные резонансы здесь не влияют на хаотизацию движения, по всей видимости в этой области преобладает действие вековых резонансов.

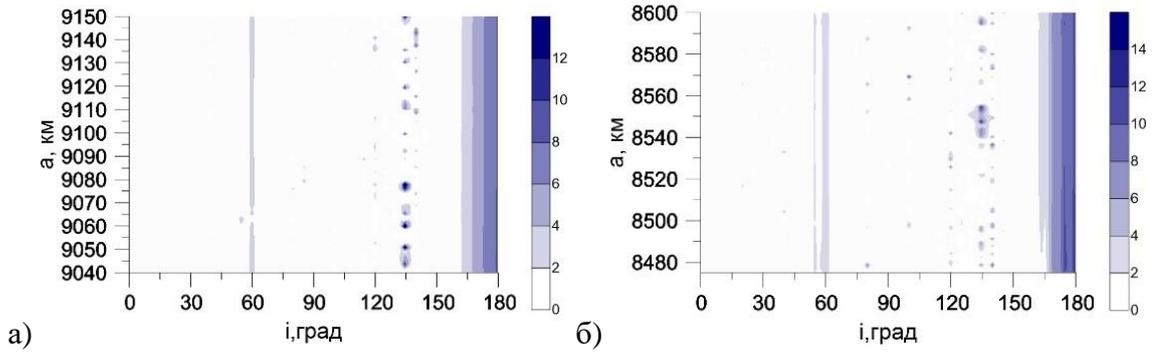


Рисунок 41 — MEGNO-карта области а) орбитального резонанса 1:10; б) орбитального резонанса 1:11

Сравнивая все зоны действия орбитальных резонансов и величину зон хаотизации, можно отметить особенность, что чем ниже расположена резонансная область, тем шире размах линий действия резонансов и тем больше область хаотизации.

Приведем пример объекта ($i=90^\circ$, $a=9065$ км), который движется в области резонанса 1:10, но он не подвержен его влиянию (рисунок А.26). Несмотря на это, параметр MEGNO начинает расти после 30 лет устойчивого движения. Рассмотрим какие вековые резонансы действуют на этот объект (рисунок А.26б-з). Данный объект подвержен как устойчивому, так и неустойчивому влиянию апсидально-нодальных вековых резонансов, в том числе и влиянию неустойчивого резонанса Лидова-Козаи. Как известно, данный резонанс может приводить к изменению наклона и эксцентриситета. Из рисунка А.26а видно, что через 30 лет наклонение начинает уменьшаться, это приводит к резкому росту параметра MEGNO. Через 60 лет наклонение достигает своего минимума, а параметр MEGNO максимума. Затем наклонение снова стремится к 90° , а MEGNO стремительно уменьшается. Такая динамика свидетельствует о том, что движение в данной области может быть хаотическим и без действия орбитальных резонансов.

Следующий объект ($i=100^\circ$, $a=9087$ км) движется под действием второй компоненты мультиплета орбитального резонанса 1:10 и векового резонанса со средним движением Солнца (рисунок А.27). Параметр MEGNO в этом случае осциллирует около 2 на протяжении 12 лет, а затем начинает медленно расти. Хаотизация движения происходит только в случае линейного роста MEGNO, которого здесь не наблюдается. Таким образом, в области резонанса 1:10, вторая компонента мультиплета орбитального резонанса действительно не приводит к хаотизации движения.

Следующий пример объекта ($i=90^\circ$, $a=8520$ км) из области резонанса 1:11 (рисунок А.28). В данном примере объект движется под действием первой, второй и четвертой компоненты мультиплета орбитального резонанса. Наклонение объекта говорит о том, что он находится под влиянием и $\underline{\underline{\psi}}_{17,L}$, $\underline{\underline{\psi}}_{13-17,S}$. Несмотря на большое количество действующих резонансов и наличие второй компоненты мультиплета орбитального резонанса, параметр MEGNO осциллирует около 0, что говорит о регулярности орбиты.

Рассмотрим объект, который имеет наклонение 175° и большую полуось 8535,9 км (рисунок А.29). Он находится в зоне повышенной хаотизации установленной на MEGNO карте (рисунок 41). Рассмотрим какие резонансы действуют на него. Как видно из

рисунка А.29, на объект не действуют орбитальные резонансы, но он подвержен действию двух апсидально-нодальных резонансов как с прецессией орбиты Солнца, так и Луны. Это точечные резонансы, которые не действуют на всем пространстве этого наклонения. Параметр $MEGNO$ больше двух и растет линейно.

Исходя из рисунков А.26-А.29, которые показывают набор резонансов, можно сделать вывод, что в экваториальной зоне обратного движения к хаотизации приводят наложение точечных вековых резонансов, а в экваториальной зоне прямого движения такая хаотизация отсутствует. Причем орбитальные резонансы, в области резонансов 1:10 и 1:11, не приводят к хаотизации движения.

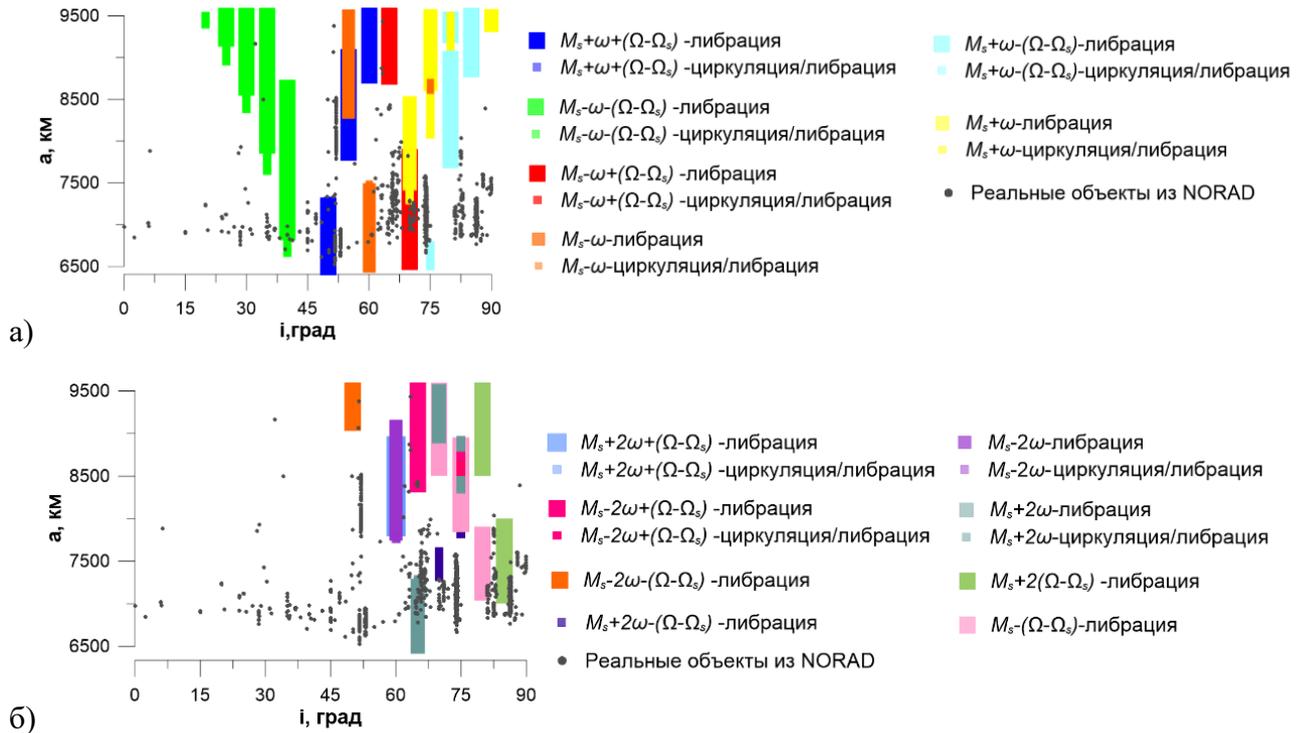
3.6 Исследование динамики объектов под действием светового давления и вековых резонансов

Как показано в работе [27] вековые резонансы со средним движением третьего тела проявляются в низких областях околоземного орбитального пространства. Кроме того, сила светового давления является одним из важных факторов, влияющих на динамику околоземных объектов. Совместное влияние светового давления и апсидально-нодальных резонансов рассмотрено в работах [44, 45]. В работе [24] высказано предположение и показано аналитическими методами, что действие вековых резонансов, связанных со средним движением Солнца, усиливает влияние светового давления. Проверка данной гипотезы, с использованием численных методов, представлена в работе [33].

Область исследования была выбрана аналогично [24]: от 6500 км до 9500 км по большой полуоси и от 0° до 90° по наклонению. Анализ резонансной структуры производился на интервале времени 3 года. Поскольку все объекты рассматриваемой области являются низколетящими (один оборот совершается за 87-154 минуты), на интервале времени 3 года каждый объект совершает более 10 тысяч оборотов. Как показывает наш опыт, этого достаточно для выявления вековых резонансов. Модельные объекты были распределены равномерно по исследуемой области, с шагом 5 км по большой полуоси и 5° по наклонению. Следуя [24], выберем в качестве парусности величину $1 \text{ м}^2/\text{кг}$. При моделировании движения объектов, сопротивление атмосферы не учитывается, так как оно сильно сокращает время жизни объекта на орбите, тем самым не позволяя исследовать динамику объектов и выявлять структуру вековых резонансов.

Используя каталог NORAD, были выявлены 3872 объекта, которые наблюдаются в данной области. Это космические аппараты разного назначения, а также объекты космического мусора. В дальнейшем, на всех картах вековых резонансов, полученных по результатам численного эксперимента, будут представлены положения реальных объектов. Наибольшая концентрация объектов наблюдается в диапазоне больших полуосей от 6500 км до 7500 км.

Первоначально была исследована структура вековых резонансов, связанных со средним движением Солнца и произведено сравнение с картой, полученной [24]. Для наглядности, резонансы разделены на два графика, рисунок 42а – резонансы, рассмотренные в указанной выше статье, рисунок 42б – все остальные резонансы из таблицы 2.



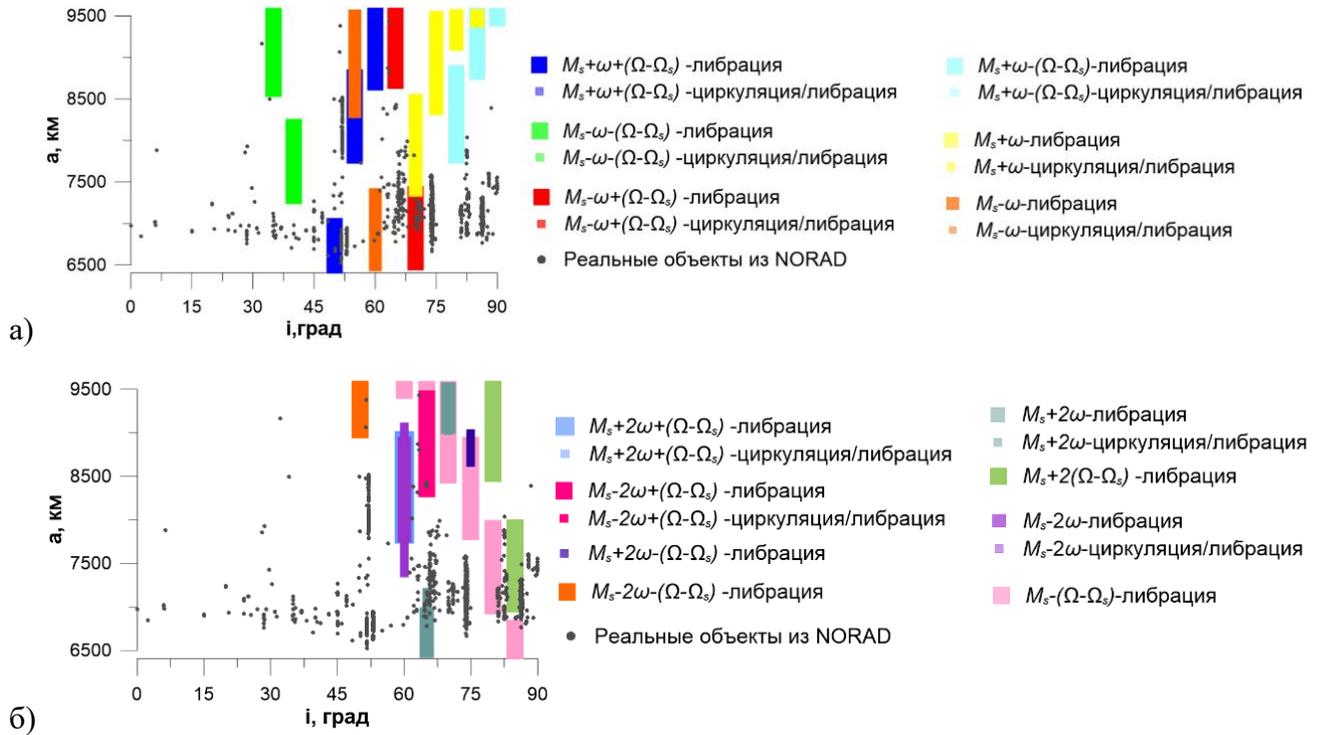
а) резонансы, которые рассмотрены в статье [24]; б) все остальные резонансы из таблицы 2

Рисунок 42 — Карты распределения вековых резонансов, связанных со средним движением Солнца

Сравнивая рисунок 42а, с картой представленной [24], можно сделать вывод, что расположение и размер полос резонансов практически совпадают. На графике [24] показано, что самую широкую полосу действия имеет резонанс $\dot{M}'_s - \dot{\omega} - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_s)$. Это же имеет место и на рисунке 42а. Кроме того, в отличие от работы указанных авторов в данной работе рассмотрены неустойчивые резонансы и резонансы более высоких порядков.

Все резонансы на картах выявлены с учетом действия светового давления. Для того, чтобы увидеть его влияние были построены аналогичные карты распределения вековых резонансов без учета действия светового давления (рисунок 43).

Сравнивая рисунки 42 и 43, можно сказать, что распределения вековых резонансов, связанных со средним движением Солнца, не зависит от влияния светового давления, однако области действия ряда резонансов становятся меньше, но в целом картина на рисунке 43 близка к рисунку 42.



а) резонансы, которые рассмотрены в статье [24]; б) все остальные резонансы из таблицы 2.

Рисунок 43 — Карты распределения вековых резонансов, связанных со средним движением Солнца без действия светового давления

Проверка усиления влияния светового давления, при действии вековых резонансов со средним движением Солнца, как и в работе [24], осуществлялась нами по нахождению взаимосвязи между действующими резонансами и амплитудой колебаний эксцентриситета.

На рисунке 44 представлена карта амплитуды колебаний эксцентриситета на интервале 3 года. Чем темнее участок, тем выше амплитуда. Голубыми линиями обозначены места действия резонансов, со средним движением Солнца. Светлыми точками отмечены реальные объекты, орбитальная эволюция которых будет рассмотрена в подразделе 3.8.

Сравнивая данные, приведенные на рисунках 42 и 44а, можно заметить, что в случае учета влияния светового давления области роста амплитуды колебаний эксцентриситета совпадают с областями расположения вековых резонансов со средним движением Солнца. Картина роста амплитуды колебаний эксцентриситета практически повторяет картину расположения резонансов со средним движением Солнца (голубые линии на рисунке 44). При отсутствии влияния светового давления наблюдается совершенно другая картина распределения амплитуд колебаний эксцентриситета, причем расположение резонансов практически не изменилось.

В работе [24] амплитуда эксцентриситета была изучена на интервале времени 120 лет и показан ее рост на десятые доли в местах действия резонансов. В нашем случае, интервал времени был выбран 3 года, так как низколетящие спутники уже за это время совершают большое количество оборотов, что позволяет отследить вековые изменения во времени. Амплитуда эксцентриситета растет лишь на сотые доли, но зависимость роста амплитуды от совместного влияния светового давления и вековых резонансов прослеживается.

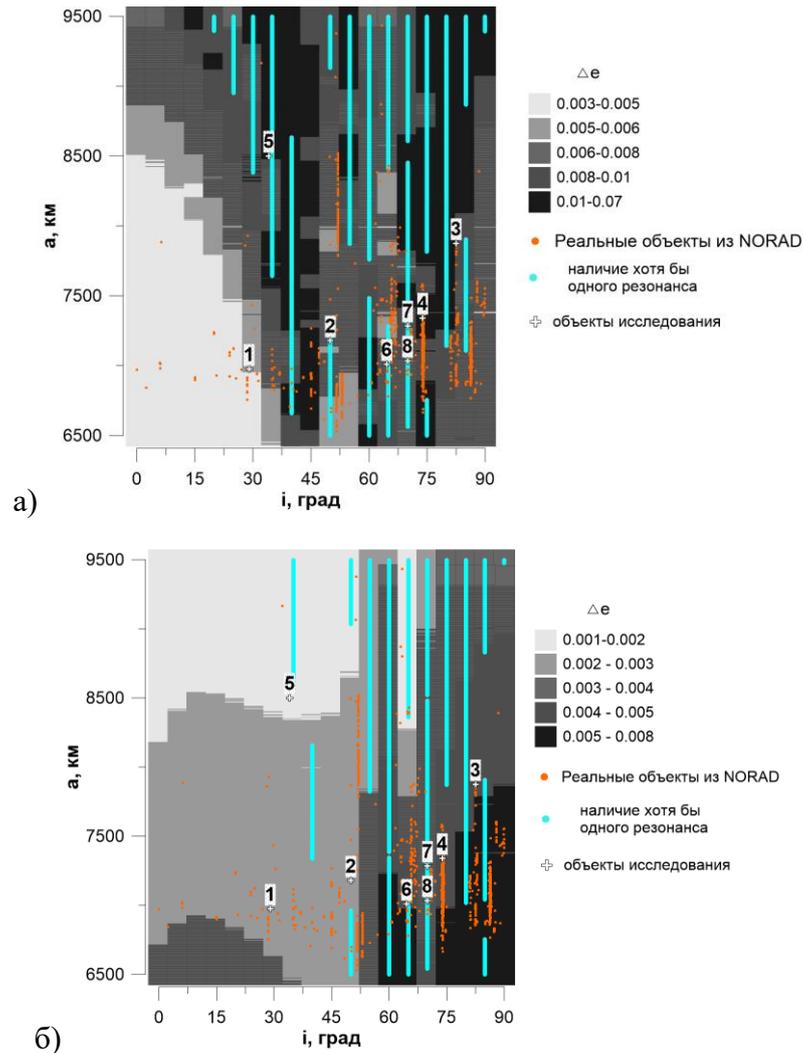


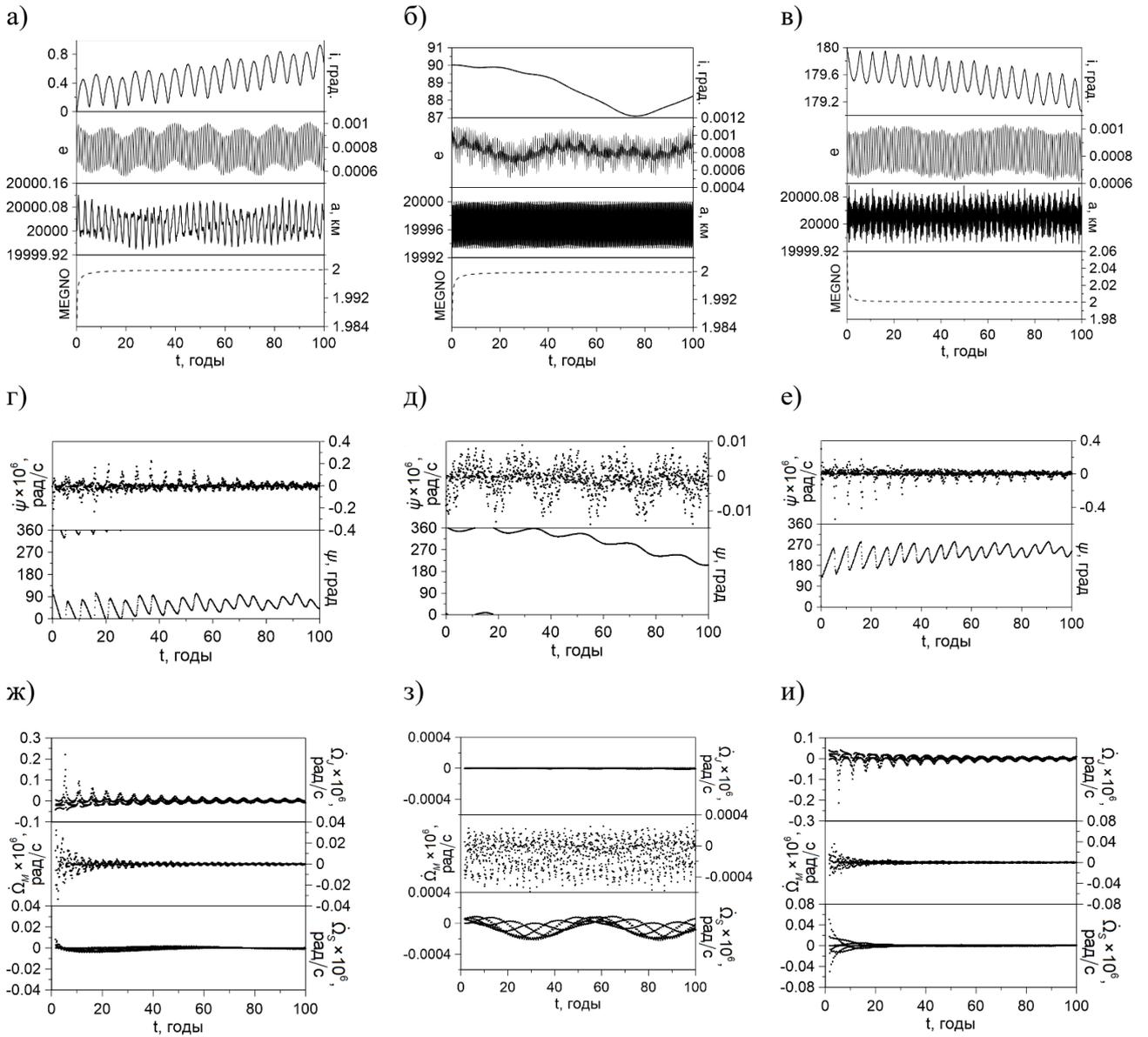
Рисунок 44 — Размер амплитуды колебаний эксцентриситета на временном интервале 3 года:
 а) с учетом светового давления; б) без учета светового давления

3.7 Особенности динамики объектов, движущихся вне областей орбитальных резонансов

Орбитальная эволюция объектов вне областей орбитальных резонансов не отличается существенным разнообразием, несмотря на большое количество действующих резонансов [27]. Наибольший интерес представляет влияние вековых резонансов первого порядка. К таковым относятся нодальные резонансы $\underline{\dot{\psi}}_{17,S,L} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) \approx 0$.

Остановимся на действии этих резонансов более подробно.

На рисунке 45 для сравнения показана орбитальная эволюция трех объектов, имеющих одинаковые значения большой полуоси 20000 км, одинаковые начальные эксцентриситеты, равные 0.001, и разные наклонения орбит: 0° , 90° и 180° .



Орбитальная эволюция объекта с наклоном орбиты: а) 0° ; б) 90° ; в) 180° ; пункты г), д), е) соответствующие пунктам а), б), в) резонансные характеристики: изменение во времени резонансного соотношения ($\dot{\psi}$) и резонансного аргумента (ψ); пункты ж), з), и) соответствующие пунктам г), д), е) покомпонентные расшифровки структуры $\dot{\Omega}$

Рисунок 45 — Особенности динамики объектов в условиях действия векового резонанса

$$\dot{\psi} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) \approx 0$$

Кроме того, приведены данные об изменении резонансных характеристик объектов и об эволюции компонент, составляющей резонанса величины $\dot{\Omega}$, формула (2.28). Движение во всех трех случаях регулярно. Для объектов с наклонами 0° и 180° орбитальная эволюция подобна (рисунки 45а и 45в), присутствует вековой уход по наклонению в пределах одного градуса. Орбитальная эволюция объекта с наклоном 90° несколько иная. Здесь имеют место долгопериодические колебания.

