ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Е. А. Резниченко ***Группы с топологией и однородные пространства*****, представленной на соискание ученой степени доктора физико–математических наук по специальности 01.01.03 (геометрия и топология)**

Диссертация Резниченко посвящена топологической алгебре — области, объекты которой обладают согласованными алгебраическими и топологическими структурами. Условие согласованности алгебры с топологией заключается в требовании непрерывности алгебраических операций. Большую роль в первоначальном развитии топологической алгебры сыграла 5-ая проблема Гильберта, в ходе решения которой возникла теория локально-компактных топологических групп. Теория банаховых пространств породила не только такой важный объект как топологическое векторное пространство, но и топологические игры как метод исследования. Естественными объектами исследования топологической алгебры являются группы автогомеоморфизмов и линейные пространства функций, исследование которых развернулось во второй половине двадцатого века. Изучение динамических систем стимулировало интерес к изучению топологических полугрупп. Диссертация Резниченко находится в русле современного развития топологической алгебры: топологии на группах, топологические игры, операции Мальцева, функциональные и однородные пространства — все эти темы представлены в диссертации Резниченко, откуда видна ее актуальность.

Диссертация Е.А.Резниченко состоит из введения, пяти глав, заключения и библиографического списка. Первая глава является вводной и представляет собой сводку определений, используемых в диссертации понятий.

Вторая глава посвящена продолжению и факторизации отображений произведений пространств. Речь здесь в основном идет о раздельно непрерывных функциях на произведениях псевдокомпактных пространств. Отметим теорему 2.7, дающую для функций на произведении псевдокомпактных пространств разнообразные условия эквивалентные квазинепрерывности. Теорема 2.17 утверждает раздельную непрерывность продолженной на "раздельную"стоун-чеховскую компактификацию функции псевдокомпактных переменных. Значительная часть, содержащихся во второй главе результатов диссертации, касается введенного в диссертации ключевого понятия пары Гротендика: пара пространств является парой Гротендика, если любой непрерывный образ первого пространства в пространстве функций второго — предкомпактен. Так теорема 2.9 утверждает, что раздельно-непрерывная функция на произведении, в котором Гротендикова любая пара сомножителей, продолжается до раздельно-непрерывной функции произведения стоун-чеховских компактификаций сомножителей. Методы разработанные в диссертации для исследования раздельно-непрерывных продолжений, и полученные результаты далее успешно применяются к исследованию алгебр с раздельно-непрерывными операциями. Заключительная секция второй главы посвящена вопросам факторизации раздельно-непрерывных отображений произведений. Так теорема 2.35 касается факторизации раздельно-непрерывного отображения конечного произведения пространств первого несчетного калибра в сепарабельное метрическое пространство через произведение метризуемых компактов. А теорема 2.36 дает аналогичную факторизацию для произведения пары пространств с условием Суслина. Полученные для факторизации произведений результаты применяются далее для факторизации алгебр с раздельно-непрерывными операциями, которые, в свою очередь, применяются к доказательству двух теорем вложения (2.39,2.40) алгебр с раздельно-непрерывными операциями в произведения метризуемых компактных алгебр с раздельно-непрерывными операциями.

Третья глава диссертации посвящена теории топологических игр. По существу третья глава закладывает основы нового перспективного направления теории топологических игр. В секции 3.1 диссертант вводит новый класс топологических игр, называемых им модифицированными играми Банаха-Мазура, и подробно его исследует. В секции 3.2 даны обобщения понятий бэровости и тучности, основанные на теории игр. В секции 3.4 рассматриваются игры с четырьмя игроками. В секции 3.7 вводятся в рассмотрение полуоткрытые окрестности диагонали квадрата топологического пространства. В секции 3.8 вводятся нормальные функторы квадрата. И заканчивается глава внушительным списком нерешенных проблем. Введенные новые понятия по существу и являются основными достижениями этой главы, а проведенные исследования доказывают их естественность.

В четвёртой главе изучаются непрерывность операций в группах и мальцевских пространствах. Теорема 4.1 о действиях псевдокомпактной группы дает условия непрерывности раздельно-непрерывного действия. Теоремы 4.2 и 4.3 дают условия непрерывности групповой операции псевдокомпактной полутопологической группы. Аналогичные результаты получены для пространств с операцией Мальцева. Отметим теорему 4.13, выводящую топологичность бэровской паратопологической группы из счетной компактности ее квадрата. Секция 4.4 посвящена R-топологическим группам, основные результаты которой дают условия топологичности и метризуемости для таких групп. Секция 4.5 посвящена группам, определяемым полуокрестностями диагонали. Дальнейшие секции четвертой главы посвящены структурным исследованиям R-полутопологических групп, и завершаются списками примеров и нерешенных задач.

