

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В.ЛОМОНОСОВА

*На правах рукописи*

Мещеряков Николай Павлович

Теоремы о неперенормировке в  $\mathcal{N} = 1$   
суперсимметричных теориях Янга–Миллса

1.3.3. – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2022

Работа выполнена на кафедре теоретической физики физического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова.

**Научный руководитель:** **Степаньянц Константин Викторович,**  
д.ф.-м.н., ФГБОУ ВО «МГУ имени М.В.Ломоносова»

**Официальные оппоненты:** **Быков Дмитрий Владимирович,**  
д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник отдела  
теоретической физики ФГБУН «Математический  
институт им. В.А.Стеклова Российской академии наук»

**Невзоров Роман Борисович,**  
д.ф.-м.н., высококвалифицированный ведущий научный  
сотрудник лаборатории квантовой теории поля ФГБУН  
«Физический институт им. П.Н.Лебедева Российской  
академии наук»

**Федорук Сергей Алексеевич,**  
д.ф.-м.н., доцент, ведущий научный сотрудник  
Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова,  
Объединенный институт ядерных исследований

Защита диссертации состоится 22 декабря 2022 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.2 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ имени М.В.Ломоносова, д. 1, стр. 2, физический факультет, физическая аудитория им. Р.В. Хохлова.

E-mail: ff.dissovet@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»:  
<https://istina.msu.ru/dissertations/508695493/>

Автореферат разослан «\_\_\_» ноября 2022 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета МГУ.011.2,  
доктор физико-математических наук,  
профессор

П.А. Поляков

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы исследования

Один из наиболее элегантных вариантов расширения Стандартной модели, предоставляющий механизмы устранения многих ее недостатков, основан на суперсимметрии. Суперсимметричные обобщения Стандартной модели позволяют не только получить в ряде случаев гораздо более точное соответствие с предсказаниями теорий Великого объединения (в некоторых из которых время жизни протона достаточно велико и находится вне пределов современных экспериментальных возможностей его измерения), но и решить проблему тонкой подстройки массы бозона Хиггса благодаря сокращению квадратичных расходимостей. Прямые эксперименты по обнаружению суперпартнеров на Большом адронном коллайдере к настоящему времени не увенчались успехом, ставя под сомнение идею низкоэнергетической (на масштабе порядка  $\mathcal{O}(1)$  ТэВ) суперсимметрии, тем не менее их активные поиски продолжаются. В конечном счете суперсимметричная феноменология довольно разнообразна и сильно зависит от конкретной модели, в том числе и от механизма нарушения суперсимметрии, и полученные к настоящему времени ограничения не полностью закрывают возможные области пространства параметров моделей с низкоэнергетической реализацией суперсимметрии.

Переходя к более подробному обсуждению характерных теоретических особенностей калибровочных теорий с глобальной суперсимметрией (вопросы, связанные с супергравитацией, не рассматриваются в данной работе), прежде всего отметим наличие т.н. теорем о неперенормировке, выражающих нетривиальную взаимосвязь между расходимостями в таких теориях. Пожалуй, самым известным примером является конечность  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричных теорий Янга–Миллса во всех порядках теории возмущений. В свою очередь, неабелевы калибровочные теории с  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрией имеют ультрафиолетовые расходимости только в однопетлевом приближении. Обратим внимание, что су-

персимметричные обобщения Стандартной модели строятся, как правило, на основе теорий Янга–Миллса с  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметрией, имеющих более приемлемый с феноменологической точки зрения состав полей, чем теории с  $\mathcal{N} > 1$ .

В  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных теориях Янга–Миллса теоремы о неперенормировке также имеют место. Во-первых, известно, что суперпотенциал не получает расходящихся вкладов во всех порядках теории возмущений. Это приводит к тому, что взаимосвязанными оказываются константы перенормировки киральных суперполей материи, масс и юкавских констант связи, стоящих в кубичном по киральным суперполям материи слагаемом лагранжиана. Во-вторых, тройные духово-калибровочные вершины, содержащие одну внешнюю линию квантового калибровочного суперполя и две внешние линии духовых суперполей Фаддеева–Попова, конечны в ультрафиолетовой области во всех порядках [1]. Как следствие, константы перенормировки квантового калибровочного суперполя, духов Фаддеева–Попова и калибровочной константы связи также взаимосвязаны. В-третьих, точная  $\beta$ -функция Новикова–Шифмана–Вайнштейна–Захарова (NSVZ) [2–5] устанавливает соотношение между перенормировкой калибровочной константы связи и киральных суперполей материи. В этом смысле она близка по содержанию к теоремам о неперенормировке и поэтому может быть поставлена с ними в один ряд. Данная диссертация посвящена исследованию двух последних утверждений из вышеперечисленных.

Важным обстоятельством, от которого зависит выполнение теорем о неперенормировке во всех порядках теории возмущений, является выбор подходящих перенормировочных предписаний. При этом желательно использовать инвариантную регуляризацию, не нарушающую симметрии теории на квантовом уровне, а также необходимо построить надлежащую схему вычитаний.