Остановимся на резонансных характеристиках, приведенных на рисунке 45 г, д, е. Численные оценки поведения резонансных соотношений указывают на множественное прохождение этих соотношений через нулевые значения. Окрестность, в которой колеблется около нуля резонансное соотношение для объекта с наклоном 90° существенно меньше, чем у объектов с наклонами 0° и 180° . Приведенные изменения во времени компонент величины $\dot{\Omega}$ показывают, что амплитуды колебаний компонент около нуля для объекта с наклоном 90° на три порядка меньше, чем для двух других объектов. Учитывая, что величина $\dot{\Omega}'_L$ имеет порядок примерно 1×10^{-8} , обращение в ноль величины $\dot{\psi} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L)$ зависит от значений входящей в него величины $\dot{\Omega}$. То же самое можно сказать и о резонансе $\dot{\psi} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S)$.

Совместное действие нескольких устойчивых вековых резонансов не приводит к возникновению хаотичности в движении объекта [42]. Пример такого движения приведен на рисунках 46, 47. На рисунке 46 дана орбитальная эволюция объекта, подверженного действию четырех устойчивых вековых апсидально-нодальных резонансов, а на рисунке 47 даны резонансные характеристики движения.

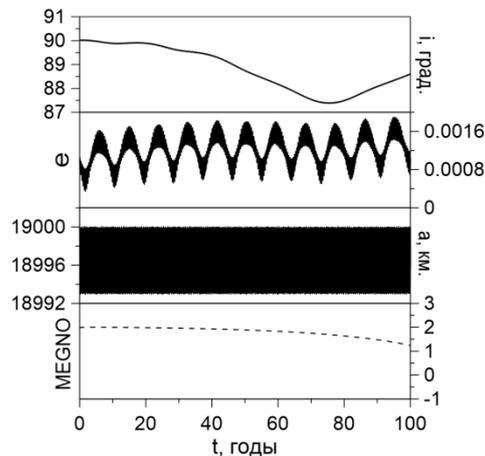


Рисунок 46 — Орбитальная эволюция объекта, подверженного действию четырех устойчивых вековых апсидально-нодальных резонансов.

На рисунке 47 а, в, д, ж приведены (сверху вниз) изменения резонансных соотношений, резонансных аргументов, полученные по точным формулам. На рисунке 47 б, г, е, з показаны фазовые портреты [27], которые позволяют определить тип поведения критического аргумента: если точки на фазовом портрете равномерно распределены около нуля, то происходит циркуляция критического аргумента, если симметрия отсутствует и точки сконцентрированы не в нуле, то критический аргумент либрирует. Приведенные на рисунке 47 данные позволяют с уверенностью говорить о том, что резонансы устойчивы на всем рассматриваемом временном интервале. Других резонансов в движении объекта нет. Таким образом, наложение нескольких устойчивых вековых резонансов не приводит к возникновению хаотичности (рисунок 46 MEGNO меньше 2). В эволюции наклона орбиты заметно влияние резонансов $\dot{\psi} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) \approx 0$.

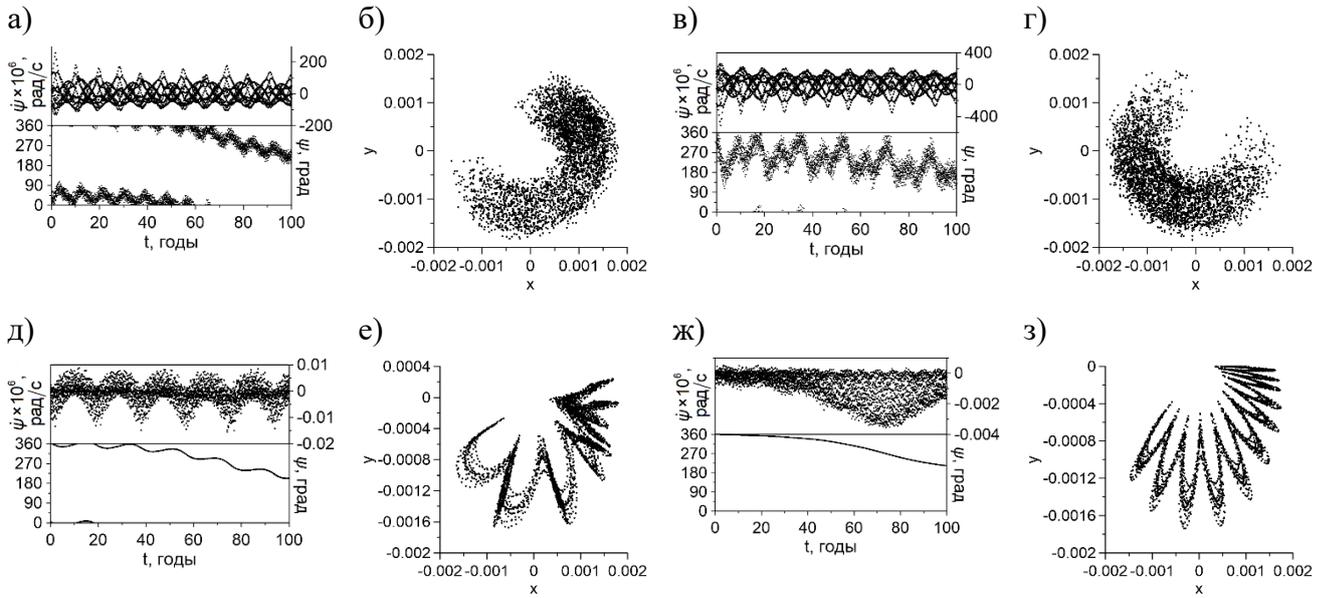


Рисунок 47 — Резонансные характеристики четырех вековых резонансов, действующих на объект, приведенный на рисунке 45: для резонансов (а, б) $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - \dot{\omega} - \dot{\omega}'_L$, (в, г) $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) + 2\dot{\omega} + 2\dot{\omega}'_L$, (д, е) $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L)$, (ж, з) $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S)$ (а, в, д, ж) эволюция резонансных соотношений и соответствующих резонансных аргументов, (б, г, е, з) фазовые портреты

И наоборот совместное действие устойчивых и неустойчивых вековых резонансов вызывает появление хаотичности в движении объекта (рисунок 48).

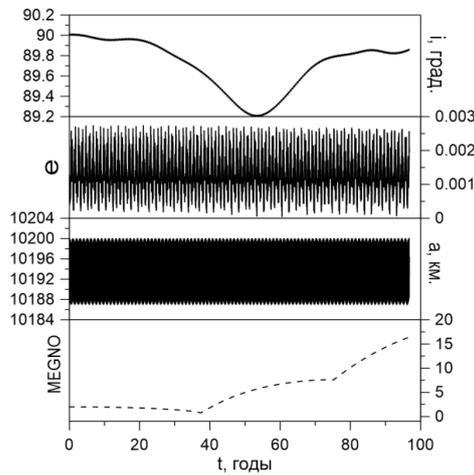
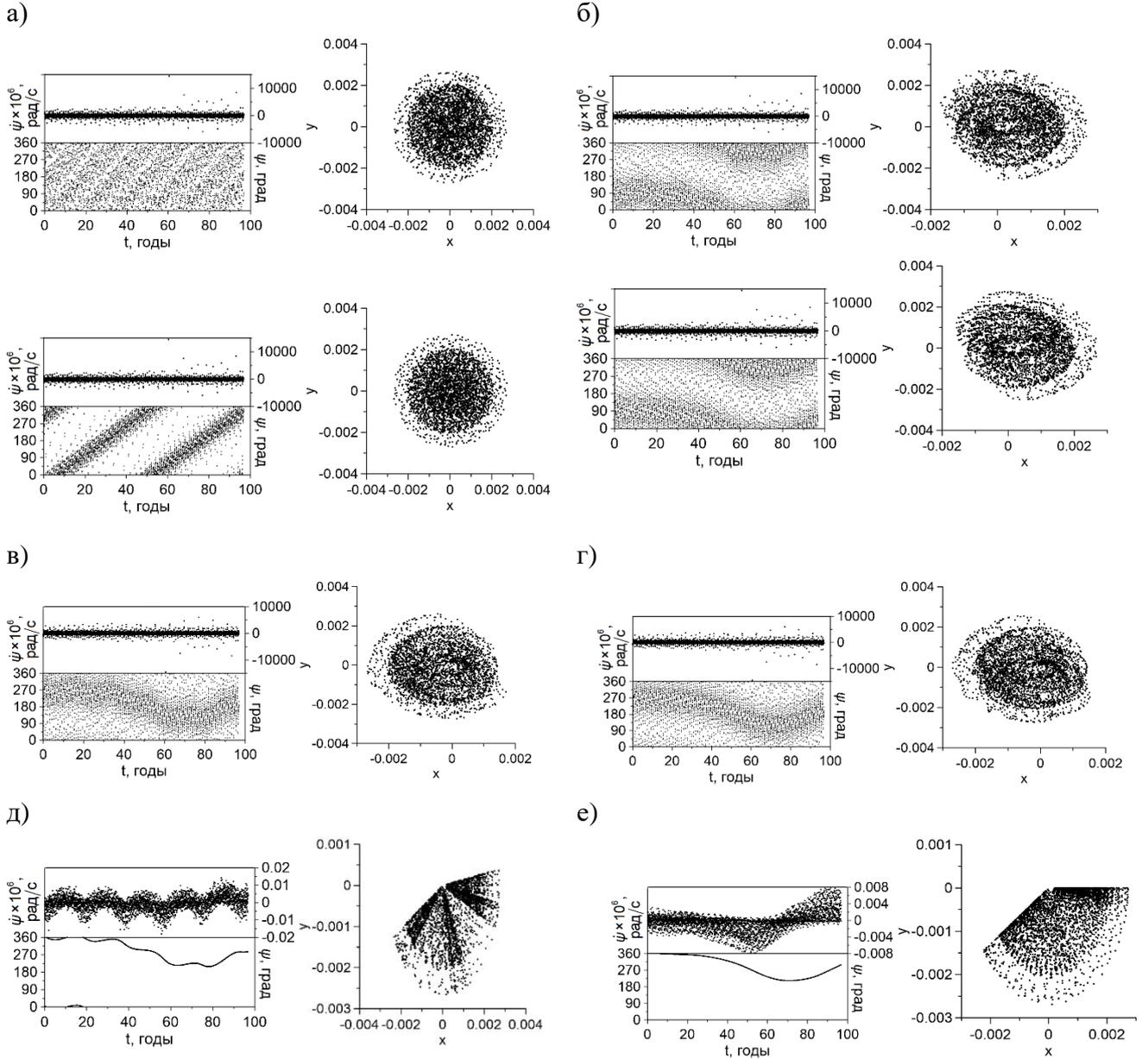


Рисунок 48 — Орбитальная эволюция объекта, подверженного действию двух устойчивых и четырех неустойчивых вековых резонансов

На объект, эволюция которого показана на рисунке 48, действуют на всем интервале прогнозирования два устойчивых вековых резонанса первого порядка и четыре неустойчивых резонанса более высоких порядков, в том числе два со средними движениями Луны и Солнца (рисунок 49). Точки с выбросами, далекими от нуля, в этом случае, как и ранее обусловлены особенностями методики, которая дает искажения при экстремально низких эксцентриситетах. Этими выбросами можно пренебречь. Таким образом, большую часть времени

резонансное соотношение находится около нуля и для этого объекта выполняется условие возникновения резонанса. Движение объекта имеет высокую степень хаотичности (MEGNO значительно больше 2), а в орбитальной эволюции просматривается влияние устойчивых резонансов $\underline{\underline{\psi}} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) \approx 0$.



а) для резонанса со средним движением Луны и Солнца $\underline{\underline{\psi}} = \bar{n}'_{L,S} + \dot{\omega} \approx 0$; б) для апсидально-нодального резонанса с прецессией орбиты Луны и Солнца $\underline{\underline{\psi}} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) + \dot{\omega} \approx 0$; для резонанса $\underline{\underline{\psi}} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) - \dot{\omega} \approx 0$ в) с прецессией Луны, г) с прецессией Солнца; для $\underline{\underline{\psi}} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) \approx 0$ д) с прецессией Луны, е) с прецессией Солнца

Рисунок 49 — Изменение во времени резонансных характеристик и фазовые портреты резонансов

Результаты данного исследования опубликованы в работе [27].

3.8 Анализ динамики избранных реальных объектов

Влияние совместного действия светового давления и вековых резонансов, связанных со средним движением Солнца, было изучено на реальных объектах. Для этого было выбрано восемь объектов из разных областей, которые отмечены цифрами на рисунке 44, и проведен анализ их динамики на интервале времени 20 лет. Исследование реальных объектов представлено в работе [33].

Не все объекты на рисунке 44, которые попадают на голубые линии, находятся в зоне действия резонансов со средним движением Солнца. Так как, карта распределения вековых резонансов со средним движением Солнца построена для модельных объектов, орбиты реальных объектов могут несколько отличаться от них по наклонению и эксцентриситету. Ниже представлен анализ орбитальной динамики восьми объектов, выбранных нами для детального рассмотрения. Положения всех восьми объектов представлены в таблице 5.

Таблица 5 — Начальные данные рассматриваемых объектов

№	Название объекта	№ NORAD	T, мин	i , °	a, км
1	GECAM-B	47235	96.59	29.00	6973.5
2	YUNHAI-2 1	43909	100.86	50.01	7177.5
3	COSMOS 2437	32954	115.88	82.50	7873.5
4	COSMOS 2251 DEB	35824	104.29	73.85	7339.3
5	DEBRIS	81821	129.98	34.07	8499.8
6	LATINSAT A	27612	97.33	64.56	7009.0
7	OPS 5712 (P/L 153)	2874	103.12	69.97	7284.3
8	ORBCOMM FM01	23545	97.84	69.97	7033.5

Для начала рассмотрим динамику объекта GECAM-B (47235), (рисунок 50).

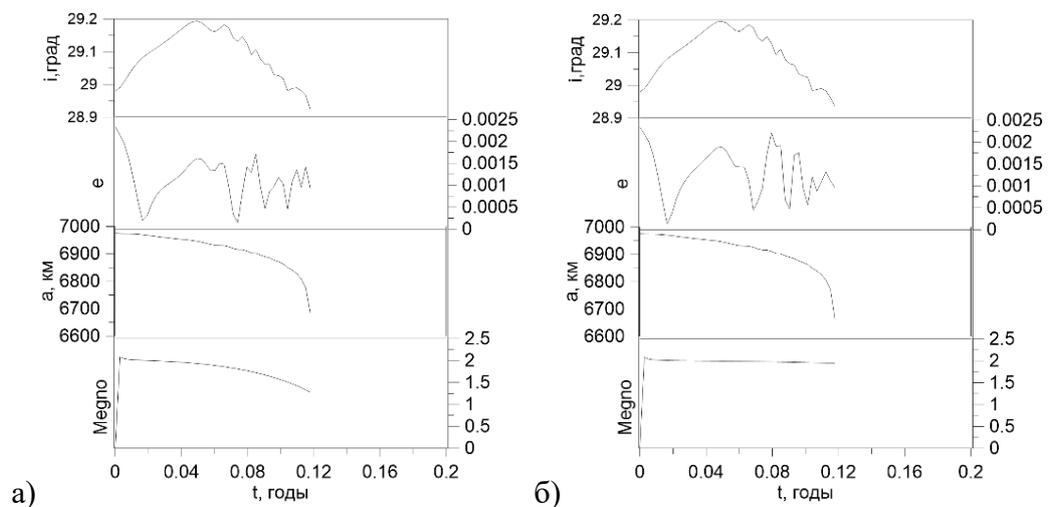


Рисунок 50 — Эволюция элементов объекта GECAM-B (47235): а) с учетом светового давления; б) без учета светового давления под влиянием атмосферы

Объект GECAM-B (47235), не находится под действием резонансов со средним движением Солнца. Объект имеет большую полуось равную 6973.5км, а это говорит о том, что он может попадать под влияние атмосферы Земли. Если учесть влияние атмосферы, объект падает на Землю примерно за 2 месяца (рисунок 50), совершив около 640 оборотов. Такая динамика не позволяет определить наличие резонансов.

Так как влияние атмосферы мешает выявлению резонансов, приведем пример динамики объекта GECAM-B (47235) без действия атмосферы (рисунок 51).

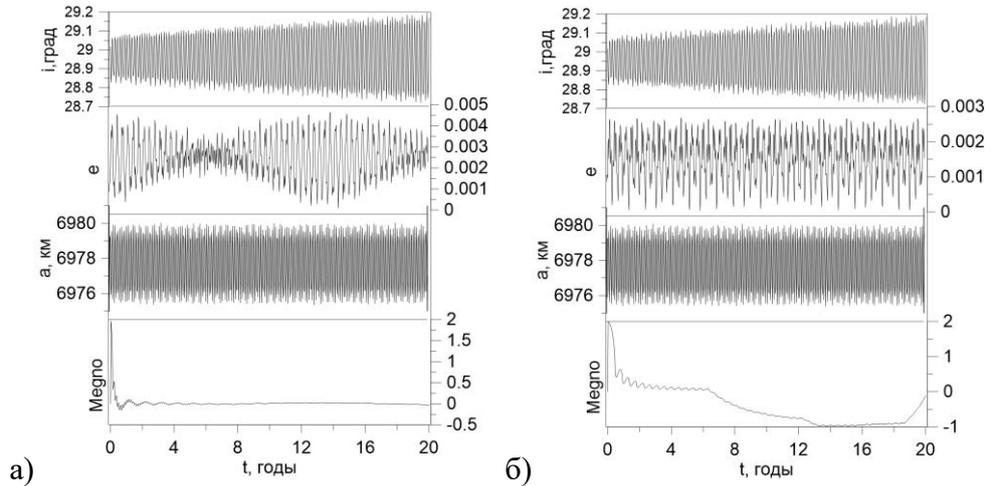


Рисунок 51 — Эволюция элементов объекта GECAM-B (47235): а) с учетом светового давления; б) без учета светового давления без влияния атмосферы

Резонансов, действующих на данный объект, не было выявлено, это отражает и динамика объекта, которая показывает, что параметр MEGNO осцилирует около нуля, как в случае действия светового давления, так и без него.

При дальнейшем рассмотрении объектов, влияние атмосферы рассмотрено не будет.

Рассмотрим следующий объект YUNHAI-2 1 (43909), который подвержен влиянию вековых резонансов со средним движением Солнца (рисунок 52).

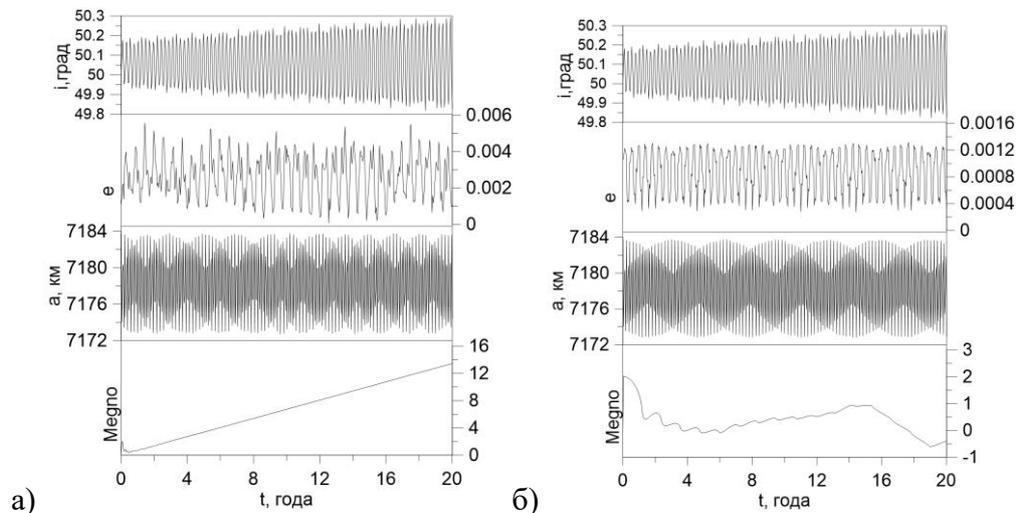
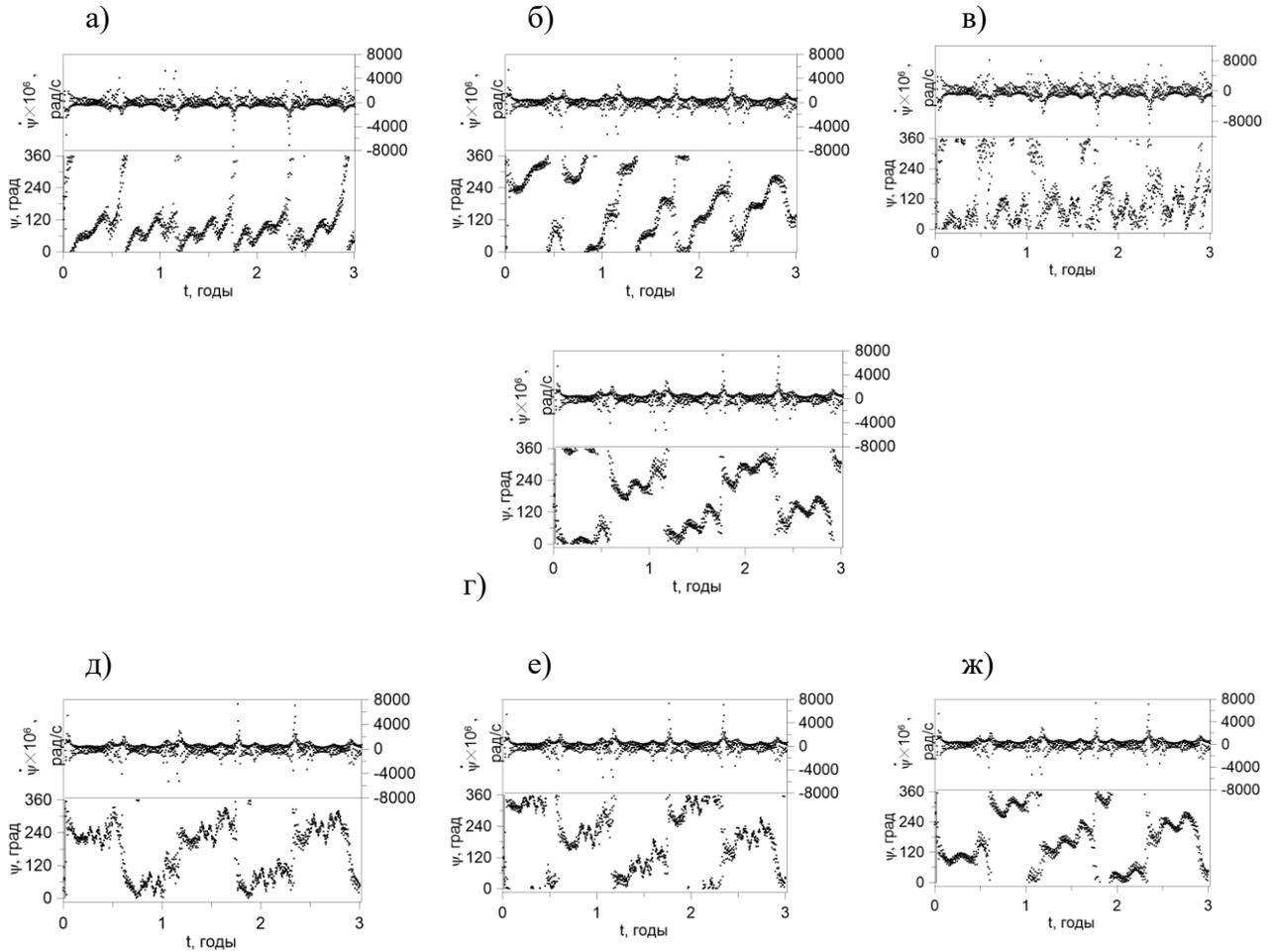


Рисунок 52 — Эволюция элементов объекта YUNHAI-2 1 (43909): а) с учетом светового давления; б) без учета светового давления

Объект YUNHAI-2 1 (43909), динамика которого представлена на рисунке 52, подвержен влиянию неустойчивых резонансов при воздействии светового давления, а именно: два резонанса со средним движением Солнца (рисунки 53а, 53б), один резонанс со средним движением Луны (рисунок 53в) и по три апсидально-нодальных резонанса с прецессией орбиты Солнца (рисунок 53г) и Луны (рисунки 53д, 53е, 53ж).