Заключительная, пятая глава диссертации Резниченко, посвящена изучению топологических свойств однородных и мальцевских пространств, а также топологических групп. Секция 5.2 посвящена изучению вопроса о том какие пространства, являются делителями однородных. Начинается она с конструкций универсальных однородных пространств. Далее серия теорем 5.5-5.8 утверждает, что произведения универсальных пространств на различные пространства гомеоморфны универсальным. Таким образом для широкого списка типов пространств доказывается, что эти пространства являются делителями однородных пространств. Далее исследуется вопрос об однородных подпространствах произведений экстремально-несвязных пространств. Типичный результат об этих подпространствах утверждает конечность компактных подпространств. Введено и исследовано понятие максимально однородного пространства. Секция 5.3 посвящена изучению топологий на группах. Теорема 5.29 утверждает совпадение веса с пи-характером для так называемых CHART-групп. Секция 5.4 посвящена изучению ретрактов топологических групп. Здесь вводится и исследуется понятие ко-неархимедова пространства. Построены интересные примеры топологических групп, например, линделефова группа с континуальным числом Суслина. В секции 5.5, посвященной пространствам с операцией Мальцева, доказано, (теорема 5.50) что псевдокомпактное мальцевское пространство является ретрактом топологической группы (усиление теоремы Сипачевой). Построен пример мальцевского пространства, не являющегося ретрактом топологической группы. Доказано, что компактное пространство с раздельно-непрерывной операцией Мальцева является компактом Дугунджи (теорема 5.41). Исследованы 2-Мальцевские пространства. Заключительная секция пятой главы посвящена топологическим свойствам пространств с алгебраической структурой. Счетность, условие Суслина, свойство Фреше-Урысона, экстремальная несвязность — таков подвергнутый в этой секции диссертации исследованию набор топологических свойств. Полученные результаты касаются известных проблем Ван-Дауэна, Малыхина и Архангельского.

Проведенные в диссертации Резниченко систематические исследования раздельной непрерывности и псевдокомпактности, разработка новых топологических игр и конструкция универсальных однородных пространств, развитие теории мальцевских пространств позволяют квалифицировать ее как новое перспективное научное направление топологической алгебры.

Все приведённые в диссертации утверждения обоснованы строгими математическими доказательствами. Результаты диссертации могут быть использованы специалистами, работающими в МГУ, МПГУ, Петрозаводском госуниверситете, Томском госуниверситете и других университетах, в том числе при чтении спецкурсов. Научные результаты диссертации, выносимые на защиту, являются новыми, получены лично автором и строго доказаны. Результаты других автров, упомянутые в тексте диссертации, отмечены соответствующими ссылками. Основные результаты диссертации опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК России. Автореферат правильно и достаточно полно отражает содержание диссертации.

В заключение несколько критических замечаний. Отсутствие связки между формулами в утверждении 5.1.6 делают его трудным для понимания. Описание модифицированной диссертантом игры Банаха-Мазура дано в общем абстрактном виде, без конкретного примера, что сильно затрудняет понимание сути модификации. Неудачной представляется оппоненту терминология пятой главы, относящаяся к последовательностям. Так "почти точные"и "почти стационарные"последовательности уместно было бы назвать "эвентуально точными"и "эвентуально стационарными". Да и сам термин "точность"неудачен, лучше уж "антистационарность".

Указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности "геометрия и топология"и критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова. Таким образом, соискатель Резниченко Евгений Александрович заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 — «Геометрия и топология».

Официальный оппонент: доктор физико-математических наук, член-корр. РАН главный научный сотрудник отдела геометрии и топологии ФГБУН «Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук» Щепин Евгений Витальевич

Контактные данные: тел.: +7 (495) 984-81-41 * 37-87, e-mail: scepin@mi-ras.ru Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация: 01.01.04 — «Геометрия и топология»

Адрес места работы: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, отдел геометрии и топологии Тел.: +7 (495) 984-81-41; e-mail: steklov@mi-ras.ru

Подпись сотрудника Математического института им. В.А. Стеклова РАН Е.В. Щепина удостоверяю:

Член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник института математики РАН им. В.А. Стеклова, доктор физико-математических наук

Е. В. Щепин

Подпись Е.В Щепина удостоверяю

Ученый секретарь МИАН

29.12.23