Как известно, использование наиболее популярной (вследствие своего удобства для практических петлевых вычислений) размерной регуляризации влечет за собой потерю инвариантности относительно преобразований суперсимметрии [6]. В то же время регуляризация посредством размерной редукции довольно

успешно применяется для вычислений в низших порядках теории возмущений. Однако в достаточно высоких порядках она также может вызывать нарушение суперсимметрии [7–9] и поэтому не является оптимальным выбором при изучении всепетлевых соотношений, опирающихся на явную суперсимметричную инвариантность теории.

В качестве альтернативы размерной технике регуляризации может служить метод высших ковариантных производных [10, 11]. Суперсимметричные обобщения метода высших ковариантных производных были сделаны на случай  $\mathcal{N} = 1$  суперпространства в статьях [12, 13] и на случай  $\mathcal{N} = 2$  гармонического суперпространства в статье [14].

Необходимо отметить, что в недавних работах [1, 15–17] регуляризация высшими ковариантными производными была использована для доказательства во всех порядках точной NSVZ  $\beta$ -функции  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных теорий Янга–Миллса с простой калибровочной группой. При этом с помощью теоремы о неперенормировке тройных духово-калибровочных вершин NSVZ соотношение было записано в более удобной эквивалентной форме, связывающей некоторый  $L$ -петлевой вклад в  $\beta$ -функцию с  $(L - 1)$ -петлевыми вкладами в аномальные размерности суперполей материи, духов Фаддеева–Попова и квантового калибровочного суперполя. Кроме того, в работе [15] был сформулирован новый метод вычисления вкладов в  $\beta$ -функцию  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных теорий Янга–Миллса, регуляризованных высшими ковариантными производными. Он основан на вычислении вакуумных супердиаграмм, модифицированных вставкой некоторого суперполевого выражения, а также построении (по предложенному алгоритму) дифференциального оператора, содержащего двойные полные производные. В результате применения данного метода искомым вклад в  $\beta$ -функцию получается непосредственно в виде интегралов от двойных полных производных по петлевым импульсам. С практической точки зрения данный метод предполагает значительно меньший объем вычислений по сравнению со стандартным способом вычисления вкладов в  $\beta$ -функцию с помощью

супердиаграмм с двумя внешними калибровочными линиями.

Необходимо отметить, что обсуждавшиеся выше новые соотношения и методы, на которых основано полное пертурбативное доказательство NSVZ  $\beta$ -функции, ранее были проверены явными вычислениями лишь в самых простейших случаях. Вычисления, проведенные в данной диссертации, в некоторой степени восполняют этот пробел, предоставляя им существенно более нетривиальную проверку.

### Цели и задачи работы

Диссертационное исследование посвящено изучению и явной проверке с помощью регуляризации высшими ковариантными производными ключевых утверждений и методов, на которых основано всепетлевое доказательство NSVZ  $\beta$ -функции в  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных теориях Янга–Миллса: теоремы о непрерывности тройных духово-калибровочных вершин, новой формы NSVZ соотношения, содержащей аномальные размерности всех квантовых суперполей, а также нового метода вычисления вкладов в  $\beta$ -функцию, основанного на вычислении модифицированных вакуумных суперграфов.

Для выполнения данных целей были поставлены следующие задачи:

1. Вычислить определенные двухпетлевые квантовые поправки к тройным духово-калибровочным вершинам при произвольном значении калибровочного параметра.
2. Выполнить суммирование всех двухпетлевых вкладов в одну из тройных духово-калибровочных вершин и проверить, является ли полученное суммарное выражение конечным в ультрафиолетовой области в общей  $\xi$ -калибровке.
3. Применить метод модифицированных вакуумных суперграфов, сформулированный в работе [15], для вычисления некоторых трехпетлевых вкладов духов Фаддеева–Попова в  $\beta$ -функцию  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных

теорий Янга–Миллса, регуляризованных высшими ковариантными производными.

4. Вычислить двухпетлевые вклады в аномальную размерность духов Фаддеева–Попова, идущие от суперграфов с двумя внешними линиями духов Фаддеева–Попова, которые графически получаются путем разрезания пропагаторов духов Фаддеева–Попова в трехпетлевых вакуумных суперграфах, рассмотренных в предыдущем пункте.
5. На уровне петлевых интегралов проверить, связаны ли полученные в двух предыдущих пунктах вклады в трехпетлевую  $\beta$ -функцию и двухпетлевую аномальную размерность духов Фаддеева–Попова так, как предписывает новая форма NSVZ соотношения для ренормгрупповых функций, заданных через голые константы связи.
6. С помощью метода модифицированных вакуумных суперграфов вычислить определенный трехпетлевой вклад в  $\beta$ -функцию в общей  $\xi$ -калибровке для случая  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной квантовой электродинамики.
7. Вычислить двухпетлевой вклад в аномальную размерность суперполей материи, идущий от двухточечных супердиаграмм, которые графически получаются посредством разрезания пропагаторов суперполей материи в трехпетлевом вакуумном суперграфе, рассмотренном в пункте 6.
8. На уровне петлевых интегралов проверить абелеву форму NSVZ соотношения для найденных вкладов в трехпетлевую  $\beta$ -функцию и двухпетлевую аномальную размерность суперполей материи, определенных в терминах голой константы связи.