а) резонанс со средним движением Солнца $\dot{M}'_S - \dot{\omega} - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S)$, б) резонанс со средним движением Солнца $\dot{M}'_S + \dot{\omega} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S)$, в) резонанс со средним движением Луны $\dot{M}'_L - 2\dot{\omega} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L)$, г) апсидально-нодальные резонансы, связанные с прецессией орбиты Солнца $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) + \dot{\omega} - \dot{\omega}'_S$, $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) + \dot{\omega} + \dot{\omega}'_S$, $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) + \dot{\omega}$; апсидально-нодальные резонансы, связанные с прецессией орбиты Луны: д) $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) + \dot{\omega} - \dot{\omega}'_L$, е) $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) + \dot{\omega} + \dot{\omega}'_L$, ж) $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) + \dot{\omega}$

Рисунок 53 — Резонансные соотношения и критические аргументы резонансов, действующих на объект YUNHAI-2 1 (43909) совместно со световым давлением

При отсутствии влияния светового давления, в динамике объекта YUNHAI-2 1 (43909) численным методом не выявлено действие резонансов.

Несмотря на то, что, численная методика более точна, чем аналитическая, она имеет особенности при малых эксцентриситетах. Эта особенность проявляется в резком изменении

резонансных соотношений и критических аргументов. На рисунке 53 такие неточности определяются выбросами с большими значениями резонансных соотношений. В таких случаях совместно с численным методом, резонансные характеристики были получены и аналитическим методом (рисунок 54). Аналитическая методика не восприимчива к световому давлению, поэтому с ним и без него картина резонансных характеристик одинакова.

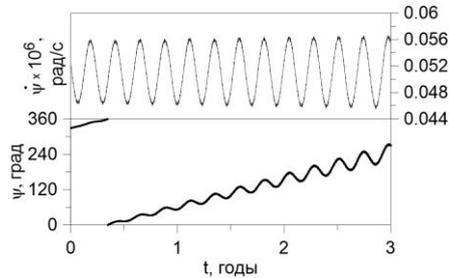


Рисунок 54 — Резонансное соотношение и критический аргумент резонанса $\dot{M}'_s + \dot{\omega} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}')$ со средним движением Солнца, действующий на объект YUNHAI-2 1 (43909), полученный аналитическим методом

Без учета светового давления эксцентриситет объекта более приближен к нулю и имеет меньшую амплитуду колебаний. В этом случае, численная методика дает сильные искажения и не позволяет выявить вековые резонансы, а аналитическая методика выявляет один устойчивый резонанс, представленный на рисунке 54.

Сравнивая графики орбитальной эволюции объекта с учетом (рисунок 52а) и без учета светового давления (рисунок 52б), можно заметить, что они отличаются поведением эксцентриситета и параметра MEGNO. На рисунке 52а, параметр MEGNO быстро растет и становится больше 2, а амплитуда эксцентриситета вырастает практически в 6 раз, по сравнению с объектом без светового давления (рисунок 52б). Это можно объяснить совместным действием большого количества неустойчивых резонансов и светового давления.

Причина, почему световое давление выявляет вековые резонансы и усиливает их действие, по всей видимости, кроется в средней долготе Солнца, которая, при учете светового давления, вступает в резонанс с критическим аргументом векового резонанса со средним движением Солнца. Добавление средней долготы Солнца к критическому аргументу возмущающей функции можно описать математически. Пользуясь теорией [11], введем в гамильтониан маятниковой системы влияние светового давления, через квадрат эксцентриситета. Получим следующую формулу:

$$H = \frac{-\mu^2}{(2L^2)} - \dot{\Theta}L + \frac{F}{L^6} \cos(2\psi - 2\psi_0) - \frac{G}{L^6} (\cos(2\psi + \lambda_{\odot} - 2\psi_0 + \delta) + \cos(2\psi - \lambda_{\odot} - 2\psi_0 - \delta))$$

Здесь нас интересует только аргумент косинуса, который, при учете светового давления, не только расслаивается на две компоненты, но и содержит в себе $\pm\lambda_{\odot}$ - среднюю долготу Солнца.

Проверка данной гипотезы для объекта YUNHAI-2 1 (43909) показала, что влияние вековых резонансов действительно зависит от средней долготы Солнца, которая привносится при учете светового давления (рисунок А.30, где i – номер резонанса из таблицы 2).

Следующий объект COSMOS 2437 (32954) (рисунок 55) также подвержен действию множества неустойчивых резонансов. Отличает этот объект от предыдущего, что при отсутствии светового давления, некоторые неустойчивые резонансы сохраняют свое действие.

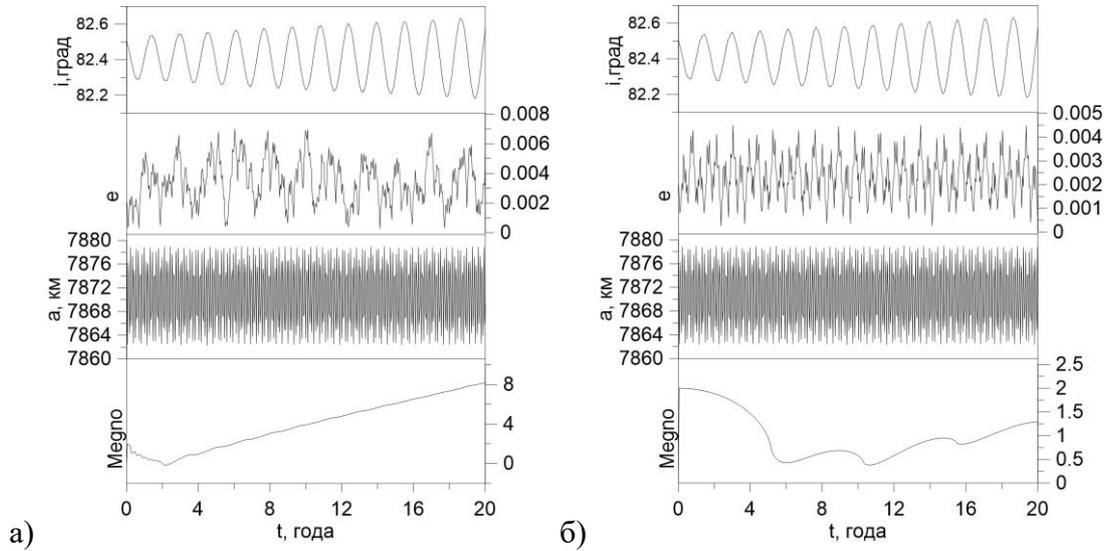
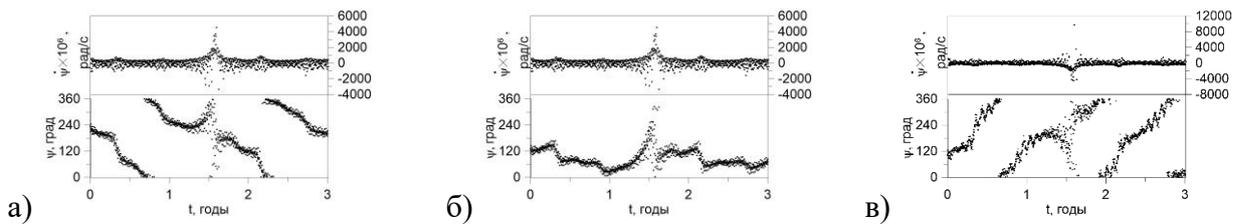


Рисунок 55 — Эволюция элементов объекта COSMOS 2437 (32954): а) с учетом светового давления; б) без учета светового давления

На рисунке 55 представлена динамика объекта COSMOS 2437 (32954) под действием светового давления и без него. Рисунки 55а и 55б значительно отличаются только поведением параметра MEGNO.

На объект со световым давлением действует два неустойчивых резонанса со средним движением Солнца и один апсидально-нодальный резонанс, связанный с прецессией орбиты Луны (рисунок 56).



Резонансы со средним движением Солнца: а) $\dot{M}'_S + \dot{\omega}$, б) $\dot{M}'_S + \dot{\omega} - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S)$; апсидально-нодальный резонанс, связанный с прецессией орбиты Луны: в) $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - \dot{\omega} - \dot{\omega}'_L$

Рисунок 56 — Характеристики резонансов, действующих на объект COSMOS 2437 (32954) совместно со световым давлением

Совместное влияние неустойчивых резонансов и светового давления ведет к хаотизации движения, что и определяет параметр MEGNO, который становится больше 2 (рисунок 55а).

При отсутствии влияния светового давления, на объект COSMOS 2437 (32954) в динамике объекта проявляются только два неустойчивых резонанса со средним движением

Солнца (рисунок 57). Параметр MEGNO остается меньше 2 (рисунок 55б) и даже действие двух неустойчивых резонансов не приводит к хаотизации движения.

Поведение колебаний амплитуды эксцентриситета, без влияния светового давления (рисунок 55б), практически аналогично поведению с его учетом (рисунок 55а). В этих двух случаях сохраняют свое действие и неустойчивые резонансы со средним движением Солнца.

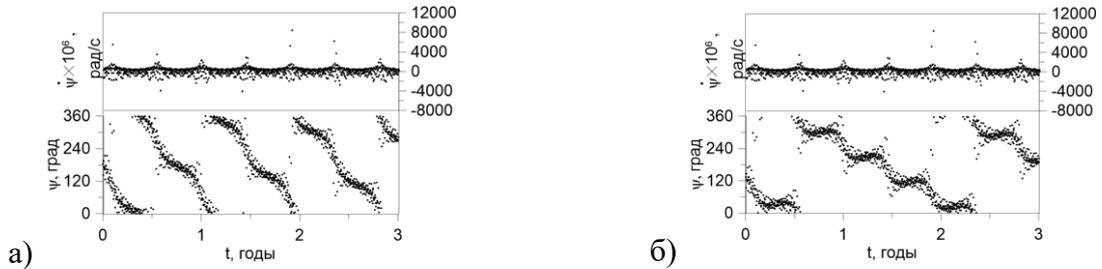


Рисунок 57 — Резонансные соотношения и критические аргументы резонансов, действующих на объект COSMOS 2437 (32954) без учета светового давления: резонансы со средним движением Солнца: а) $\dot{M}'_S + \dot{\omega}$, б) $\dot{M}'_S + \dot{\omega} - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S)$

Так как объект имеет малый эксцентриситет и отмечаются выбросы неточностей резонансных характеристик, выявление резонансных характеристик было произведено аналитическим методом (рисунок 58), который не выявил ни одного из резонансов приведенных на рисунках 56 и 57, но выявил резонанс $\dot{M}'_S + 2(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S)$ со средним движением Солнца.

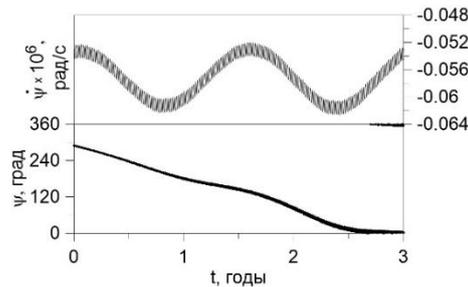


Рисунок 58 — Резонансные соотношения и критические аргументы резонанса, действующих на объект COSMOS 2437 (32954) $\dot{M}'_S + 2(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S)$

Полностью отбрасывать численную методику в этом случае не стоит, так как на участках, где нет выбросов, она может показывать достаточно точные результаты.

Приведем пример вековых резонансов со скоростью движения Солнца при добавлении и вычитании средней долготы Солнца (рисунок А.31). Из рисунка видно, что добавление или вычитание средней долготы Солнца может как усиливать, так и подавлять влияние вековых резонансов со средним движением Солнца.

Если сравнить два рассмотренных объекта YUNHAI-2 1 (43909) (рисунок 52) и COSMOS 2437 (32954) (рисунок 55), можно отметить, что объекты подвержены влиянию множества неустойчивых резонансов при действии светового давления. В случаях, когда световое давление

не действует, в динамике объекта YUNHAI-2 1 не проявляется действие и резонансов со средним движением Солнца, а амплитуда колебаний эксцентриситета становится меньше почти в 6 раз. Объект COSMOS 2437, напротив, остается под влиянием резонансов со средним движением Солнца и его амплитуда колебаний эксцентриситета почти не изменяется при отсутствии светового давления.

Рассмотрим несколько случаев, где на объект не действуют резонансы со средним движением Солнца. Сравнение эволюции элементов орбиты объекта COSMOS 2251 DEB(35824) для случаев действия светового давления и без него (рисунок 59), показывает, что отличается только динамика параметра MEGNO. При учете светового давления, параметр MEGNO растет быстро и становится больше 2. Без учета светового давления, параметр MEGNO медленно убывает и остается меньше 1.

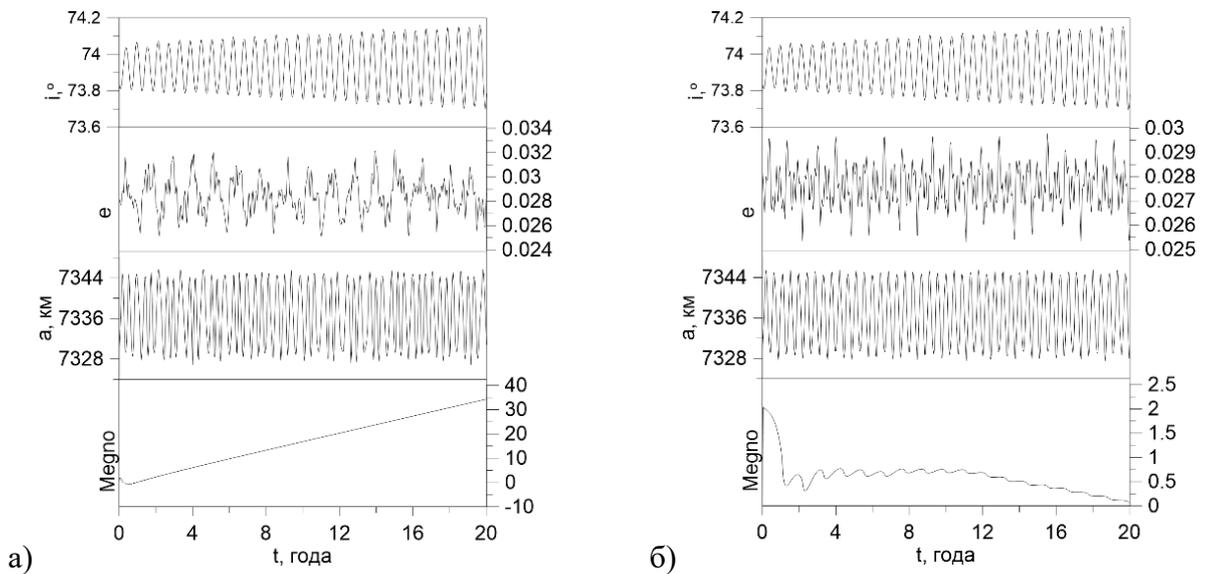
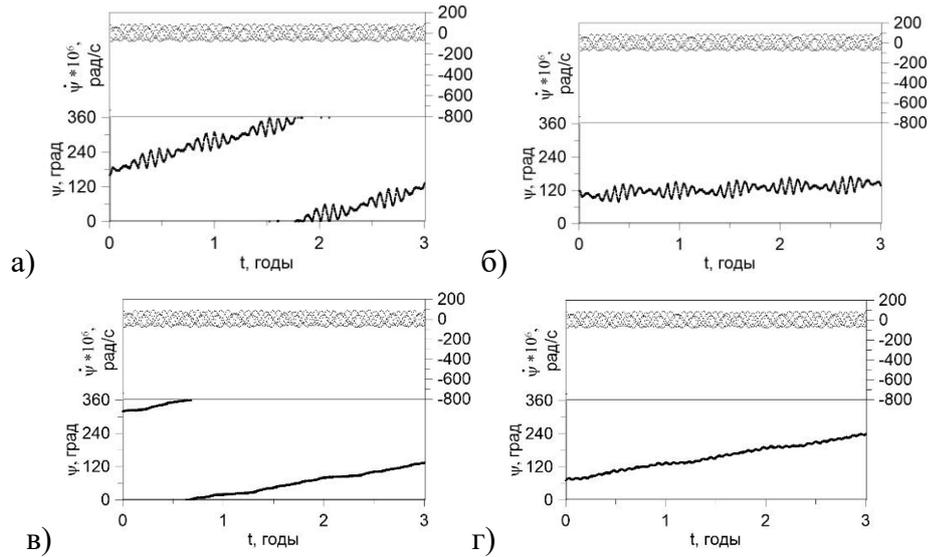


Рисунок 59 — Эволюция элементов объекта COSMOS 2251 DEB(35824): а) с учетом светового давления; б) без учета светового давления

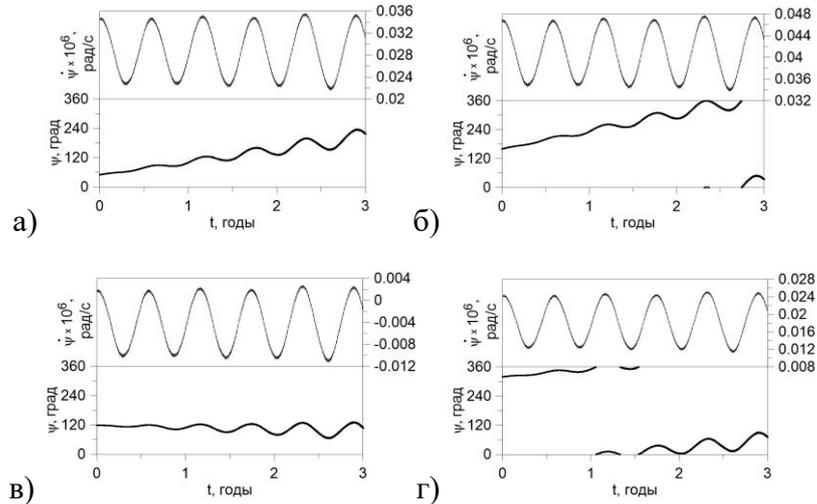
На объект действуют три апсидально-нодальных резонанса с прецессией орбиты Луны и три апсидально-нодальных резонанса с прецессией орбиты Солнца (рисунок 60). Эти резонансы аналогичны как для динамики в условиях действия светового давления, так и без него. Объект находится в одинаковых условиях действия резонансов для обоих случаев. Быстрый рост MEGNO на рисунке 59а обусловлен совместным действием светового давления и апсидально-нодальных резонансов. На остальные параметры движения объекта COSMOS 2251 DEB(35824) эти возмущения заметного влияния не оказывают.



Апсидально-нодальные резонансы, связанные с прецессией орбиты Луны: а) $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - \dot{\omega} + \dot{\omega}'_L$, б) $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - \dot{\omega} - \dot{\omega}'_L$, в) $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - \dot{\omega}$; апсидально-нодальные резонансы, связанные с прецессией орбиты Солнца: г) $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) - \dot{\omega} + \dot{\omega}'_S$, $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) - \dot{\omega} - \dot{\omega}'_S$, $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) - \dot{\omega}$

Рисунок 60 — Резонансные соотношения и критические аргументы резонансов, действующих на объект COSMOS 2251 DEB(35824)

Несмотря на то, что эксцентриситет у объекта COSMOS 2251 DEB(35824) не большой, выбросов не точностей резонансных характеристик не наблюдается. Аналитическая методика для этого случая выявляет те же резонансы, что и численная (рисунок 61).



Апсидально-нодальные резонансы, связанные с прецессией орбиты Луны: а) $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - \dot{\omega} + \dot{\omega}'_L$, б) $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - \dot{\omega} - \dot{\omega}'_L$, в) $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - \dot{\omega}$; апсидально-нодальные резонансы, связанные с прецессией орбиты Солнца: г) $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) - \dot{\omega} + \dot{\omega}'_S$, $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) - \dot{\omega} - \dot{\omega}'_S$, $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) - \dot{\omega}$

Рисунок 61 — Характеристики резонансов, действующих на объект LATINSAT A(27612), полученные аналитическим методом

Проверка влияния средней долготы Солнца на степень действия вековых резонансов представлена на рисунке А.32. Несмотря на то, что вековых резонансов, связанных со средним движением Солнца не выявлено, при добавлении и вычитании средней долготы Солнца, эти резонансы начинают проявляться. Это еще раз говорит о том, что именно средняя долгота выявляет вековые резонансы со средним движением Солнца.

Следующий объект №5 в таблице 5 не имеет собственного названия и является объектом космического мусора, поэтому его будем идентифицировать только по его номеру в каталоге NORAD – 81821 (рисунок 62).

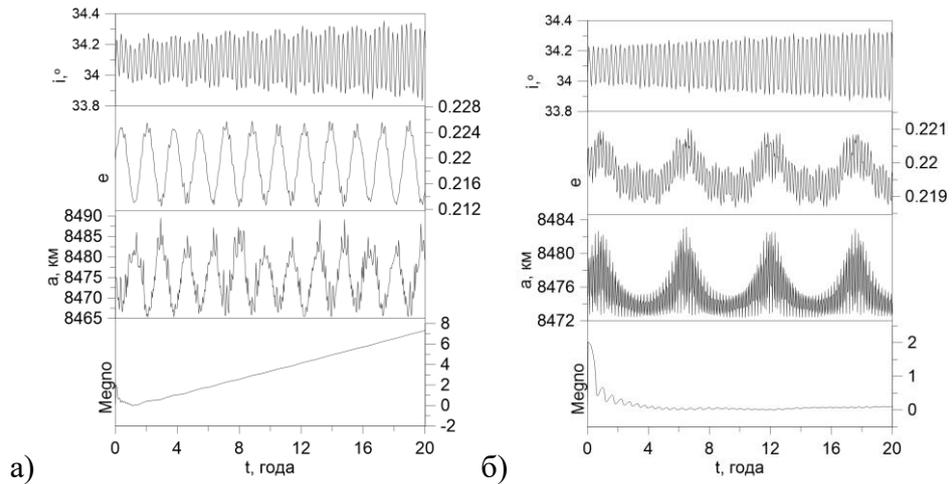


Рисунок 62 — Эволюция элементов объекта 81821: а) с учетом светового давления; б) без учета светового давления

Поведение эксцентриситета и большой полуоси объекта 81821 без светового давления (рисунок 62б) несколько отличается от поведения с его учетом (рисунок 62а). На обоих рисунках эксцентриситет и большая полуось имеют долгопериодические колебания, но без учета влияния светового давления структура этих колебаний значительно сложнее, хотя максимальные значения амплитуд совпадают. Кроме того, для случая, где учитывается световое давление, отмечается быстрый рост параметра MEGNO.

На объект 81821 действует один резонанс со средним движением Луны. На рисунке 63 представлено поведение критического аргумента и резонансного соотношения для случаев с учетом светового давления (рисунок 63а) и без него (рисунок 63б).

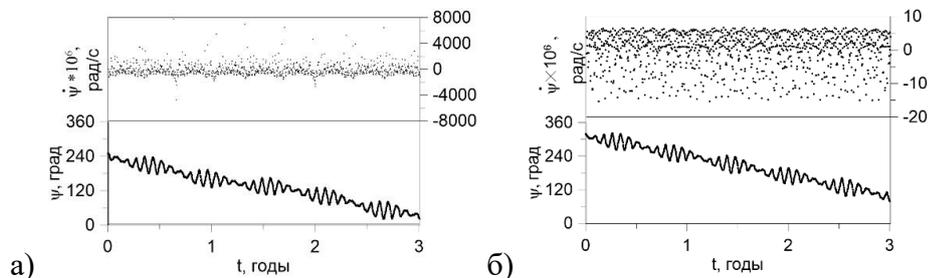


Рисунок 63 — Резонансное соотношение и критический аргумент объекта 81821 для резонанса, со средним движением Луны $\dot{M}_L - 2\dot{\omega} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}')$: а) с учетом светового давления, б) без учета светового давления

Здесь, как и для некоторых других описанных выше объектов, наличие светового давления отражается только на параметре MEGNO, а амплитуда колебаний эксцентриситета особых изменений не претерпевает.