## Методология и методы исследований

В диссертации применяется хорошо разработанный аппарат квантовой теории поля. Формулировка теорий дается в терминах суперполей в  $\mathcal{N} = 1$  суперпространстве, и все вычисления проводятся в явно  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричном виде. Метод континуального интеграла используется для построения теории возмущений. Регуляризация осуществляется методом высших (ковариантных) производных, дополненным введением инвариантных детерминантов Паули–Вилларса в производящий функционал для регуляризации однопетлевых (под)расходимостей. Для вычисления супердиаграмм применяются правила Фейнмана в  $\mathcal{N} = 1$  суперпространстве и известная алгебра суперсимметричных ковариантных производных.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. С помощью регуляризации высшими ковариантными производными вычислен в общей  $\xi$ -калибровке большой набор двухпетлевых квантовых поправок к тройным духово-калибровочным вершинам, содержащим одну внешнюю линию квантового калибровочного суперполя и две внешние линии духов Фаддеева–Попова, в наиболее общих перенормируемых  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных теориях Янга–Миллса с простой калибровочной группой. Выполнено суммирование всех необходимых вкладов в одну из тройных духово-калибровочных вершин в рассматриваемом порядке и показано, что теорема о неперенормировке для тройных духово-калибровочных вершин выполняется в двухпетлевом приближении при произвольном значении калибровочного параметра.
2. С помощью метода модифицированных вакуумных суперграфов, предложенного в работе [15], вычислен ряд трехпетлевых вкладов духов Фаддеева–Попова в  $\beta$ -функцию  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных теорий Янга–Миллса, регуляризованных высшими ковариантными производными. Вычислены двухпетлевые вклады в аномальную размерность духов Фаддеева–Попова от двухточечных супердиаграмм, графически получающихся

посредством разрезания пропагаторов духов Фаддеева–Попова в рассмотренных трехпетлевых вакуумных суперграфах.

3. На уровне петлевых интегралов показано, что полученные вклады в трехпетлевую  $\beta$ -функцию и двухпетлевую аномальную размерность духов Фаддеева–Попова связаны так, как предписывает NSVZ  $\beta$ -функция, представленная в терминах аномальных размерностей всех квантовых суперполей.
4. В  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной квантовой электродинамике с  $N_f$  ароматами, регуляризованной высшими производными, вычислен некоторый трехпетлевой вклад в  $\beta$ -функцию в общей  $\xi$ -калибровке на основе метода модифицированных вакуумных суперграфов. Вычислены двухпетлевые вклады в аномальную размерность суперполей материи в общей  $\xi$ -калибровке от двухточечных суперграфов, графически получающихся посредством разрезания внутренних линий суперполей материи в рассмотренном трехпетлевом вакуумном суперграфе.
5. Для полученных вкладов в трехпетлевую  $\beta$ -функцию и двухпетлевую аномальную размерность суперполей материи проверено абелево NSVZ соотношение на уровне интегралов по петлевым импульсам.

### **Научная новизна**

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми.

### **Достоверность результатов**

Все результаты, полученные в диссертации, находятся в полном соответствии с известными и надежно установленными общими положениями квантовой теории поля, в частности, с теорией перенормировок и ренормализационной группы.

Отметим, что явная проверка новой формы NSVZ соотношения предполагает сопоставление на ее основе результатов независимых вычислений двух

типов ренормгрупповых функций: аномальных размерностей квантовых суперполей и  $\beta$ -функции, которая в рассматриваемом случае должна иметь вполне определенную структуру. А именно, она выражается в виде интегралов от двойных полных производных по петлевым импульсам. Таким образом, специфика данной проверки довольно сильно ограничивает возможность ошибки в случае совпадения сравниваемых результатов.

### **Теоретическая и практическая значимость**

Диссертационное исследование предоставляет многочисленные примеры вычислений различных квантовых поправок в формализме  $\mathcal{N} = 1$  суперполей при использовании регуляризации высшими ковариантными производными. Во-первых, с их помощью был найден полный двухпетлевой вклад в одну из тройных духово-калибровочных вершин в пределе нулевых внешних импульсов. Это вычисление подтвердило справедливость теоремы о неперенормировке тройных духово-калибровочных вершин в общей  $\xi$ -калибровке в рассматриваемом приближении. Напомним, что утверждение об ультрафиолетовой конечности данных вершин лежит в основе всепетлевого доказательства NSVZ  $\beta$ -функции в неабелевом случае, хотя, безусловно, оно представляет и самостоятельную ценность, поскольку раскрывает неочевидную взаимосвязь между перенормировкой калибровочной константы связи, духов Фаддеева–Попова и квантового калибровочного суперполя в  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных теориях Янга–Миллса.

Во-вторых, результаты, полученные в данной диссертации, были использованы для вычисления двухпетлевой аномальной размерности духов Фаддеева–Попова в общей  $\xi$ -калибровке, а также полного трехпетлевого вклада духов Фаддеева–Попова в  $\beta$ -функцию на основе метода модифицированных вакуумных суперграфов. В свою очередь, это позволило провести крайне нетривиальную проверку духового сектора новой формы NSVZ соотношения в том порядке теории возмущений, в котором важна зависимость от схемы перенормировки.

В-третьих, результаты диссертации были использованы для проверки метода модифицированных вакуумных суперграфов на примере вычисления в об-

щей  $\xi$ -калибровке трехпетлевой  $\beta$ -функции в  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной квантовой электродинамике с  $N_f$  ароматами. Выражение, построенное на основе данного метода, полностью совпало с выражением для трехпетлевой  $\beta$ -функции, которое было вычислено ранее в калибровке Фейнмана  $\xi_0 = 1$  в случае  $N_f = 1$  стандартным способом, с помощью рассмотрения соответствующих супердиаграмм с двумя внешними линиями калибровочного суперполя (см. работу [18] и ссылки в ней). Кроме того, в общей  $\xi$ -калибровке была вычислена двухпетлевая аномальная размерность суперполей материи. Данные результаты позволили явным образом продемонстрировать справедливость абелевой формы NSVZ соотношения в рассматриваемом приближении.

Перечисленные выше общие вычисления, выполненные совместно с соавторами, также обсуждаются в диссертации, поскольку они служат важными примерами применения результатов, выносимых на защиту, и помогают лучше понять, какое место занимает личный вклад автора диссертации в совместных публикациях.

В перспективе, полученные в диссертации результаты могут служить основой для различных обобщений. Например, может быть рассмотрено обобщение на случай многозарядных теорий. Знакомство с NSVZ  $\beta$ -функцией и идеями, на которых основано ее всепетлевое доказательство, может быть полезно при изучении некоторых NSVZ-подобных соотношений, таких как  $D$ -функция Адлера в  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной квантовой хромодинамике или соотношения, описывающие перенормировку масс калибрино в теориях с мягко нарушенной  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметрией. В целом, исследования теорем о неперенормировке в  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных калибровочных теориях могут помочь при изучении конечных теорий с нерасширенной суперсимметрией, а также с мягко нарушенной суперсимметрией.

### **Апробация результатов**

Часть результатов, полученных в диссертации, докладывалась автором на конференциях:

1. «Двухпетлевая перенормировка духов Фаддеева–Попова в  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных калибровочных теориях, регуляризованных высшими ковариантными производными», XXV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2018», Москва, Россия, 9 – 13 апреля 2018.
2. «Использование нового метода для вычисления вкладов духов Фаддеева–Попова в  $\beta$ -функцию  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных теорий Янга–Миллса в трехпетлевом приближении», XXVII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2020», Москва, Россия, 10 – 27 ноября 2020.

Также часть результатов работы была представлена в докладах соавторов совместных публикаций (Новгородцева С. В. и Кузьмичева М. Д.) на конференциях:

1. «Two-loop anomalous dimension of the Faddeev–Popov ghosts in  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetric theories», 19th Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics, Москва, Россия, 22 – 28 августа 2019.
2. «Трехпетлевая бета-функция для  $\mathcal{N} = 1$  SQED в неминимальной калибровке», XXVII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2020», Москва, Россия, 10 – 27 ноября 2020.

### **Личный вклад автора**

Результаты данной диссертации были опубликованы в перечисленных ниже статьях с соавторами. Специфика данной области исследований предполагает высокую трудоемкость вычислений, и поэтому некоторые общие задачи, требующие получения *полного выражения* для той или иной функции Грина в рассматриваемом порядке теории возмущений, были разбиты на непересекающиеся части, предполагающие вычисления *определенных вкладов*. Каждый из

соавторов совместных публикаций независимо выполнял свою часть вычислений, и после объединения всех результатов были получены искомые полные выражения. Автор данной диссертации вычислял набор суперграфов, являющийся одним из наиболее сложных, поэтому его вклад во все совместные работы является существенным, а в публикации, посвященные двухпетлевой проверке теоремы о неперенормировке тройных духово-калибровочных вершин, — главным. При этом в основе диссертационного исследования лежит исключительно личный вклад автора, и все результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно. В тех местах диссертации, где идет обсуждение общих итогов вычислений, полученных совместно с соавторами, это всегда отдельно оговаривается и приводятся необходимые ссылки.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация включает введение, 4 главы основного текста, заключение, 4 приложения и список литературы. Общий объем диссертации составляет 135 страниц, количество рисунков — 17. Список литературы содержит 127 наименований.

### **Содержание работы**

Во **Введении** дается общая характеристика диссертационной работы; перечисляются публикации автора по теме диссертационного исследования и конференции, на которых были представлены результаты работы; указывается личный вклад автора и описывается структура диссертации.

**Глава 1** посвящена двухпетлевой проверке теоремы о неперенормировке тройных духово-калибровочных вершин, содержащих одну внешнюю линию квантового калибровочного суперполя и две внешние линии суперполей духов Фаддеева–Попова. В параграфе **1.1** рассматривается формулировка  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных теорий Янга–Миллса с простой калибровочной группой в формализме  $\mathcal{N} = 1$  суперпространства. В параграфе **1.2** описывается кван-