Исследование действия средней долготы Солнца на вековые резонансы показал, что на объект 81821 не действуют вековых резонансов со скоростью движения Солнца, даже при добавлении или вычитании средней долготы.

Динамика следующего объекта LATINSAT A (27612) (рисунок 64) сравнимо с динамикой объекта COSMOS 2251 DEB (35824) (рисунок 57). Эволюция элементов для случаев действия светового давления и без него отличается только параметром MEGNO. При учете светового давления MEGNO растет и становится больше 2, но в отличие от COSMOS 2251 DEB (35824), примерно через 13 лет MEGNO начинает уменьшаться и стремиться к 0.

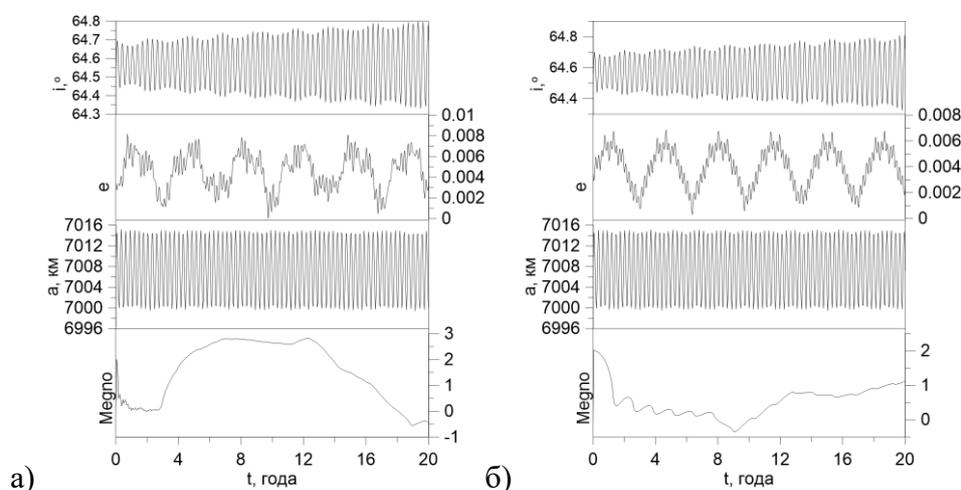
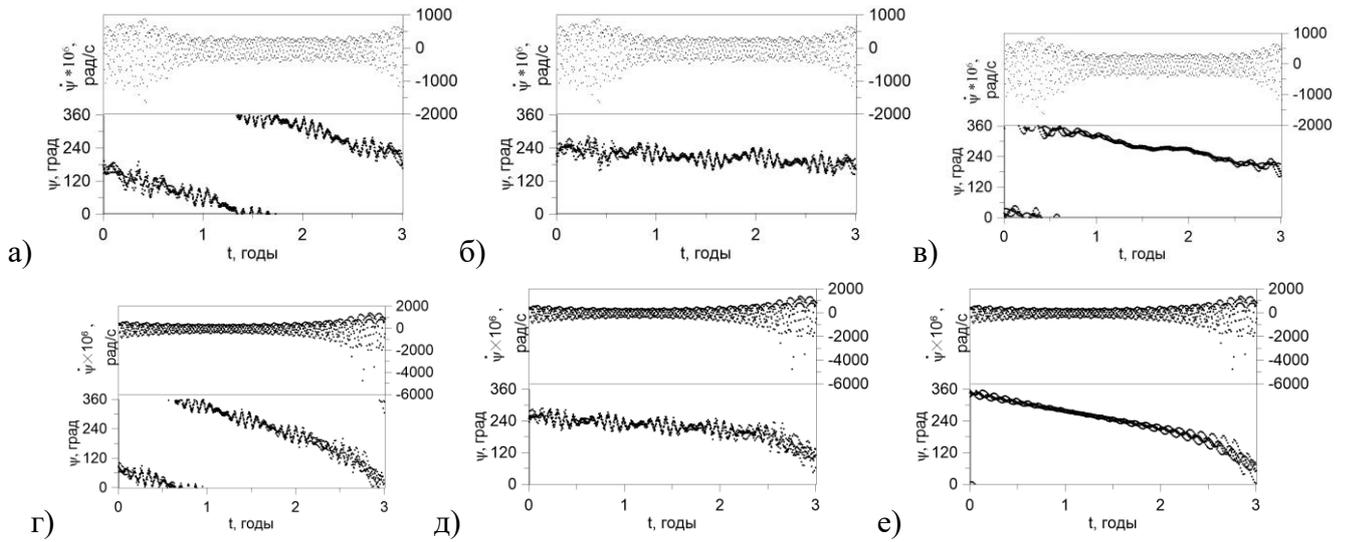


Рисунок 64 — Эволюция элементов объекта LATINSAT A(27612) а) с учетом светового давления; б) без учета светового давления

Резонансы, действующие на объект LATINSAT A(27612) представлены на рисунке 65. Как и для объекта COSMOS 2251 DEB (35824), на LATINSAT A(27612) действуют только апсидально-нодальные резонансы: два резонанса, связанные с прецессией орбиты Луны и три с прецессией орбиты Солнца. В обоих случаях (при учете светового давления и без него) действует одинаковый набор резонансов, поведение которых мало отличается между собой.



При учете светового давления: апсидально-нодальные резонансы с прецессией орбиты Луны: а) $\dot{\omega} - \dot{\omega}'_L$, б) $\dot{\omega} + \dot{\omega}'_L$; апсидально-нодальные резонансы с прецессией орбиты Солнца: в) $\dot{\omega} - \dot{\omega}'_S$, г) $\dot{\omega} + \dot{\omega}'_S$, д) и е) – аналогичные резонансы, действующие на LATINSAT A(27612) без учета светового давления

Рисунок 65 — Характеристики резонансов, действующих на объект LATINSAT A(27612)

Данные приведенные на рисунке А.33 показывают, что вычитание средней долготы из критического аргумента приводит к выявлению резонансов со средним движением Солнца для объекта LATINSAT A(27612).

Следующий рассматриваемый объект OPS 5712 (P/L 153) (2874) подвержен действию двух устойчивых резонансов, связанных со средним движением Солнца (рисунок 66).

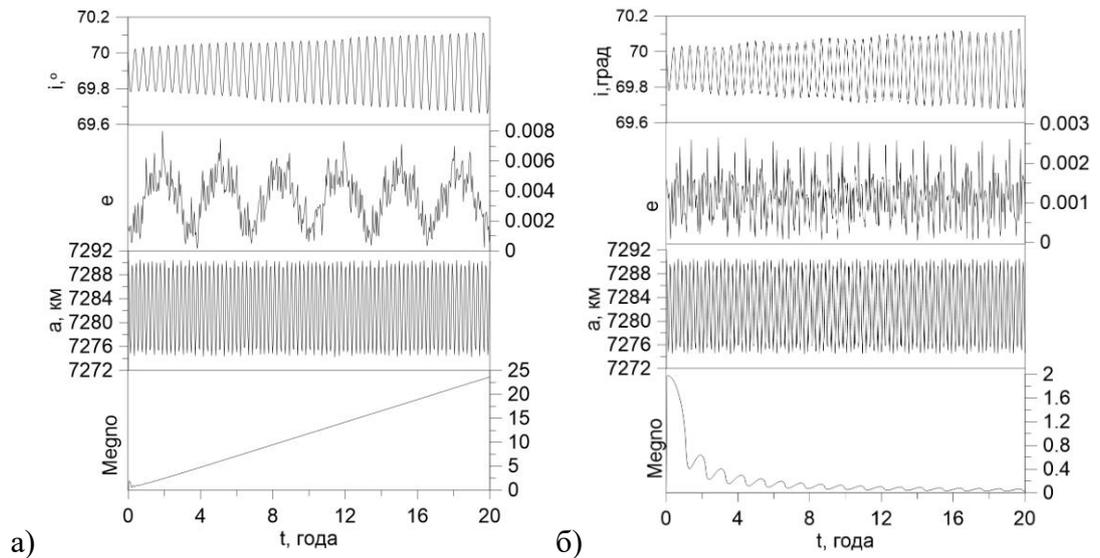
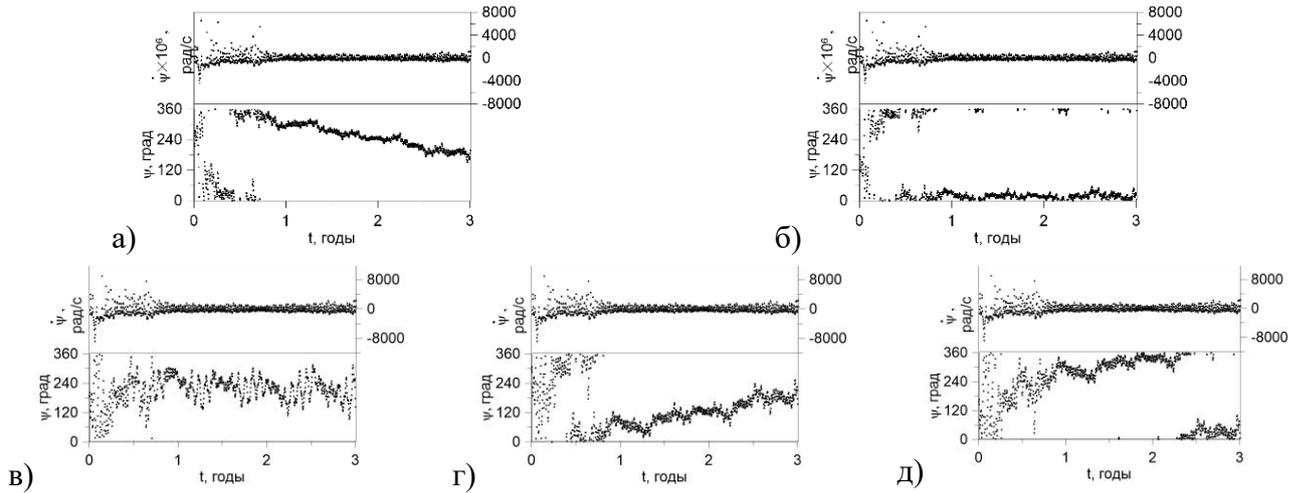


Рисунок 66 — Эволюция элементов объекта OPS 5712 (P/L 153) (2874): а) с учетом светового давления; б) без учета светового давления

Сравнивая графики орбитальной эволюции объекта с учетом (рисунок 66а) и без учета светового давления (рисунок 66б), можно заметить, что они отличаются поведением эксцентриситета и параметра MEGNO. При действии светового давления амплитуда колебаний

эксцентриситета увеличивается почти в три раза по сравнению с амплитудой колебаний эксцентриситета объекта без учета светового давления. Движение объекта при действии светового давления является хаотическим. Параметр MEGNO растет и становится больше 2.

Вековые резонансы, связанные со средним движением Солнца, под действием светового давления, представлены на рисунках 67а и 67б. Кроме того, при наличии влияния светового давления на объект, выявляется действие двух апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Луны (рисунки 67в и 67г) и одного с прецессией орбиты Солнца (рисунок 67д).



а) резонансы со средним движением Солнца $\dot{M}'_S + \dot{\omega}$, б) $\dot{M}'_S - \dot{\omega} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S)$, в) апсидально-нодальный резонанс, связанный с прецессией орбиты Луны $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - 2\dot{\omega} - 2\dot{\omega}'_L$ и г) $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - 2\dot{\omega}$ д) апсидально-нодальные резонансы с прецессией орбиты Солнца $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) - 2\dot{\omega} + 2\dot{\omega}'_S, (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) - 2\dot{\omega} - 2\dot{\omega}'_S, (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) - 2\dot{\omega}$

Рисунок 67 — Характеристики резонансов, действующих на объект OPS 5712 (P/L 153) (2874) с учетом светового давления

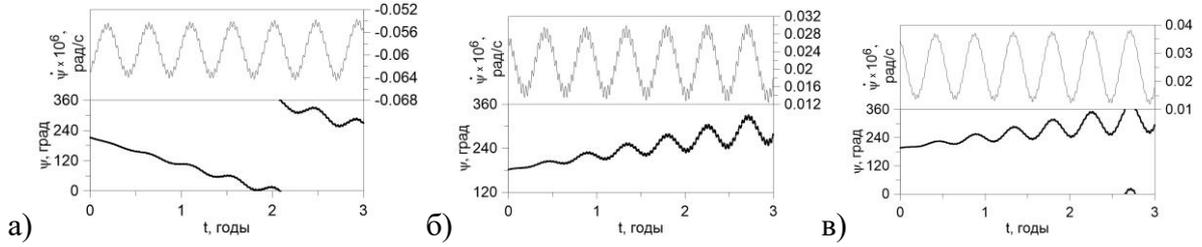
При отсутствии влияния светового давления, апсидально-нодальные резонансы не выявляются, а резонансы, связанные со средним движением Солнца, в численной методике действуют устойчиво при близких значениях резонансного соотношения к нулю (рисунки 68).



а) резонансы со средним движением Солнца $\dot{M}'_S + \dot{\omega}$, и б) $\dot{M}'_S - \dot{\omega} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S)$

Рисунок 68 — Характеристики резонансов, действующих на объект OPS 5712 (P/L 153) (2874) без учета светового давления

Аналитическим методом для этого случая было выявлено два резонанса со средним движением Солнца, что подтверждает наличие резонансов выявленных численным методом, и один апсидально-нодальный резонанс с прецессией орбиты Луны (рисунок 69).



а) резонансы со средним движением Солнца $\dot{M}'_S + \dot{\omega}$, б) $\dot{M}'_S - \dot{\omega} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S)$, в) апсидально-нодальный резонанс, связанный с прецессией орбиты Луны $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - 2\dot{\omega} - 2\dot{\omega}'_L$

Рисунок 69 — Характеристики резонансов, действующих на объект OPS 5712 (P/L 153) (2874)

Объект ORBCOMM FM01 (23545) на рисунке 70 также был изучен для двух случаев: с учётом действия светового давления и без него.

В случае, когда световое давление влияет на объект ORBCOMM FM01 (23545), в его динамике проявляется действие одного резонанса со средним движением Солнца (рисунок 71а). Кроме того, проявляют свое действие два неустойчивых апсидально-нодальных резонанса, связанных с прецессией орбиты Луны (рисунок 71б) и Солнца (рисунок 71в). Первые два года действие резонанса со средним движением Солнца (рисунок 71а) является устойчивым, а амплитуда эксцентриситета за это время вырастает практически в три раза (рисунок 70а), по сравнению с объектом без влияния светового давления (рисунок 70б).

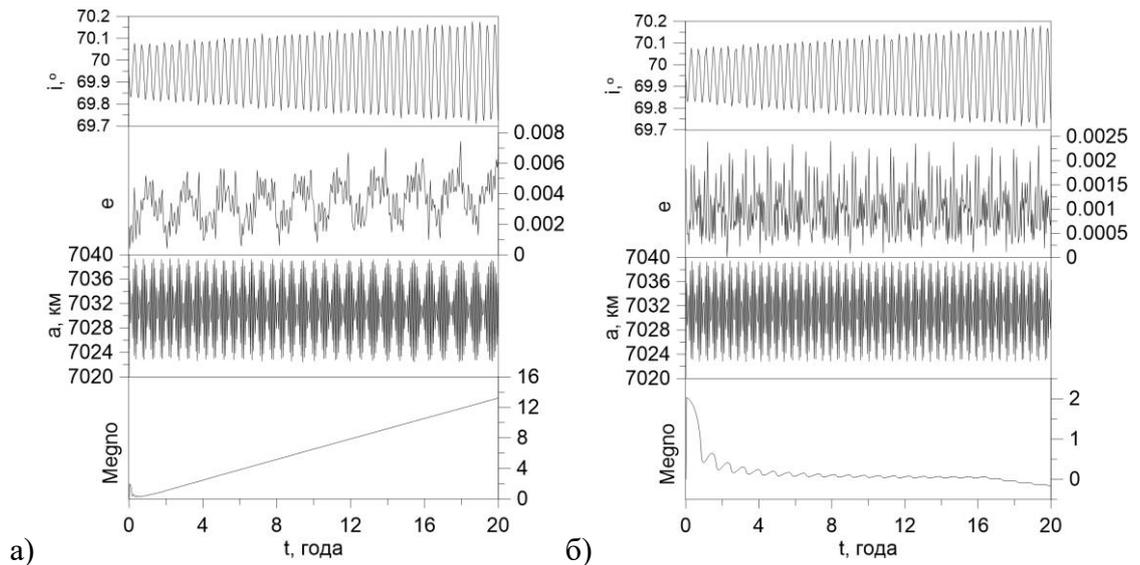
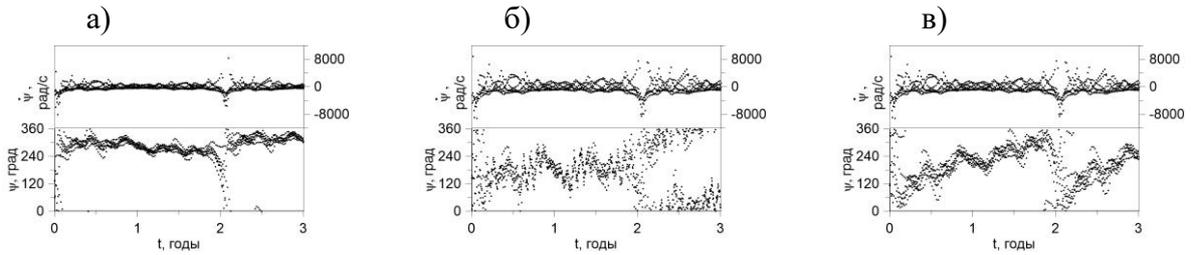


Рисунок 70 — Эволюция элементов объекта ORBCOMM FM01 (23545) а) с учетом светового давления; б) без учета светового давления.

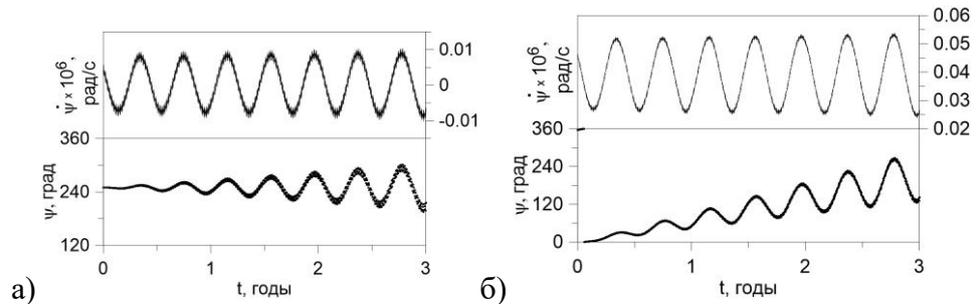


а) резонанс со средним движением Солнца $\dot{M}'_S - \dot{\omega} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S)$, б) апсидально-нодальный резонанс с прецессией орбиты Луны $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - 2\dot{\omega} - 2\dot{\omega}'_L$, в) апсидально-нодальные резонансы с прецессией орбиты Солнца $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) - 2\dot{\omega} + 2\dot{\omega}'_S$, $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) - 2\dot{\omega} - 2\dot{\omega}'_S$, $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) - 2\dot{\omega}$

Рисунок 71 — Характеристики резонансов, действующих на объект ORBCOMM FM01 (23545), полученные аналитическим методом

Параметр MEGNO, в случае влияния светового давления, растет, и становится больше 2, что говорит о хаотизации движения объекта. При отсутствии светового давления на объект, действие всех вековых резонансов не выявляется. Из вышесказанного можно сделать вывод, что световое давление, как бы, выявляет действие вековых резонансов. Кроме того, следует отметить, что совместное влияние светового давления и вековых резонансов приводит к росту амплитуды эксцентриситета и возникновению хаотичности в движении объектов.

Аналитическим методом в этом случае был выявлен только один резонанс со средним движением Солнца и три апсидально-нодальных резонанса с прецессией орбиты Солнца (рисунок 72).



а) резонанс со средним движением Солнца $\dot{M}'_S - \dot{\omega} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S)$, б) апсидально-нодальный резонанс с прецессией орбиты Луны $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - 2\dot{\omega} - 2\dot{\omega}'_L$

Рисунок 72 — Характеристики резонансов, действующих на объект ORBCOMM FM01 (23545) с учетом светового давления

Приведем пример резонансных характеристик объектов OPS 5712 (P/L 153) (2874) и ORBCOMM FM01 (23545) для случаев добавления и вычитания средней долготы Солнца в критические аргументы вековых резонансов со средним движением Солнца (рисунок А.34 и А.35). Данные, представленные на рисунках, показывают, что средняя

долгота Солнца может как усиливать, так и нивелировать степень влияния резонансов со средним движением Солнца.