тование данных теорий с использованием метода фонового (супер)поля, а также их инвариантная регуляризация методом высших ковариантных производных, дополненным добавлением детерминантов Паули–Вилларса в производящий функционал. Основные аспекты перенормировки рассматриваемых теорий описываются в параграфе **1.3**. В частности, вводятся определения необходимых констант перенормировки и рассматривается структура части эффективного действия, квадратичной по суперполям. В параграфе **1.4** приводятся основные сведения о тройных духово-калибровочных вершинах и обсуждается теорема об их ультрафиолетовой конечности. В параграфе **1.5** обосновываются некоторые упрощения, которые в дальнейшем используются при проведении двухпетлевой проверки теоремы о перенормировке тройных духово-калибровочных вершин. Принимая во внимание перенормируемость рассматриваемой теории, достаточно вычислить, например, вклады в функцию  $\mathcal{S}$ , содержащую определенную часть квантовых поправок к вершине  $\bar{c}^+ V c$  (где  $V$  обозначает квантовое калибровочное суперполе, а  $c$  и  $\bar{c}^+$  — суперполя духов и антидухов Фаддеева–Попова, соответственно), в пределе нулевых внешних импульсов. Соответствующие супердиаграммы, которые дают вклады порядка  $\mathcal{O}(e_0^4)$  в функцию  $\mathcal{S}$ , рассматриваются в параграфе **1.6**. Для удобства вся совокупность исследуемых супердиаграмм разделяется на пять групп, и далее последовательно обсуждаются результаты вычислений супердиаграмм из каждой группы. Попутно приводятся выражения для пропагаторов и вершин в формализме  $\mathcal{N} = 1$  суперпространства, которые были использованы при вычислении супердиаграмм. Затем вычисляются суммарные вклады в функцию  $\mathcal{S}$  в пределе нулевых внешних импульсов для каждой из пяти групп супердиаграмм. Общий суммарный вклад оказывается равным 0. С учетом аргументов, изложенных в параграфе 1.5, это позволяет сделать вывод о том, что тройные духово-калибровочные вершины являются конечными в ультрафиолетовой области в рассматриваемом порядке теории возмущений при произвольном значении калибровочного параметра.

В главе **2** рассматривается новый метод вычисления вкладов в

$\beta$ -функцию, основанный на вычислении модифицированных вакуумных суперграфов, для  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных теорий Янга–Миллса, регуляризованных высшими ковариантными производными. Необходимо отметить, что имеется в виду  $\beta$ -функция, определенная в терминах голых констант связи. Определения ренормгрупповых функций в терминах голых параметров и в терминах перенормированных параметров даются в параграфе **2.1**. Также в нем обсуждается NSVZ  $\beta$ -функция и основные идеи, на которые опирается ее всепетлевое доказательство. В частности, рассматривается новая форма NSVZ соотношения, которая связывает  $\beta$ -функцию не только с аномальной размерностью суперполей материи, но и с аномальными размерностями квантового калибровочного суперполя и духов Фаддеева–Попова. Кроме того, описывается графическая интерпретация новой формы NSVZ соотношения, а также механизм ее пертурбативного возникновения, который основан на факторизации петлевых интегралов, дающих  $\beta$ -функцию, в интегралы от двойных полных производных (в случае использования регуляризации высшими ковариантными производными). Приводятся основные сведения о HD+MSL схеме вычитаний, которая является примером всепетлевой NSVZ схемы в неабелевом случае. В параграфе **2.2** формулируется метод вычисления  $(L \geq 2)$ -петлевых вкладов в  $\beta$ -функцию, заданную в терминах голых параметров, с помощью модифицированных вакуумных суперграфов. В результате его применения искомый вклад в  $\beta$ -функцию получается непосредственно в виде петлевых интегралов от двойных полных производных. В параграфе **2.3** метод модифицированных вакуумных суперграфов используется для вычисления некоторых трехпетлевых вкладов в  $\beta$ -функцию, идущих от суперграфов с петлей духов Фаддеева–Попова, в общей  $\xi$ -калибровке.

**Глава 3** посвящена проверке духовой части новой формы NSVZ соотношения для вкладов рассматриваемых супердиаграмм и применению полученных результатов в контексте общих вычислений, выполненных совместно с соавторами: полной трехпетлевой проверки духовой части новой формы NSVZ

соотношения, а также вычисления двухпетлевой аномальной размерности духов Фаддеева–Попова. В параграфе **3.1** обсуждаются результаты вычисления двухпетлевых вкладов в аномальную размерность духов Фаддеева–Попова от двухточечных супердиаграмм, образующихся в результате разрезания внутренних линий духов Фаддеева–Попова в трехпетлевых вакуумных суперграфах, рассмотренных в параграфе 2.3. В параграфе **3.2** показывается, что вычисленные в параграфе 2.3 трехпетлевые вклады в  $\beta$ -функцию связаны с найденными в параграфе 3.1 двухпетлевыми вкладками в аномальную размерность духов Фаддеева–Попова так, как предписывает новая форма NSVZ соотношения. Затем рассматривается применение полученных результатов в контексте полной трехпетлевой проверки духовой части новой формы NSVZ соотношения. В параграфе **3.3** обсуждается вычисление в общей  $\xi$ -калибровке двухпетлевой аномальной размерности духов Фаддеева–Попова как в случае ее определения через голые параметры, так и в случае ее определения в терминах перенормированных параметров.

В **главе 4** рассматривается применение метода модифицированных вакуумных суперграфов для вычисления вкладов в  $\beta$ -функцию в случае  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной квантовой электродинамики с  $N_f$  ароматами, регуляризованной высшими производными. В параграфе **4.1**  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричная квантовая электродинамика с  $N_f$  ароматами формулируется в безмассовом пределе в терминах  $\mathcal{N} = 1$  суперполей. Для регуляризации теории используется метод высших производных, дополненный введением детерминантов Паули–Вилларса в производящий функционал. В этом же разделе приводятся основные сведения о перенормировке данной теории. В параграфе **4.2** рассматривается абелева форма NSVZ соотношения, а также адаптация метода вычисления вкладов в  $\beta$ -функцию с помощью модифицированных вакуумных суперграфов для абелева случая. В параграфе **4.3** обсуждается применение данного метода для вычисления некоторого трехпетлевого вклада в  $\beta$ -функцию в общей  $\xi$ -калибровке, и попутно приводятся используемые выражения для пропагаторов и вершин. В

параграфе 4.4 приводится результат вычисления двухпетлевого вклада в аномальную размерность суперполей материи от двухточечной супердиаграммы, получающейся путем разрезания петли материи в трехпетлевом вакуумном суперграфе, рассмотренном в параграфе 4.3. Затем на уровне петлевых интегралов показывается, что вычисленные вклады в ренормгрупповые функции действительно связаны с помощью NSVZ соотношения. Суммирование полученных вкладов с другими необходимыми результатами, найденными соавторами, подтверждает справедливость NSVZ  $\beta$ -функции в трехпетлевом приближении. При этом итоговые явные выражения для ренормгрупповых функций являются калибровочно независимыми. В частности, полученное выражение для трехпетлевой  $\beta$ -функции совпадает с результатом, найденным ранее в другой работе стандартным способом в частном случае  $N_f = 1$  при выборе калибровки Фейнмана (см., например, работу [18] и ссылки в ней).

В **Заключении** подводятся итоги проведенного исследования и перечисляются основные полученные результаты.

В **Приложении А** обсуждаются некоторые детали вычислений квантовых поправок к тройной духово-калибровочной вершине  $\bar{c}^+ V c$ , идущие от ряда супердиаграмм из первой группы (определенной в параграфе 1.6), которые вычислял автор диссертации.

В **Приложении Б** приводятся выражения на уровне петлевых интегралов для функций, определяющих поляризационный оператор квантового калибровочного суперполя в однопетлевом приближении [19]. Кроме того, в нем записаны результаты вычисления некоторых интегралов, содержащих эти функции, которые применяются, в частности, при вычислении двухпетлевой аномальной размерности духов Фаддеева–Попова в параграфе 3.3.

В **Приложении В** собраны выражения для вкладов в  $\beta$ -функцию и двухточечную функцию Грина духов Фаддеева–Попова (в пределе нулевого внешнего импульса), вычисленные соавторами совместных публикаций. Данные выражения используются в параграфах 3.2 и 3.3 в контексте обсуждения результатов

общих вычислений, посвященных полной трехпетлевой проверке духовой части новой формы NSVZ  $\beta$ -функции, а также получению двухпетлевой аномальной размерности духов Фаддеева–Попова.

**Приложение Г** содержит выражения для некоторых вкладов в  $\beta$ -функцию и двухточечную функцию Грина суперполей материи (в пределе нулевого внешнего импульса)  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной квантовой электродинамики с  $N_f$  ароматами. Они были вычислены при произвольном значении калибровочного параметра на уровне петлевых интегралов соавторами совместной публикации, посвященной трехпетлевой проверке NSVZ  $\beta$ -функции в абелевом случае, которая обсуждается в параграфе 4.4.

## Заключение

Исследования, проведенные в данной диссертации, посвящены изучению и явной проверке в рамках теории возмущений ряда соотношений, выражающих нетривиальную взаимосвязь между расходимостями в  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных калибровочных теориях: теоремы о неперенормировке тройных духово-калибровочных вершин и NSVZ  $\beta$ -функции. На протяжении всей диссертации применяется формализм  $\mathcal{N} = 1$  суперполей как для формулировки рассматриваемых теорий, так и для выполнения петлевых вычислений, которые проводятся с использованием регуляризации высшими (ковариантными) производными в случае произвольного значения калибровочного параметра. Подведем итоги проделанной работы и перечислим основные полученные результаты.

1. Непосредственным вычислением показано, что в наиболее общих перенормируемых  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных теориях Янга–Миллса с простой калибровочной группой теорема о неперенормировке тройных духово-калибровочных вершин справедлива в двухпетлевом приближении в общей  $\xi$ -калибровке. Для этого был вычислен большой набор супердиаграмм с двумя внешними линиями духов Фаддеева–Попова и одной внеш-

ней линией квантового калибровочного суперполя. Выполнено суммирование всех необходимых вкладов в одну из тройных духово-калибровочных вершин в рассматриваемом приближении и явным образом продемонстрирована ультрафиолетовая конечность итогового результата.