3.9. Выводы

В результате проведенных исследований, можно сделать следующие выводы:

- Пятикомпонентная структура мультиплета орбитального резонанса подтверждается для большинства рассмотренных резонансов;
- Орбитальные резонансы могут способствовать появлению хаоса в движении объектов за счет наложения компонент собственного резонансного мультиплета и нескольких резонансов различных типов;
- Апсидально-нодальные резонансы пронизывают всю рассматриваемую область, причем резонансы, связанные с прецессией орбиты Луны более плотно покрывают рассматриваемую область орбитального пространства, чем аналогичные резонансы с прецессией орбиты Солнца;
- Нодальный резонанс устойчив и в случае прецессии орбиты Солнца, и в случае прецессии орбиты Луны на всем диапазоне больших полуосей при трех значениях наклона 0° , 90° и 180° ;
- Область резонанса 1:3 со скоростью вращения Земли отличается повышенной хаотизацией движения объектов;
- В областях резонансов 1:4, 1:5, 1:6, 1:7, 1:8 и 1:9 со скоростью вращения Земли хаотизация движения происходит по линии действия второй компоненты мультиплета орбитального резонанса, в результате наложения на нее резонансов различных типов;
- Наименее подвержены хаотизации движения области резонансов 1:10 и 1:11;
- Совместное действие светового давления и резонансов со средним движением Солнца действительно могут способствовать росту амплитуды колебаний эксцентриситета;
- Наличие резонансов со средним движением Солнца ведет к росту амплитуды колебаний эксцентриситета, даже если световое давление не действует. Световое давление только усиливает этот рост;
- Световое давление способствует более раннему проявлению действия вековых резонансов и способно менять структуру резонансных возмущений объекта;
- При отсутствии влияния резонансов со средним движением Солнца, совместное действие светового давления и других вековых резонансов не оказывает значительного влияния на амплитуду колебаний элементов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, основные результаты, представленные в диссертационной работе, можно сформулировать следующим образом:

- Апсидально-нодальные резонансы, связанные с прецессией орбиты Луны более плотно покрывают рассматриваемую область орбитального пространства, чем аналогичные резонансы, связанные с прецессией орбиты Солнца, которое является отражением прецессии орбиты Земли;

- Обращает на себя внимание тот факт, что резонанс $\underline{\dot{\Psi}}_{17,S,L} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L})$ устойчив и для случая прецессии орбиты Солнца, и для Луны на всем диапазоне больших полуосей при трех значениях наклона 0° , 90° и 180° . В орбитальной эволюции действие этого резонанса проявляется наличием долгопериодических колебаний в наклоне орбиты. Причем наибольшая амплитуда при одних и тех же значениях больших полуосей у объектов с наклоном орбиты 90° . Величина амплитуды растет с увеличением большой полуоси;

- Область резонанса 1:3 со скоростью вращения Земли отличается повышенной хаотизацией движения объектов. В этой области действует большое количество орбитальных и вековых резонансов. Наложение этих резонансов друг на друга и вводит к появлению хаоса в движении;

- В области резонансов 1:4, 1:5, 1:6, 1:7, 1:8 и 1:9 со скоростью вращения Земли хаотизация движения происходит по линии действия второй компоненты мультиплета орбитального резонанса, в результате наложения на нее резонансов различных типов. Несмотря на то, что третья и пятая компоненты мультиплета орбитальных резонансов 1:4, 1:6 и 1:8 неустойчивы практически во всей рассмотренной области, к хаосу в движении это не приводит;

- Наименее подвержены хаотизации движения области резонансов 1:10 и 1:11. Здесь третья и пятая компоненты мультиплета орбитального резонанса исчезают. Действует большое количество точечных вековых резонансов, особенно в экваториальных областях. Хаос в движении наблюдается на небольших участках, при наклонениях 60° и 135° , и при обратном движении в экваториальной области. Здесь преобладает действие вековых резонансов, наличие орбитальных резонансов не приводит к хаосу;

- Картина роста эксцентриситета практически повторяет картину действующих резонансов со средним движением Солнца в случаях, когда действует световое давление. Без влияния светового давления карта резонансов и амплитуды эксцентриситета отличаются друг от друга. Исходя из этого, можно сделать вывод, что совместное действие светового давления и резонансов со средним движением Солнца действительно могут способствовать росту амплитуды эксцентриситета;

- Рассматриваемая область обильно заселена различными спутниками и космическим мусором, поэтому все наблюдаемые объекты были нанесены на карты, представленные в данной работе. Положение реальных объектов было взято из каталога NORAD. Кроме того, было произведено исследование динамики восьми реальных объектов и результаты анализа представлены в работе. Из полученных данных можно сделать вывод, что наличие резонансов со средним движением Солнца ведет к росту амплитуды колебаний эксцентриситета, даже если

световое давление не действует. Световое давление только усиливает этот рост. Кроме того, световое давление способствует более раннему проявлению действия вековых резонансов. А совместное действие этих двух факторов ведет к хаотизации движения;

– При отсутствии влияния резонансов со средним движением Солнца, совместное действие светового давления и других вековых резонансов оказывает заметное влияние только на возникновение хаотичности движения, что отражает параметр $MEGNO$, который становится больше 2. Амплитуды колебаний других элементов существенно не изменяются в этом случае.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Morando M. B. Orbites de Resonance des Satellites de 24h// Bull. Astron. 1963. V.24. pp. 47.
2. Allan R.R. Resonance effects due to the longitude dependence of the gravitational field of a rotating primary// Planetary and Space Science. 1967a, V.15. pp. 53–76
3. Allan R.R. Satellites resonance with the longitude dependent gravity. II. Effects involving the eccentricity// Planetary and Space Science. 1967b, V.15. pp. 1829–1845
4. Blitzer L. Synchronous and Resonant Satellite Orbits Associated with Equatorial Ellipticity// ARS Journal. 1963. V.32. pp.1016-1019
5. Garfinkel B. Formal Solution in the Problem of Small Divisors// Astron. Journal. 1966. V.71. pp.657-669
6. Gedeon G. S., Dial O. L. Along-track Oscillations of a Satellite due to Tesseral Harmonics// AIAA Journal 1967. V.5. 593-595
7. Лидов М.Л. Эволюция искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений от внешнего тела // Искусственные спутники Земли. 1961. Т.8. С. 5– 45.
8. Cook G.E. Luni-Solar Perturbations of the Orbit of an Earth Satellite // Geophys. J. 1962. V.6. № 3. P. 271 – 291.
9. Кузнецов Э.Д., Захарова П.Е., Гламазда Д.В., Шагабутдинов А.И., Кудрявцев С.О. О влиянии светового давления на орбитальную эволюцию объектов, движущихся в окрестности резонансов низких порядков // Астрон. вест. 2012. Т. 46. № 6. С. 480 - 488. (Kuznetsov E.D., Zakharova P.E., Glamazda D.V., Shagabutdinov A.I., Kudryavtsev S.O. Light pressure effect on the orbital evolution of objects moving in the neighborhood of low-order resonances //Sol. Syst. Res. 2012. V. 46. № 6. P. 442-449.) DOI: 10.1134/S0038094612050073
10. Томилова И. В., Блинкова Е.В., Бордовицына Т. В. Особенности динамики объектов, движущихся в окрестности резонанса 1:3 с вращением Земли // Астрон. вест, 2019. Т 53. №5. С. 323–338 DOI: 10.1134/S0320930X19050074 // Переводная версия: Tomilova I.V., Blinkova E.V., Bordovitsyna T.V. Features of the dynamics of objects moving in the neighborhood of the 1:3 resonance with the Earth’s rotation//Sol.Syst.Res. 2019. Vol.53. №5.P.307-321. DOI: 10.1134/S0038094619050071
11. Valk S., Delsate N., Lemaître A., Carletti T., Global dynamics of high area-to-mass ratios GEO space debris by means of the MEGNO indicator // Adv. Space Res. 2009. V. 43. P. 1509 – 1526.
12. Cincotta P.M., Simó C. Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials – I // Astronomy and Astrophysics Supplement. 2000. V. 147. P. 205–228.
13. Cincotta P.M., Girdano C.M., Simo C., Phase space structure of multi-dimensional systems by means of the mean exponential growth factor of nearby orbits // Physica D. 2003. V. 182. P. 151 – 178.
14. Бордовицына Т.В., Александрова А.Г., Чувашов И.Н. Комплекс алгоритмов и программ для исследования хаотичности в динамике искусственных спутников Земли // Изв. вузов. Физика. 2010. № 8/2. С. 14 – 21.
15. Александрова А.Г. Исследование долговременной орбитальной эволюции объектов космического мусора геостационарной зоны: дис. ... канд. физ.-мат. наук 01.03.01 / Александрова А.Г. – СПб., 2012. – 117 с.

16. Rosengren A.J., Alessi E.M., Rossi A., Valsecchi G.B. Chaos in navigation satellite orbits caused by the perturbed motion// MNRAS. 2015. Vol. 449, Is. 4. P. 3522–3526.
17. Daquin J. et al The dynamical structure of the MEO region: long-term stability, chaos, and transport // *Celest Mech Dyn Astr.* Published online 02 January 2016.
18. Томилова И. В., Красавин Д. С., Бордовицына Т. В. Динамическая структура околоземного орбитального пространства в области резонанса 1:2 со скоростью вращения Земли // *Астрон. вест.*, 2020. Т 54. № 4. С. 337–348
19. Celletti. A., Gales C., Lhotka Ch. (INVITED) Resonances in the Earth's space environment//*Commun Nonlinear Sci Numer Simul.* 2020. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105185>
20. Breiter S. Lunisolar apsidal resonances at lowsatellite orbits // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 1999. V. 74. P. 253–274.
21. Breiter S. The prograde C7 resonance for Earth and Mars satellite orbits // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 2000. V. 77. P. 201–214.
22. Breiter S. On the coupling of lunisolar resonances for Earth satellite orbits // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 2001a. V. 80. P. 1–20.
23. Breiter S. Lunisolar resonances revisited // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 2001b. V. 81. P. 81–91.
24. Alessi E.M., Schettino G., Rossi A., Valsecchi G.B. Solar radiation pressure resonances in Low Earth Orbits// MNRAS. 2018. V. 473. P. 2407–2414
25. Belkin S.O., E.D. Kuznetsov Orbital flips due to solar radiation pressure for space debris in near-circular orbits// *Acta Astronautica* 2021. 178/ P. 360–369
26. Александрова А.Г., Авдюшев В.А., Попандопуло Н.А., Бордовицына Т.В. Численное моделирование движения околоземных объектов в среде параллельных вычислений// *Изв. вузов. Физика.* 2021. Т. 64. № 8. С. 168–175.
27. Александрова А.Г., Блинкова Е.В., Бордовицына Т.В., Попандопуло Н.А., Томилова И.В. Вековые резонансы в динамике объектов, движущихся в областях LEO–MEO околоземного орбитального пространства// *Астрон. вест.*, 2021. Т 55. № 3. С. 272–287 DOI: 10.31857/S0320930X21030014// Переводная версия: Aleksandrova A.G., Blinkova E.V., Bordovitsyna T.V., Popandopulo N.A., Tomilova I.V. Secular resonances in the dynamics of objects moving in LEO–MEO regions of near-earth orbital space//*Sol.Syst.Res.* 2021. Vol.55. №3. P.266-281. DOI: 10.1134/S0038094621030011
28. Мюррей К., Дермот С. Динамика Солнечной системы.– М.:Физматлит. 2010. 588 с.
29. Авдюшев В.А. Новый коллокационный интегратор для решения задач динамики. I. Теоретические основы // *Изв. вузов. Физика.* 2020. Т. 63. №. 11. С. 131–140
30. Vallado D.A., Crawford P., Hujsak R. Revisiting Spacetrack Report #3// *American Institute of Aeronautics and Astronautics.* 2006. P.88
31. Томилова И. В., Блинкова Е.В., Бордовицына Т. В. Особенности динамики объектов, движущихся в зонах орбитальных резонансов 1 : 4, 1 : 6 и 1 : 8 с вращением Земли// *Астрон. вест.*, 2021. Т 55. № 5. С. 427–443 DOI: 10.31857/S0320930X21040101// Переводная версия: Tomilova I.V., Blinkova E.V., Bordovitsyna T.V. Features of the dynamics of objects moving in the zones of

orbital resonances 1 : 4, 1 : 6, and 1 : 8 with the Earth's rotation//Sol.Syst.Res. 2021. Vol.55. №5. P.420-436. DOI: 10.1134/S0038094621040092

32. Блинкова Е.В., Бордовицына Т. В. Исследование динамики области орбитальных резонансов высоких порядков// Вестник ТГУ. Матем. и Механ., 2022. № 79. С. 58-68 DOI: 10.17223/19988621/79/5

33. Блинкова Е.В., Бордовицына Т. В. Исследование совместного влияния светового давления и вековых резонансов, связанных со средним движением Солнца, на динамику объектов в области LEO// Астрон. вест, 2022. Т 56. № 4. С. 219–236 DOI: 10.31857/S0320930X22040028// Переводная версия: Blinkova E.V., Bordovitsyna T.V. Investigation of the joint effect of light pressure and secular resonances associated with the mean motion of the Sun on the dynamics of objects in the LEO region// Sol.Syst.Res. 2022. Vol.56. №4. P.207-224. DOI: 10.1134/S0038094622040025

34. Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы: учеб. пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2016. – 254 с.

35. Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука. 1977. 360 с

36. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы / Г. Н. Дубошин - М.:Наука. 1968. – 800 с.

37. Бордовицына Т.В., Томилова И.В., Чувашов И.Н. Вековые резонансы как источник возникновения динамической хаотичности в долговременной орбитальной эволюции неуправляемых объектов спутниковых радионавигационных систем // Астрон. вестн. 2014. Т.48, № 4. С. 280 – 289.

38. Александрова А.Г., Бордовицына Т.В., Попандопуло Н.А., Томилова И.В. Новый подход к вычислению вековых частот в динамике околоземных объектов на орбитах с большими эксцентриситетами// Изв. вузов. Физика. 2020. Т. 63. № 1. С. 57–62.

39. Kozai, Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity // Astron.J. 1962.V. 67. P. 591 – 598.

40. Попандопуло Н.А., Александрова А.Г., Бордовицына Т.В. К обоснованию численно-аналитической методики выявления вековых резонансов // Изв. вузов. Физика. 2022. Т. 65, № 6. С. 47-52.

41. Авдюшев В.А. Коллокационный интегратор Lobbie в задачах орбитальной динамики// Астрон.вест. 2022. Т. 56. №. 1. С. 36-46

42. Чириков Б. В. Нелинейный резонанс. Учебное пособие. Новосибирск, НГУ, 1977. С. 82

43. Бордовицына Т.В, Томилова И.В. Особенности структуры вековых резонансов в динамике околоземных космических объектов // Изв. вузов. Физика, 2016, Т.59. № 3, С. 41–48.

44. Александрова А.Г., Бордовицына Т.В, Томилова И.В. Исследование влияния светового давления на динамику околоземных объектов на резонансных орбитах// Астрон. Вест. 2018. Т.52, № 5, С.447– 462

45. Александрова А.Г., Бордовицына Т.В, Александров В.Б. Исследование влияния светового давления на динамику околоземных объектов с обратным движением// Изв. вузов. Физика. 2019. Т. 62, № 3, С.86–91

ПРИЛОЖЕНИЕ А

(Справочное)

Дополнительные графические материалы

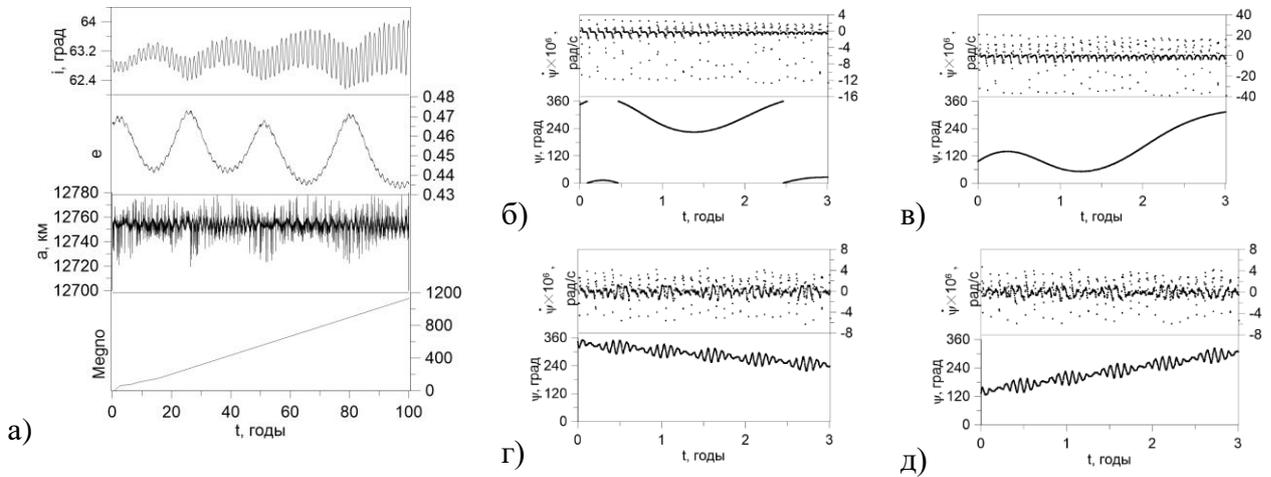


Рисунок А.1 — Динамические характеристики спутника TacSat4: а) Эволюция элементов орбиты, б) $\dot{\Phi}_2 = 1(\dot{\omega} + \dot{M}) + 6(\dot{\Omega} - \dot{\Theta})$, в) $\dot{\Phi}_3 = 1\dot{M} + 6(\dot{\omega} + \dot{\Omega} - \dot{\Theta})$, г) $\dot{\omega} - \dot{\omega}'_L$, д) $\dot{\omega} + \dot{\omega}'_L$.

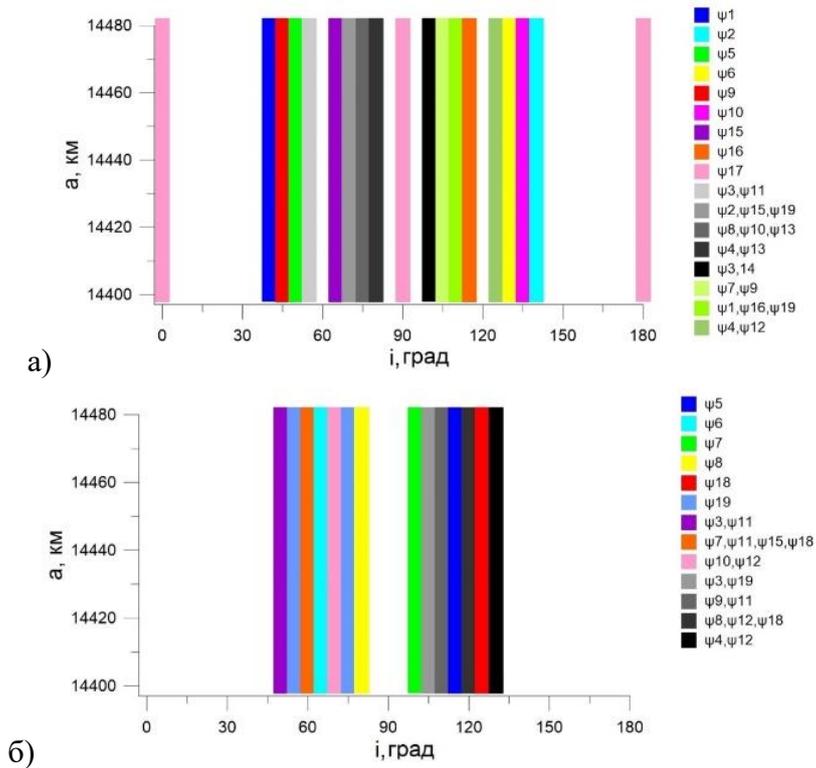


Рисунок А.2 — Распределение вековых апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Луны в области орбитального резонанса 1:5 со скоростью вращения Земли: а) все устойчивые резонансы, б) все неустойчивые резонансы.

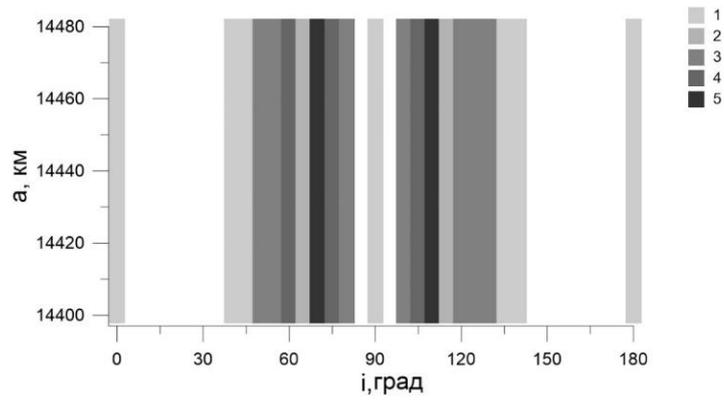


Рисунок А.3 — Количество наложений апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Луны, в области орбитального резонанса 1:5

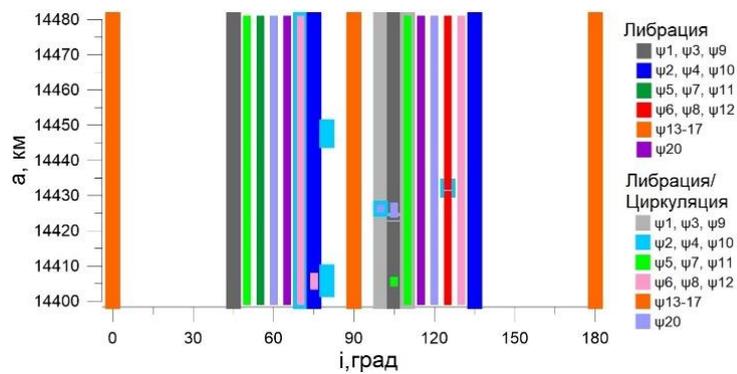


Рисунок А.4 — Распределение вековых апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Солнца в области орбитального резонанса 1:5 со скоростью вращения Земли

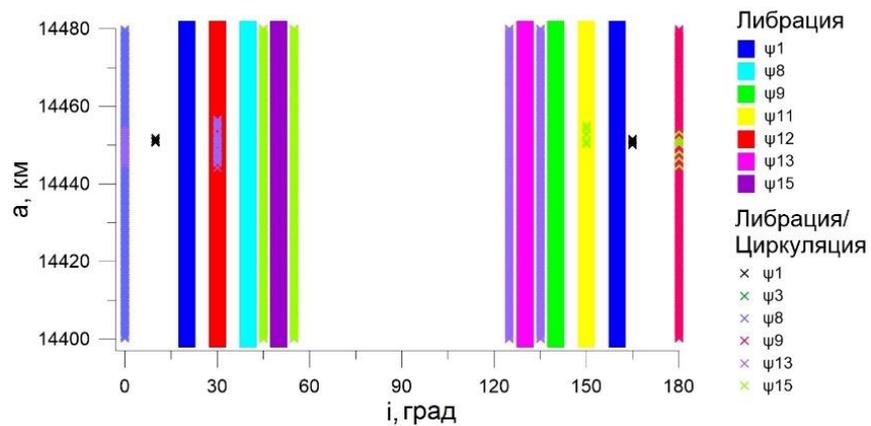


Рисунок А.5 — Распределение вековых резонансов, связанных со средним движением Солнца в области орбитального резонанса 1:5 со скоростью вращения Земли

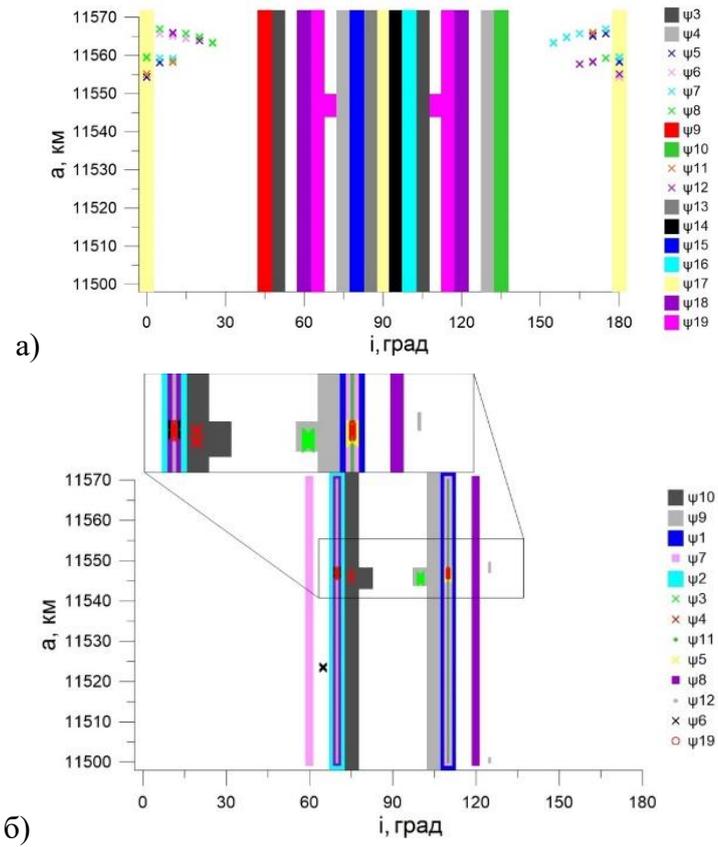


Рисунок А.6 — Распределение вековых апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Луны в области орбитального резонанса 1:7 со скоростью вращения Земли:
 а) все устойчивые резонансы, б) все неустойчивые резонансы.