2. С помощью недавно предложенного [15] метода модифицированных вакуумных суперграфов вычислен ряд трехпетлевых вкладов духов Фаддеева–Попова в  $\beta$ -функцию, определенную в терминах голых параметров.
3. Вычислены двухпетлевые вклады в аномальную размерность духов Фаддеева–Попова, заданную через голые параметры, от двухточечных суперграфов, графически получающихся с помощью разрезания внутренних духовых линий в трехпетлевых вакуумных супердиаграммах, рассмотренных в предыдущем пункте.
4. Показано, что полученные вклады в трехпетлевую  $\beta$ -функцию и двухпетлевую аномальную размерность духов Фаддеева–Попова связаны так, как предписывает NSVZ  $\beta$ -функция, записанная в терминах аномальных размерностей всех квантовых суперполей.
5. В  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной квантовой электродинамике с  $N_f$  ароматами с помощью метода модифицированных вакуумных суперграфов вычислен определенный трехпетлевой вклад в  $\beta$ -функцию, а также найден двухпетлевой вклад в аномальную размерность суперполей материи от двухточечной супердиаграммы, образующейся в результате разрезания петли суперполей материи в рассмотренном вакуумном суперграфе.
6. Показано, что вычисленные в предыдущем пункте вклады в трехпетлевую  $\beta$ -функцию и двухпетлевую аномальную размерность суперполей материи связаны абелевым NSVZ соотношением.

Необходимо отметить, что вычисления вкладов в ренормгрупповые функ-

ции были выполнены в тех порядках теории возмущений, в которых существенна зависимость от схемы перенормировки. По итогам проведенных вычислений новый метод получения вкладов в  $\beta$ -функцию, требующий рассмотрения модифицированных вакуумных суперграфов, подтвердил свою корректность и эффективность.

Кроме того, в диссертации рассматриваются примеры применения полученных результатов в контексте общих вычислений, для которых требуется также принять во внимание и другие необходимые результаты, полученные соавторами совместных публикаций, а именно: вычисление двухпетлевой аномальной размерности духов Фаддеева–Попова; полная трехпетлевая проверка духовой части новой формы NSVZ  $\beta$ -функции; проверка метода модифицированных вакуумных суперграфов на примере вычисления в общей  $\xi$ -калибровке трехпетлевой  $\beta$ -функции в  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной квантовой электродинамике, а также вычисление двухпетлевой аномальной размерности суперполей материи в общей  $\xi$ -калибровке и проверка абелевой формы NSVZ соотношения в рассматриваемом приближении.

## **Публикации автора по теме диссертации**

**в рецензируемых научных журналах, индексируемых в базах Web of Science и Scopus**

1. Kazantsev A. E., Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shirokov I. E., Skoptsov M. B. and Stepanyantz K. V. Two-loop renormalization of the Faddeev–Popov ghosts in  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetric gauge theories regularized by higher derivatives // JHEP. — 2018. — Vol. 06. — P. 020. (Импакт-фактор WoS: 5.810)
2. Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shirokov I. E. and Stepanyantz K. V. Three-loop contribution of the Faddeev–Popov ghosts to the  $\beta$ -function of  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetric gauge theories and the NSVZ relation

// Eur. Phys. J. C. — 2019. — Vol. 79, no. 9. — P. 809. (Импакт-фактор WoS: 4.590)

3. Aleshin S. S., Durandina I. S., Kolupaev D. S., Korneev D. S., Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Petrov I. A., Shatalova V. V., Shirokov I. E., Shirokova V. Y., and Stepanyantz K. V. Three-loop verification of a new algorithm for the calculation of a  $\beta$ -function in supersymmetric theories regularized by higher derivatives for the case of  $\mathcal{N} = 1$  SQED // Nucl. Phys. B. — 2020. — Vol. 956. — P. 115020. (Импакт-фактор WoS: 2.759)
4. Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shirokov I. E., Stepanyantz K. V. Finiteness of the two-loop matter contribution to the triple gauge-ghost vertices in  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetric gauge theories regularized by higher derivatives // Phys. Rev. D. — 2021. — Vol. 104, no. 2. — P. 025008. (Импакт-фактор WoS: 5.296)
5. Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shatalova V. V., Shirokov I. E., Stepanyantz K. V. Finiteness of the triple gauge-ghost vertices in  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetric gauge theories: the two-loop verification // Eur. Phys. J. C. — 2022. — Vol. 82, no. 1. — P. 69. (Импакт-фактор WoS: 4.590)

## **Публикации автора по теме диссертации**

### **в материалах конференций**

1. Казанцев А. Е., Кузьмичев М. Д., Мещеряков Н. П., Новгородцев С. В., Скопцов М. Б., Широков И. Е. Двухпетлевая перенормировка духов Фаддеева-Попова в  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных калибровочных теориях, регуляризованных высшими ковариантными производными // В электронном сборнике материалов XXV Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2018», секция Физика, подсекция Теоретическая физика. /

- Отв.ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. — Электрон. текстовые дан. (1500 Мб.) — М.: МАКС Пресс. — 2018. — Режим доступа: [https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2018/index.htm](https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2018/index.htm), свободный.
2. Kazantsev A. E., Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shirokov I. E., Skoptsov M. B. and Stepanyantz K. V. Two-loop anomalous dimension of the Faddeev-Popov ghosts in  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetric theories // Particle Physics at the Year of 150th Anniversary of the Mendeleev's Periodic Table of Chemical Elements / Ed. by Studenikin A. I. — Proceedings of the 19th Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics: Moscow, Russia, August 22–28, 2019. — Singapore: World Scientific Pub., 2021. — P. 544–546.
  3. Кузьмичев М. Д., Мещеряков Н. П., Новгородцев С. В., Широков И. Е. Использование нового метода для вычисления вкладов духов Фаддеева–Попова в  $\beta$ -функцию  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных теорий Янга-Миллса в трехпетлевом приближении // В электронном сборнике материалов XXVII Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2020», секция Физика, подсекция Теоретическая физика. / Отв.ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. — Электрон. текстовые дан. (1500 Мб.) — М.: МАКС Пресс. — 2020. — Режим доступа: [https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2020/index.htm](https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2020/index.htm), свободный.
  4. Дурандина И. С., Кузьмичев М. Д., Мещеряков Н. П., Новгородцев С. В., Петров И. А., Шаталова В. В., Широков И. Е. Трехпетлевая бета-функция для  $\mathcal{N} = 1$  SQED в неминимальной калибровке // В электронном сборнике материалов XXVII Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2020», секция Физика, подсекция Теоретическая физика. / Отв.ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. — Электрон. текстовые дан. (1500 Мб.) — М.: МАКС Пресс. — 2020. — Режим доступа: [https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2020/index.htm](https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2020/index.htm), свободный.

## Список цитируемой литературы

1. Stepanyantz K. V. Non-renormalization of the  $V\bar{c}c$ -vertices in  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetric theories // Nucl. Phys. B. — 2016. — Vol. 909. — P. 316–335.
2. Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I. Exact Gell-Mann-Low Function of Supersymmetric Yang-Mills Theories from Instanton Calculus // Nucl. Phys. B. — 1983. — Vol. 229. — P. 381–393.
3. Jones D. R. T. More on the Axial Anomaly in Supersymmetric Yang-Mills Theory // Phys. Lett. B. — 1983. — Vol. 123. — P. 45–46.
4. Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I. The beta function in supersymmetric gauge theories. Instantons versus traditional approach // Phys. Lett. B. — 1986. — Vol. 166. — P. 329–333. [Ядерная Физика. — 1986. — Т. 43. — С. 459].
5. Shifman M. A., Vainshtein A. I. Solution of the Anomaly Puzzle in SUSY Gauge Theories and the Wilson Operator Expansion // Nucl. Phys. B. — 1986. — Vol. 277. — P. 456–486. [Solution of the problem of anomalies in supersymmetric gauge theories, and the operator expansion // ЖЭТФ. — 1986. — Т. 91. — С. 723–744; J. Exp. Theor. Phys. — 1986. — Vol. 64, no. 3. — P. 428].
6. Delbourgo R., Prasad V. B. Supersymmetry in the Four-Dimensional Limit // J. Phys. G. — 1975. — Vol. 1. — P. 377.
7. Avdeev L. V., Chochia G. A., Vladimirov A. A. On the Scope of Supersymmetric Dimensional Regularization // Phys. Lett. B. — 1981. — Vol. 105. — P. 272–274.
8. Avdeev L. V. Noninvariance of Regularization by Dimensional Reduction: An Explicit Example of Supersymmetry Breaking // Phys. Lett. B. — 1982. — Vol. 117. — P. 317–320.
9. Avdeev L. V., Vladimirov A. A. Dimensional Regularization and Supersymmetry // Nucl. Phys. B. — 1983. — Vol. 219. — P. 262–276.
10. Slavnov A. A. Invariant regularization of nonlinear chiral theories // Nucl. Phys. B. — 1971. — Vol. 31. — P. 301–315.

11. Славнов А. А. Инвариантная регуляризация калибровочных теорий // ТМФ. — 1972. — Т. 13. — С. 174–177.
12. Кривошеков В. К. Инвариантная регуляризация для суперсимметричных калибровочных теорий // ТМФ. — 1978. — Т. 36. — С. 291–302.
13. West P. C. Higher Derivative Regulation of Supersymmetric Theories // Nucl. Phys. B. — 1986. — Vol. 268. — P. 113–124.
14. Buchbinder I. L., Pletnev N. G., Stepanyantz K. V. Manifestly N=2 supersymmetric regularization for N=2 supersymmetric field theories // Phys. Lett. B. — 2015. — Vol. 751. — P. 434–441.
15. Stepanyantz K. V. The  $\beta$ -function of  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetric gauge theories regularized by higher covariant derivatives as an integral of double total derivatives // JHEP. — 2019. — Vol. 10. — P. 011.
16. Stepanyantz K. V. The NSVZ  $\beta$ -function for theories regularized by higher covariant derivatives: the all-loop sum of matter and ghost singularities // JHEP. — 2020. — Vol. 01. — P. 192.
17. Stepanyantz K. The all-loop perturbative derivation of the NSVZ  $\beta$ -function and the NSVZ scheme in the non-Abelian case by summing singular contributions // Eur. Phys. J. C. — 2020. — Vol. 80, no. 10. — P. 911.
18. Stepanyantz K. V. Derivation of the exact NSVZ beta-function in N=1 SQED regularized by higher derivatives by summation of Feynman diagrams // J. Phys. Conf. Ser. — 2012. — Vol. 343. — P. 012115.
19. Kazantsev A. E., Skoptsov M. B., Stepanyantz K. V. One-loop polarization operator of the quantum gauge superfield for  $\mathcal{N} = 1$  SYM regularized by higher derivatives // Mod. Phys. Lett. A. — 2017. — Vol. 32, no. 36. — P. 1750194.