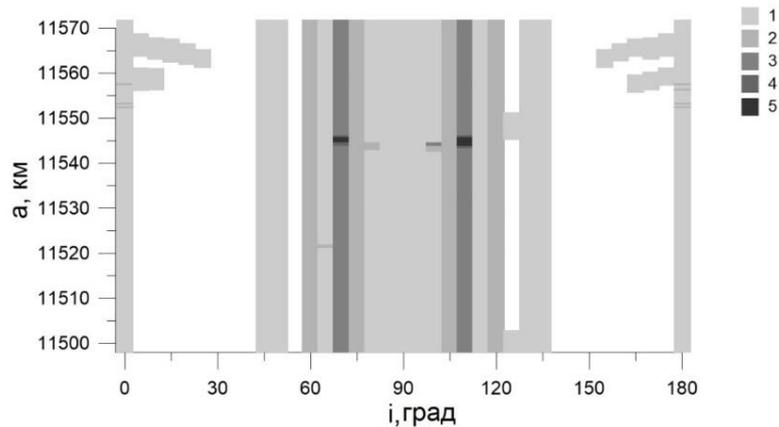


Рисунок А.7 — Количество наложений апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Луны, в области орбитального резонанса 1:7

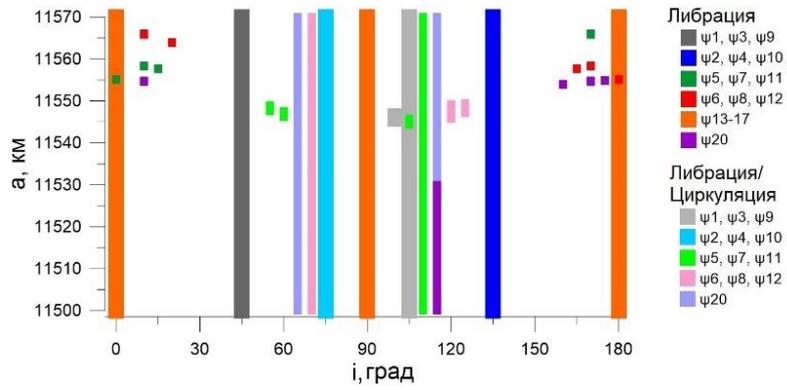


Рисунок А.8 — Распределение вековых апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Солнца в области орбитального резонанса 1:7 со скоростью вращения Земли

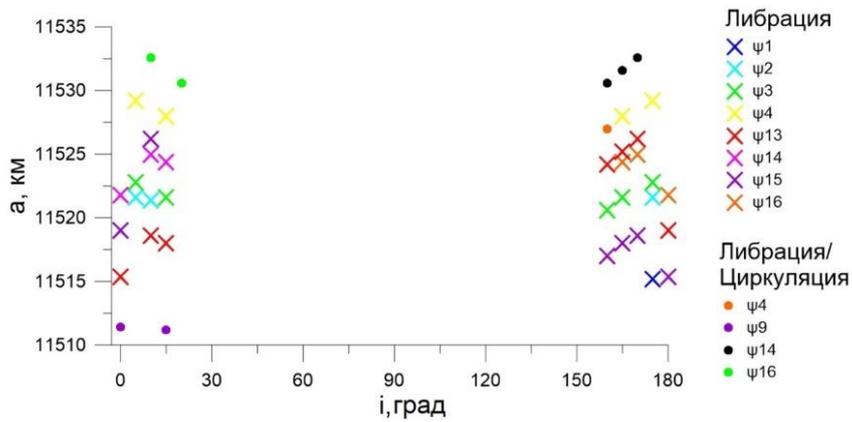


Рисунок А.9 — Распределение вековых резонансов, связанных со средним движением Луны в области орбитального резонанса 1:7 со скоростью вращения Земли

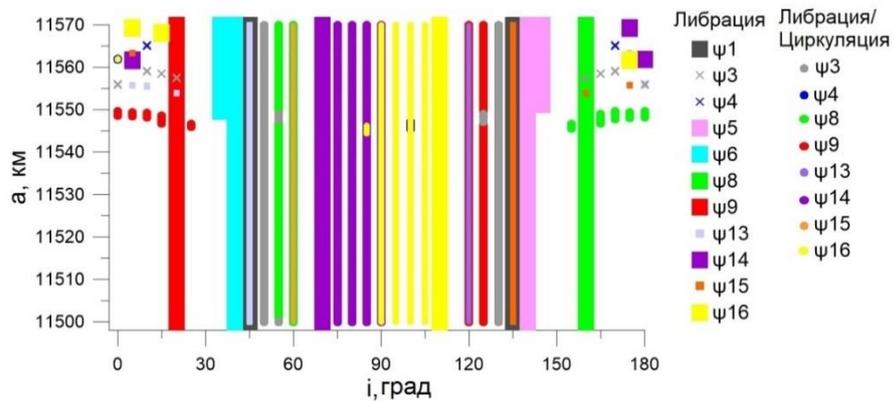


Рисунок А.10 — Распределение вековых резонансов, связанных со средним движением Солнца в области орбитального резонанса 1:7 со скоростью вращения Земли

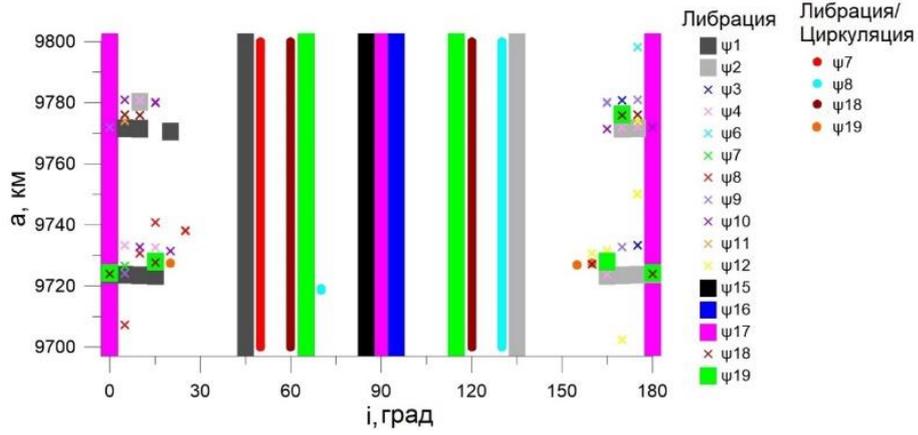


Рисунок А.11 — Распределение вековых апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Луны в области орбитального резонанса 1:9 со скоростью вращения Земли

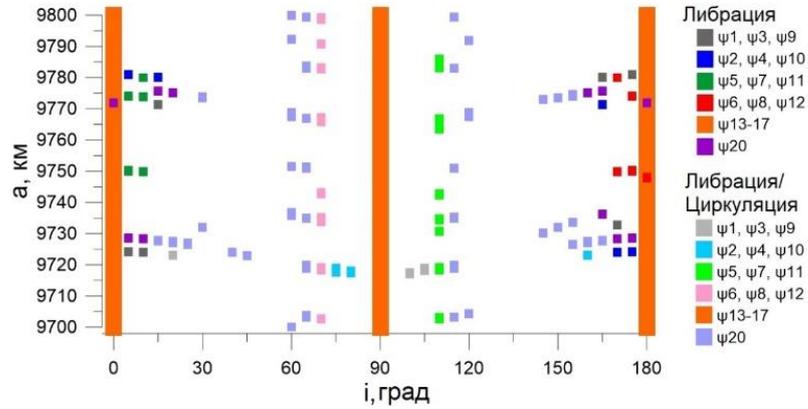


Рисунок А.12 — Распределение вековых апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Солнца в области орбитального резонанса 1:9 со скоростью вращения Земли

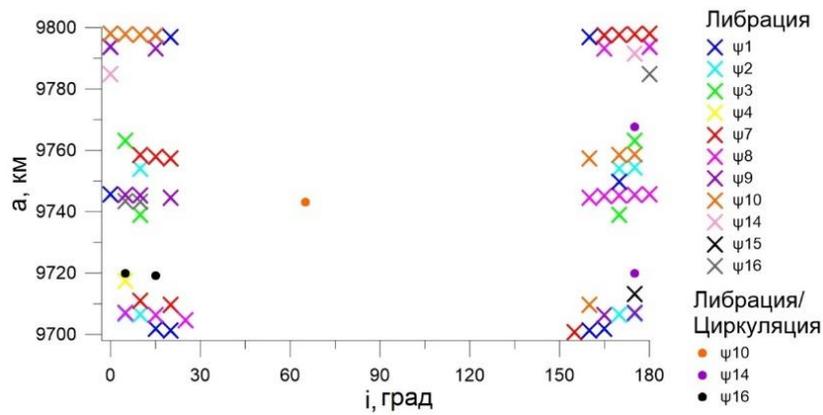


Рисунок А.13 — Распределение вековых резонансов, связанных со средним движением Луны в области орбитального резонанса 1:9 со скоростью вращения Земли

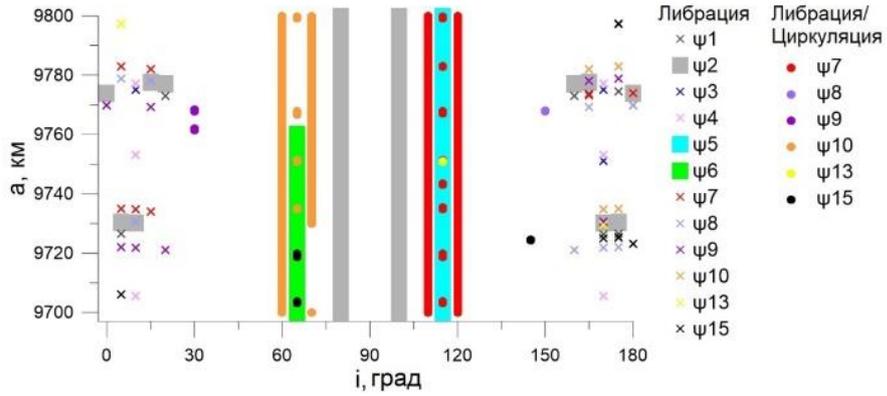


Рисунок А.14 — Распределение вековых резонансов, связанных со средним движением Солнца в области орбитального резонанса 1:9 со скоростью вращения Земли

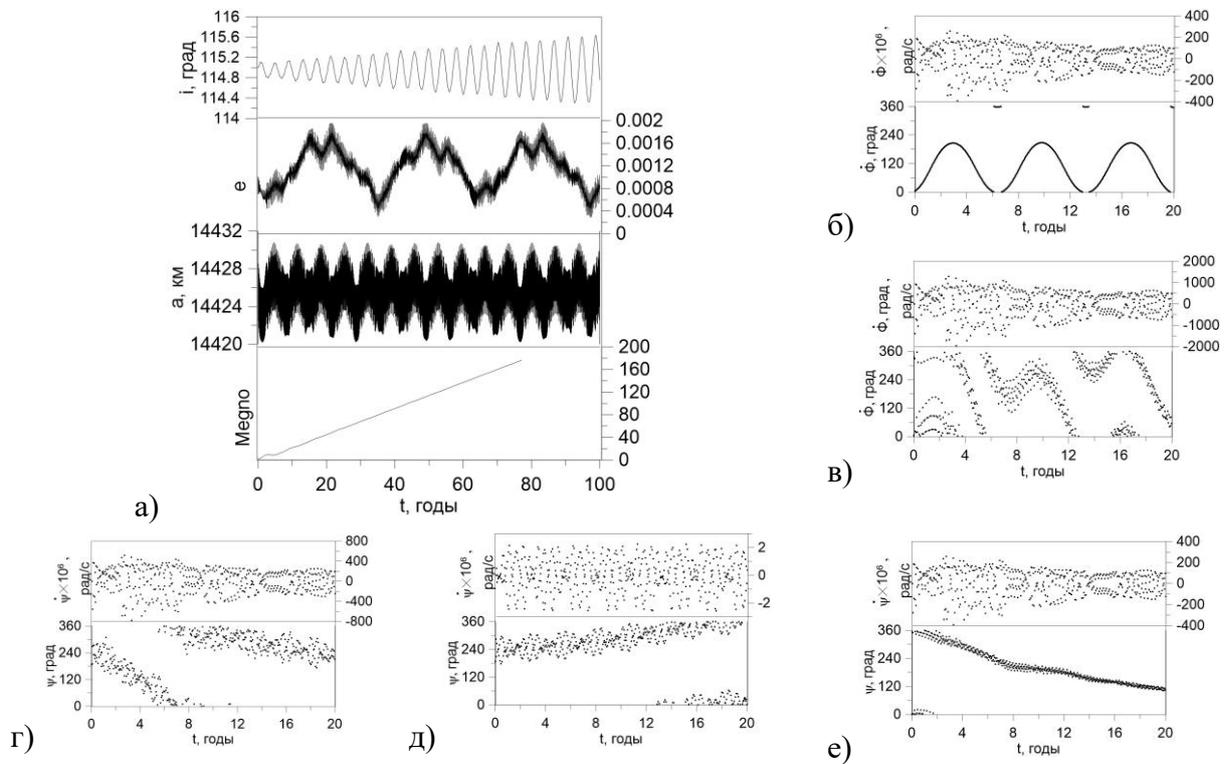


Рисунок А.15 — а) Эволюция элементов объекта, движущегося в области орбитального резонанса 1:5 и его резонансные характеристики: б) $\dot{\Phi}_2 = (\dot{\omega} + \dot{M}) + 5(\dot{\Omega} - \dot{\theta})$, в) $\dot{\Phi}_3 = \dot{M} + 5(\dot{\omega} + \dot{\Omega} - \dot{\theta})$, г) $\dot{\Psi}_{5,L} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) + 2\dot{\omega} - 2\dot{\omega}'_L$, д) $\dot{\Psi}_{16,L} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - 2\dot{\omega}'_L$, е) $\dot{\Psi}_{20,S,L} = \dot{\omega}$

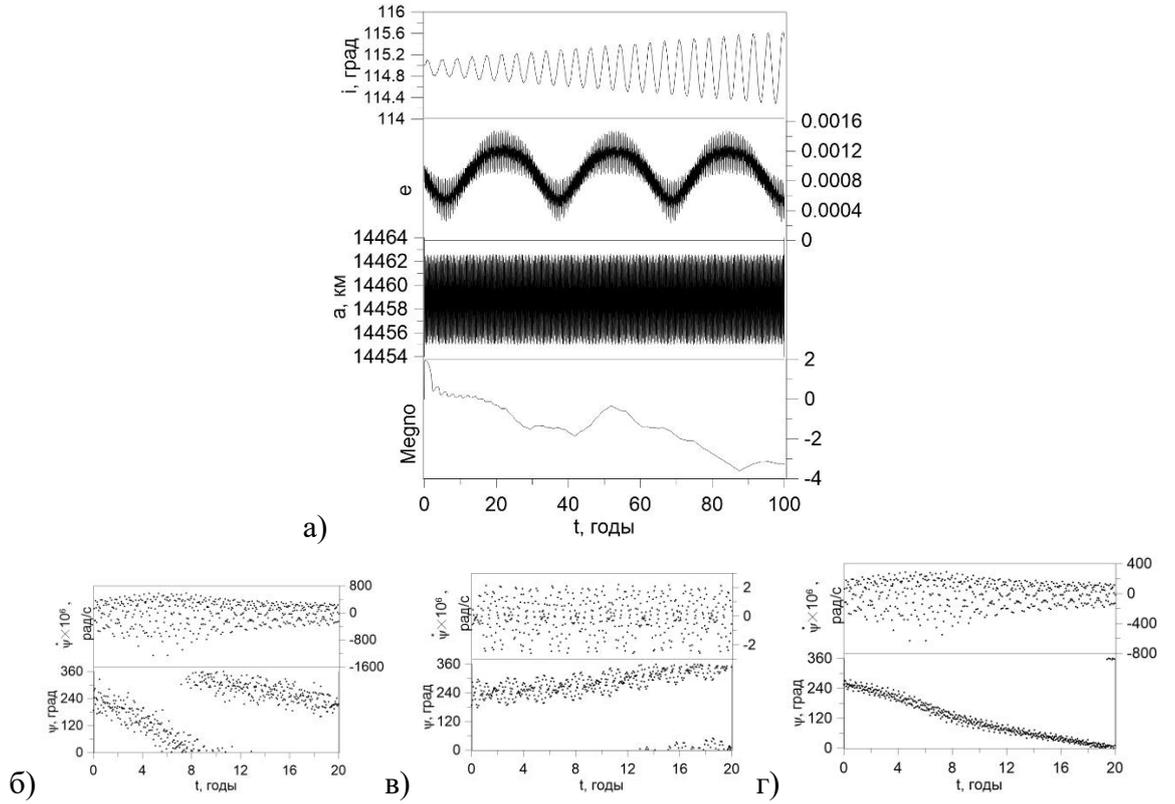


Рисунок А.16 — а) Эволюция элементов объекта, движущегося в области орбитального резонанса 1:5, но не подверженного его действию и его резонансные характеристики: б)

$$\psi_{5,L} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) + 2\dot{\omega} - 2\dot{\omega}'_L, \text{ в) } \psi_{16,L} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - 2\dot{\omega}'_L, \text{ г) } \psi_{20,S,L} = \dot{\omega}$$

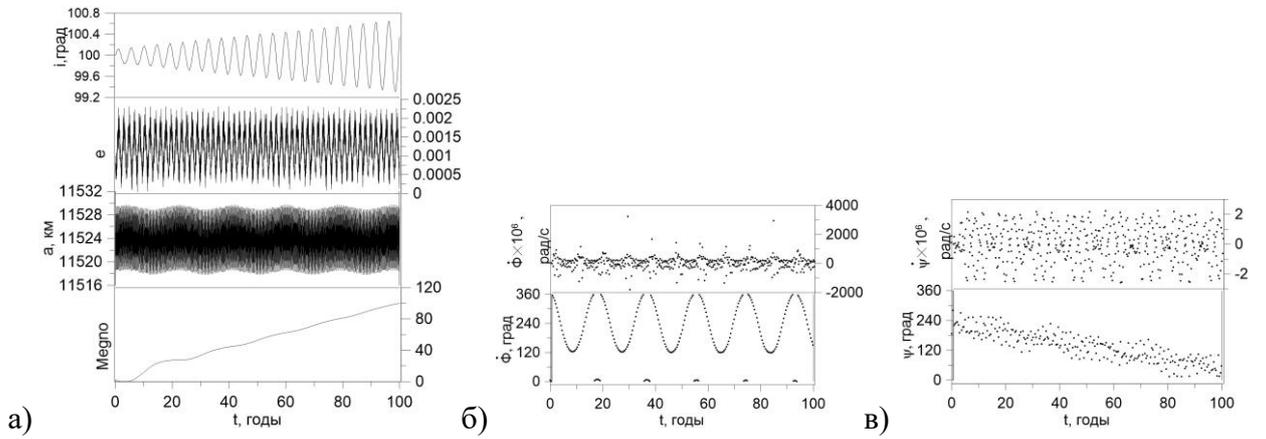


Рисунок А.17 — а) Эволюция элементов объекта, движущегося в области орбитального резонанса 1:7 и его резонансные характеристики: б) $\dot{\Phi}_2 = (\dot{\omega} + \dot{M}) + 7(\dot{\Omega} - \dot{\theta})$,

$$\text{в) } \psi_{16,L} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - 2\dot{\omega}'_L$$

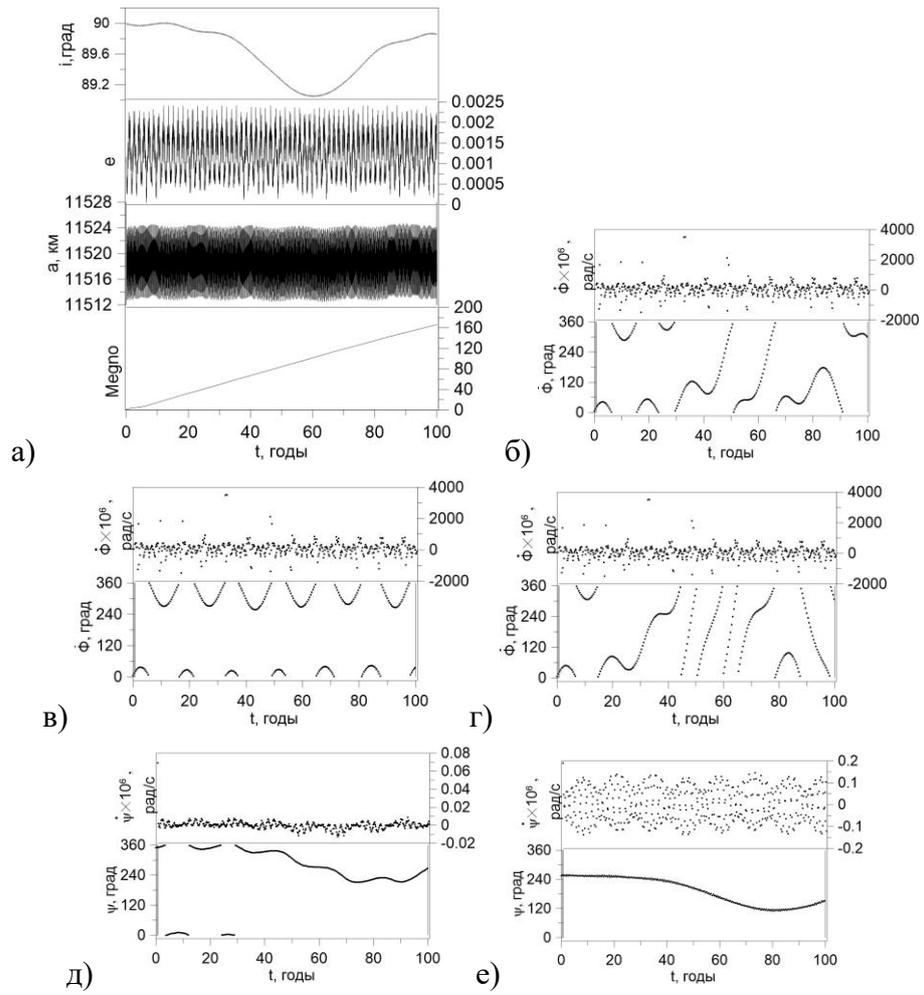


Рисунок А.18 — а) Эволюция элементов объекта, движущегося в области орбитального резонанса 1:7 и его резонансные характеристики: б) $\dot{\Phi}_1 = (\dot{M} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}) - 7\dot{\theta}$,

в) $\dot{\Phi}_2 = (\dot{\omega} + \dot{M}) + 7(\dot{\Omega} - \dot{\theta})$, г) $\dot{\Phi}_4 = (\dot{M} - \dot{\Omega} + \dot{\omega}) - 7\dot{\theta}$, д) $\underline{\underline{\Psi}}_{17,L} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L})$, е) $\underline{\underline{\Psi}}_{13-17,S}$

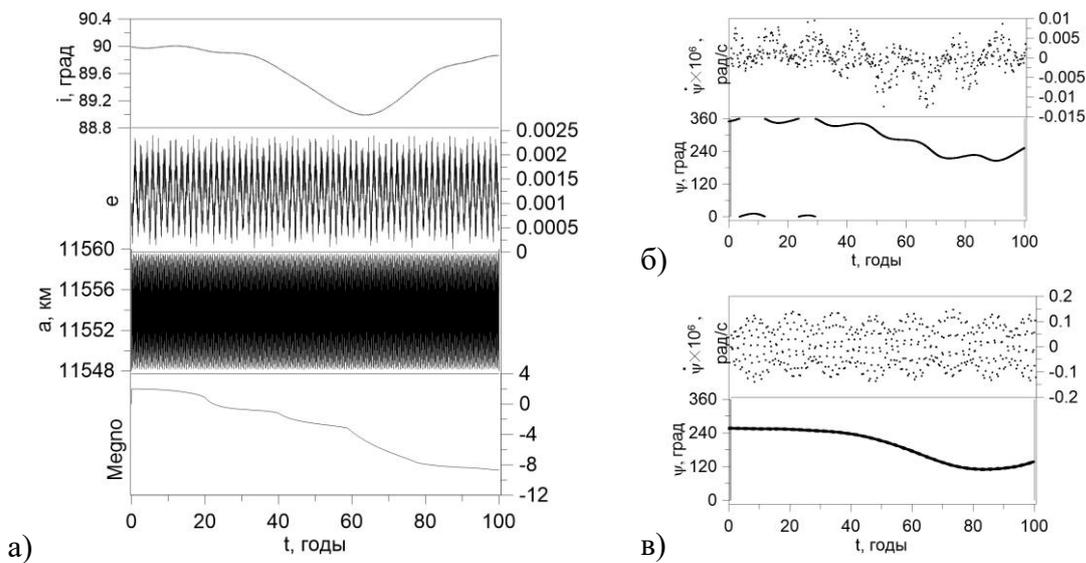


Рисунок А.19 — а) Эволюция элементов объекта, движущегося в области орбитального резонанса 1:7 и его резонансные характеристики: б) $\underline{\underline{\Psi}}_{17,L} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L})$, в) $\underline{\underline{\Psi}}_{13-17,S}$

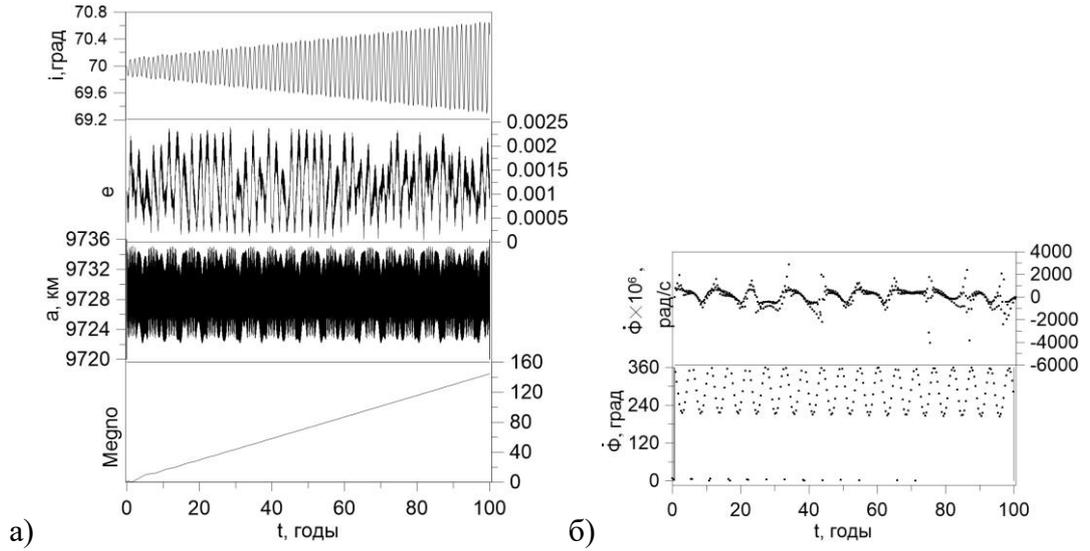


Рисунок А.20 — а) Эволюция элементов объекта, движущегося в области орбитального резонанса 1:9 и его резонансные характеристики: б) $\dot{\Phi}_2 = (\dot{\omega} + \dot{M}) + 9(\dot{\Omega} - \dot{\theta})$.

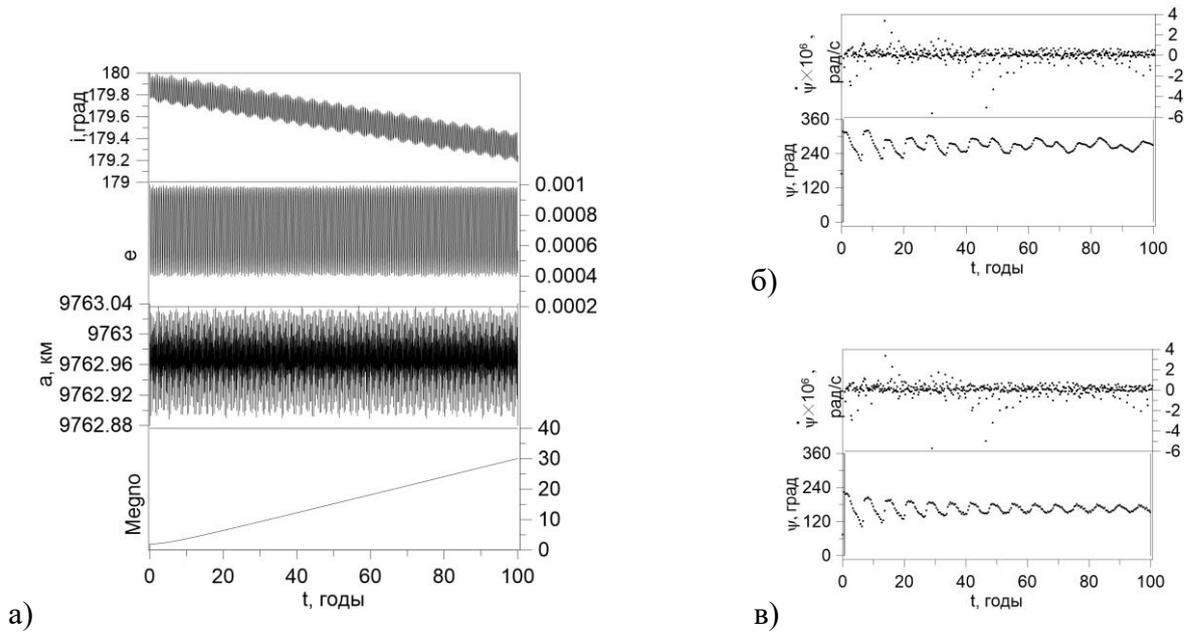


Рисунок А.21 — а) Эволюция элементов объекта, движущегося в области орбитального резонанса 1:9 и его резонансные характеристики: б) $\dot{\Psi}_{17,L} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L)$, в) $\dot{\Psi}_{13-17,S}$

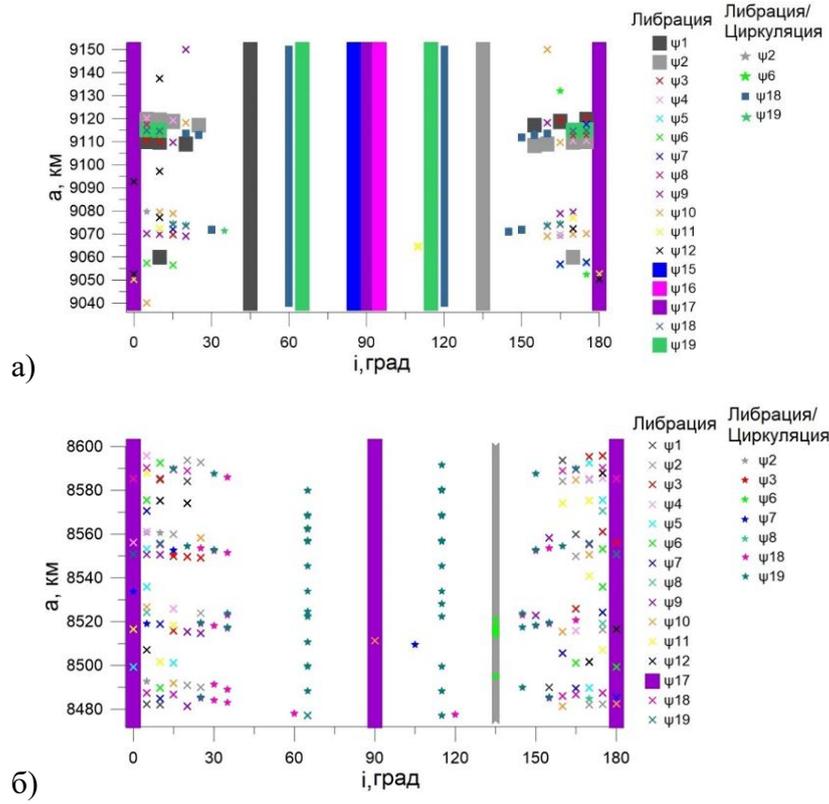


Рисунок А.22 — Распределение вековых апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Луны в области орбитального резонанса: а) 1:10, б) 1:11 со скоростью вращения Земли

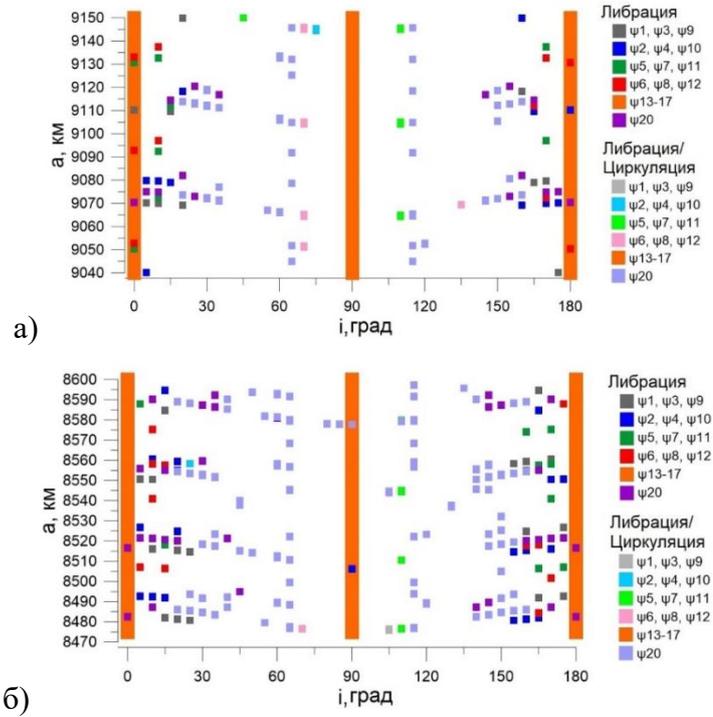


Рисунок А.23 — Распределение вековых апсидально-нодальных резонансов, связанных с прецессией орбиты Солнца в области орбитального резонанса: а) 1:10, б) 1:11 со скоростью вращения Земли

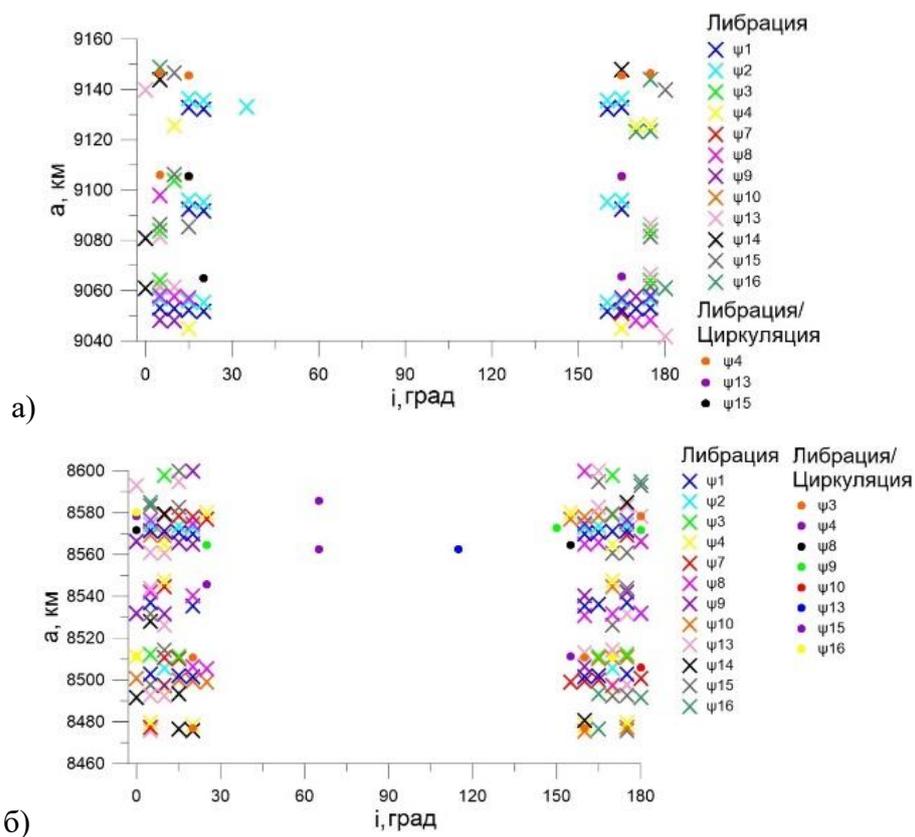


Рисунок А.24 — Распределение вековых резонансов, связанных со средним движением Луны в области орбитального резонанса: а) 1:10, б) 1:11 со скоростью вращения Земли

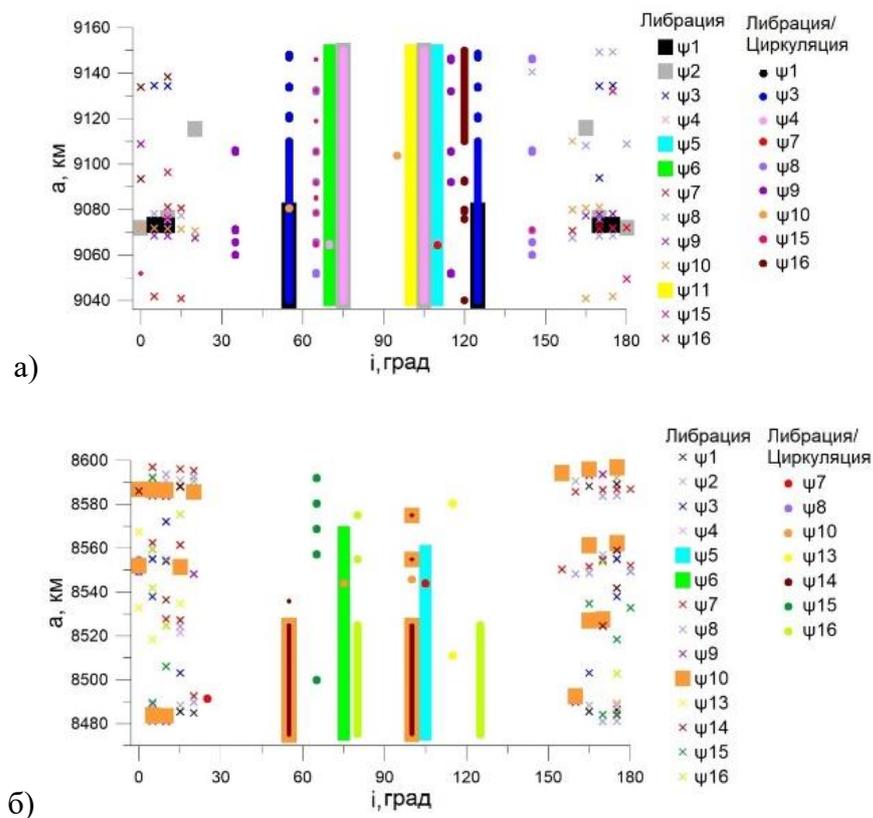


Рисунок А.25 — Распределение вековых резонансов, связанных со средним движением Солнца в области орбитального резонанса: а) 1:10, б) 1:11 со скоростью вращения Земли

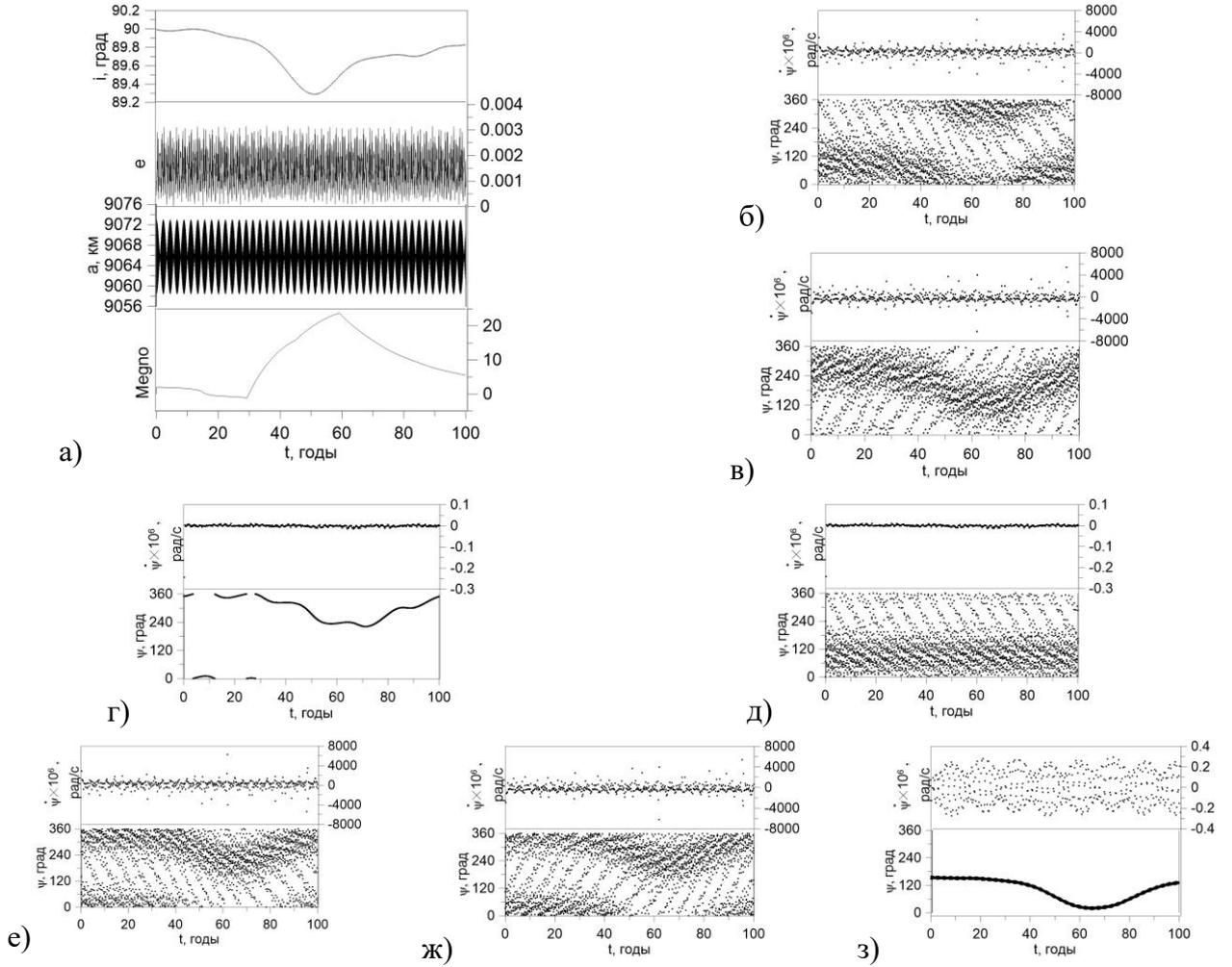


Рисунок А.26 — а) Эволюция элементов объекта, движущегося в области орбитального резонанса 1:10, но не подверженного его действию и его резонансные характеристики: б)

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{9,L} &= (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}) + \dot{\omega}, \text{ в) } \dot{\psi}_{10,L} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - \dot{\omega}, \text{ г) } \dot{\psi}_{17,L} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L), \text{ д) } \dot{\psi}_{20,S,L} = \dot{\omega}, \text{ е) } \\ \dot{\psi}_{1,S} &= (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) + \dot{\omega} - \dot{\omega}'_S, \text{ ж) } \dot{\psi}_{2,S} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) - \dot{\omega} + \dot{\omega}'_S, \text{ з) } \dot{\psi}_{17,S} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) \end{aligned}$$

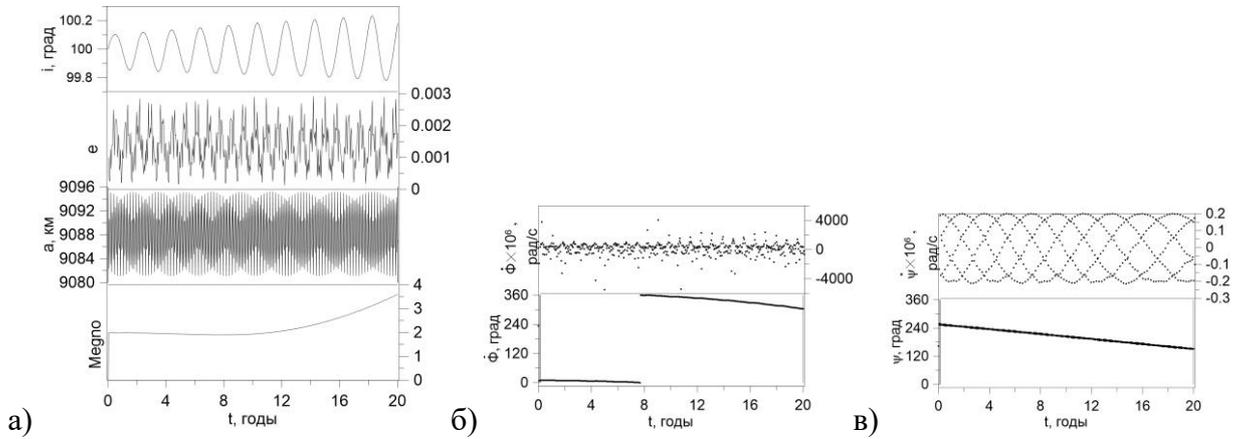


Рисунок А.27 — а) Эволюция элементов объекта, движущегося в области орбитального резонанса 1:10 и его резонансные характеристики: б) $\dot{\Phi}_2 = (\dot{\omega} + \dot{M}) + 10(\dot{\Omega} - \dot{\Theta})$,

$$\text{в) } \dot{\psi}_{11,S} = \dot{M}_S - 2(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}')$$

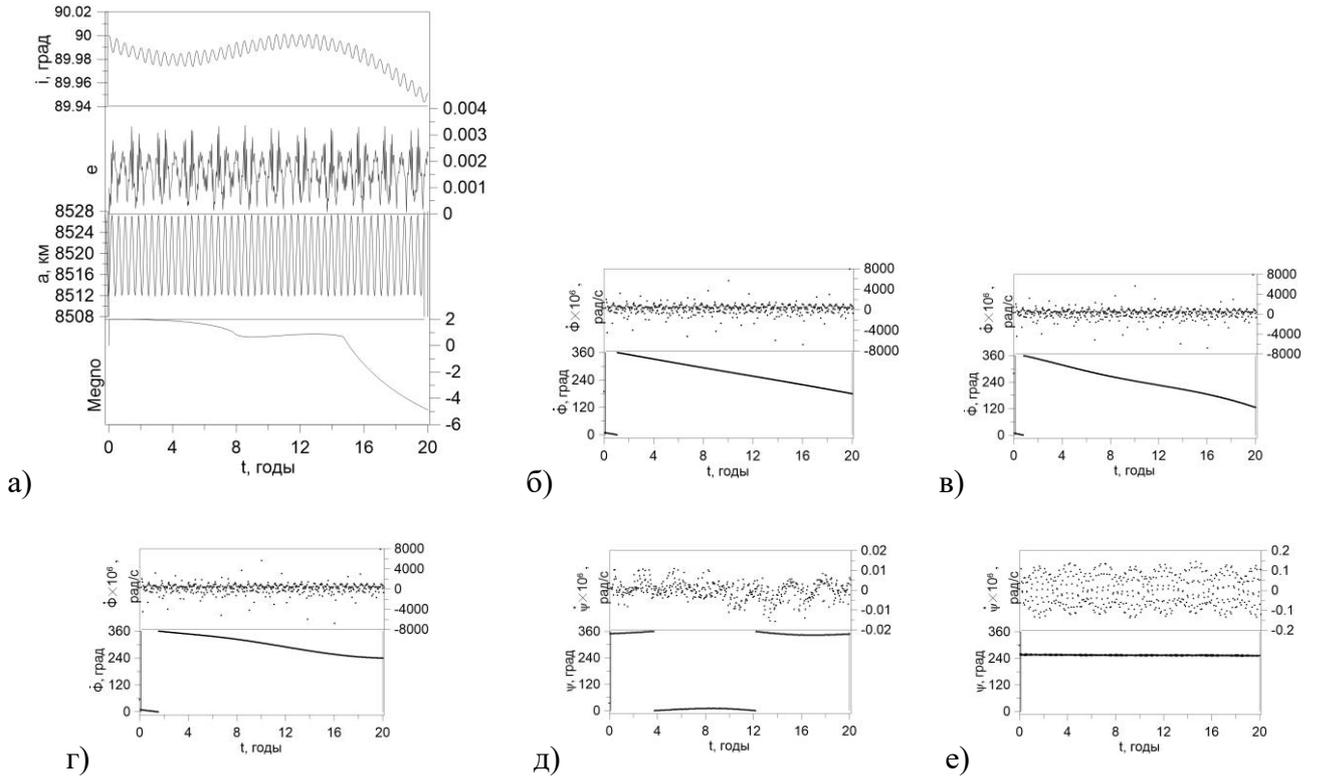


Рисунок А.28 — а) Эволюция элементов объекта, движущегося в области орбитального резонанса 1:1 и его резонансные характеристики: б) $\dot{\Phi}_1 = (\dot{M} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}) - 11\dot{\theta}$, в) $\dot{\Phi}_2 = (\dot{\omega} + \dot{M}) + 11(\dot{\Omega} - \dot{\theta})$, г) $\dot{\Phi}_4 = (\dot{M} - \dot{\Omega} + \dot{\omega}) - 11\dot{\theta}$, д) $\dot{\Psi}_{17,L} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L})$, е) $\dot{\Psi}_{13-17,S}$

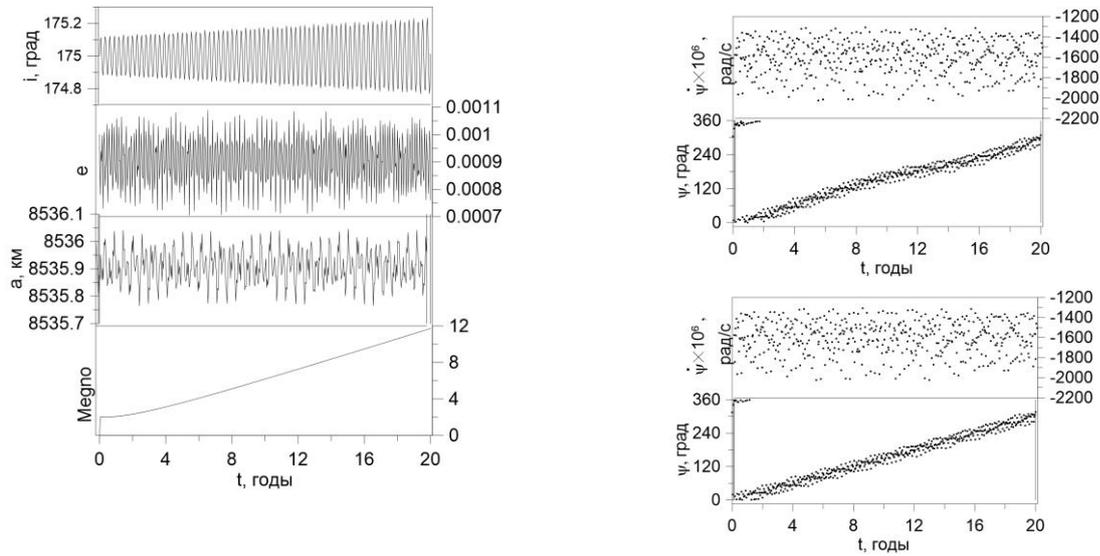


Рисунок А.29 — а) Эволюция элементов объекта, движущегося в области орбитального резонанса 1:11 и его резонансные характеристики: б) $\dot{\Psi}_{12,L} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - 2\dot{\omega}$, в) $\dot{\Psi}_{6-12,S} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) - 2\dot{\omega}$

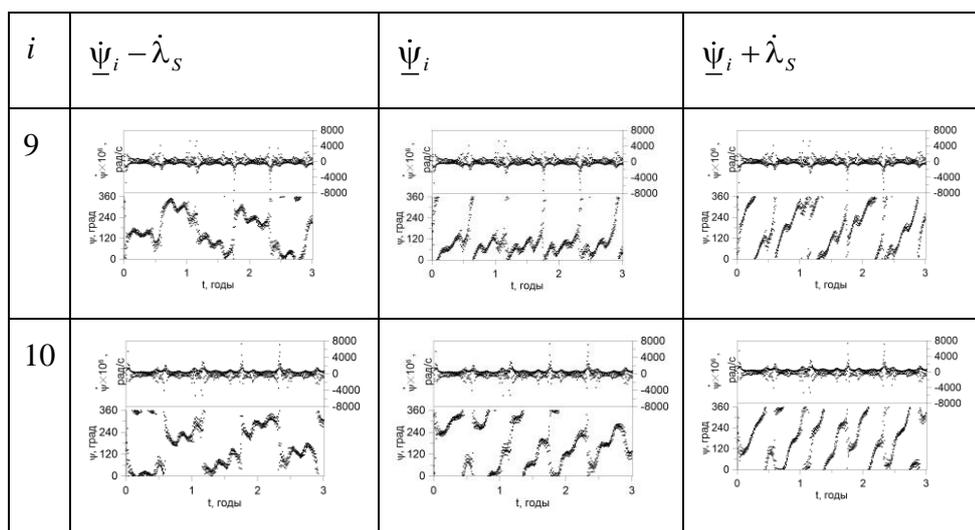


Рисунок А.30 — Резонансные характеристики $\underline{\psi}_i - \dot{\lambda}_S$, $\underline{\psi}_i$ и $\underline{\psi}_i + \dot{\lambda}_S$ вековых резонансов со скоростью движения Солнца, действующие на объект YUNHAI-2 1 (43909)

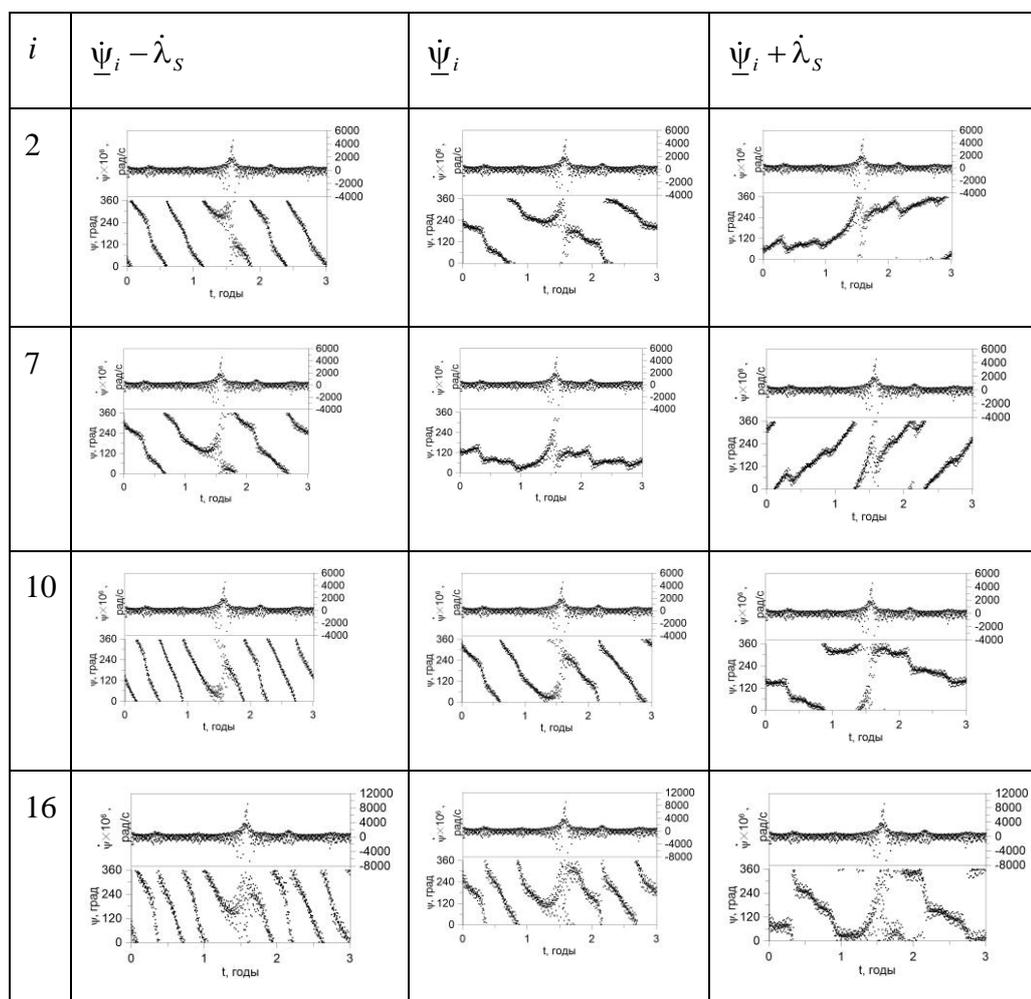


Рисунок А.31 — Резонансные характеристики $\underline{\psi}_i - \dot{\lambda}_S$, $\underline{\psi}_i$ и $\underline{\psi}_i + \dot{\lambda}_S$ вековых резонансов со скоростью движения Солнца, действующие на объект COSMOS 2437 (32954)

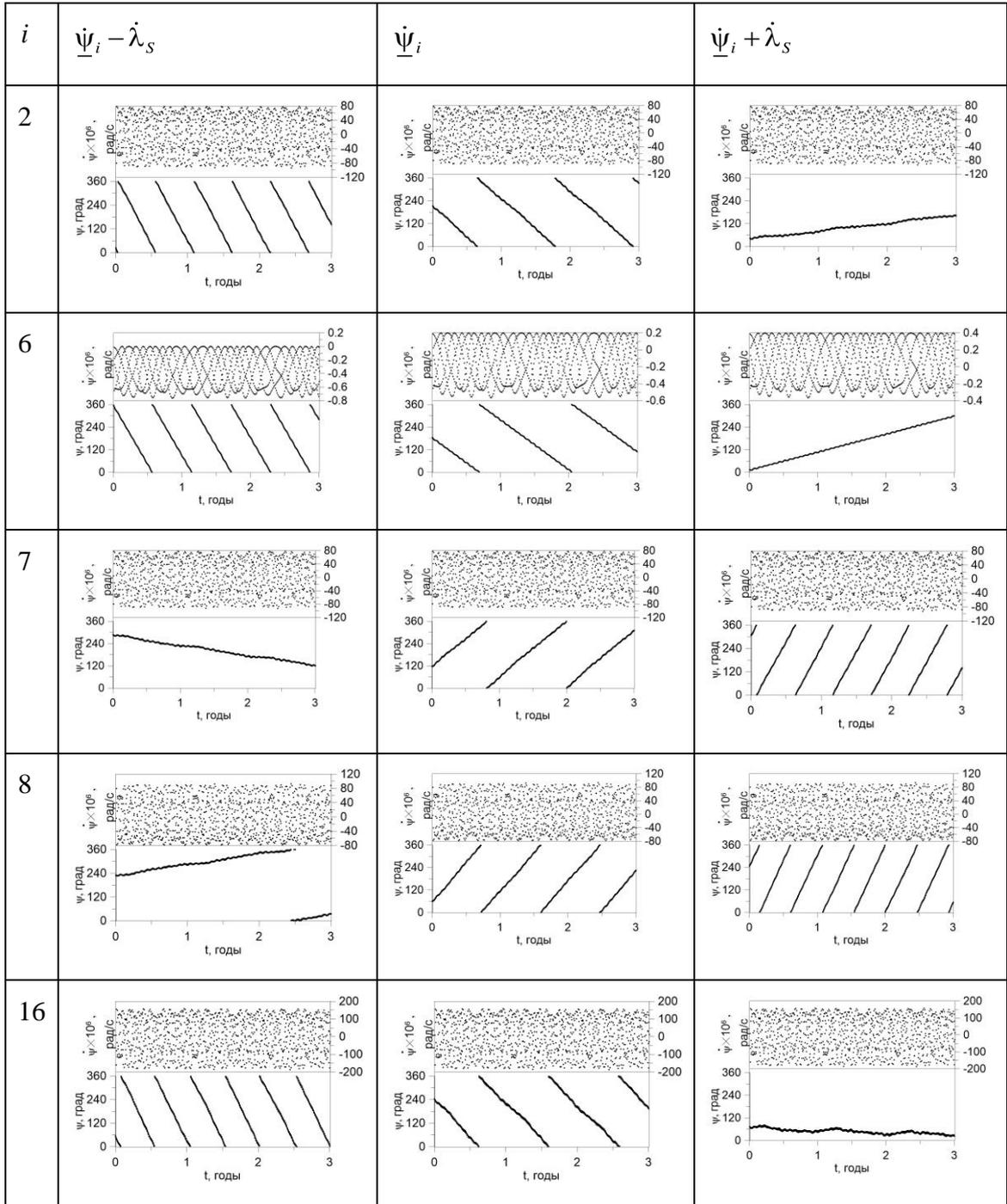


Рисунок А.32 — Резонансные характеристики $\underline{\psi}_i - \dot{\lambda}_S$, $\underline{\psi}_i$ и $\underline{\psi}_i + \dot{\lambda}_S$ вековых резонансов со скоростью движения Солнца, действующие на объект COSMOS 2251 DEB(35824)

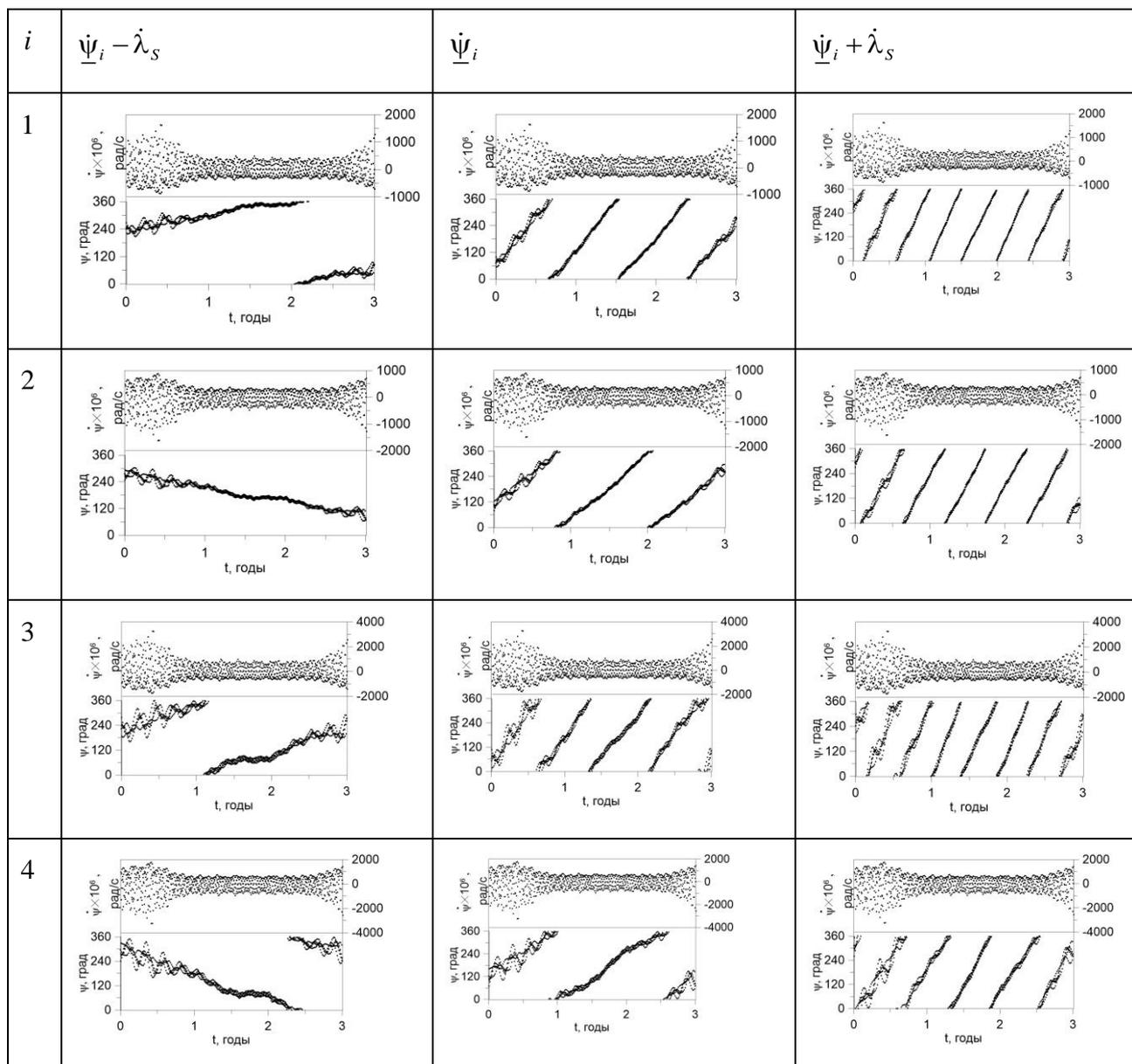


Рисунок А.33 — Резонансные характеристики $\dot{\psi}_i - \dot{\lambda}_S$, $\dot{\psi}_i$ и $\dot{\psi}_i + \dot{\lambda}_S$ вековых резонансов со скоростью движения Солнца, действующие на объект LATINSAT A(27612)

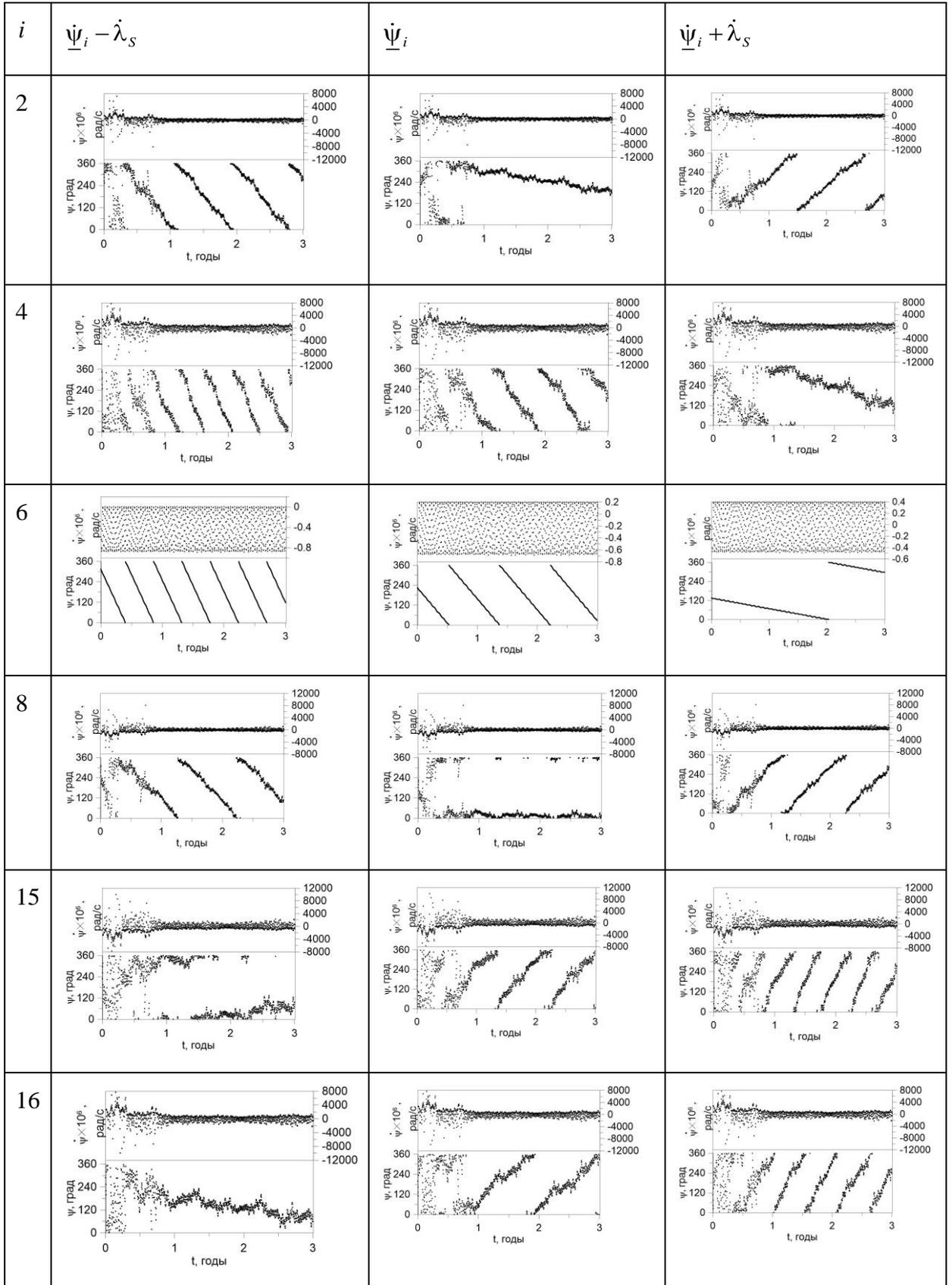


Рисунок А.34 — Резонансные характеристики $\underline{\dot{\psi}}_i - \dot{\lambda}_S$, $\underline{\dot{\psi}}_i$ и $\underline{\dot{\psi}}_i + \dot{\lambda}_S$ вековых резонансов со скоростью движения Солнца, действующие на объект OPS 5712 (P/L 153) (2874)

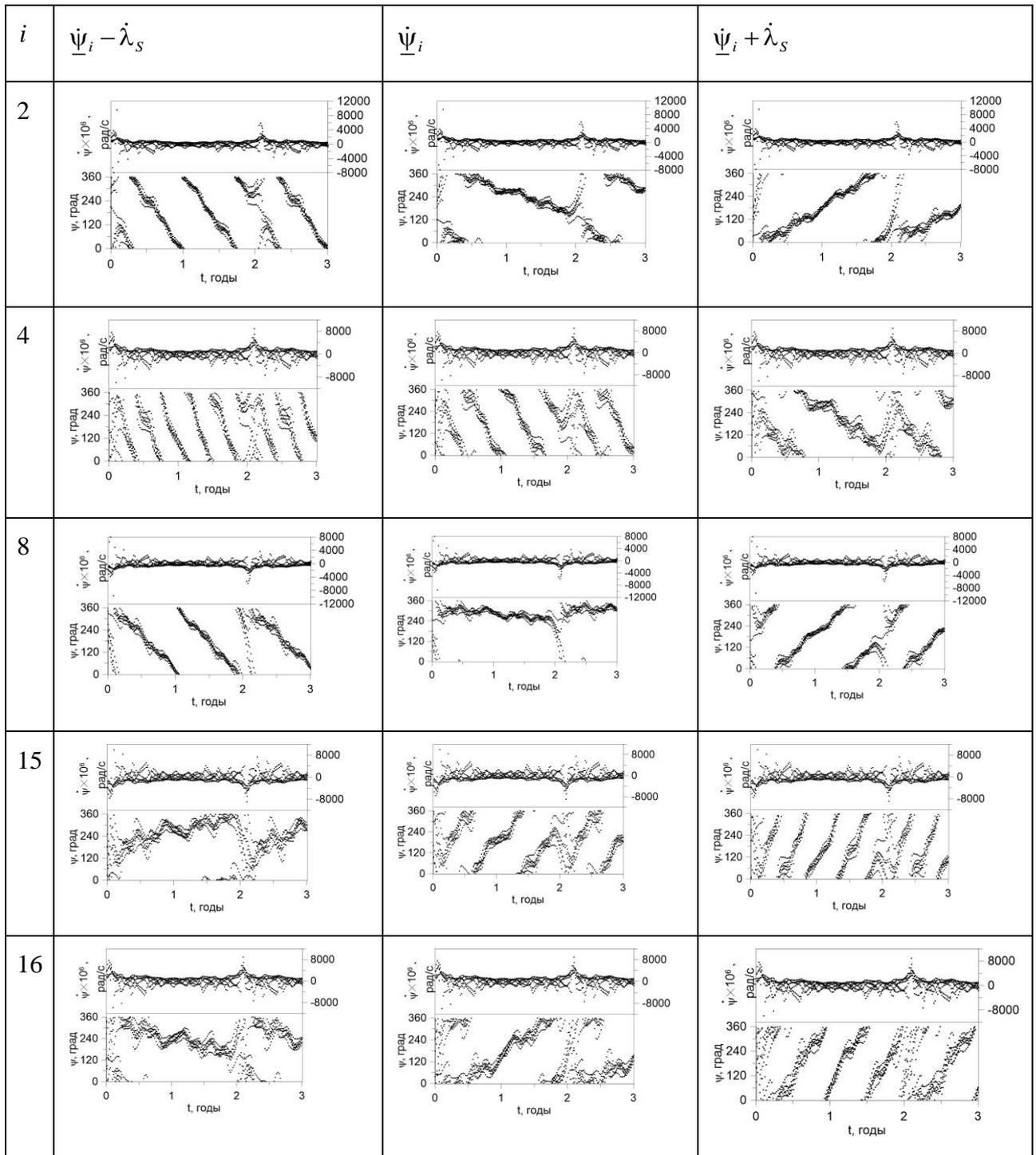


Рисунок А.35 — Резонансные характеристики $\underline{\psi}_i - \dot{\lambda}_S$, $\underline{\psi}_i$ и $\underline{\psi}_i + \dot{\lambda}_S$ вековых резонансов со скоростью движения Солнца, действующие на объект ORBCOMM FM01 (23545)